МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

**В.А. Гришагин**

**РЕДУКЦИЯ РАЗМЕРНОСТИ**

**В ЗАДАЧАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ

для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и

02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород

2016

УДК 519.853.4

ББК В183.42

Г 72

Г 72 Гришагин, В.А. Редукция размерности в задачах глобальной оптимизации: учебно-методическое пособие / В.А.Гришагин. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2016. – 17 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент А.Г.Коротченко

Пособие предназначено для студентов ИИТММ направлений подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», изучающих курсы «Методы оптимизации» и «Системы принятия решений».

В данном пособии основное внимание уделяется теоретическим принципам применения и алгоритмическим аспектам реализации рекурсивных схем редукции размерности в многоэкстремальных многомерных задачах глобальной оптимизации. Для практического закрепления материала предлагаются задания для самостоятельной работы.

УДК 519.853.4

ББК В183.42

Г 72

**© Нижегородский государственный**

**университет им. Н.И. Лобачевского, 2016**

**©Гришагин В.А.**

Оглавление

[Введение 4](#_Toc447579222)

[1. Постановка задачи 5](#_Toc447579223)

[2. Многошаговая схема редукции размерности 6](#_Toc447579224)

[3. Свойства одномерных подзадач многошаговой схемы 13](#_Toc447579225)

[3.1. Структура допустимых областей одномерного поиска 13](#_Toc447579226)

[3.2. Свойства целевых функций в одномерных подзадачах 14](#_Toc447579227)

[Заключение 16](#_Toc447579228)

[Список литературы 17](#_Toc447579229)

# Введение

Модели принятия оптимальных решений, в которых критерии оптимальности и ограничения на выбор параметров модели являются многоэкстремальными (описываются функциями, имеющими несколько локальных экстремумов) порождают задачи оптимизации, которые можно отнести к числу задач вычислительной математики с очень высокой степенью трудоемкости их анализа. Одним из основных факторов, критически влияющих на сложность задач данного класса, является размерность задачи (количество варьируемых параметров), поскольку трудоемкость решения растет экспоненциально с ростом размерности. Этот феномен получил название «проклятия размерности» для многоэкстремальных задач оптимизации, и это свойство является фундаментальным свойством рассматриваемого класса задач.

Другим аспектом, связанным со сложностью данных задач, является сложность конструирования эффективных алгоритмов для непосредственной многомерной оптимизации, поэтому широкое распространение получили различные схемы редукции сложности, когда решение исходной оптимизационной проблемы заменяется решением одной или нескольких более простых экстремальных задач, по решению которых можно восстановить решение изначальной задачи. Такой подход, к примеру, применяется в задачах нелинейного программирования, когда задача с ограничениями заменяется с помощью метода штрафных функций эквивалентной задачей без ограничений.

Аналогичный подход может быть применен и к фактору размерности на основании схем редукции размерности, когда решение многомерной задачи заменяется решением одной или семейства одномерных подзадач, для решения которых применяются эффективные методы одномерной оптимизации.

Одной из таких схем является редуцирование многомерной задачи к одномерной эквивалентной задаче посредством применения разверток (кривых, заполняющих пространство), отображающих многомерную область на отрезок вещественной оси. Данный подход детально описан в монографиях [1-4].

Целью настоящего пособия является рассмотрение другого подхода к редуцированию размерности, основанного на многошаговой схеме оптимизации [1-5], согласно которой решение исходной задачи сводится к решению рекурсивно связанных одномерных подзадач.

# Постановка задачи

Рассмотрим *конечномерную задачу оптимизации (задачу нелинейного программирования)*

  (1)

  (2)

 , (3)

т.е. задачу отыскания экстремальных значений целевой (минимизируемой) функции  в области , задаваемой *координатными* (3) и *функциональными* (2) *ограничениями* на выбор допустимых точек (векторов) . В данной модели величины , , задающие границы изменения варьируемых параметров задачи (координат вектора ), либо константы, либо, когда соответствующая нижняя и (или) верхняя границы отсутствуют, принимаются равными  и (или) .

Довольно часто в формулировку задачи нелинейного программирования включают также ограничения в виде равенств. Однако любое равенство , во-первых, формально можно представить в виде системы двух неравенств  и . Во-вторых, при численном решении задачи оптимизации на ЭВМ точная реализуемость равенства невозможна, поэтому предполагают, что допустима его выполнимость с некоторой погрешностью , т.е. вместо равенства  рассматривается неравенство . Таким образом, учитывая указанные обстоятельства, можно утверждать, что (1)-(3) является формулировкой *общей многомерной задачи нелинейного программирования*.

Если , т.е. функциональные ограничения отсутствуют, будем полагать . Задача (1)-(3) в этом случае будет называться задачей безусловной оптимизации.

Предметом рассмотрения настоящего пособия являются многоэкстремальные задачи оптимизации, т.е. задачи, в которых целевая функция  имеет в допустимой области  несколько локальных экстремумов. На сложность решения таких задач существенное влияние оказывает размерность. Например, для класса многоэкстремальных функций, удовлетворяющих условию Липшица, имеет место, как уже упоминалось, "проклятие размерности", состоящее в экспоненциальном росте вычислительных затрат при увеличении размерности. А именно: если в одномерной задаче для достижения точности решения  требуется  вычислений функции, то в задаче с размерностью  для решения с той же точностью необходимо осуществить  испытаний, где  зависит от целевой функции, допустимой области и используемого метода.

Для специальных узких классов многоэкстремальных задач порядок роста затрат может быть и лучше экспоненциального. Например, как мы увидим далее, для сепарабельных функций, минимизируемых в гиперинтервале , затраты растут линейно. Этот факт иллюстрирует то обстоятельство, что улучшить эффективность решения можно только на основе глубокого учета априорной информации о задаче.

Формой такого учета может быть построение эффективных методов оптимизации как оптимальных решающих правил на основе минимаксного или байесовского подходов к понятию оптимальности метода поиска экстремума в рамках соответствующих математических моделей. К сожалению, для многомерных многоэкстремальных задач проблема построения оптимальных алгоритмов является очень сложной, и построить оптимальные (в том или ином смысле алгоритмы) удается в исключительных случаях.

В связи с этим в глобальной оптимизации широкое распространение получили подходы, основанные на идеях *редукции сложности*, т.е. построения таких схем, когда решение многоэкстремальной задачи сводится к решению одной или нескольких более простых подзадач, по итогам решения которых можно восстановить решение исходной задачи.

В настоящем пособии рассматривается один из таких подходов, основанный на многошаговой схеме редукции размерности, позволяющей заменить решение многомерной задачи решением семейства рекурсивно связанных одномерных подзадач, для решения которых применяются эффективные методы одномерной глобальной оптимизации.

# Многошаговая схема редукции размерности

Рассмотрим в качестве исходной задачу (1)-(3) и предположим, что что все функции-ограничения , , являются непрерывными, а область  - ограниченной, что обеспечивает компактность области .

Введем непрерывную функцию, определенную в области , такую, что

  (4)

В качестве  можно взять, например,

  (5)

или

  (6)

Последняя функция тождественно равна нулю в области .

Введем обозначения

  (7)

позволяющие при  записать вектор  в виде пары , и примем, что  при  и  при .

Введем сечения множества :

 ,  , (8)

и проекции сечений на ось :

  (9)

Положим  и построим семейство функций

  , (10)

определенных в соответствующих проекциях

  (11)

множества  из (3) на координатные оси , причем по определению .

В силу непрерывности функции  и компактности области  функция  существует и непрерывна в , что влечет существование и непрерывность функции  и т.д. В итоге все функции семейства (10) существуют и непрерывны.

Лемма 1. Справедливо соотношение

 (12)

Доказательство. Вследствие (10) доказательство (12) состоит в установлении справедливости равенства

 . (13)

В силу непрерывности  для любого  существует  такой, что , , и

 ,

откуда следует, что левая часть равенства (13) больше или равна правой.

Покажем обратное неравенство. В силу непрерывности  и компактности  существует вектор  такой, что

 .

Согласно (10) имеем:

 ,

 

 ,

 . . .

 .

Лемма доказана.

Введем проекции

 , , (14)

множества  на координатные оси .

**Лемма 2.** Представление (14) эквивалентно соотношению

  (15)

Доказательство. Пусть выполнено (14), т.е. для некоторого  существует  такой, что . Но тогда , т.е. вследствие Леммы 1

 ,

и (15) справедливо.

Пусть теперь, наоборот, для некоторого  выполняется . Но согласно Лемме 1 существует вектор  такой, что , т.е. .

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Определение проекции (9) эквивалентно представлению

  (16)

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку , то необходимо , .

Пусть теперь  таков, что . Тогда существует  такой, что , т.е. , следовательно,  принадлежит проекции  в смысле определения (9).

Предположим далее, что для некоторого  существует  такой, что . Тогда вектор , т.е. .

Лемма доказана.

***Задания для самостоятельной работы***

1. Докажите, что сечение  не пусто тогда и только тогда, когда .
2. Докажите, что неравенство  является необходимым и достаточным условием непустоты проекции .

Предположим теперь непрерывность функции  и, положив по определению , построим семейство функций

 , , (17)

определенных на соответствующих проекциях . Тогда имеет место соотношение [1,2,5 ]:

  (18)

Как следует из (18), для решения задачи (1) – (3) достаточно решить одномерную задачу

 ,  (19)

  (20)

При этом каждое вычисление функции  в некоторой фиксированной точке  представляет собой согласно (17) решение одномерной задачи

 ,  (21)

  (22)

Эта задача является одномерной задачей минимизации по , т.к.  фиксировано.

В свою очередь, каждое вычисление значения функции  при фиксированных ,  требует решения одномерной задачи

 ,  (23)

и т.д. вплоть до решения задачи

 ,  (24)

при фиксированном .

Окончательно решение задачи (1) – (3) сводится к решению семейства "вложенных" одномерных подзадач

 , , (25)

где фиксированный вектор .

Решение исходной многомерной задачи (1) – (3) через решение системы взаимосвязанных одномерных подзадач (25) называется многошаговой схемой редукции размерности.

**Пример аналитического решения задачи с помощью многошаговой схемы редукции.**

Рассмотрим задачу минимизации функции

  (26)

в области

 ,

с единственным функциональным ограничением .

Допустимая область  представляет собой треугольник

Рис. 1. Допустимая область задачи (треугольник)

Тогда легко построить семейство функций  из (10):



и на их основе проекции (16)



Перейдем к семейству функций (17). По определению ,



Функция  достигает минимума по  в единице, а слева от единицы убывает, поэтому на отрезке  ее минимум достигается в точке , а значение равно , т.е. .

В свою очередь минимум  на отрезке  достигается в точке .

Подставим эту точку в функцию , т.е. вычислим . Т.к. , а на этом отрезке  убывает, то .

Окончательно функция (26) достигает своего минимума  в точке .

В рассмотренном примере мы построили границы областей одномерного поиска аналитически, установив области неположительности соответствующих функций . Вместе с тем можно указать более наглядный "геометрический" способ построения проекций . Собственно, этот способ вытекает из определений (8) и (9) и состоит в том, что необходимо построить сечения области  плоскостями  и затем установить границы этих сечений по координате .

В связи с этим обратим внимание на следующее. Вычисление глобального минимума в соответствии с соотношением (18) аналогично процедуре нахождения многомерного интеграла от функции  в области  посредством сведения к вычислению повторных одномерных интегралов. При этом области одномерного интегрирования как раз и являются соответствующими проекциями .

***Задания для самостоятельной работы***

1. Постройте аналитически и геометрически сечения множества, задаваемого неравенствами







2. Постройте проекции  и  для области , где

   ,

 .

3. Постройте редуцированную функцию  в задаче







4. Решите аналитически по многошаговой схеме редукции размерности задачу







5. Решите аналитически по многошаговой схеме задачу минимизации функции  в области

 

6. Решите аналитически по многошаговой схеме задачу

,





Предложенные примеры являются достаточно простыми в том смысле, что в них удается в явном виде выписать границы областей одномерного поиска – проекций  - и аналитически решить одномерные задачи (17). Реальные практические задачи, разумеется, гораздо сложнее и не поддаются аналитическому решению. В чем же состоит эта сложность?

Обратим внимание, что при анализе одномерных подзадач многошаговой схемы возникают две проблемы:

а) необходимо сконструировать допустимые области одномерного поиска ;

б) требуется обеспечить минимизацию одномерных функций  в областях .

Структура и сложность проекций  полностью определяются сложностью многомерной допустимой области . Сложность второй проблемы зависит от характеристик функций , на которые влияют как свойства целевой функции , так и особенности области поиска , определяемые ограничениями (2), (3).

# Свойства одномерных подзадач многошаговой схемы

## 3.1. Структура допустимых областей одномерного поиска

Для анализа структуры областей  используем результаты Леммы 3, которая установила эквивалентность определения (9) и представления (16). Дело в том, что (16) дает конструктивный аппарат построения области , связывая ее с областью неположительности функции .

Т.к. функция  предполагается непрерывной в области , то функции также являются непрерывными по  из (11), а тем самым и по  Тогда при фиксированном  каждая из одномерных задач (5.26) является задачей вида

 , (27)

 ,

причем функция  непрерывна.

Непрерывность ограничения  позволяет утверждать, что допустимая область  может быть записана в виде системы отрезков

 , (28)

на каждом из которых функция неположительна. Для примера рассмотрим рис. 2, который отражает возможные случаи поведения непрерывной функции, порождающие области неположительности в виде отрезков (помечены серым цветом), включая касание оси  в точке. Самый правый отрезок, отмеченный пунктиром, соответствует ситуации, когда функция на данном отрезке равна нулю во всех его точках.



Рис. 2. Различные способы порождения областей неположительности
 непрерывной функции

В системе (28) число  отрезков может быть бесконечным. В качестве примера подобной ситуации приведем функцию

 

рассматриваемую на отрезке .

Таким образом, в случае непрерывной функции  проекция из (25) есть множество вида (28), т.е.

 , (29)

где количество отрезков  и их границы , , зависят от вектора , т.е.

 , , . (30)

Если область  такова, что для всех  удается указать явные (аналитические) выражения для величин ,  как функций , тогда область  называется областью с вычислимой границей. Образец такой области приведен в примере (26). Для построения данных областей необходимо уметь аналитически находить все корни функций  по соответствующим координатам .

Практически важным частным случаем задачи (1) – (3) является случай , когда функциональные ограничения (2) отсутствуют. В данной ситуации  в области , а из (10) следует, что функции , . Тогда согласно (16)

 , (31)

где  - константы.

Другим важным частным случаем является случай выпуклых ограничений. В этом случае области (29) также состоят из одного отрезка, однако границы  зависят от вектора :

 .

## 3.2. Свойства целевых функций в одномерных подзадачах

Целевой функцией в подзадаче (25) является функция  при фиксированном , и для решения подзадач (25) определяющим является характер зависимости функции  от переменной .

Рассмотрим класс задач, в которых функция  является сепарабельной, т.е.

 , (32)

а функциональные ограничения  отсутствуют, т.е. .

Тогда, как следует из (18), (32),

 ,

т.е. для решения многомерной задачи требуется решение  независимых одномерных подзадач. Для этого класса задач порядок роста сложности с ростом размерности линейный.

Предположим теперь, что функция  удовлетворяет в области  условию Липшица с константой , т.е. для любых 

 . (33)

Естественным в этом случае является вопрос: а будут ли удовлетворять условию Липшица функции . Оказывается, ответ не всегда положительный.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в задаче (1) – (3) целевая функция удовлетворяет условию Липшица (33), а область  имеет вид

 

Тогда функция , естественно, является липшицевой с константой  по координате . Однако функция  условию (33) уже не подчиняется. В [1] показано, что эта функция удовлетворяет обобщенному условию Липшица (условию Гельдера) в метрике  с константой , т.е. условию

 

Вместе с тем сохранение липшицевости все-таки реализуется для функций (25), если область  задается *линейными* ограничениями (2) (см. [1]) . В этом случае функции  будут удовлетворять условию Липшица, но константа Липшица для них будет больше, чем константа  из (33).

Наконец, все целевые функции одномерных подзадач будут удовлетворять условию Липшица с константой  из (33), если функциональные ограничения отсутствуют вовсе, т.е. .

Заключение

В пособии рассмотрены способы решения задач многомерной многоэкстремальной оптимизации, основанные на редуцировании многомерной задачи к множеству одномерных подзадач специального вида, решение которых позволяет получить решение исходной многомерной задачи. Поскольку методы глобального поиска для одномерных задач хорошо разработаны в отличие от методов непосредственного многомерного поиска, данный подход позволяет конструировать разнообразные эффективные методы поиска глобального оптимума в многомерных задачах оптимизации. В частности, предложен широкий класс многомерных алгоритмов, сочетающих многошаговую схему редукции с характеристическими методами одномерного глобального поиска [2, 4, 6, 7].

В данной методической разработке дается теоретическое обоснование исследуемой схемы редукции и приводятся примеры, иллюстрирующие ее применение. Для самостоятельного закрепления материала пособие содержит ряд практических заданий.

# Список литературы

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978.

2. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.

3. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

4. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации: Монография/ Предисл.: В.А.Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2013.

5. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. – М.: Мир, 1964.

6. Grishagin V.A., Sergeyev Ya.D., Strongin R.G. Parallel characteristical global optimization algorithms // Journal of Global Optimization. 1997. V.10, №2. P.185–206.

7. Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 888−896.