

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В.Г. Киселев, О.А. Сергеев, С.А. Сергеева

Учебные задачи оптимизации конструкций

Практикум

Рекомендовано учебно-методической комиссией института
информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ,
обучающихся по направлениям подготовки 01.04.03 «Механика и
математическое моделирование»

Нижний Новгород

2021

УДК 539.3:519.85

ББК В213-8

К-44

К-44 Киселев В.Г., Сергеев О.А., Сергеева С.А. **Учебные задачи оптимизации конструкций**: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 52 с.

Рецензент: д.т.н., профессор **А.А. Миронов**

Практикум предназначен для проведения учебной практики студентов магистратуры ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Практикум может быть использован для самостоятельного изучения и домашней работы. На протяжении всего практикума рассматривается семь изолированных задач среднего уровня сложности для решения за два академических часа каждая. К задачам дается описание механической модели, методики численного решения и исследовательские задания. Предполагается, что базовые знания по механике и навыки работы с аппаратурой компьютера, программными средствами Excel и Matlab у студентов имеются.

Работа выполнена на кафедре теоретической, компьютерной и экспериментальной механики института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, зав. кафедрой, проф. Л.А. Игумнов.

Рекомендовано учебно-методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

УДК 539.3:519.85

ББК В213-8

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2021

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Манифест | 4 |
| Введение | 6 |
| 1. Трипод | 8 |
| 2. Сосуд давления | 17 |
| 3. Пружина растяжения-сжатия..... | 24 |
| 4. Ступенчатая консоль | 29 |
| 5. Двутапное сечение консоли | 34 |
| 6. Гладкая цилиндрическая оболочка | 38 |
| 7. Брахистохрона | 46 |
| Список литературы | 49 |

Манифест

Приводятся подробные описания постановки и методики решения семи задач оптимизации механических конструкций. Задачи относятся к разряду средних. Выполняются на компьютере за два академических часа каждая.

В Таблица 0.1 приведен перечень рассмотренных задач. Предметная область задач описана тремя терминами: критерий (1 слово), управляемые переменные (2 слова), ограничения (три слова).

Таблица 0.1. Перечень задач

| № | Название | Изображение | Целевая функция | Управляемые параметры | Ограничения |
|----|---------------------------------|---|-----------------|-----------------------|-------------------------------|
| 1. | Трипод |  | Объем | Размеры | Напряжения, устойчивость |
| 2. | Сосуд давления |  | Стоимость | Размеры | Прочность |
| 3. | Пружина растяжения-сжатия |  | Объем | Размеры | Смещение, напряжения, частота |
| 4. | Ступенчатая консоль |  | Объем | Размеры сечений | Напряжения, перемещения |
| 5. | Двутапное сечение консоли |  | Объем | Размеры сечений | Напряжения, перемещения |
| 6. | Гладкая цилиндрическая оболочка |  | Стоимость | Толщина | Текущность, выпучивание |
| 7. | Брахистохрона |  | Время | Кривая | Конечная точка |

Описания постановок и решений в особенности касаются модели состояния – связи управляемых параметров с критерием и функциями ограничений. Для этого привлекаются механика материалов, метод конечных элементов и вводятся переменные состояния – перемещения, напряжения, критические силы и др. Пособие предназначено для организации учебной практики магистратуры механических специальностей. Предполагается, что студент изучает изложенный материал и выполняет креативное исследование в развитие задачи. В качестве инструментов используются алгебраические методы, программные средства Excel и Matlab.

Введение

Оптимизация является частью процесса проектирования. **Оптимизация** – это выбор наилучшего варианта из множества возможных.

Назначением теории оптимизации является разработка методов, которые позволяют найти наилучший вариант, не перебирая всех вариантов.

Начинается все с вербальной постановки задачи оптимизации. Для нее всегда необходимо выделить три составляющих:

1. Ограничения.
2. Управляемые переменные.
3. Критерий.

Выделение производится неформальным путем, исходя из реальной жизни или из требований более глобальной задачи.

Для критерия должно быть достигнуто наибольшее или наименьшее значение. Величины управляемых переменных должны быть доступны для выбора волевым порядком. Ограничения должны отвечать на вопрос «да\нет». Управляемые переменные могут быть числами или функциями. Если управляемые переменные являются числами, то задача оптимизации называется **параметрической**. Если управляемые переменные являются функциями, то задача оптимизации называется **вариационной**. В параметрической задаче ограничения и критерий выражаются функциями. В вариационной задаче ограничения и критерий выражаются функционалами.

После вербальной постановки происходит абстрагирование от предметной области и переход к математической постановке задачи, которая позволяет применить общие методы решения.

Постановка задачи включает в себя **фиксированные** переменные, значения которых известны, но могут меняться от задачи к задаче.

Следующая постановка задачи оптимизации называется **канонической**.

Найти управляемые переменные $\{x^*\}$ такие, что критерий принимает минимальное значение.

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$$

при выполнении всех ограничений

$$D = \{x | g(x) \leq 0\}.$$

Задача со знаком *max* для целевой функции преобразуется к канонической форме умножением критерия на (-1) . Задача со знаком ≥ 0 в ограничениях преобразуется к канонической форме умножением ограничения на (-1) . Ограничение со знаком $(= 0)$ заменяется двумя ограничениями со знаком (≤ 0) . В параметрической задаче x представляет собой вектор параметров (чисел), f – скалярную функцию, g – вектор функций. В вариационной задаче x представляет собой вектор функций $x(t)$ независимых аргументов t , f и g – функционалы.

Качественное решение задачи формируется на основе прошлого опыта или интуиции. Графический метод можно применить в параметрической задаче при числе управляемых параметров 1 или 2. Другие методы делятся на аналитические и численные.

Схема решения задачи оптимизации включает следующие стадии

- 1) Вербальная постановка задачи
- 2) Модель состояния
- 3) Математическая постановка
- 4) Решение
- 5) Исследование решения

В формулах круглые скобки $()$ означают аргументы, квадратные скобки $[]$ означают матрицу, фигурные скобки $\{ \}$ означают вектор-столбец или множество. Если смысл ясен по контексту, то скобки опускаются.

1. Трипод

Рассматривается ферма в виде треноги [1] [2].

1.1. Постановка задачи

Геометрия фермы показана на Рис.1.1. Ферма состоит из трех одинаковых стержней кольцевого сечения. Координаты точек A, B, C и D фермы оцениваются по геометрии рисунка. Три нижних узла закреплены на окружности радиуса R , верхний узел свободен и к нему приложена вниз вертикальная нагрузка P .

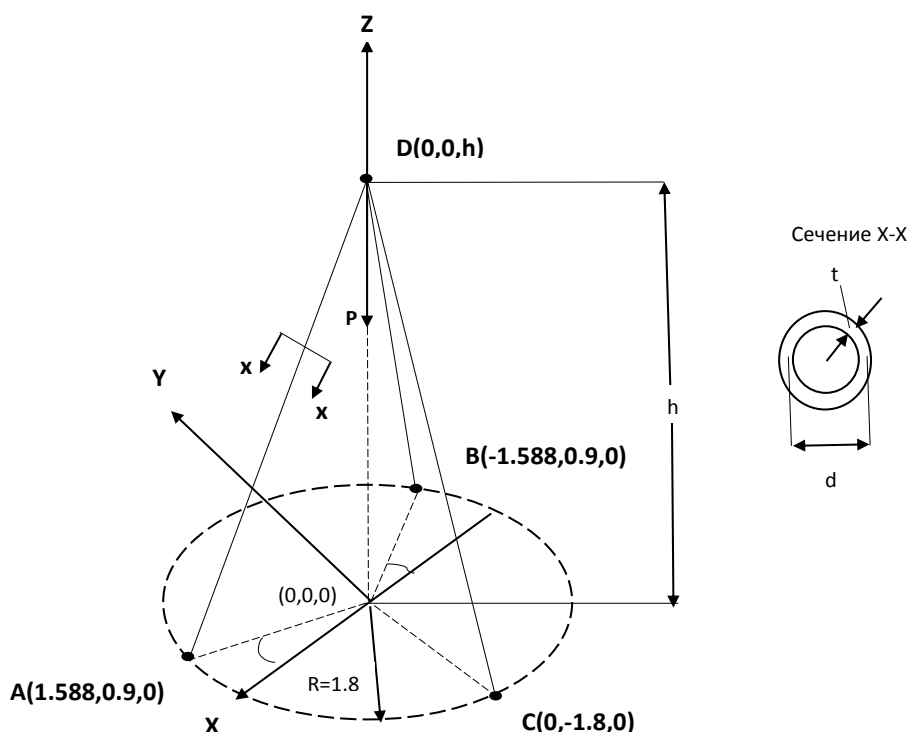


Рис.1.1. Трипод

Фиксированные параметры

R — радиус основания треноги (1.8м).

E — модуль продольной упругости материала (207ГПа),

ρ — плотность (7800кг/м³)

P — действующая сила (111кН)

σ_T — предел текучести материала (414МПа)

t — толщина стенки кольца (0.00508м).

Управляемые параметры

x_1 — высота треноги.

x_2 — средний диаметр кольца.

Требуется

Найти высоту треноги и диаметр кольцевого сечения, чтобы масса фермы была минимальной, и выполнялись ограничения по эйлеровой устойчивости, местной устойчивости, прочности.

1.2. Модель состояния

Уравнения равновесия

Осевые силы в каждом из элементов фермы AD , CD и BD вычисляются как следующие

$$N_A = N_B = N_C = \frac{1}{3} P / \sin \tan^{-1} \frac{h}{R} = \frac{1}{3} P \frac{\sqrt{x_1^2 + R^2}}{x_1}$$

Целевая функция массы

Целевая функция массы фермы как функция среднего диаметра и высоты фермы выражается как

$$f = 3\rho L \pi d t = 3\rho \pi t \sqrt{x_1^2 + R^2} x_2$$

Эйлерова устойчивость

Потеря эйлеровой устойчивости происходит до достижения предела текучести

$$\sigma_3 \leq \sigma_T,$$

где напряжение потери устойчивости по Эйлеру

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 EI}{A(x_1^2 + R^2)},$$

Момент инерции кольцевого сечения

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (2x_2^2 + 2t^2)(2x_2)2t = \frac{\pi}{8} (x_2^2 + t^2)x_2 t$$

Площадь

$$A = \pi x_2 t$$

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 E (x_2^2 + t^2)}{8(x_1^2 + R^2)}$$

Местная устойчивость

Потеря местной устойчивости происходит до достижения предела текучести

$$\sigma_m \leq \sigma_T,$$

Эмпирическая зависимость Шафера

$$\sigma_m = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{x_2}\right)^2$$

Для кольцевых колонн $k = 0.43$.

Прочность

Сжимающее напряжение не превосходит предела текучести материала

$$\sigma_c \leq \sigma_T,$$

где сжимающее напряжение

$$\sigma_c = \frac{N_A}{A} = \frac{1}{3} P \frac{\sqrt{x_1^2 + R^2}}{\pi x_2 t x_1}$$

1.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Найти размеры $x = \{x_1, x_2\}$, при которых масса трипода $f = 3\rho\pi t\sqrt{x_1^2 + R^2} x_2$ минимальна и критические напряжения потери устойчивости и напряжения от нагрузки не превосходят предела текучести, т.е. выполняются неравенства [2]

$$g_1(x) = \sigma_3 - \sigma_T \leq 0 \tag{1.1}$$

$$g_2(x) = \sigma_m - \sigma_T \leq 0$$

$$g_3(x) = \sigma_c - \sigma_T \leq 0 \tag{1.2}$$

1.4. Графическое решение исходной задачи

Лист графического решения в Excel представлен на Рис. 1.2.

| | A | B |
|----|--|--|
| 1 | R | E |
| 2 | 1,8 | 2070000000000 |
| 3 | x1 | x2 |
| 4 | 0,14 | 0,07 |
| 5 | g1 (sigЭ) | g2(sigM) |
| 6 | =sigE_-sigT_ | =sigM_-sigT_ |
| 7 | sigE | sigM |
| 8 | =ПИ()^2*E_*(x2_^2+t_^2)/(8*(x1_^2+R_^2)) | =0,43*ПИ()^2*E_/(12*(1-nu_^2))*(t_/x2_)^2 |
| 9 | x1 | x2П |
| 10 | 0,1 | =P_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A10*sigT_) |
| 40 | 3,1 | =P_*КОРЕНЬ(A40^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A40*sigT_) |

| | C | D |
|----|---|--|
| 1 | P | sigT |
| 2 | 111000 | 414000000 |
| 3 | f | f1 |
| 4 | =3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(x1_^2+R_^2)*x2_ | 30 |
| 5 | g3 (sigП) | |
| 6 | =sigP_-sigT_ | |
| 7 | sigP | |
| 8 | =P_*КОРЕНЬ(x1_^2+R_^2)/(3*x1_*ПИ()*x2_*t_) | |
| 9 | x2M | x2Э |
| 10 | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2)))/sigT_ | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A10^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2)) |
| 40 | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2)))/sigT_ | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A40^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2)) |

| | E | F |
|----|---|---|
| 1 | t | ro |
| 2 | 0,00508 | 7800 |
| 3 | f2 | f3 |
| 4 | 60 | 90 |
| 9 | f=30 | f=60 |
| 10 | =f1_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2))) | =f2_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2))) |
| 40 | =f1_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A40^2+R_^2))) | =f2_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A40^2+R_^2))) |

| | G | H |
|----|---|--|
| 1 | nu | |
| 2 | 0,3 | |
| 3 | dx2 | |
| 4 | 0,002 | |
| 9 | f=90 | x2П - |
| 10 | =f3_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2))) | =P_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A10*sigT_-dx2_ |
| 40 | =f3_/((3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A40^2+R_^2))) | =P_*КОРЕНЬ(A40^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A40*sigT_-dx2_ |

| | I | J |
|----|--|---|
| 9 | x2M- | x2Э+ |
| 10 | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2)))/sigT_-dx2_ | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A10^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2))+dx2_ |
| 40 | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2)))/sigT_-dx2_ | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A40^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2))+dx2_ |

Рис. 1.2. Графическое решение оптимизации трипода в Excel

В строках 9-40 содержится таблица заголовков и формул, которая на Рис. 1.2 полностью не показана и используется для построения 9 графиков. Имена ячеек выписаны в верхних ячейках без подчеркивов. Ячейки A3:C4 служат для контроля и не влияют на решение задачи.

- 1) С помощью левого поля в строке формул и/или команды Формулы\Определенные имена\Диспетчер имен дадим ячейкам имена в соответствии с Таблица 1.1.

Таблица 1.1. Имена ячеек

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|-----|-------|----|-----|-------|----|-------|-------|-----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| Адрес | A2 | A4 | A8 | B2 | B4 | B8 | C2 | C8 | D2 | D4 | E2 | E4 | F2 | F4 | G2 | G4 |
| Имя | R_ | x1_ | sigE_ | E_ | x2_ | sigM_ | P_ | sigP_ | sigT_ | f1_ | t_ | f2_ | ro_ | f3_ | nu_ | dx2_ |

- 2) Внесем текстовые комментарии и числа без формул, присутствующие на Рис. 1.2.
- 3) Внесем формулы в соответствии с Таблица 1.2. В формулах используются имена из Таблица 1.1.

Таблица 1.2. Формулы в ячейках

| Адрес | Имя | Формула |
|-------|-----|---|
| A6 | | =sigE_-sigT_ |
| A8 | | =ПИ()^2*E_*(x2_^2+t_^2)/(8*(x1_^2+R_^2)) |
| B6 | | =sigM_-sigT_ |
| B8 | | =0,43*ПИ()^2*E_/(12*(1-nu_^2))*(t_/x2_)^2 |
| B10 | | =P_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A10*sigT_) |
| C4 | | =3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(x1_^2+R_^2)*x2_ |
| C6 | | =sigP_-sigT_ |
| C8 | | =P_*КОРЕНЬ(x1_^2+R_^2)/(3*x1_*ПИ()*x2_*t_) |
| C10 | | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2)))/sigT_ |

| | | |
|-----|--|--|
| D10 | | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A10^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2) |
| E10 | | =f1_/(3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)) |
| F10 | | =f2_/(3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)) |
| G10 | | =f3_/(3*ro_*ПИ()*t_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)) |
| H10 | | =P_*КОРЕНЬ(A10^2+R_^2)/(3*ПИ()*t_*A10*sigT_-dx2_ |
| I10 | | =КОРЕНЬ(0,43*ПИ()^2*E_*t_^2/(12*(1-nu_^2))/sigT_-)dx2_ |
| J10 | | =КОРЕНЬ(sigT_*8*(A10^2+R_^2)/(ПИ()^2*E_-t_^2)+dx2_ |

- 4) Заполним столбец A10:A40 числами от 0.1 до 3.1 с шагом 0.1. В столбцах В:J, в строках 10:40 маркером автозаполнения поставим формулы из ячеек В10:J10.
- 5) Пометим блок А9:J40 и выполним команду Вставка\Диаграмма\Точечная\Точечная с гладкими кривым.

Графики показаны на Рис. 1.3. Синяя тонкая линия – ограничение по пределу текучести. Коричневая тонкая – по местной устойчивости. Серая тонкая – по эйлеровой устойчивости. Толстые линии показывают недопустимую область соответствующего ограничения. Пунктирные линии – уровни массы 30, 60, 90 кг. Звездочкой отмечено оптимальное решение.

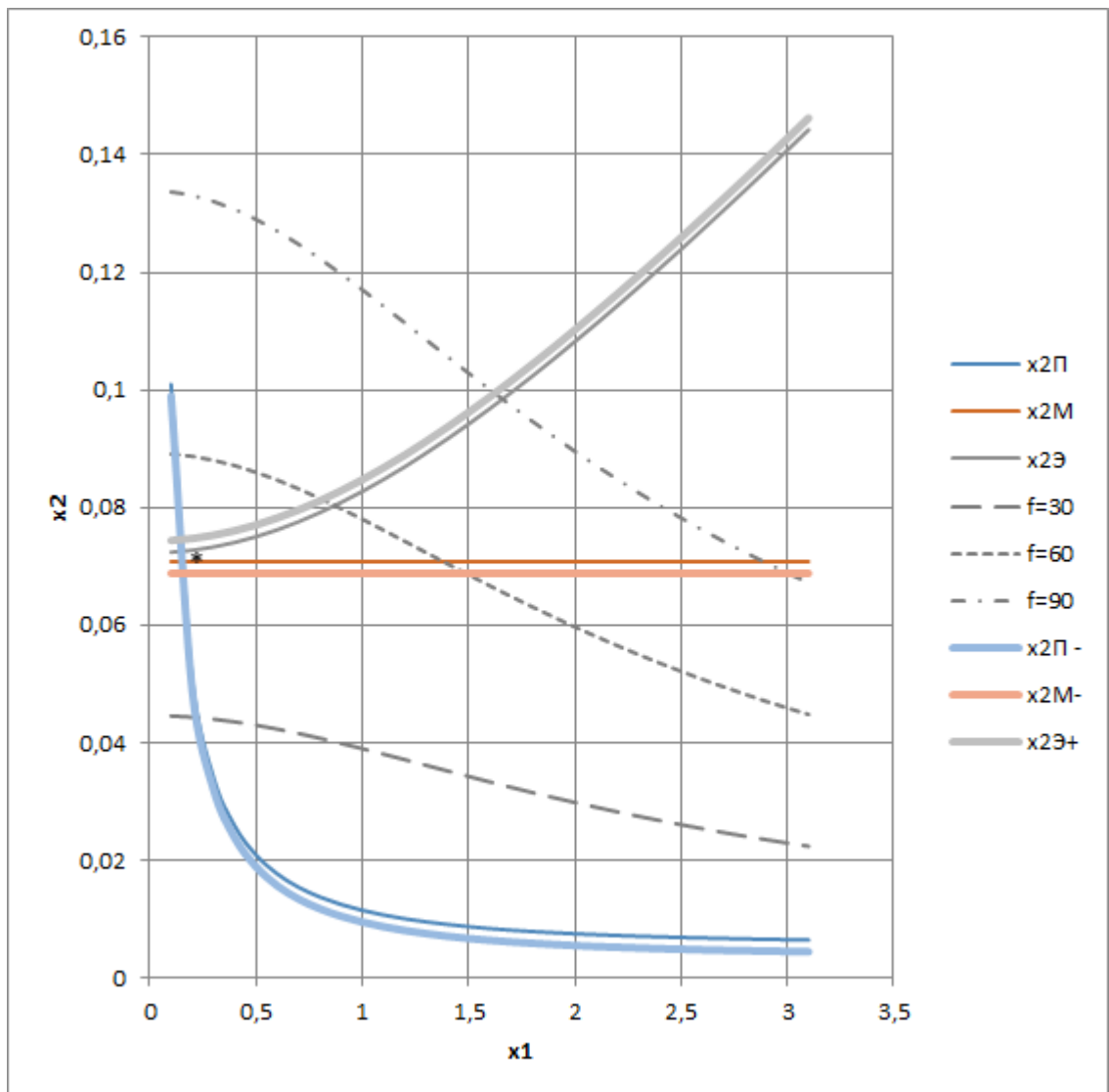


Рис. 1.3. Оптимизация трипода

Оптимальное решение: $f(x_1 = 0.143\text{м}, x_2 = 0.0708\text{м}) = 47.8\text{кг}$. Активны ограничения по текучести и местной устойчивости.

1.5.Коррекция постановки

Ограничения по эйлеровой и местной устойчивости лучше формулировать так: «Действующее напряжение не превосходит критических напряжений потери устойчивости».

Следующие ограничения соответствуют последней формулировке и возможно дают более корректную постановку задачи.

$$g_1(x) = \sigma_c - \sigma_3 \leq 0 \quad (1.3)$$

$$g_2(x) = \sigma_c - \sigma_m \leq 0 \quad (1.4)$$

$$g_3(x) = \sigma_c - \sigma_T \leq 0 \quad (1.5)$$

1.6. Графическое решение скорректированной задачи

Выразить здесь явно $x_2(x_1)$ для ограничения $g_1(x) = \sigma_c - \sigma_3 = 0$ (1.3) с целью графического решения в Excel довольно затруднительно. Построим линии уровня целевой функции и линии ограничений с помощью Matlab.

Листинг 1. Корректированная задача о триподе

```
% Корректированная задача о триподе
[x1,x2] = meshgrid (.01:.015:1.5, 0.02:.004:.08);
ro = 7.8e3; P = 111000; R = 1.8; t = 0.00508; E = 2e11; st = 414e6; nu = 0.3;
hrestrict = 0.051; %для указания недопустимой стороны
A = pi*x2*t;
sc = P*sqrt(x1.^2+R^2)./(3*A .*x1);
I = pi*(x2.^2+t^2).*x2*t/8;
se = pi^2*E*I./(A.*(x1.^2+R^2));
sm = 0.43*pi^2*E/(12*(1-nu^2))*(t./x2).^2;
% Нарушенные ограничения
g1 = sc./se-1-hrestrict;
g2 = sc./sm-1-hrestrict;
g3 = sc./st-1-hrestrict;
contour (x1,x2,g1,[0 0], 'Color',[1 0.9 0.9], 'LineWidth',3) % g1 = 0.1 contour
hold on
contour (x1,x2,g2,[0 0], 'Color',[0.9 0.9 1], 'LineWidth',3) % g2 = 0.1 contour
contour (x1,x2,g3,[0 0], 'Color',[1 0.9 1], 'LineWidth',3) % g3 = 0.1 contour
% Ненарушенные ограничения
g1 = sc./se-1;
g2 = sc./sm-1;
g3 = sc./st-1;
f = 3*ro*pi*t.*sqrt(x1.^2+R^2).*x2;
contour (x1,x2,g1,[0 0], 'Color',[1 0 0], 'LineWidth',1) % g1 = 0 эйлерова
contour (x1,x2,g2,[0 0], 'Color',[0 0 1], 'LineWidth',1) % g2 = 0 местная
contour (x1,x2,g3,[0 0], 'Color',[1 0 1], 'LineWidth',1) % g3 = 0 текучесть
contour (x1,x2,f,[30 33 35 40 50 0], 'g', 'Showtext', 'on');
xlabel('x1'); % метки осей
ylabel('x2');
```

На Рис. 1.4 показано графическое решение. Зеленые линии – уровни целевой функции. Красная – ограничение по эйлеровой устойчивости. Синяя – ограничение по местной устойчивости. Малиновая – ограничение по пределу текучести. Тень у линии ограничения показывает недопустимую область для него.

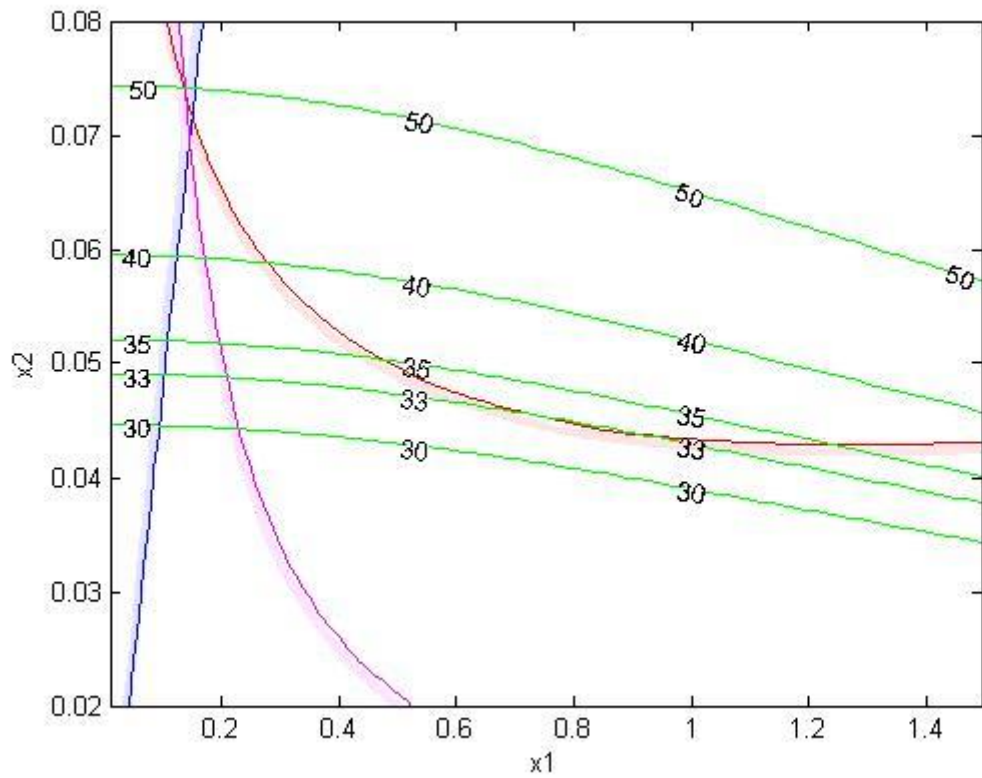


Рис. 1.4. Коррекция оптимизации трипода

Оптимальная точка $f(x_1 - \text{высота}, x_2 - \text{толщина}) = f(0.8\text{м}, 0.045\text{м}) = 33\text{кг}$. В оптимальной точке активно только одно ограничение - по эйлеровой устойчивости.

2. Сосуд давления

Впервые задача описана в статье [3]. В качестве примера используется в книгах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11].

2.1. Постановка задачи

Сосуды давления встречаются в быту как бутылки шампанского, бутылки газировки и газовые баллоны. Они предназначены для хранения газа или жидкости под давлением, которое значительно выше давления окружающей среды.

Рассмотрим цилиндрический сосуд давления, увенчанный полусферическими оголовками на обоих концах, как показано на Рис. 2.1. Корпус изготавливается из двух половинок, рулонных пластин, которые соединены двумя продольными швами, образуя цилиндр. Каждый оголовок выковывается и затем приваривается к корпусу окружным швом. Все сварки одношовные стыковые 60-градусные с поддержкой полосы.

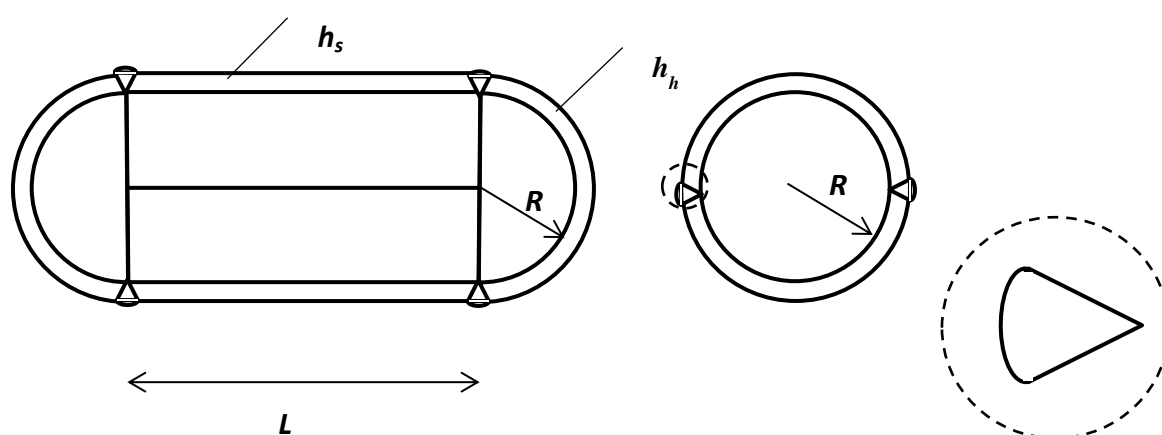


Рис. 2.1. Сосуд давления со сварными швами

Материал сосуда является углеродистой сталью. Предел прочности по нормальному напряжению материала сосуда – стали $\sigma_d = 1$ ГПа. Плотность $\rho = 7800$ кг/м³. Доступное прокатное оборудование и транспорт ограничивает сверху длину сосуда в целом 6 метрами. Сосуд давления должен быть резервуаром сжатого воздуха с рабочим давлением 21 МПа и объемом минимум 21 м³. Цель проектирования заключается в минимизации стоимости всего производства сосуда давления. Толщины корпуса и оголовков должны быть стандартными и кратными 1.6 мм. Толщины корпуса и оголовков не должны превышать 50 мм. Толщина корпуса не должна быть менее 15 мм и толщина оголовков не должна быть менее 10 мм.

2.2. Модель состояния

Стоимость является суммой стоимости сварки, стоимости формовки деталей, фиксированной стоимости. Фиксированные затраты не будут рассматриваться, поскольку они изменяются мало при изменении проекта. Стоимость сварки будет оцениваться умножением средней стоимости единицы сварного материала на вес необходимого сварного материала. В стоимость сварного материала входит стоимость работ по его укладке. Стоимость продольной сварки определяется как

$$V_1 \cdot \rho \cdot C_w, \quad (2.1)$$

где объем продольных сварных швов равен

$$V_1 = \pi \left(\frac{h_s}{\cos 30^\circ} \right)^2 \left(\frac{60}{360} \right) \cdot L \cdot 2. \quad (2.2)$$

Стоимость окружной сварки определяется как

$$V_s \cdot \rho \cdot C_w, \quad (2.3)$$

где объем окружных сварных швов равен

$$V_s = \pi \left(\frac{h_s}{\cos 30^\circ} \right)^2 \left(\frac{60}{360} \right) \cdot 4 \cdot R \cdot \pi. \quad (2.4)$$

В уравнениях(2.1) - (2.4) ρ – плотность сварного материала (7.8 г/см^3), C_w – примерная удельная стоимость сварного материала с учетом работы (1060 руб/кг), R – радиус цилиндра, L – длина цилиндра, h_s – толщина цилиндра, h_h – толщина сферического оголовка. Полная стоимость сварки является суммой величин (2.1) и (2.3).

$$\text{Стоимость сварки} = 0.1154 \cdot 10^8 h_s^2 L + 0.4352 \cdot 10^9 h_s^2 R \text{ руб/м}^3 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \quad (2.5)$$

Стоимость формовки представляются суммой двух стоимостей в средней стоимости для каждой формовочной операции.

$$2\pi\rho C_s R h_s L + 2\pi\rho C_h R^2 h_h = 0.2254 \cdot 10^7 R h_s L + 0.6469 \cdot 10^7 R^2 h_h, \quad (2.6)$$

где C_s – примерная удельная стоимость рулонной пластины (46 руб/кг) и C_h – примерная удельная стоимость ковальной пластины (132 руб/кг).

Стоимость сосуда давления равна сумме величин (2.5) и (2.6).

Предположим, что в сосуде давления наблюдается безмоментное состояние и его материал подчиняется первой гипотезе прочности – по максимальному нормальному напряжению.

Тогда [12] в цилиндрической оболочке меридиональное нормальное напряжение равно $\frac{pR}{2h_s}$, окружное нормальное напряжение равно $\frac{pR}{h_s}$. В полусферическом оголовке меридиональное и окружное нормальные напряжения равны $\frac{pR}{h_h}$. Они не должны превосходить предела прочности для материала сосуда σ_d . Тогда для цилиндра и оголовка можно записать два неравенства

$$\frac{pR}{h_s} \leq \sigma_d, \frac{pR}{2h_h} \leq \sigma_d \quad (2.7)$$

2.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Обозначим управляемые переменные Рис. 2.1.

$$x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T = \{h_s, h_h, R, L\}^T \quad (2.8)$$

Общая стоимость, которая должна быть минимизирована, дается с помощью

$$\begin{aligned} \min f(x) = & 0.2254 \cdot 10^7 x_1 x_3 x_4 + 0.7254 \cdot 10^8 x_1^2 x_3 + 0.1154 \cdot 10^8 x_1^2 x_4 \\ & + 0.6469 \cdot 10^7 x_2 x_3^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ограничения следуют из условий прочности (2.7), пределов объема и длины сосуда, боковых пределов на управляемые переменные размеров сосуда.

$$g_1(x) = -x_1 + 0.021x_3 \leq 0 \quad (2.10)$$

$$g_2(x) = -x_2 + 0.0105x_3 \leq 0 \quad (2.11)$$

$$g_3(x) = 21 - \pi x_3^2 x_4 - 4/3\pi x_3^3 \leq 0 \quad (2.12)$$

$$g_4(x) = -6 + 2x_3 + x_4 \leq 0 \quad (2.13)$$

$$x_{imin} \leq x_i \leq x_{imax} \quad (2.14)$$

Неравенство (2.10) выражает собой окружную прочность цилиндра.

Неравенство (2.11) выражает собой прочность оголовка.

Неравенство (2.12) означает, что объем сосуда не должен быть менее 21 м^3 .

Неравенство (2.13) означает, что длина сосуда не должна быть более 6 м.

Неравенства (2.14) – боковые границы параметров.

Проектные переменные R и L непрерывны, h_s и h_h дискретны и кратны 1.6 мм.

Всего в задаче 4 переменных и 12 ограничений.

2.4. Численное решение задачи оптимизации

Решать задачу будем с помощью программного средства Excel.

- 1) Дадим ячейкам имена, внесем значения и формулы в соответствии с Таблица 2.1 с помощью команды Формулы\Определенные имена\Диспетчер имен и/или левого и правого поля в строке формул.

Таблица 2.1. Имена, значения и формулы ячеек

| | | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------------------|---------------------------------|------------------|--|-------------|-------------------------------------|-----------------|
| Адрес | A2 | B2 | C2 | D2 | E2 | F2 | G2 | H2 |
| Имя | sd_ | x1min_ | x1max_ | x2min_ | x2max_ | x3min_ | x3max_ | x4min_ |
| Знач. или форм. | 1000000000 | 0,015 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 1 | 3 | 1 |
| Адрес | I2 | A4 | B4 | C4 | D4 | E4 | F4 | G4 |
| Имя | x4max_ | ro_ | Lk_ | p_ | Vmin_ | Cw_ | Cs_ | Ch_ |
| Знач. или форм. | 6 | 7800 | 6 | 21000000 | 21 | 1060 | 46 | 132 |
| Адрес | A6 | B6 | C6 | D6 | A8 | B8 | C8 | D8 |
| Имя | k134_ | k13_ | k14_ | k23_ | | | | |
| Знач. или форм. | =2*ПИ()*ro_*cs_ | =ПИ()^2/COS(ПИ()/6)^2/6*4*ro_*cw_ | =ПИ()/COS(ПИ()/6)^2/6*2*ro_*cw_ | =2*ПИ()*r_o_*ch_ | =- | =- | =Vmin_ПИ()*x3_^2*x4_-4/3*ПИ()*x3_^3 | =-Lk_+2*x3_+x4_ |
| Адрес | A10 | B10 | C10 | D10 | E10 | F10 | G10 | H10 |
| Имя | | | | | | | | |
| Знач. или форм. | =x1mi_n_-x1_ | =x1_-x1max_ | =x2min_-x2_ | =x2_-x2max_ | =x3min_-x3_ | =x3_-x3max_ | =x4min_-x4_ | =x4_-x4max_ |
| Адрес | A13 | B13 | C13 | D13 | E13 | | | |
| Имя | x1_ | x2_ | x3_ | x4_ | f_ | | | |
| Знач. или форм. | | | | | =k134_*x1_*x3_*x4_+k13_*x1^2*x3_+k14_*x1_^2*x4_+k23_*x2_*x3_^2 | | | |

- 2) В верхних ячейках над ячейками, упомянутыми в Таблица 2.1, внесем текстовые комментарии с именами без подчеркиваний. (Рис. 2.2).

- 3) Решение ищется с помощью команды Данные\Анализ\Поиск решения. Оптимизируется целевая функция в ячейке \$E\$13, изменяя ячейки \$A\$13:\$D\$13, в соответствии с ограничениями в ячейках \$A\$10, \$A\$8, \$B\$10, \$B\$8, \$C\$10, \$C\$8, \$D\$10, \$D\$8, \$E\$10, \$F\$10, \$G\$10, \$H\$10 ≤ 0 .

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|--|--|--|---|---------------|---------------|---------------|-------|
| 1 | sd | x1min(hs) | x1max | x2min(hh) | x2max | x3min(R) | x3max | x4min(L) | x4max |
| 2 | 1000000000 | 0,015 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 1 | 3 | 1 | 6 |
| 3 | ro | Lk | p | Vmin | Cw | Cs | Ch | | |
| 4 | 7800 | 6 | 21000000 | 22 | 1060 | 46 | 132 | | |
| 5 | k134 | k13 | k14 | k23 | | | | | |
| 6 | $=2*\text{ПИ}()*\text{ro}_*\text{cs}_$ | $=\text{ПИ}()^2/\text{COS}(\text{ПИ}()/6)^2/6^4*\text{ro}_*\text{cw}_$ | $=\text{ПИ}()/\text{COS}(\text{ПИ}()/6)^2/6^2*\text{ro}_*\text{cw}_$ | $=2*\text{ПИ}()*\text{ro}_*\text{ch}_$ | | | | | |
| 7 | проч.цил | проч.ого | объем | длина | | | | | |
| 8 | $=-x1_+P_/sd_ *x3_$ | $=-x2_+P_/2/sd_ *x3_$ | $=Vmin_-\text{ПИ}()*x3_^2*x4_-4/3*\text{ПИ}()*x3_^3$ | $=-Lk_+2*x3_+x4_$ | | | | | |
| 9 | x1min-x1_ | x1_-x1max | x2min-x2_ | x2_-x2max | x3min-x3_ | x3_-x3max | x4min-x4_ | x4_-x4max | |
| 10 | $=x1min_-x1_$ | $=x1_-x1max_$ | $=x2min_-x2_$ | $=x2_-x2max_$ | $=x3min_-x3_$ | $=x3_-x3max_$ | $=x4min_-x4_$ | $=x4_-x4max_$ | |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | x1(~hs) | x2(~hh) | x3(~R) | x4(~L) | f | | | | |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | $=k134_*x1_*x3_*x4_+k13_*x1_^2*x3_+k14_*x1_^2*x4_+k23_*x2_*x3_^2$ | | | | |

Рис. 2.2. Оптимизация сосуда давления

Результаты решения в Excel для разных ограничений по длине и объему сосуда представлены в Таблица 2.2.

Таблица 2.2. Оптимальные решения

| Параметры, ограничения, целевая функция | Оптимальное решение при длине \leq 6м, объеме \leq 21м ³ | Оптимальное решение при длине \leq 8м, объеме \leq 21м ³ | Оптимальное решение при длине \leq 6м, объеме \leq 22м ³ |
|---|---|---|---|
| x_1 , толщина цилиндра | 0.0237 | 0.021 | 0.0243 |
| x_2 , толщина оголовка | 0.0119 | 0.0105 | 0.0122 |
| x_3 , радиус | 1.129 | 1.000 | 1.157 |
| x_4 , длина цилиндра | 3.743 | 5.3512 | 3.6854 |
| g_1 , прочность цилиндра | 0 | 0 | 0 |
| g_2 , прочность оголовка | 0 | 0 | 0 |
| g_3 , объем сосуда | -3.1e-8 | -1.7e-8 | -9.2e-7 |
| g_4 , длина сосуда | 0 | -0.649 | -8.4e-15 |
| f , стоимость, руб | 393628 | 380495 | 413689 |

2.5. Исследование решения

- Исследовать графически и вербально зависимость размеров и стоимости оптимального сосуда в зависимости от допустимой длины и допустимого объема сосуда.
- Показать, что увеличение допустимой длины сосуда незначительно уменьшает его минимальную стоимость.
- Указать связь допустимого объема сосуда и его оптимальной стоимости.
- Как повлияет на проект требование, что толщины корпуса и оголовков должны быть стандартными и кратными 1.6 мм.

3. Пружина растяжения-сжатия

Пример встречается в литературе [13], [14], [15], [7], [6], [8], [4], [16], [11], [17].

3.1. Постановка задачи

Винтовая пружина Рис. 3.1, работающая на растяжение-сжатие, испытывает нагрузку P .

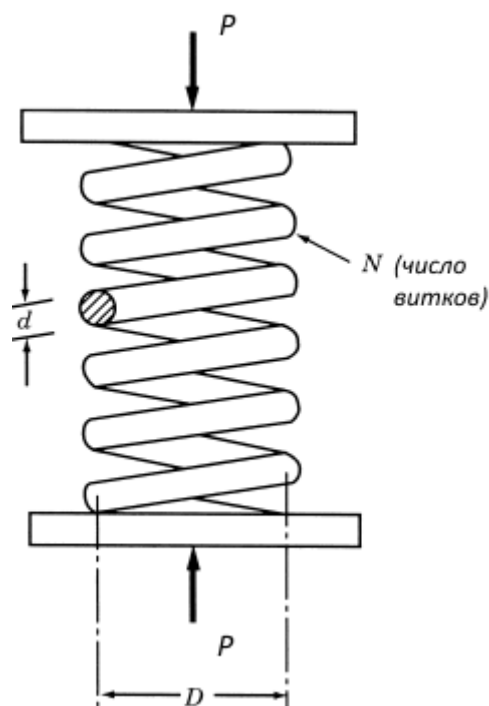


Рис. 3.1. Винтовая пружина

Материал пружины имеет плотность ρ , модуль сдвига G . Два крайних витка не являются рабочими. Требуется выбрать диаметр проволоки d , средний диаметр витка D , количество витков N , с тем, чтобы масса пружины f была минимальной и выполнялись ограничения по смещению конца δ_d , по касательному напряжению сдвига τ_d , по частоте продольных колебаний ω_d , по диапазонам выбираемых параметров $d_{min}, d_{max}, D_{min}, D_{max}, N_{min}, N_{max}$, по внешнему диаметру D_0 .

Управляемые параметры

x_1 — диаметр проволоки d .

x_2 — средний диаметр витка D .

x_3 — количество витков N .

Фиксированные параметры:

$$P = 5000\text{Н}, \rho = 7800\text{кг/м}^3, G = 80\text{ГПа}, \delta_d = 13\text{мм}, \tau_d = 400\text{МПа}, \omega_d = 100\text{Гц}, D_0 = 4\text{см}, d_{\min} = 1\text{мм}, d_{\max} = 25\text{мм}, D_{\min} = 7\text{мм}, D_{\max} = 32\text{мм}, N_{\min} = 2, N_{\max} = 15.$$

3.2. Модель состояния

Масса пружины

$$f(x) = \frac{1}{4} \rho \pi^2 (N + 2) D d^2 = \frac{1}{4} \rho \pi^2 x_1^2 x_2 (x_3 + 2). \quad (3.1)$$

Жесткость винтовой пружины

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

Перемещение концов при сжатии

$$\delta = \frac{P}{k} = \frac{8Px_2^3 x_3}{Gx_1^4}. \quad (3.2)$$

Касательное напряжение в проволоке

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{4D - d}{4(D - d)} + \frac{0.615d}{D} \right) = \frac{Px_2}{\pi x_1^3} \left(\frac{4x_2 - x_1}{4(x_2 - x_1)} + \frac{0.615x_1}{x_2} \right). \quad (3.3)$$

Собственная частота продольных колебаний

$$\omega = \frac{d}{2\pi ND^2} \sqrt{\frac{G}{2\rho}} = \frac{x_1}{2\pi x_2^2 x_3} \sqrt{\frac{G}{2\rho}}. \quad (3.4)$$

3.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Найти $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, при которых масса $f = \frac{1}{4} \rho \pi^2 x_1^2 x_2 (x_3 + 2)$ минимальна и выполняются неравенства

$$\text{жесткость} \quad g_1(x) = \delta - \delta_d \leq 0 \quad (3.5)$$

$$\text{прочность сдвига} \quad g_2(x) = \tau - \tau_d \leq 0 \quad (3.6)$$

$$\text{колебания} \quad g_3(x) = \omega_d - \omega \leq 0 \quad (3.7)$$

$$\text{внешний диаметр} \quad g_4(x) = D + d = x_1 + x_2 \leq D_0 \quad (3.8)$$

$$\text{технология} \quad g_{5,6}(x): d_{\min} \leq x_1 \leq d_{\max} \quad (3.9)$$

$$g_{7,8}(x): D_{\min} \leq x_2 \leq D_{\max} \quad (3.10)$$

$$g_{9,10}(x): N_{min} \leq x_3 \leq N_{max} \quad (3.11)$$

Всего в задаче 3 управляемых параметра и 10 ограничений неравенств

3.4. Численное решение задачи оптимизации

- 1) С помощью левого поля в строке формул и/или команды Формулы\Определенные имена\Диспетчер имен дадим ячейкам имена в соответствии с Таблица 3.1.

Таблица 3.1. Имена ячеек

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|------|-----|-----|----|------|-----|-----|----|-------|-----|-------|------|-------|------|-------|--------|-------|----|
| Адрес | A2 | A4 | A6 | A12 | B2 | B4 | B6 | B12 | C2 | C4 | C6 | C12 | D2 | D4 | E2 | E4 | F2 | F4 | G2 |
| Имя | P_ | dmin | x1_ | del | ro | dmax | x2_ | tau | G_ | D_min | x3_ | omega | deld | D_max | taud | N_min | omegad | N_max | D0 |

- 2) Внесем текстовые комментарии и числа, присутствующие на Рис. 3.2. Имена записаны без подчеркивов в ячейках над ними.
- 3) Внесем формулы в соответствии с Таблица 3.2. В формулах используются имена ячеек из Таблица 3.1.

Таблица 3.2. Формулы в ячейках

| Адрес | Формула |
|-------|------------------------------------|
| D6 | =0.25*ro*ПИ()^2* x1_^2*x2_*(x3_+2) |
| A8 | =del/deld-1 |
| B8 | =tau/taud-1 |
| C8 | =1-omega/omegad |
| D8 | =(x1_+x2_)/D0-1 |
| E8 | =1-x1_/dmin |
| F8 | =x1_/dmax-1 |
| A10 | =1-x2_/D_min |
| B10 | =x2_/D_max-1 |
| C10 | =1-x3_/N_min |

| | |
|-----|--|
| D10 | $=x3_/N_max-1$ |
| A12 | $=8*P_ *x2_ ^3*x3_/(G_ *x1_ ^4)$ |
| B12 | $=P_ *x2_/(ПИ()*x1_ ^3)* ((4*x2_ -x1_)/(4*(x2_ -x1_)+0,615*x1_/x2_))$ |
| C12 | $=x1_/(2*ПИ()*x2_ ^2*x3_)*КОРЕНЬ(G_/(2*ro))$ |

Лист с формулами Excel приведен на Рис. 3.2.

| | A | B | D | E | F | G | |
|----|---------------------------------------|--|-------------------|---|--|----------------|------|
| 1 | P | ro | G | deld | taud | omegad | D0 |
| 2 | 5000 | 7800 | 8000000000 | 0,013 | 400000000 | 100 | 0,04 |
| 3 | dmin | dmax | Dmin | Dmax | Nmin | Nmax | |
| 4 | 0,001 | 0,025 | 0,007 | 0,032 | 2 | 15 | |
| 5 | x1 | x2 | x3 | f | | | |
| 6 | 1 | 1 | 1 | $=0,25*ro*ПИ()^2*x1_ ^2*x2_ *(x3_ +2)$ | | | |
| 7 | g1 (del) | g2(tau) | g3 (omega) | g4(D0) | g5(dmin) | g6(dmax) | |
| 8 | $=del/deld-1$ | $=tau/taud-1$ | $=1-omega/omegad$ | $=(x1_ +x2_)/D0-1$ | $=1-x1_/dmin$ | $=x1_/dmax-1$ | |
| 9 | g7(Dmin) | g8(Dmax) | g9(Nmin) | g10(Nmax) | | | |
| 10 | $=1-x2_/D_min$ | $=x2_/D_max-1$ | $=1-x3_/N_min$ | $=x3_/N_max-1$ | | | |
| 11 | del | tau | | | omega | | |
| 12 | $=8*P_ *x2_ ^3*x3_/(G_ *x1_ ^4)$ | $=P_ *x2_/(ПИ()*x1_ ^3)* ((4*x2_ -x1_)/(4*(x2_ -x1_)+0,615*x1_/x2_))$ | | | $=x1_/(2*ПИ()*x2_ ^2*x3_)*КОРЕНЬ(G_/(2*ro))$ | | |

Рис. 3.2. Оптимизация винтовой пружины

Решение ищется с помощью команды Данные\Анализ\Поиск решения. Оптимизируется целевая функция в ячейке \$D\$6, изменяя ячейки \$A\$6:\$C\$6, в соответствии с ограничениями в ячейках \$A\$10, \$A\$8, \$B\$10, \$B\$8, \$C\$10, \$C\$8, \$D\$10, \$D\$8, \$E\$8, \$F\$8<=0.

Найдено решение

$$\min f = f(x_1 = 2.27\text{мм}, x_2 = 7\text{мм}, x_3 = 2) = 2.77\text{г.} \quad (3.12)$$

Активны ограничения по жесткости, на нижний диаметр пружины, на нижнее число витков.

3.5. Исследование проектов

Что происходит с массой и параметрами наилучшей пружины, если

- уменьшить ресурс по жесткости в 2 раза,
- повысить запас по прочности в 2 раза,
- повысить допускаемую собственную частоту в 2 раза.

На сколько процентов уменьшится масса наилучшей пружины, если на 1% увеличить

- нижний диаметр пружины,
- верхнее число витков.

4. Ступенчатая консоль

Пример оптимизации, для которого легко масштабировать количество управляемых параметров касается консольной балки, состоящей из многих участков разного прямоугольного поперечного сечения [14], [18], [19, с19], [4], [10] [20].

4.1. Постановка задачи

Консольная балка длиной L на конце нагружена силой P (Рис. 4.1). Балка состоит из n участков одинаковой длины разного прямоугольного сечения. Требуется подобрать размеры сечений b_i, h_i с тем, чтобы объем балки был минимален и выполнялись ограничения по предельным нормальным напряжениям на каждом участке, предельному перемещению на конце балки, по предельным отношениям высоты сечения к ширине.

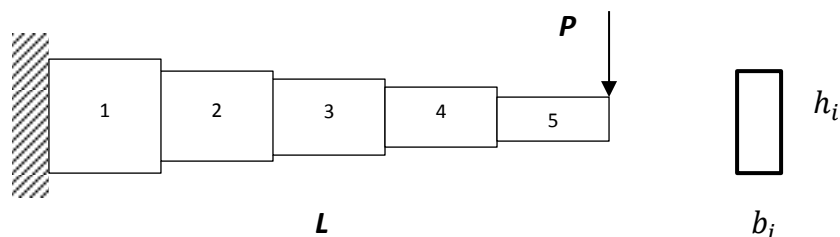


Рис. 4.1. Ступенчатая консоль

Управляемые параметры:

x_{2i-1} — ширина сечения на i -м участке, $i = \overline{1, n}$.

x_{2i} — высота сечения на i -м участке, $i = \overline{1, n}$.

Фиксированные параметры:

| | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| Число участков | $n = 5,$ |
| Общая длина балки | $L=500\text{см},$ |
| Модуль продольной упругости | $E=200\text{ГПа},$ |
| Допускаемое нормальное напряжение | $\sigma_d = 140\text{МПа},$ |
| Допускаемое перемещение | $\delta_d = 1.3\text{мм},$ |
| Допускаемое отношение высоты к ширине | $k_d = 10,$ |
| Внешняя сила | $P = 50000\text{Н}.$ |

4.2. Модель состояния

Объем балки

$$f = \frac{L}{n} \sum_i x_{2i-1} \cdot x_{2i}.$$

Максимальное нормальное напряжение на участке 1

$$\sigma_1 = \frac{6PL}{x_1 x_2^2}.$$

Максимальное нормальное напряжение на участке i

$$\sigma_i = \frac{6P \left(L - \frac{L}{n}(i-1) \right)}{x_{2i-1} x_{2i}^2}.$$

Перемещение на конце участка 1

$$\delta_1 = P \left(\frac{L}{n} \right)^3 / (3EI_1).$$

Перемещение на краю консоли равно, интегрируя уравнение изогнутой линии

$$\begin{aligned} \delta &= 0 + 0 \cdot z + \iint_0^L \frac{M(z)}{EI(z)} dz^2 = \sum_{i=1}^n \frac{12P}{E x_{2i-1} x_{2i}^3} \int_{\frac{L}{n}(i-1)}^{\frac{L}{n}i} \left(\int_{\frac{L}{n}(i-1)}^z (L-z) dz \right) dz \\ &= \frac{6P}{E} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{2i-1} x_{2i}^3} \int_{\frac{L}{n}(i-1)}^{\frac{L}{n}i} \left(-z^2 + 2Lz - 2\frac{L^2}{n}(i-1) + \left(\frac{L}{n}(i-1) \right)^2 \right) dz \\ &= \frac{6PL^3}{En^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{2i-1} x_{2i}^3} \left(-\frac{1}{3}(3i^2 - 3i + 1) + n(2i - 1) \right. \\ &\quad \left. - (2n(i-1) - (i-1)^2) \right) = \frac{6PL^3}{En^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{2i-1} x_{2i}^3} \left(-i + n + \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Перемещение на краю окончательно

$$\delta = \frac{6PL^3}{En^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{2i-1} x_{2i}^3} \left(-i + n + \frac{2}{3} \right). \quad (4.1)$$

Отношение высоты сечения к ширине ограничено

$$x_{2i}/x_{2i-1} \leq k_d. \quad (4.2)$$

4.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Найти размеры $x_{2i-1}, x_{2i}, i = \overline{1, n}$, при которых объем $f = \frac{L}{n} \sum_i x_{2i-1} \cdot x_{2i}$ минимален и выполняются неравенства по

напряжениям
$$g_j(x) = \sigma_i - \sigma_d \leq 0, i = \overline{1, n}, j = i \quad (4.3)$$

перемещению
$$g_{n+1}(x) = \delta - \delta_d \leq 0$$

отношению размеров
$$g_j(x) = x_{2i}/x_{2i-1} - k_d \leq 0, i = \overline{1, n}, j = i + n + 1 \quad (4.4)$$

Всего в задаче $2n$ управляемых параметров и $2n + 1$ ограничений неравенств

4.4. Численное решение задачи оптимизации

Пусть число участков консоли равно 5. Лист Excel с формулами представлен на Рис. 4.2. В формулах используются имена ячеек $L, n, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, sig1, sig2, sig3, sig4, sig5, sigd, kd, E, P, delta$ (ячейка F8), del (ячейка A11), $deld$ ячеек. Имена записаны без подчеркивов в ячейках над ними. Решение ищется с помощью команды Данные\Анализ\Поиск решения. Оптимизируется целевая функция в ячейке $\$A\6 , изменяя ячейки $\$A\$4:\$J\4 , в соответствии с ограничениями в ячейках $\$A\$10, \$A\$8, \$B\$10, \$B\$8, \$C\$10, \$C\$8, \$D\$10, \$D\$8, \$E\$10, \$E\$8, delta \leq 0$.

| | A | B | C | D |
|----|---|---------------------------------------|--------------|--------------|
| 1 | P | L | E | deld |
| 2 | 500000 | 5 | 200000000000 | 0,0013 |
| 3 | x1 | x2 | x3 | x4 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | f | | | |
| 6 | =L/n*(x1*x2+x3*x4+x5*x6+x7*x8+x9*x10) | =L/n*(x1*x2+x3*x4+x5*x6+x7*x8+x9*x10) | | |
| 7 | g1(sig) | g2(sig) | g3(sig) | g4(sig) |
| 8 | =sig1/sigd-1 | =sig2/sigd-1 | =sig3/sigd-1 | =sig4/sigd-1 |
| 9 | g7(ratio) | g8(ratio) | g9(ratio) | g10(ratio) |
| 10 | =x2/x1_-kd_ | =x4/x3_-kd_ | =x6/x5_-kd_ | =x8/x7_-kd_ |
| 11 | del | sig1 | sig2 | sig3 |
| 12 | =6*P*_L^3/(E*_n^3)*(14/3/(x1*x2^3)+11/3/(x3*x4^3)+8/3/(x5*x6^3)+5/3/(x7*x8^3)+2/3/(x9*x10^3)) | | | |

| E | F | G | H | I | J |
|---------------------------|----------------------------|----|----|----|-----|
| sigd | kd | n | | | |
| 140000000 | 10 | 5 | | | |
| x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | |
| g5(sig) | g6(delta) | | | | |
| =sig5/sigd-1 | =del/deld-1 | | | | |
| g11(ratio) | | | | | |
| =x10/x9_-kd_ | | | | | |
| sig4 | sig5 | | | | |
| =6*P*(L_-3*L/n)/(x7*x8^2) | =6*P*(L_-4*L/n)/(x9*x10^2) | | | | |

Рис. 4.2. Оптимизация ступенчатой консоли

Таблица 4.1.

| Задача | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | f |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| исходная | 0.12 | 1.21 | 0.12 | 1.16 | 0.11 | 1.10 | 0.10 | 1.02 | 0.09 | 0.88 | 0.584 |
| Без ограничения по жесткости | 0.10 | 1.02 | 0.09 | 0.95 | 0.09 | 0.86 | 0.08 | 0.75 | 0.06 | 0.60 | 0.362 |

4.5. Исследование задачи

- Получить несколько проектов при разных фиксированных параметрах. Проанализировать результаты.
- Что общего во всех оптимальных проектах? Обратит внимание на соотношение ширины и высоты каждого сечения. Нарисовать поперечные сечения консоли по длине.

- Как влияет активность ограничения по жесткости?
- Получить решение задачи при отсутствии ограничения по жесткости.
- Решить задачу для числа участков $n = 6$.

5. Двутавровое сечение консоли

Задача упомянута в [21], [5], [13], [22], [23], [19].

5.1. Постановка задачи

Необходимо спроектировать консольную балку Рис. 5.1 длиной L , которая удерживает силу P на конце. Поперечное сечение балки имеет форму двутавра I. Балка не должна разрушаться. Имеется ограничение на смещение конца балки. Требуется спроектировать балку минимальной массы. Рис. 5.1 показывает вид сбоку и поперечное сечение. Символы x_1, x_2, x_3, x_4 соответствуют высоте балки, толщине стенки, ширине и толщине полки соответственно. Этих величин достаточно, чтобы определить поперечное сечение.

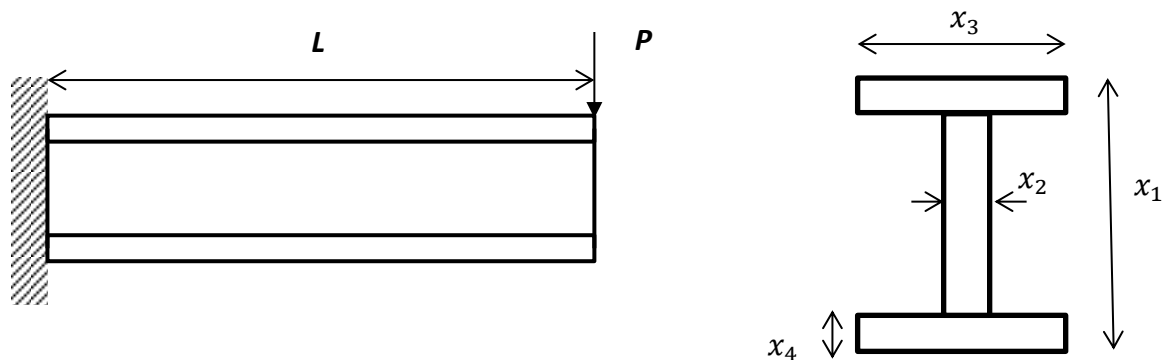


Рис. 5.1. Двутавровая балка

Фиксированные параметры

L — длина консольной балки (100см),

E — модуль продольной упругости материала балки (200ГПа),

G — модуль сдвига материала балки (80ГПа),

P — действующая сила (30кН),

σ_d — допускаемое нормальное напряжение (200МПа),

τ_d — допускаемое касательное напряжение (90МПа),

δ_d — допускаемое перемещение конца балки (6мм),

t_d — низшая толщина полки и стенки (1 мм).

Управляемые параметры

x_1 — высота двутаврового сечения.

x_2 — толщина стенки.

x_3 — ширина нижней и верхней полки.

x_4 — толщина нижней и верхней полки.

Требуется

Найти размеры двутаврового сечения, чтобы масса балки была минимальной, и выполнялись ограничения по прочности, жесткости и геометрии.

5.2. Модель состояния

Целевая функция массы

$$f = \rho L(x_2(x_1 - 2x_4) + 2x_3x_4) \quad (5.1)$$

Нормальное напряжение

Максимальное нормальное напряжение наблюдается в поперечном сечении на левом конце балки в заделке. Максимально оно в верхней и в нижней точке сечения

$$\sigma_{max}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{PL}{(I/(x_1/2))}, \quad (5.2)$$

где момент инерции двутавра равен

$$I = \frac{x_2(x_1 - 2x_4)^3}{12} + 2 \left(\frac{x_3x_4^3}{12} + \left(x_1/2 - \frac{x_4}{2}\right)^2 x_3x_4 \right). \quad (5.3)$$

Касательное напряжение

Максимальное касательное напряжение наблюдается в поперечном сечении с максимальной перерезывающей силой (в заделке) в середине стенки двутавра и рассчитывается по формуле Журавского

$$\tau_{max}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{S_x^* P}{x_2 I} \quad (5.4)$$

Отсеченный статический момент

$$S_x^* = x_3x_4(x_1/2 - x_4/2) + x_2(x_1 - 2x_4)/2(x_1 - 2x_4)/4 \quad (5.5)$$

Прогиб конца

Прогиб конца консоли

$$\delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = PL^3/(3EI). \quad (5.6)$$

Геометрия

Все размеры сечения неотрицательны. Две толщины полки не превосходят одной высоты двутавра. Высота двутавра не более 0.1 длины балки. Толщины полки и стенки двутавра не превосходят допустимой величины.

5.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Найти $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, при которых масса $f = \rho L(x_2(x_1 - 2x_4) + 2x_3x_4)$ минимальна и выполняются неравенства

$$g_1(x) = \sigma_{max}(x) - \sigma_d \leq 0 \quad (5.7)$$

$$g_2(x) = \tau_{max}(x) - \tau_d \leq 0 \quad (5.8)$$

$$g_3(x) = \delta(x) - \delta_d \leq 0 \quad (5.9)$$

$$g_4(x) = 2x_4 - x_1 \leq 0 \quad (5.10)$$

$$g_5(x) = -x_1 \leq 0 \quad (5.11)$$

$$g_6(x) = t_d - x_2 \leq 0 \quad (5.12)$$

$$g_7(x) = -x_3 \leq 0 \quad (5.13)$$

$$g_8(x) = t_d - x_4 \leq 0 \quad (5.14)$$

$$g_9(x) = x_1 - L/10 \leq 0 \quad (5.15)$$

5.4. Численное решение задачи оптимизации

Лист Excel с формулами задачи показан на Рис. 5.2. В формулах используются имена ячеек. Имена ячеек для сведения написаны в ячейках сверху, возможно без подчеркивания. Применяется команда Данные\Анализ\Поиск решения с целевой функцией \$E\$4, изменяя ячейки \$A\$4:\$D\$4 с ограничениями \$A\$6, \$B\$6, \$C\$6, \$D6, \$E\$6, \$F6, \$G6, \$H\$6, \$I6<=0.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|--|--------------|-------------|---------|----------------------------|--|--------------------|-----------------------|----------|
| 1 | L | E | G | P | taud | sigd | deld | ticd | |
| 2 | 1 | 200000000000 | 80000000000 | 30000 | 90000000 | 200000000 | 0,006 | 0,001 | |
| 3 | x1 | x2 | x3 | x4 | f | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | =x2_*(x1_-2*x4_)+2*x3_*x4_ | | | | |
| 5 | g8 (x4) | g7 (x3) | g6 (x2) | g5 (x1) | g4 | g3 (del) | g2 (tau) | g1 (sig) | g9 (выс |
| 6 | =ticd-x4_ | =x3_ | =ticd-x2_ | =x1_ | =2*x4_-x1_ | =P*L^3/(3*E*_J)-deld | =S_*P/(x2_*J)-taud | =P*L/(J/(x1_/2))-sigd | =x1_-L/1 |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | J | | | | | S | | | |
| 9 | =x2_*(x1_-2*x4_)^3/12+2*(x3_*x4_)^3/12+(x1_/2-x4_/2)^2*x3_*x4_ | | | | | =x3_*x4_*(x1_/2-x4_/2)+x2_*(x1_-2*x4_)^2/8 | | | |

Рис. 5.2. Оптимизация двутаврового сечения консоли

Численный результат решения виден на Рис. 5.3.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|--------------|--------------|----------|---------|-------------|----------|----------|----------|-------------|
| 1 | L | E | G | P | taud | sigd | deld | ticd | |
| 2 | 1 | 2,00E+11 | 8,00E+10 | 30000 | 9,00E+07 | 2,00E+08 | 0,006 | 1,00E-03 | |
| 3 | x1 | x2 | x3 | x4 | f | | | | |
| 4 | 0,1 | 0,003445368 | 0,99538 | 0,002 | 0,003673495 | | | | |
| 5 | g8 (x4) | g7 (x3) | g6 (x2) | g5 (x1) | g4 | g3 (del) | g2 (tau) | g1 (sig) | g9 (высота) |
| 6 | -0,000678005 | -0,995384808 | -0,00245 | -0,1 | -0,09664399 | 6,21E-13 | -53,8159 | -2E+07 | 0 |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | J | S | | | | | | | |
| 9 | 8,33333E-06 | 8,61342E-05 | | | | | | | |

Рис. 5.3. Результат оптимизации двутаврового сечения консоли

5.5. Исследовать решение:

- Ограничьте ширину полки 10% длины балки.
- Как зависит оптимальное сечение от длины балки?
- Какие ограничения активны для оптимального сечения, какие ограничения можно ослабить и на сколько?
- Какие сечения получаются, если снять ограничение на высоту двутвра?

6. Гладкая цилиндрическая оболочка

Пример впервые описан в [24]. Конструкция может использоваться как элемент опорной фермы стационарной морской платформы в качестве начального проекта.

6.1. Постановка задачи

Рассмотрим гладкую цилиндрическую оболочку, нагруженную внешним давлением и осевой сжимающей силой (Рис. 6.1). Оболочка сваривается из 5 сегментов длиной L_S круговыми швами. Каждый сегмент сваривается из 2х полуцилиндров прямыми швами. Материал оболочки и сварной материал – сталь.

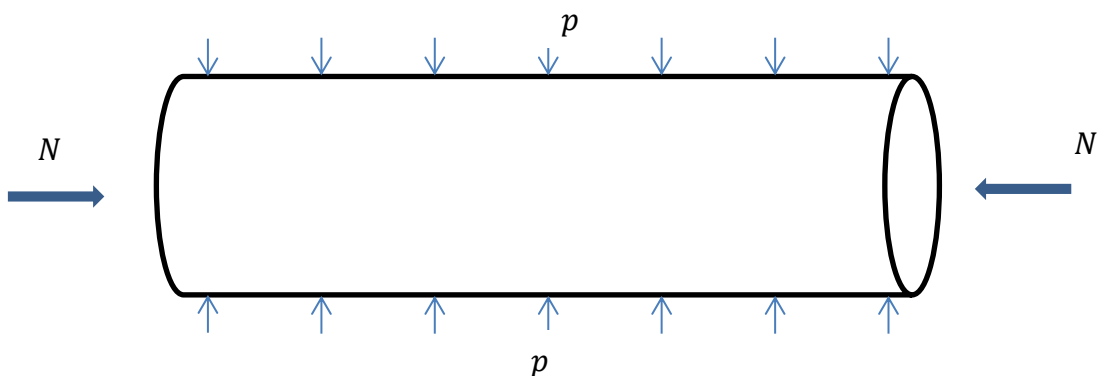


Рис. 6.1. Цилиндрическая оболочка

Требуется подобрать толщину оболочки t при ограничении на ее выпучивание, которая минимизирует стоимость изготовления оболочки.

Фиксированные параметры

$\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ - плотность,

$E = 210 \text{ ГПа}$ - модуль Юнга,

$\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$f_y = 355 \text{ МПа}$ - предел прочности,

$p = 1.5 \text{ МПа}$ - интенсивность внешнего давления (150 метров под водой),

$N = 54 \text{ МН}$ – сила сжатия (5400 тонн).

Требуемая по технологии a_w и минимальная ширина $a_{w.min}$ сварного шва в зависимости от толщины t детали

$$a_w = 0.4t, a_{w.min} = 3 \text{ мм}.$$

$L_S = 3 \text{ м}$ – длина сегмента оболочки,

$L = 15 \text{ м}$ – длина оболочки

$R = 1850\text{мм}$ — радиус оболочки

$k_M = 45\text{руб}\backslash\text{кг}$ - удельная стоимость материала пластин,

$k_F = 60\text{руб}\backslash\text{мин}$ - удельная стоимость сварных работ,

$k_P = 160\text{руб}\backslash\text{м}^2$ - удельная стоимость покраски.

6.2. Модель состояния

Модель состояния позволяет по известным управляемым и фиксированным параметрам определить стоимость оболочки и способность противостоять выпучиванию.

6.2.1. Обозначения переменных состояния

σ_e — эквивалентное напряжение по Мизесу,

σ_a — напряжение осевого сжатия,

σ_p — напряжение внешнего давления.

Величины σ_a, σ_p будут главными напряжениями. $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\sigma_a, \sigma_3 = -\sigma_p$.

Тогда эквивалентное напряжение по Мизесу

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_p + \sigma_p^2} \quad (6.1)$$

6.2.2. Ограничение на выпучивание оболочки

Согласно стандарту [25] эквивалентное напряжение для противодействия выпучиванию неподкрепленных круговых цилиндров должно удовлетворять неравенству

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_p + \sigma_p^2} \leq \frac{f_{y1}}{\sqrt{1 + \lambda^4}} \quad (6.2)$$

где

$$f_{y1} = \frac{f_y}{1.1}, \lambda^2 = \frac{f_{y1}}{\sigma_e} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Ea}} + \frac{\sigma_p}{\sigma_{Ep}} \right), \sigma_a = \frac{N}{2R\pi t}, \sigma_p = \frac{pR}{t} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{Ea} = C_a \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{L} \right)^2, C_a = \psi_a \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_a \xi_a}{\psi_a} \right)^2}, \psi_a = 1, \quad (6.4)$$

$$\xi_a = 0.702 Z_a, Z_a = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{1 - \nu^2}, \rho_a = 0.5 \left(1 + \frac{R}{150t} \right)^{-0.5}, \quad (6.5)$$

$$\sigma_{Ep} = C_p \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{L} \right)^2, C_p = \psi_p \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_p \xi_p}{\psi_p} \right)^2}, \rho_p = 0.6, \quad (6.6)$$

$$\text{и } \xi_p = 1.04\sqrt{Z_p}, Z_p = Z_a, \psi_p = 4. \quad (6.7)$$

В нормализованном виде (6.2) записывается как

$$\frac{\sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_p + \sigma_p^2\sqrt{1 + \lambda^4}}}{f_{y1}} - 1 \leq 0. \quad (6.8)$$

6.2.3. Функция стоимости для гладкой оболочки

Функция стоимости включает стоимость материалов K_M , стоимости производства по стадиям K_{Fi} и стоимость покраски K_P .

$$K = K_M + \sum_i K_{Fi} + K_P, \quad (6.9)$$

Последовательность стадий производства будет следующей.

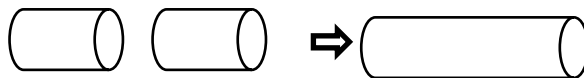
- (1) Сгибаем пластинчатые элементы длиной L_S в цилиндрическую форму (K_{F0}).



- (2) Свариваем сегменты оболочки длиной L_S из 2 элементов изогнутой пластины, 2-мя накладными сварными швами, используя GMAW-C (газ Металл дуговая сварка с CO_2) (K_{F1}).



- (3) Свариваем неподкрепленную оболочку длиной $L = 15$ м из 5 сегментов с помощью 4 кольцевых накладных швов, с помощью GMAW-C (K_{F2}).



Объем материала сегмента оболочки

$$V_1 = 2R\pi tL_S, \quad (6.10)$$

Стоимость материала выражается как

$$K_M = k_M 5\rho V_1. \quad (6.11)$$

Выразим компоненты стоимости производства [26].

Стоимость гибки и правки

$$K_{F11} = 5k_F \Theta C_0 \cdot e^\mu, \quad (6.12)$$

$\Theta = 2$ – фактор трудности, выражающий сложность сборки. $C_0 = 1$ мин.

Временные данные по гибке и правке получены от венгерской производственной компании и аппроксимированы следующим выражением.

$\mu = 6.8582513 - 4.527217t^{-0.5} + 0.009541996(2R)^{0.5}$, если t, R измеряются в мм.

Стоимость сварки 1

$$K_{F2} = 5k_F(C_1\Theta\sqrt{k\rho V_1} + 1.3 \cdot 0.1520 \cdot 10^{-3}t^{1.9358} \cdot 2L_s), \quad (6.13)$$

где $k = 2$ - количество собираемых деталей, $C_1 = 1.25$ мин/кг^{0.5}

Первое слагаемое в (6.13) выражает время подготовки, сборки и крепления деталей, второе вычисляет время сварки [26]. Множитель $0.1520 \cdot 10^{-3}t^{1.9358}$ выражает в минутах время сварки 1 мм длины шва листов толщиной t , измеряемой в мм (технология FCAW продольный встык руки вниз). Коэффициент 1.3 учитывает вероятность 30% незапланированных работ.

Стоимость сварки 2

$$K_{F3} = k_F(C_1\Theta\sqrt{25\rho V_1} + 1.3 \cdot 0.1520 \cdot 10^{-3}t^{1.9358} \cdot 4 \cdot 2R\pi), \quad (6.14)$$

Стоимость покраски дается как

$$K_P = 4R\pi L k_P. \quad (6.15)$$

6.3. Математическая постановка задачи оптимизации

Найти толщину стенки t гладкой цилиндрической оболочки, при которой стоимость оболочки минимальна

$$\begin{aligned} f(t) &= K_M + \sum_i K_{Fi} + K_P & (6.16) \\ &= 8.312e7t + 600e^{7.4386683-4.527217(1000t)^{-0.5}} + 5.034e5\sqrt{t} \\ &\quad + 26.80(1000t)^{1.9358} + 299896 \rightarrow \min \end{aligned}$$

и выполняются ограничение по выпучиванию (6.2) с учетом (6.3)

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_e}{f_{y1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Ea}} + \frac{\sigma_p}{\sigma_{Ep}}\right)^2} \leq 1 \quad (6.17)$$

и технологическое ограничение

$$t \geq 0.0075\text{м}$$

(6.18)

6.4.Графическое решение задачи

Matlab-код графического решения представлен далее.

Листинг 2. Графическая оптимизация гладкой цилиндрической оболочки

```
% Гладкая цилиндрическая оболочка. Графическая оптимизация.
% Руссу А.С.,Киселев В.Г. 02.06.18.
% Фиксированные параметры
ro = 7850; %плотность
E = 2.1e11; %модуль Юнга
nu = 0.3; %коэффициент Пуассона
fy = 355e6; %предел прочности
p = 15e5; %интенсивность внешнего давления
N = 54e6; %сила сжатия
Ls = 3; %длина сегмента оболочки
L = 15; %длина оболочки
R = 1.85; %радиус оболочки
km = 45; %удельная стоимость материала пластин
kf = 60; %удельная стоимость изготовления
kp = 160; %удельная стоимость покраски
tet = 2;
C0 = 1;
C1 = 1.25;
k = 2;
psip = 4;
rop = 0.6;
psia = 1;
tn = 0.040; ht = 0.001; tk = 0.060;
% Толщины t
t = tn:ht:tk;
% Ограничение на прочность
Za = L^2*sqrt(1-nu^2) ./ (R*t);
Zp = Za;
ksip = 1.04*sqrt(Zp);
Cp = psip*sqrt(1+(rop*ksip/psip).^2);
sigmaEp = Cp*pi^2*E.*t.^2/(12*(1-nu^2)*L^2);
roa = 0.5*(1+R./(150*t)).^-0.5;
ksia = 0.702*Za;
Ca = psia*sqrt(1+(roa.*ksia/psia).^2);
sigmaEa = Ca*pi^2*E.*t.^2/(12*(1-nu^2)*L^2);
sigmaap = p*R./t;
sigmaaa = N./(2*R*pi*t);
fy1 = fy/1.1;
sigmaae = sqrt(sigmaaa.^2-sigmaaa.*sigmaap+sigmaap.^2);
lambda2 = (fy1./sigmaae).*(sigmaaa./sigmaEa+sigmaap./sigmaEp);
PCh = fy1./sqrt(1+lambda2.^2);
g = (sigmaae./PCh)-1;
% Функция стоимости
f1 = km*5*ro*2*R*pi*t*Ls;
f2 = 10*kf*tet*C0*exp(6.8582513-4.527217*((1000*t).^-
0.5)+0.009541996*((2*R)^0.5));
f3 =
5*kf*(C1*tet*sqrt(k*ro*2*R*pi*Ls*t)+1.3*0.152*0.001*2*Ls*((1000*t).^1.9358));
f4 =
kf*(C1*tet*sqrt(25*ro*2*R*pi*Ls*t)+1.3*0.152*0.001*4*2*R*pi*((1000*t).^1.9358
));
f5 = 4*R*pi*L*kp;
```

```

f6 = (f1+f2+f3+f4+f5)/100000000;
% Построение графиков
plot(t, [g', f6'], 'LineWidth', 2)
xlim([tn,tk]);
ylim([-0.2,0.6]);
xlabel('t, м')
ylabel('функция ограничения на выпучивание|Стоимость, 10^7 руб')
set(gca, 'XTick',tn:0.002:tk);
set(gca, 'YTick',-1:0.05:2);
grid on
legend('Ограничение на выпучивание оболочки', 'Стоимость')

```

На Рис. 6.2 в зависимости от толщины оболочки t зеленой линией показана функция стоимости (6.17), синей линией показана левая часть неравенства (6.17). Допустимые по выпучиванию толщины находятся там, где функция ограничения отрицательна. Технологическое ограничение (6.18) выполняется для всех допустимых толщин. Звездочкой отмечена толщина, для которой в допустимой области стоимость минимальна.

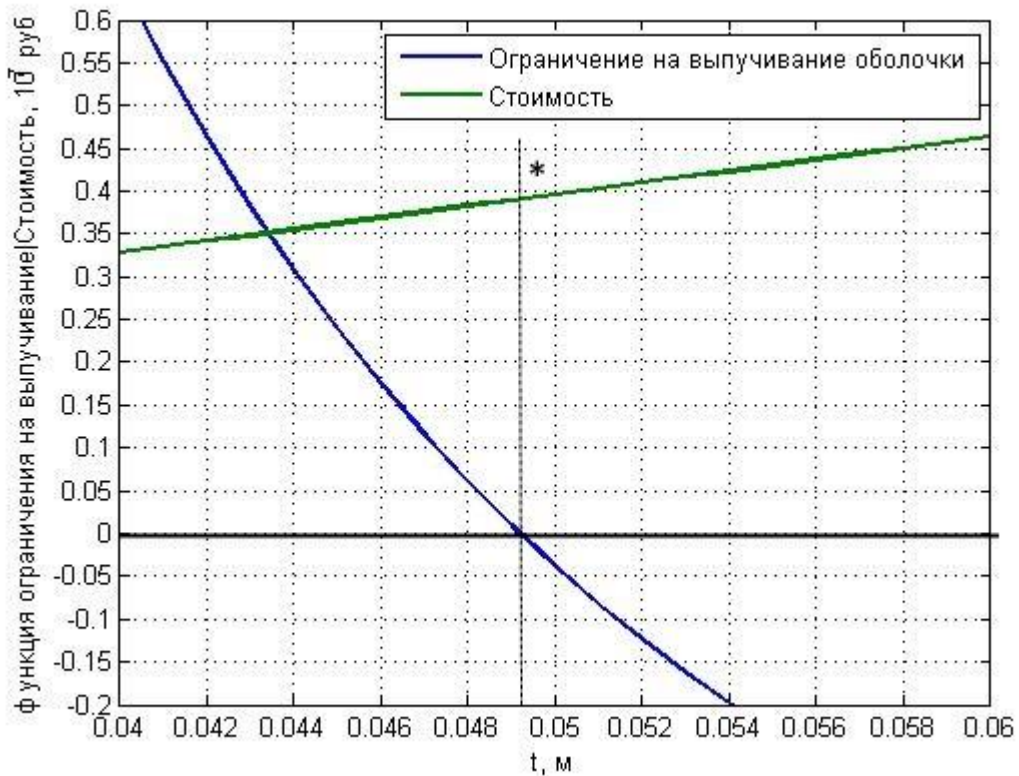


Рис. 6.2. Графическое решение

Matlab-код численного одномерного решения с помощью функции *fmincon* представлен далее.

Листинг 3. Численная оптимизация гладкой цилиндрической оболочки

```

% Гладкая цилиндрическая оболочка. Численная одномерная оптимизация.
% Руссу А.С., Киселев В.Г. 02.06.18.
function smooth

```

```

x0 = [0.01];
lb = [0.001];
ub = [0.05];
[x,fval] = fmincon(@Rimc,x0,[],[],[],[],lb,ub,@Ricon)
end
function z = Rimc(x)
x = [x(1)];
%Фиксированные параметры
ro = 7850; %плотность
Ls = 3; %длина сегмента оболочки
L = 15; %длина оболочки
R = 1.85; %радиус оболочки
km = 45; %удельная стоимость материала пластин
kf = 60; %удельная стоимость изготовления
kp = 160; %удельная стоимость покраски
tet = 2;
C0 = 1;
C1 = 1.25;
k = 2;
f1 = km*5*ro*2*R*pi*x(1)*Ls;
f2 = 10*kf*tet*C0*exp(6.8582513-4.527217*((1000*x(1))^0.5)+0.009541996*((2*R)^0.5));
f3 =
5*kf*(C1*tet*sqrt(k*ro*2*R*pi*Ls*x(1))+1.3*0.152*0.001*2*Ls*((1000*x(1))^1.9358));
f4 =
kf*(C1*tet*sqrt(25*ro*2*R*pi*Ls*x(1))+1.3*0.152*0.001*4*2*R*pi*((1000*x(1))^1.9358));
f5 = 4*R*pi*L*kp;
z = (f1+f2+f3+f4+f5)/10000000;
end
function [c,ceq] = Ricon(x)
x = [x(1)];
%Фиксированные параметры
E = 2.1e11; %модуль Юнга
nu = 0.3; %коэффициент Пуассона
fy = 355e6; %предел прочности
p = 15e5; %интенсивность внешнего давления
N = 54e6; %сила сжатия
%Ls = 3; %длина сегмента оболочки
L = 15; %длина оболочки
R = 1.85; %радиус оболочки
psip = 4;
rop = 0.6;
psia = 1;
Za = (L*L*sqrt(1-nu*nu))/(R*x(1));
Zp = Za;
ksip = 1.04*sqrt(Zp);
Cp = psip*sqrt(1+((rop*ksip)/(psip))^2);
sigmaEp = (Cp*pi*pi*E*x(1)*x(1))/(10.92*L*L);
roa = 0.5*((1+(R)/(150*x(1)))^-0.5);
ksia = 0.702*Za;
Ca = psia*sqrt(1+((roa*ksia)/(psia))^2);
sigmaEa = (Ca*pi*pi*E*x(1)*x(1))/(12*(1-nu*nu)*L*L);
sigmaEp = (p*R)/(x(1));
sigmaaa = (N)/(2*R*pi*x(1)); %m
fy1 = fy/1.1;
sigmaae = sqrt(sigmaaa*sigmaaa-sigmaaa*sigmaEp+sigmaEp*sigmaEp);
lambda2 = (fy1/sigmaae)*(sigmaaa/sigmaEa+sigmaEp/sigmaEp);
PCh = (fy1)/(sqrt(1+lambda2*lambda2));
c(1) = (sigmaae/PCh)-1;
ceq = [];
end

```

Численная и графическая оптимизация дают сходные результаты.

$$f_{min} = 3.907 \text{ млн руб}$$

при

$$t_{opt} = 0.0492 \text{ м.}$$

Составляющие стоимости f_{min} показаны на Рис. 6.3.

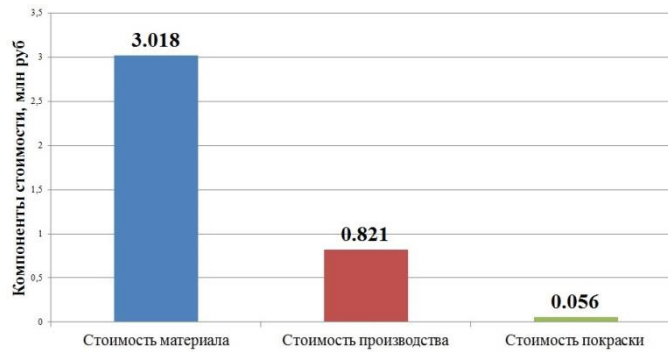


Рис. 6.3. Составляющие стоимости

При этом масса оболочки будет равна:

$$m = 67.07 \text{ тонны.}$$

6.5. Исследовать решение

- Решить задачу при глубине 300 метров под водой,
- Решить задачу для оболочки из дюралюминия.

7. Брахистохрона

Формулировка в конце XVII века И. Бернулли задачи о брахистохроне (греч - наибо́льшая) положила начало изучению нового класса экстремальных задач – вариационному исчислению, в котором управляемыми переменными служат не значения параметров, а функции независимых аргументов.

В вертикальной плоскости даны точки A и B (Рис. 7.1). Определить путь AMB , спускаясь по которому без трения под действием собственной тяжести, тело M , начав двигаться из точки A , достигнет точки B в кратчайшее время [27], [28], [29].

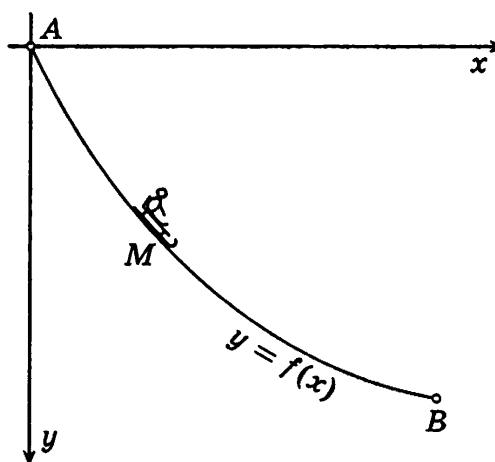


Рис. 7.1. Брахистохрона. Постановка задачи

Решение. Пусть y – вертикальная ось, x – горизонтальная ось, $y = y(x)$ – искомая кривая, точка A находится в начале координат $(0,0)$, точка B имеет координаты (a, b) .

Время прохождения пути при скорости движения $v(x)$ будет даваться интегралом

$$\int_0^a \frac{ds(x)}{v(x)}. \quad (7.1)$$

Дифференциальный элемент длины дуги ds представляется как

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Скорость на высоте y под действием гравитации, исходя из сохранения энергии, равна

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (7.2)$$

Общее время движения

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} dx \quad (7.3)$$

Это время должно быть минимизировано при граничных условиях $y(0) = 0, y(a) = b$.

Если подынтегральная функция $F(x, y, y')$ не зависит явно от x , то необходимое условие экстремума - уравнение Эйлера-Лагранжа записывается как $F - y'F_{y'} = \tilde{C}_1$ [27]

В нашем случае, пренебрегая постоянным коэффициентом $1/\sqrt{2g}$, получаем

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = \tilde{C}_1$$

Откуда

$$y(1 + y'^2) = \left(\frac{1}{\tilde{C}_1}\right)^2 = C_1$$

Положим $y' = ctg \frac{t}{2}$, где t - некоторый параметр, характеризующий точку на кривой $y(x)$. Подставляем в предыдущее уравнение, будем иметь $y = C_1 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t)$.

$$\text{Далее, } dx = \frac{dy}{ctg \frac{t}{2}} = \frac{C_1 \sin t \cdot dt}{2 ctg \frac{t}{2}} = C_1 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot dt.$$

Интегрируя, получим

$$x = C_1 \int \frac{(1 - \cos t) dt}{2} = C_1(t - \sin t) + C_2$$

Из условия $x(0) = 0$ находим $C_2 = 0$.

Итак

$$\begin{aligned} x &= C_1(t - \sin t) \\ y &= \frac{C_1}{2}(1 - \cos t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это параметрическое уравнение циклоиды, по-другому, брахистохроны. Движение (7.4) и альтернативы для кривой циклоиды показаны на сайте armonitor.com/wiki/index.php/Apps/BrachistochroneProblem.

Пусть t_1 – параметр достижения конца циклоиды. Из условия $y(a) = b$ находим, что t_1 – это корень нелинейного уравнения

$$\frac{2(t_1 - \sin t_1)}{1 - \cos t_1} = \frac{a}{b} \quad (7.5)$$

Тогда $C_1 = \frac{a}{t_1 - \sin t_1} = \frac{2b}{1 - \cos t_1}$.

В начальной точке брахистохрона вертикальна.

Уравнение (7.5) имеет бесконечное число корней для параметра t_1 . При $t_1 < \pi$ брахистохрона (7.4) монотонно убывает для $0 < t < t_1$, при $t_1 > \pi$ брахистохрона имеет точку экстремума, при $t_1 > 2\pi$ брахистохрона имеет несколько участков (Рис. 7.2).

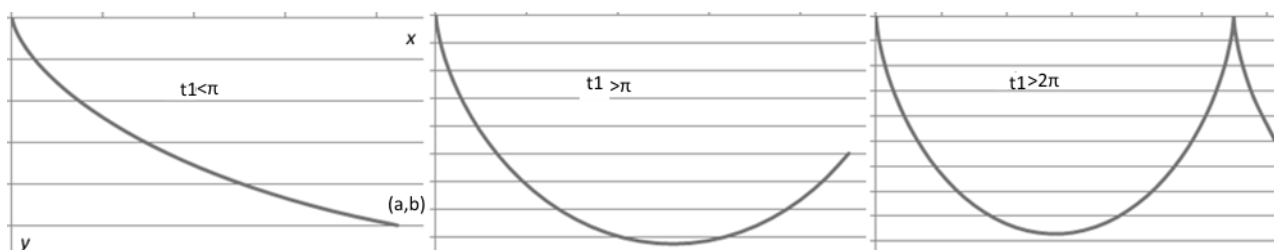


Рис. 7.2. Зависимость брахистохроны от конечного параметра

Брахистохроны будут решениями следующих задач.

Задача 1. Какова траектория световых лучей от точки А до точки В в атмосфере, где скорость распространения пропорциональна квадратному корню из высоты, траектория подчиняется принципу Ферма?

Задача 2. Найти минимальную поверхность вращения. Найти кривую, проходящую через две заданные точки и образующую поверхность вращения с минимальной площадью боковой поверхности.

Исследование

- Получить графики Рис. 7.2 в Excel.
- Получить график брахистохроны для $t_1 = 14$.
- Дать решение задачи 1.

Список литературы

1. Haftka R.T., Gurdal Z. Elements of structural optimization. 3rd ed. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992. 502 pp.
2. Chaitanya G., Sreenivasulu R. Design Optimization Of Tripod Truss: SLP Approach // Independent Journal Of Management & Production. 2015. Vol. 6. No. 1. pp. 83-92.
3. Sandgren E. Nonlinear Integer and Discrete Programming in Mechanical Design Optimization // Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design. 1990. No. 112(2). pp. 223–229.
4. Gandomi A.H., Yang X.S. Benchmark Problems in Structural Optimization // In: Comput. Optimization, Methods and Algorithms, / Ed. by Koziel S., Yang X. Springer, 2011. pp. 259–281.
5. Messac A. Optimization in Practice with MATLAB for Engineering Students and Professionals. Cambridge University Press. , 2015. 496 pp.
6. Rao R.V., Savsani V.J. Mechanical Design Optimization Using Advanced Optimization Techniques. Springer, 2012. 333 pp.
7. Yang X.S.P. Engineering optimization. An Introduction with Metaheuristic Applications. John Wiley, 2010. 347 pp.
8. Onwubolu G.C., Babu B.V. New Optimization Techniques in Engineering. Springer, 2004. 710 pp.
9. Rao R.V., Savsani V.J., and Vakharia P. Teaching–learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems // Computer-Aided Design. 2011. Vol. 43. pp. 303–315.
10. Koziel S, Leifsson L, editors. Surrogate-Based Modeling and Optimization. Applications in Engineering. Springer, 2013. 413 pp.
11. Kaveh A. Advances in Metaheuristic Algorithms for Optimal Design of Structures. 2nd ed. Springer, 2017. 631 pp.

12. Серенсен В, редактор. Справочник машиностроителя. В шести томах. 2-е-е изд. Т. 3. М.: Машгиз, 1956.
13. Arora J.S. Introduction to Optimum Design. 2nd ed. Elsevier Academic Press, 2004.
14. Lemonge A., Barbosa H., Borges C., and Silva F. Constrained Optimization Problems in Mechanical Engineering Design Using a Real-Coded Steady-State Genetic Algorithm // Mecánica Computacional. 2010. Vol. XXIX. pp. 9287-9303.
15. Rao S.S. Engineering Optimization: Theory and Practice. Fourth Edition. John Wiley & Sons, 2009. 830 pp.
16. Rao R.V. Teaching Learning Based Optimization Algorithm And Its Engineering Applications. Springer International Publishing, 2016. 291 pp.
17. Mastinu G., Gobbi M., and Miano. Optimal Design of Complex Mechanical Systems With Applications to Vehicle Engineering. Springer, 2006. 359 pp.
18. Vanderplaats G. Numerical optimization Techniques for Engineering Design. 3rd ed. 1999. 441 pp.
19. Christensen P.W., Klarbring A. An Introduction to Structural Optimization. Springer, 2009. 211 pp.
20. Yang X.S.P., Bekdaş G., and Nigdeli S.M. Metaheuristics and Optimization in Civil Engineering. Springer, 2016. 302 pp.
21. Venkataraman P. Applied optimization with MATLAB programming. 2th edition. A Wiley-Interscience publication, 2009. 398 pp.
22. Lobato F.S., Steffen V. Multi-Objective Optimization Problems. Springer, 2017. 161 pp.
23. Haug E.J. Engineering design Handbook. Computer Aided design of Mechanical Systems. Part Two. US Army Material Development and Readness Command, 1977. 550 pp.
24. Jarmai K., Snyman J.A., and Farkas J. Minimum cost design of a welded orthogonally stiffened cylindrical shell // Computers and Structures. 2006. Vol. 84.

pp. 787-797.

25. Det Norske Veritas (DNV): Buckling strength analysis. Classification Notes No. 30.1. Hovik, Norway, 1995.
26. Farkas J., Jarmai. Optimum Design of Steel Structures. Berlin: Springer Verlag, 2013. 265 pp.
27. Pedregal P. Introduction to Optimization. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2004. 249 pp.
28. Pedregal P. Optimization and Approximation. Springer, 2017. 261 pp.
29. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Книга по требованию, 2012.

Владимир Геннадьевич **Киселев**, Олег Анатольевич **Сергеев**, Светлана Анатольевна
Сергеева

Учебные задачи оптимизации конструкций

Практикум

Компьютерная верстка: В.Г. Киселев

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.