МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского»**

А. В. Зорин
В. А. Зорин
М. А. Федоткин

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института ИТММ для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
010302 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 519.21
ББК В17
З86

З86 Зорин А. В., Зорин В. А., Федоткин М. А. СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. — 8 с.

Рецензент: д. ф.-м. н, проф. кафедры АГДМ **Н. Ю. Золотых.**

В настоящем учебном пособии содержится описание лабораторной работы, знакомящей на практике с основными свойствами вероятности. Созданная для выполнения работы компьютерная программа демонстрирует свойство вероятности как «идеальной частоты», монотонности и аддитивности вероятности, а также эффект статистической независимости событий. Пособие также содержит указания по выполнению лабораторной работы и контрольные вопросы.

Лабораторная работа создано в помощь студентам высших профессиональных учебных заведений, изучающим общий курс “Теория вероятностей”.

УДК 519.21
ББК В17

1. Необходимые теоретические сведения

Теория вероятностей, как и любая другая наука, содержит ряд интуитивных положений, которые не имеют точных формализаций, строгих определений, и, наконец, аксиом, на которых она развивает общую теорию. Основные понятия теории вероятностей суть эксперимент (опыт, испытание), допустимые исходы (результаты) эксперимента, статистически устойчивый случайный эксперимент, элементарные исходы эксперимента и, наконец, вероятность события [1].

Исторически для определения вероятности возникли и развились разные подходы. В работе Ж.-Б. Лапласа «Théorie analytique des probabilités» (1820) было сформулировано классическое определение вероятностей, применимое к равновозможным исходам эксперимента. Такой подход обобщал накопленный к тому времени опыт по анализу «шансов» (Х. Гюйгенс, П. Ферма, Б. Паскаль). Другой род задач привёл к формированию понятия геометрической вероятности (Ж. Бюффон: «геометрия может быть использована в качестве аналитического инструмента в области теории вероятностей»). Р. Мизес предложил частотный подход к определению вероятности. Постулировалось, что существует предел частоты события при неограниченном увеличении числа опытов. Задача об аксиоматизации теории вероятностей была названа среди насущных задач математики Д. Гильбертом в 1900 году. Окончательно эта задача была решена А. Н. Колмогоровым, которому удалось построить строгую теорию с привлечением теории множеств и теории интеграла Лебега. При этом, по мысли А. Н. Колмогорова, теорию вероятностей отличает от теории меры наличие понятия *независимости*. Кроме того, развитие теории вероятностей после Колмогорова (1933) дало новые направления исследований и в теории меры [2].

Изложение теории вероятностей в современных учебниках [1, 3] следует пути аксиоматики Колмогорова. Последовательно вводятся: пространство Ω описаний элементарных исходов; логические отношения между событиями: объединение событий $A \cup B$, пересечение событий $A \cap B$, противоположное событие $\overline{A}$; сигма-алгебра $\mathfrak{F}$ наблюдаемых событий $A \subset \Omega$. Наконец, вероятность P вводится как измеритель (только) наблюдаемых событий, удовлетворяющий аксиомам Колмогорова:

1. $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ для $A \in \mathfrak{F}$.

2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

3. Для последовательности $A_1, A_2, \ldots$ несовместных событий $A_i \in \mathfrak{F}$ имеет место равенство $\mathsf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Из аксиом выводятся такие первые свойства:

— множество значений вероятности есть отрезок $[0,\ 1]$;

— вероятность монотонна относительно событий, т.е. $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$ при $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $A \subset B$.

События A и B называются независимыми *относительно вероятности* P, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$. Классическая и геометрическая вероятности удовлетворяют аксиомам А. Н. Колмогорова, поэтому дают конкретные примеры вероятностных мер.

Истоки определений и аксиом в теории вероятностей удобно изучать на примере понятия *частоты* события. Пусть задан комплекс условий Σ проведения эксперимента. Рассмотрим событие $A \in \mathfrak{F}$. Проведём независимым образом эксперимент n раз. Независимость в данном контексте означает, что события, которые произошли в предыдущих экспериментах, не влияют на события, которые могут произойти в данном эксперименте. Обозначим через $\{\omega_k\}$ элементарный исход в k-м эксперименте. n-кратное повторение эксперимента означает, что определена точка $(\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots, \ \omega_n)$ пространства $\Omega^n = \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega$ (n-й декартовой степени множества Ω). Событие A произошло в k-м опыте, если $\omega_k \in A$. Обозначим через $k_n(A)$ число экспериментов, в которых произошло событие A, если общее число экспериментов равняется n. Величина

$$\nu_n(A) = \frac{1}{n}\, k_n(A)$$

называется *частотой* события A (в указанной серии экспериментов). Частота может быть вычислена только после проведения экспериментов и, вообще говоря, меняется, если провести другую серию из n экспериментов, а тем более, если изменить n.

Приведём некоторые простые свойства частот [3].

1. $\nu_n(\Omega) = 1$ для достоверного события Ω.
2. $\nu_n(\varnothing) = 0$ для невозможного события $\varnothing$.
3. Для любого события $A \in \mathfrak{F}$ выполняется неравенство $0 \leqslant \nu_n(A) \leqslant 1$.
4. Если $A \subset B$, то $\nu_n(A) \leqslant \nu_n(B)$.
5. Если A и B — несовместные события, то $\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$.
6. Для любого события $A \in \mathfrak{F}$ имеет место соотношение $\nu_n(\overline{A}) = 1 - \nu_n(A)$.
7. Могут существовать события A, B такие, что $\nu_n(A) \approx k_n(A \cap B)/k_n(B)$ при большом числе опытов n и это приближённое равенство достаточно устойчиво наблюдается от серии к серии.

Величина $\nu_n(A|B) = k_n(A \cap B)/k_n(B)$ называется *условной частотой* события A при условии (относительно) B. Характеристика «условная» в данном случае оправдана с точки зрения обыденной речи. Если исходный эксперимент проведён n раз и событие B наблюдалось $k_n(B)$ раз, то столько же раз фактически был проведён условный эксперимент (условие — наступление B — добавлено к комплексу условий Σ проведения эксперимента). Теперь среди $k_n(B)$ число наступлений события A подсчитывается обычным образом и равно $k_n(A \cap B)$. Тогда свойство 7 означает, что наступление события B не меняет *частоты* наступления события A (с точностью до отклонений под воздействием случайных факторов). События A и B в таком случае естественно называть *статистически независимыми*. Физическая независимость событий (как в примере с выпадением орла на двух различных монетах) лишь частный случай статистической независимости. В других случаях (пример С. Н. Бернштейна с пирамидкой, примеры из анализа[1]) статистическая независимость вовсе не очевидна. Употребление прилагательного «статистическая» не означает, что речь идёт только о частотах событий. Когда вероятность $\mathsf{P}(A)$ события $A \in \mathfrak{F}$ определяется не опытным путём, а задаётся любым другим известным способом, говорят о статистической независимости как о независимости относительно вероятности P.

2. Описание лабораторной работы

Лабораторная работа проводится в режиме диалога студента с компьютерной программой. Программа сообщает описание эксперимента, набор событий и обеспечивает выполнение четырёх заданий. Каждое задание предназначено для того, чтобы познакомить студента на практике с одним конкретным свойством частоты. Каждое задание состоит из расчётной части и имитационной части. В расчётной части студент должен выбрать из предложенных события с заданными свойствами и вычислить их вероятности. В имитационной части компьютер проводит несколько серий экспериментов и подсчитывает частоты рассматриваемых событий.

В **первом задании** требуется предварительно выбрать описание элементарных исходов и способ задания вероятности. После этого требуется вычислить вероятность события, предложенного компьютером. Имитационная часть задания помогает выявить зависимость частоты события от количества экспериментов. Во **втором задании** изучается свойство монотонности вероятности и частоты. На основании определения предлагается выбрать из предложенных пар событий такие пары, в которых первое событие влечёт второе. Для одной из таких пар требуется вычислить вероятности событий и убедиться, что известное неравенство (с. 4) выполнено. Затем на примере результатов имитационного моделирования нужно убедиться, что свойство монотонности частоты также имеет место. В **третьем задании** изучаются несовместные события. Сначала из предложенных пар событий надо выбрать те пары, в которых события являются несовместными. Затем требуется вычислить вероятности таких событий и вероятность их объединения. Имитационная часть работы позволяет убедиться в выполнении свойства сложения для частот. В **четвёртом задании** изучается свойство статистической независимости событий. Из предложенных пар событий требуется найти пары независимых событий и вычислить вероятности их пересечений. Частоты и условные частоты событий приводятся по результатам имитационного моделирования, так что есть возможность пронаблюдать свойство статистической

[1] М. Кац. Независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел.

независимости событий.

В рабочем окне присутствуют следующие элементы: 1) панель инструментов с кнопками выхода из программы, выбора варианта задания, рационального калькулятора, перехода к предыдущему и следующему диалогам; 2) текст задачи; 3) окно статистики; 4) поле диалога с пользователем. При нажатии кнопки выбора варианта открывается диалоговое окно, содержащее список всех имеющихся вариантов задач. Выбрав вариант из списка, подтвердите выбор нажатием кнопки «OK». В поле текста задачи появится описание условий эксперимента и описания шести событий. В поле диалога с пользователем появится задание к первой части. После вычисления и ввода ответа проверка правильности ввода и переход к следующей части осуществляются нажатием кнопки «стрелка вправо» на панели инструментов.

Поскольку во всех заданиях вероятности являются рациональными числами, предусмотрена возможность ввода ответа как в виде рациональной дроби, так и в виде арифметического выражения, содержащего целые числа и знаки сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Части выражения группируются обычным образом при помощи круглых скобок. Например, допустимым является выражение `(2^2*3^3+3^2*2^3)/(5^5)`.

Имитационная часть первого задания состоит в следующем. За один раз проводится 10 серий экспериментов. Число экспериментов в каждой серии отображено в таблице. Эти числа могут изменяться пользователем. В выпадающем списке можно выбрать любое из шести событий. Нажатие кнопки «Запуск» вызывает процедуру имитационного моделирования в соответствии с заданным планом. При снятом «флажке» «Обновлять» результаты предыдущих запусков сохраняются на графике, что позволяет выявить, как часто встречаются большие и малые отклонения частоты от вероятности.

Работа со вторым и третьим заданиями реализуются по одной схеме. Продемонстрируем эту схему для второго задания. Пользователю предлагаются на выбор шесть утверждений, из которых требуется отобрать верные и отметить их «флажком». При нажатии кнопки перехода к следующему заданию дополнительно потребуется ввод вероятностей некоторых событий из перечисленных пар (в третьем и четвёртом задании дополнительно требуется ввести вероятности соответственно объединения и пересечения этих событий). Ответ можно ввести в виде арифметического выражения, как это описано для первого задания. В имитационной части вычисляются частоты двух событий, удовлетворяющих теме задания. Пара событий, для которой проводится моделирование, можно выбрать из выпадающего списка. Моделирование начинается после нажатия кнопки «Запуск».

Выпадающий список в имитационной части четвёртого задания содержит как пары независимых событий, так и пары зависимых событий. Результаты моделирования отображаются в виде таблицы и графически.

3. Контрольные вопросы

1. Доказать свойства 1–3 на с. 4.

2. Можно ли считать, что последовательность частот стремится к некоторому пределу, который и есть вероятность события?

3. Построить пример последовательности элементарных исходов $\{\omega'\}$, $\{\omega''\}$, ... независимых испытаний такую, что $\nu_n(A) \not\to \mathsf{P}(A)$.

4. Построить пример последовательности элементарных исходов $\{\omega'\}$, $\{\omega''\}$, ... независимых испытаний, в котором при увеличении числа экспериментов отклонение частоты события от его вероятности увеличивается.

5. Как доказать, что одно событие не влечёт другое?

6. Доказать свойство 4 на с. 4.

7. Построить пример эксперимента такой, что из $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$ не следует $A \subset B$.

8. Построить пример эксперимента такой, что $A \subset B$, $A \neq B$ и $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B)$.

9. Построить пример последовательности элементарных исходов $\{\omega'\}$, $\{\omega''\}$, ... такой, что $A \subset B$, $A \neq B$ и $\nu_n(A) = \nu_n(B)$. Получить такой результат в программе.

10. Как доказать, что два события совместны?

11. Можно ли доказать равенство $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ для несовместных событий A, B следующим образом: «Поскольку события A и B несовместны, то $\mathsf{P}(A \cap B) = 0$ и по теореме сложения для вероятностей имеем: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$»?

12. Доказать свойство 5 на с. 4.

13. Пусть $A \subset B$, $\mathsf{P}(B) = 0$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) = 0$? Какой математический смысл введения сигма-алгебры $\mathfrak{F}$ событий?

14. Выполняется ли свойство 5 на с. 4 для частот событий A и B, посчитанных по разным сериям независимых опытов? Показать ответ на вопрос с помощью программы.

15. Если $\mathsf{P}(A \cap B) = 0$, следует ли отсюда, что $A \cap B = \varnothing$?

16. На основании выводов из результатов заданий 1–3 можно ли сказать, что частота $\nu_n(\cdot)$ является вероятностью, т.е. удовлетворяет аксиомам А. Н. Колмогорова?

17. Как доказать, что два события являются зависимыми? Достаточно ли для этого вычислить $\mathsf{P}(A|B)$? Рассмотреть случай с $\mathsf{P}(B) = 0$.

18. Как можно в классической схеме вычислить вероятность пересечения событий, не прибегая к теореме умножения?

19. Как объяснить суть независимости событий человеку, не знакомому с основаниями теории вероятностей?

20. Пусть для некоторых независимых событий A и B одновременно

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \qquad \text{и} \qquad \nu_n(A \cap B) \neq \nu_n(A)\nu_n(B).$$

С другой стороны, частота удовлетворяет аксиомам Колмогорова, значит для независимых событий должно иметь место равенство

$$\nu_n(A \cap B) = \nu_n(A)\nu_n(B).$$

Как разрешить противоречие?

21. Если два событий несовместны, будут ли они независимы?

22. Если одно событие влечёт другое, будут ли они независимы?

23. В чём принципиальное отличие понятий монотонности и несовместности, с одной стороны, и независимости событий, с другой? В каком случае требуется предполагать заданной вероятность?

Литература

1. Федоткин, М. А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики: Учебник. — М.: Высшая школа, 2006. — 368 с.: ил.

2. Скороход А. В. I. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы. // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1989. — Т. 43. — С. 7–145.

3. Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев.: «Высшая школа», 1989. — 344 с.

Андрей Владимирович **Зорин**
Владимир Александрович **Зорин**
Михаил Андреевич **Федоткин**

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23