

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Е. Ю. Петров

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом радиофизического факультета ННГУ для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 03.04.03 “Радиофизика” и аспирантов,
обучающихся по направлению подготовки 03.06.01 “Физика и астрономия”

Нижний Новгород
2019

УДК 537.531, 537.87

ББК 22.313

ПЗ0

Рецензенты:

зав. кафедрой электродинамики ННГУ, профессор **А. В. Кудрин**,
профессор кафедры “Общая и ядерная физика” ННГУ **Т. М. Заборонкова**

ПЗ0 Петров Е. Ю. Излучение электромагнитных волн движущимися заряженными частицами: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2019. — 88 с.

Рассматривается излучение электромагнитных волн движущимися заряженными частицами. Приведён вывод потенциалов Лиенара-Вихерта и выражений для компонент поля точечного заряда в вакууме при произвольном законе движения. Исследованы характеристики излучения заряда в вакууме при нерелятивистских и релятивистских скоростях движения. Достаточно подробно рассмотрена теория магнито-тормозного, тормозного, черенковского и переходного излучений. Обсуждаются экспериментальные приложения изложенной теории: излучение частиц в ондуляторах, тормозное излучение плазмы, черенковские и переходные счётчики.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики.

Ответственные за выпуск:

председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,

к.ф.-м.н., доцент **Н. Д. Миловский**,

зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета

ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е. З. Грибова**

УДК 537.531, 537.87

ББК 22.313

©Петров Е. Ю., 2019

©Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, 2019

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Излучение электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися в вакууме	7
1.1. Электромагнитное поле равномерно и прямолинейно движущегося в вакууме заряда	7
1.2. Поле точечного заряда в вакууме при произвольном законе движения. Потенциалы Лиенара-Вихерта	10
1.3. Дипольное излучение нерелятивистского заряда. Формула Лармора	15
1.4. Угловое распределение излучения релятивистского заряда . . .	16
1.4.1. Мгновенная диаграмма направленности в общем случае .	16
1.4.2. Излучение при прямолинейном ускоренном движении заряда	17
1.4.3. Излучение при мгновенном движении заряда по окружности	19
1.4.4. Об излучении при произвольном ультрарелятивистском движении. Ондюляторное излучение	21
1.5. Спектральное распределение энергии, излучаемой ускоренными зарядами	22
1.6. Магнито-тормозное излучение	25
1.6.1. Угловое распределение и поляризация магнито-тормозного излучения	25
1.6.2. Спектральное распределение магнито-тормозного излучения	30
1.7. Тормозное излучение	33
1.7.1. Общие кинематические формулы, описывающие нерелятивистское движение электрона в кулоновском поле иона	34
1.7.2. Излучение при движении электрона по эллиптической орбите	36

1.7.3. Излучение при движении электрона по гиперболической траектории	40
1.8. Тормозное излучение плазмы	44
1.9. О влиянии излучения частицы на её движение	47

Глава 2. Излучение электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися в среде **50**

2.1. Излучение Вавилова-Черенкова	50
2.1.1. История открытия и простое качественное объяснение	50
2.1.2. Вывод интегральных представлений компонент поля	52
2.1.3. Излучение Вавилова-Черенкова в среде без дисперсии	57
2.1.4. Потери энергии заряженной частицы, движущейся в среде. Формула Тамма-Франка	58
2.1.5. Расчет потерь энергии заряженной частицы в модели среды с упруго связанными электронами	62
2.1.6. Применение излучения Вавилова-Черенкова	66
2.2. Переходное излучение	68
2.2.1. Вычисление компонент поля	68
2.2.2. Спектральное и угловое распределение энергии переходного излучения. Общие формулы	73
2.2.3. Энергетические характеристики переходного излучения при влёте частицы из вакуума в среду	76
2.2.4. Энергетические характеристики переходного излучения при вылете частицы из среды в вакуум	79
2.2.5. Переходное излучение неподвижного заряда (переходное рассеяние)	81
2.2.6. Применение переходного излучения	82

Приложение. Асимптотики цилиндрических функций при больших абсолютных значениях аргумента и порядка **83**

Список литературы **87**

Предисловие

В университетских курсах, посвященных электромагнитным явлениям, рассматриваются, в основном, свойства электромагнитных волн в областях вне источников. Задачи теории излучения, для решения которых необходимо связать характеристики волн с распределением в пространстве и времени заданных источников электромагнитного поля — сторонних зарядов и токов, представляют более высокий уровень физического образования. Решение большинства задач излучения связано с громоздкими и довольно сложными формульными преобразованиями и уже по этой причине не может быть разобрано в общих лекционных курсах. Между тем, навыки самостоятельного решения задач теории излучения совершенно необходимы для студентов. Многие эффекты, возникающие при излучении электромагнитных волн заданными источниками, носят общезначимый характер. Аналогичные явления наблюдаются для волн различной физической природы и описываются тем же самым математическим аппаратом, что используется для решения электродинамических задач. Простейшими источниками электромагнитных волн являются отдельные заряженные частицы, движущиеся по заданным траекториям. Нахождение характеристик электромагнитного излучения движущихся заряженных частиц позволяет, с одной стороны, познакомить будущих теоретиков с характерным для данной области математическим аппаратом и развить у них базовые навыки решения задач теории излучения волн. С другой стороны, эта тематика чрезвычайно важна и для экспериментаторов: возникающие здесь физические эффекты находят применение в электронике, физике плазмы, оптике, физике частиц высоких энергий и других областях.

Несмотря на такую “чисто радиофизическую” тематику, на радиофизическом факультете ННГУ, насколько известно автору, отсутствует учебная и учебно-методическая литература, посвященная упомянутым выше вопросам. Настоящее учебное пособие, составленное по материалам лекций специального курса “Теория излучения волн”, читаемого студентам магистратуры радиофизического факультета ННГУ, может в какой-то мере восполнить этот пробел. Не претендуя, разумеется, на исчерпывающее рассмотрение всех известных на данное время явлений, связанных с излучением движущихся частиц, пособие содержит достаточно подробное изложение теории основных относя-

щихся сюда эффектов. Пособие состоит из двух глав. Первая глава посвящена излучению движущихся заряженных частиц в вакууме. Здесь рассмотрено тормозное излучение, возникающее при движении заряженных частиц в постоянном однородном магнитном поле и тормозное излучение при движении в кулоновском поле неподвижного заряда. Во второй главе, посвященной излучению движущихся заряженных частиц в среде, изложена теория излучения Вавилова-Черенкова и переходного излучения. Пособие содержит также небольшое число достаточно простых задач, не требующих для решения громоздких выкладок. При составлении пособия использовались монографии и обзорные статьи, перечисленные в списке литературы.

Глава 1

Излучение электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися в вакууме

1.1. Электромагнитное поле равномерно и прямолинейно движущегося в вакууме заряда

Определим электромагнитное поле в лабораторной системе отсчета K , создаваемое точечным зарядом q , движущимся равномерно и прямолинейно в этой системе со скоростью $\vec{V} = \vec{e}_z v$. Следует сделать важную оговорку, что систему K мы считаем инерциальной. Задачу можно решить с помощью преобразований Лоренца. Систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, будем называть системой K' . Пусть заряд находится в начале координат системы K' . В системе K' скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, очевидно, равны:

$$\varphi' = \frac{q}{r'}, \quad \vec{A}' = 0, \quad (1.1)$$

где $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Штрихованные и нештрихованные координаты связаны преобразованиями Лоренца [1, 2]:

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.2)$$

Потенциалы в лабораторной системе отсчета K :

$$\varphi = \frac{\varphi' + vA'_z/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A_z = \frac{A'_z + v\varphi'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A_x = A'_x, \quad A_y = A'_y. \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения для безразмерных параметров β и γ : $\beta = v/c$ и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Релятивистский фактор γ связывает энергию \mathcal{E} движущейся частицы с её энергией покоя ($\mathcal{E} = \gamma mc^2$,

m — масса покоя частицы). С помощью формул (1.1)–(1.3) легко находим потенциалы φ и A_z в лабораторной системе:

$$\varphi = \gamma\varphi' = \frac{\gamma q}{r'} = \frac{q}{\sqrt{(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2}}, \quad A_z = \beta\gamma\varphi' = \beta\varphi. \quad (1.4)$$

В силу аксиальной симметрии относительно оси z удобно перейти к цилиндрическим координатам. Тогда скалярный потенциал запишется в виде

$$\varphi(\rho, z, t) = \frac{q}{\sqrt{(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2}}. \quad (1.5)$$

Дифференцируя, находим компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{(1 - \beta^2)q\rho}{[(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ E_\varphi &= 0, \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{(1 - \beta^2)q(z - vt)}{[(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2]^{3/2}}, \\ B_\rho &= B_z = 0, \\ B_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = \frac{\beta(1 - \beta^2)q\rho}{[(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2]^{3/2}} = \beta E_\rho. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Введём угол θ между направлением движения частицы (осью z) и радиус-вектором \vec{r} , направленным от заряда к точке наблюдения. Величина θ зависит от времени. Тогда мы можем написать: $\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$, $(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2 = (1 - \beta^2)r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$. Потенциал φ можно представить в виде:

$$\varphi = \frac{q}{r\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}}. \quad (1.7)$$

Посмотрим теперь, как “выглядит” электрическое поле движущегося заряда для неподвижного наблюдателя (в лабораторной системе отсчета K). Пусть расстояние до заряда фиксировано ($r = \text{const}$). Будем менять угол θ . При $\theta = 0$ имеем: $\rho = 0$, $r = z - vt$, $E_\rho = 0$, а компонента E_z равна

$$E_z = E_{\parallel} = (1 - \beta^2)\frac{q}{r^2}. \quad (1.8)$$

В случае же $\theta = \pi/2$: $r = \rho$, $z = vt$, $E_z = 0$, а компонента E_ρ равна

$$E_\rho = E_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{q}{r^2} = \gamma\frac{q}{r^2}. \quad (1.9)$$

В пределе малых скоростей движения частицы формулы (1.8)–(1.9), естественно, переходят в формулу для кулоновского поля неподвижного заряда.

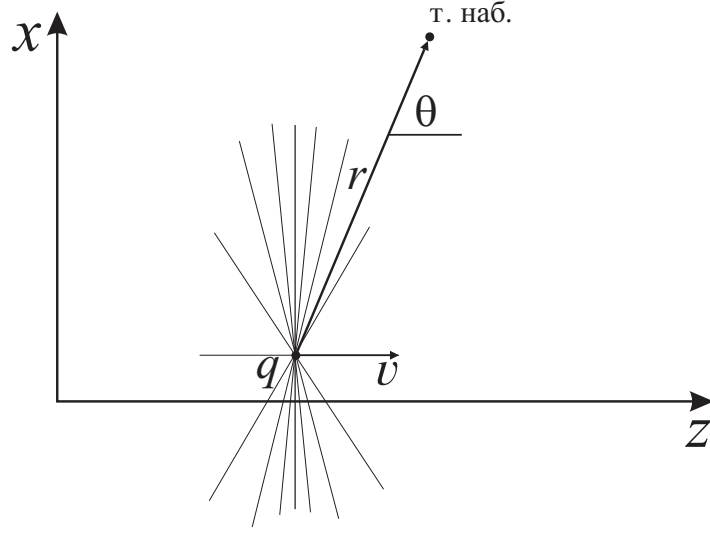


Рис. 1.1. Картина силовых линий электрического поля движущегося заряда в лабораторной системе отсчета

Для релятивистской частицы когда $v \rightarrow c$, $\beta \rightarrow 1$ из формул (1.8)–(1.9) следует, что $E_z \rightarrow 0$, а $E_\rho \rightarrow \infty$. Образно можно представлять, что поле “сплющивается” в направлении движения (см. рис. 1.1).

Построим графики зависимостей компонент поля от времени в фиксированной точке пространства. Пусть координата точки наблюдения $z = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\gamma q \rho}{[\rho^2 + \gamma^2 v^2 t^2]^{3/2}}, \\ E_z &= -\frac{\gamma q v t}{[\rho^2 + \gamma^2 v^2 t^2]^{3/2}}, \\ B_\varphi &= \beta E_\rho. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Графики зависимостей $E_\rho(t)$, $E_z(t)$ и $B_\varphi(t)$, построенные по формулам (1.10) для релятивистского случая $\gamma \gg 1$, показаны на рис. 1.2.

Как видно из рис. 1.2, продольное электрическое поле (компонента E_z) быстро меняет знак и описывается нечетной функцией времени t , так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_z dt = 0.$$

Поскольку реальный регистрирующий прибор наблюдателя имеет некоторую инерцию, в случае ультрарелятивистской частицы он не обнаружит это поле. Наблюдатель зафиксирует только поперечные компоненты поля $E_\rho \simeq B_\varphi$, которые неотличимы от компонент поля импульса плоскополяризованного излучения, распространяющегося вдоль оси z .

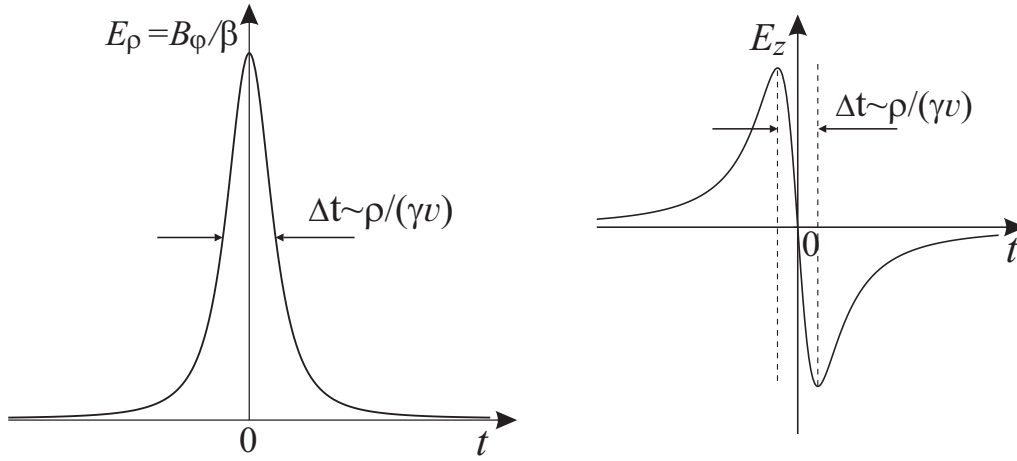


Рис. 1.2. Осциллограммы компонент поля движущегося заряда в фиксированной точке пространства

Заметим, что все компоненты электромагнитного поля убывают с расстоянием по закону $\sim r^{-2}$. Таким образом, найденное решение описывает квазистатические поля, и мы приходим к важному выводу о том, что *заряд, движущийся прямолинейно и равномерно в вакууме, не излучает электромагнитных волн*. К такому выводу, разумеется, можно прийти и из принципа относительности [3]. Для равномерно движущегося заряда существует инерциальная система отсчета где он покоится. Покоящийся заряд не излучает. Поскольку от перехода от одной инерциальной системы к другой излучение появится не может, его нет и для равномерно движущегося заряда.

Естественно предположить, что ускорение заряда приведёт к появлению поля излучения. В следующем разделе мы убедимся в этом непосредственным расчётом.

1.2. Поле точечного заряда в вакууме при произвольном законе движения. Потенциалы Лиенара-Вихерта

Пусть точечный заряд движется в вакууме. Запишем закон движения заряда в произвольной форме: $\vec{r} = \vec{r}_0(t) = \vec{e}_x x_0(t) + \vec{e}_y y_0(t) + \vec{e}_z z_0(t)$, где $x_0(t)$, $y_0(t)$ и $z_0(t)$ — некоторые заданные функции. Поле заряда должно удовлетворять

уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где ρ и \vec{j} — плотности стороннего заряда и тока, отвечающие движущейся точечной частице, соответственно. Эти величины связаны уравнением непрерывности, выражающим закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \tag{1.12}$$

Для заданной траектории движения $\vec{r}_0(t)$ функции ρ и \vec{j} имеют вид

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \tag{1.13}$$

где $\vec{v}(t) = d\vec{r}_0(t)/dt$ — скорость частицы, δ — дельта-функция Дирака.

Для решения системы уравнений (1.11) с ρ и \vec{j} заданными в виде (1.13), удобно ввести потенциалы электромагнитного поля \vec{A} и φ :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{1.14}$$

В рамках калибровки Лоренца потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \tag{1.15}$$

Для решения данных уравнений используем метод функций Грина. Функция Грина G волнового оператора, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \tag{1.16}$$

и принципу причинности, имеет вид:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R}, \tag{1.17}$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Используя (1.17), получаем решения уравнений (1.15) в виде запаздывающих потенциалов:

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}, t) &= \int \rho(\vec{r}', t') \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} d\vec{r}' dt', \\
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}', t') \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} d\vec{r}' dt'.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Подставив (1.13) в (1.18) и проинтегрировав по \vec{r}' , получим

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= q \int \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} dt', \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{c} \int \vec{v}(t') \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} dt',\end{aligned}\quad (1.19)$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|$. Для вычисления интегралов (1.19) воспользуемся известной формулой теории дельта-функции [1, 2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta[g(t')] dt' = \sum_i \frac{f(t_i)}{|g'(t_i)|}, \quad (1.20)$$

где члены суммы берутся в точках t_i , являющихся корнями уравнения $g(t_i) = 0$. Физически очевидно, что в данном случае существует лишь одно значение $t' = t_s$, удовлетворяющее условию

$$g(t_s) = t - t_s - |\vec{r} - \vec{r}_0(t_s)|/c = 0. \quad (1.21)$$

Таким образом, значение t_s отвечает моменту времени, для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда $\vec{r}_0(t_s)$ совпадает с разностью $t - t_s$. Дифференцируя (1.21), находим:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt_s} &= -1 - \frac{1}{c} \frac{d}{dt_s} \sqrt{(x - x_0(t_s))^2 + (y - y_0(t_s))^2 + (z - z_0(t_s))^2} = \\ &= -1 + (\vec{n} \cdot \vec{\beta}),\end{aligned}\quad (1.22)$$

где $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, а $\vec{n} = (\vec{r} - \vec{r}_0(t_s))/|\vec{r} - \vec{r}_0(t_s)|$ — единичный вектор, направленный из точки заряда в точку наблюдения. В итоге, используя (1.20) и (1.22), из (1.19) получаем потенциалы точечного заряда, называемые потенциалами Лиенара-Вихерта:

$$\varphi = \frac{q}{R(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}))} \Big|_{t_s}, \quad \vec{A} = \frac{q\vec{\beta}}{R(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}))} \Big|_{t_s}. \quad (1.23)$$

Здесь мы учли, что $(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) < 1$, так как $v < c$. Все величины (R , \vec{n} и $\vec{\beta}$) в (1.23) берутся в момент времени t_s . Зависимость t_s от координат точки наблюдения и времени t задается неявной функцией $t_s = t_s(x, y, z, t)$ в виде (1.21). Поэтому кажущаяся простота формул (1.23) обманчива. Достаточно сложные зависимости возникают здесь даже при сравнительно простых траекториях движения частицы.

Убедимся прежде всего в том, что для равномерного прямолинейного движения частицы потенциалы Лиенара-Вихерта совпадают с потенциалами, полученными из кулоновского потенциала (1.1) неподвижного заряда с помощью преобразований Лоренца. На рис. 1.3 точками P_s и P показаны положения равномерно движущегося вдоль оси z заряда в моменты времени t_s и t соответственно, а также расстояние $R(t_s)$, входящее в формулы (1.23), отрезок r и угол θ , введённые в предыдущем параграфе.

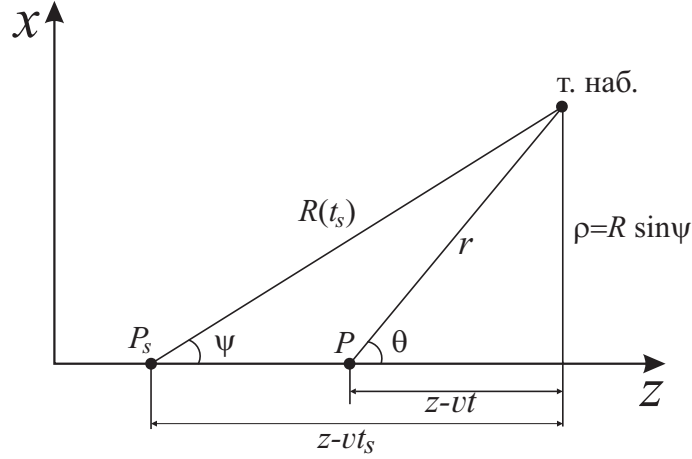


Рис. 1.3. Положение равномерно движущегося заряда в моменты времени t_s и t

Достаточно показать, что формула для потенциала φ (1.23) эквивалентна (1.5). Из рис. 1.3 имеем: $z - vt_s = R \cos \psi$, $1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}) = 1 - \beta \cos \psi$. Далее,

$$\begin{aligned} z - vt &= z - vt_s - v(t - t_s) = z - vt_s - vR/c \\ &= R \cos \psi - \beta R = R(\cos \psi - \beta). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Преобразуем теперь выражение под корнем в (1.15):

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2 &= (1 - \beta^2)R^2 \sin^2 \psi + R^2(\cos \psi - \beta)^2 = \\ &= R^2(\sin^2 \psi - \beta^2 \sin^2 \psi + \cos^2 \psi - 2\beta \cos \psi + \beta^2) = R^2(1 - \beta \cos \psi)^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В итоге приходим к нужному результату:

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{(1 - \beta^2)\rho^2 + (z - vt)^2}} = \frac{q}{R(1 - \beta \cos \psi)}. \quad (1.26)$$

Перейдем к вычислению полей \vec{E} и \vec{B} заряда, движущегося по произвольной траектории. Подставим потенциалы Лиенара-Вихерта (1.23) в формулы (1.14). Получим прежде всего необходимые при дифференцировании φ и \vec{A} формулы для величин $\partial t_s / \partial t$ и ∇t_s . Поскольку $R(t_s) = c(t - t_s)$, мы можем

написать:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t_s} \frac{\partial t_s}{\partial t} = c - c \frac{\partial t_s}{\partial t}, \quad \nabla R = \frac{\vec{R}}{R} + \frac{\partial R}{\partial t_s} \nabla t_s = -c \nabla t_s. \quad (1.27)$$

Производная $\partial R/\partial t_s = -(\vec{n} \cdot \vec{\beta})$ уже встречалась нам в (1.22). Подставляя это значение в (1.27), находим:

$$\frac{\partial t_s}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}, \quad \nabla t_s = -\frac{\vec{n}}{c\kappa}, \quad (1.28)$$

где $\kappa = 1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})$. Получим электрическое поле. Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= q \nabla \left(\frac{1}{R\kappa} \right) + q \frac{\partial}{\partial t_s} \left(\frac{1}{R\kappa} \right) \nabla t_s, \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{q}{c} \frac{\dot{\vec{v}}}{R\kappa} \frac{\partial t_s}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{v} \frac{\partial}{\partial t_s} \left(\frac{1}{R\kappa} \right) \frac{\partial t_s}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Точка означает производную по переменной t_s . Вычисляя входящие в (1.29) частные производные от $1/(R\kappa)$ по x , y , z и t_s , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_s} \left(\frac{1}{R\kappa} \right) &= \frac{c}{R^2 \kappa^2} \left(\frac{R}{c} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) + (\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \beta^2 \right), \\ \nabla \left(\frac{1}{R\kappa} \right) &= -\frac{\vec{n}}{R^2 \kappa} - \frac{1}{R^2 \kappa^2} \left(\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Используя (1.28)–(1.30), после простых преобразований приходим к выражению:

$$\vec{E} = \frac{q}{R^2 \kappa^3} (1 - \beta^2) (\vec{n} - \vec{\beta}) + \frac{q}{c R \kappa^3} \left((\vec{n} - \vec{\beta}) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \kappa \dot{\vec{\beta}} \right). \quad (1.31)$$

Выражение (1.31) можно также представить в виде:

$$\vec{E} = \frac{q}{R^2 \kappa^3} (1 - \beta^2) (\vec{n} - \vec{\beta}) + \frac{q}{c R \kappa^3} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]. \quad (1.32)$$

Аналогично можно показать, что вектор магнитной индукции выражается через \vec{E} как

$$\vec{B} = \left[\vec{n} \times \vec{E} \right]. \quad (1.33)$$

Первое слагаемое в (1.32), пропорциональное R^{-2} , описывает ближнее (квазистатическое) поле и в случае $\dot{\vec{v}} = 0$ совпадает с полем равномерно и прямолинейно движущегося заряда. Второе слагаемое в формуле (1.32) представляет собой волновое поле (поле излучения), зависящее от ускорения $\dot{\vec{\beta}} = \partial \vec{\beta} / \partial t_s =$

$\dot{\vec{v}}/c$ и от расстояния до заряда по закону $\sim R^{-1}$ и дающее поток энергии на бесконечности. Обратим внимание также на то, что как видно из (1.32) и (1.33), векторы волнового электрического и магнитного полей перпендикулярны вектору \vec{n} . Отметим снова, что величины R , \vec{n} и $\vec{\beta}$ в формулах (1.32) и (1.33) рассматриваются как функции переменной t_s и выражаются через x , y , z и t лишь неявно с помощью соотношения (1.21). Зависимости полей от координат точки наблюдения и времени t можно существенно упростить в случае “медленного” (нерелятивистского) движения заряда.

1.3. Дипольное излучение нерелятивистского заряда. Формула Лармора

Для нерелятивистского заряда $v \ll c$, $\beta \ll 1$. Пусть T — характерное время, за которое меняется скорость заряда. Излучение заряда будет тогда обладать периодом порядка T . Характерный размер излучающей системы можно оценить как $a \sim vT$. Условие нерелятивистского движения можно переписать как $vT \ll cT$ или $a \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения. Можно считать, что $|\vec{r}_0(t)| \lesssim a$. Рассмотрим поле на больших расстояниях от заряда ($r \gg a$). Пренебрегая $\vec{r}_0(t)$, из уравнения (1.21) можно выразить t_s в явном виде: $t_s \approx t - r/c$. Учитывая, что $R \approx r$ и для нерелятивистского движения $\kappa \approx 1$, из (1.32) находим:

$$\vec{E} = \frac{q}{cr} \left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] \Big|_{t_s=t-r/c} = \frac{q}{cr} \left(\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} \right) \Big|_{t_s=t-r/c}. \quad (1.34)$$

Откуда видно, что вектор электрического поля лежит в плоскости векторов \vec{n} и $\dot{\vec{v}}$.

Найдем вектор Пойнтинга \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} \times \vec{B} \right] = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} \times \left[\vec{n} \times \vec{E} \right] \right] = \frac{c\vec{n}}{4\pi} E^2 = \frac{c\vec{n}}{4\pi} B^2. \quad (1.35)$$

Пусть θ — угол между векторами \vec{n} и $\dot{\vec{v}}$. Тогда для диаграммы направленности (мощности, излучаемой в единицу телесного угла) получим:

$$P = r^2 S = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (1.36)$$

Как видно из данной формулы, диаграмма направленности излучения ускоренного нерелятивистского заряда совпадает с диаграммой направленности точечного диполя. Поэтому соответствующее излучение называют диполь-

ным. Полная мгновенная мощность излучения определяется выражением

$$W_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3}. \quad (1.37)$$

Эта формула широко известна как формула Лармора.

Задача. Нерелятивистская частица с массой m и зарядом q пролетает через плоский конденсатор. Расстояние между обкладками равно L , а напряженность постоянного однородного поля в конденсаторе равна E . Угол между вектором \vec{E} и направлением скорости \vec{v}_0 частицы при влёте равен α . Знаки заряда и косинуса угла одинаковы. Найти энергию, теряемую частицей на дипольное излучение во время пролёта через конденсатор.

1.4. Угловое распределение излучения релятивистского заряда

1.4.1. Мгновенная диаграмма направленности в общем случае

В соответствии с (1.32) поле излучения в общем случае дается выражением

$$\vec{E} = \frac{q}{cR\kappa^3} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right], \quad (1.38)$$

а радиальная компонента вектора Пойнтинга имеет вид:

$$(\vec{S} \cdot \vec{n}) = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{q^2}{4\pi c R^2 \kappa^6} \left| \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] \right|^2. \quad (1.39)$$

Как видно из этой формулы, в отличие от нерелятивистского случая, угловое распределение излучения зависит, вообще говоря, от взаимной ориентации векторов скорости и ускорения частицы. Кроме того, в знаменателе появляется множитель κ в высокой степени, описывающий, фактически, переход от системы отсчета, в которой частица покоится, к лабораторной системе. Величина $(\vec{S} \cdot \vec{n})$ дает поток энергии за единицу времени через единичную площадку, обусловленный излучением заряда в момент времени $t_s = t - R(t_s)/c$ и регистрируемый в точке наблюдения в момент времени t . Для определения энергии \mathcal{E} , излученной за конечный период ускорения от $t_s = t_1$ до $t_s = t_2$ нужно проинтегрировать:

$$\mathcal{E} = \int_{t=t_1+R(t_1)/c}^{t=t_2+R(t_2)/c} (\vec{S} \cdot \vec{n}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt_s} dt_s, \quad (1.40)$$

где $(\vec{S} \cdot \vec{n}) dt / dt_s$ — энергия, излучаемая через единичную площадку за единицу собственного времени заряда. Энергия, излучаемая за единицу собственного времени заряда в единицу телесного угла, равна

$$P = R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt_s} = \kappa R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}). \quad (1.41)$$

Будем предполагать, что заряд ускоряется в течение короткого промежутка времени так, что вектора $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$ практически не успевают измениться. Кроме того, будем считать, что точка наблюдения расположена далеко от заряда и за время ускорения величины \vec{n} и R меняются пренебрежимо мало. При этих условиях (1.41) будет давать диаграмму направленности излучения:

$$P = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left| \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] \right|^2}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}))^5}. \quad (1.42)$$

Наличие в знаменателе формулы (1.42) выражения $(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}))^5$ позволяет сразу же сделать вывод о том, что интенсивность излучения будет особенно велика для малых углов к направлению движения релятивистских частиц, когда $\beta \approx 1$ и $(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) \lesssim 1$. Обратимся к двум важнейшим частным случаям релятивистского движения зарядов.

1.4.2. Излучение при прямолинейном ускоренном движении заряда

Рассмотрим случай прямолинейного ускоренного движения, когда вектора скорости и ускорения заряженной частицы коллинеарны ($\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$). Учитывая, что при этом $[\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}] = 0$, из (1.42) легко находим:

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad (1.43)$$

где θ — угол между вектором ускорения и направлением на точку наблюдения (вектором \vec{n}). В предельном случае $\beta \ll 1$ отсюда получаем, естественно, формулу (1.36). Если же $\beta \rightarrow 1$, то диаграмма направленности “вытягивается” в направлении ускорения и интенсивность излучения возрастает (см. рис. 1.4). Угол θ_m , для которого интенсивность максимальна, находится из условия

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = 0$$

и равен

$$\theta_m = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right]. \quad (1.44)$$

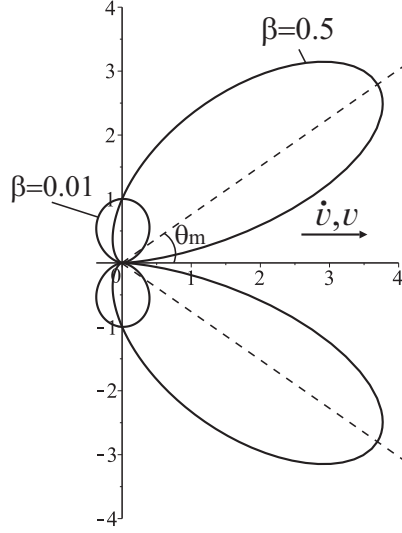


Рис. 1.4. Нормированная диаграмма направленности излучения заряда ($4\pi c^3 P/(q^2 \dot{v}^2)$), испытывающего ускорение в направлении своего движения. Показаны случаи нерелятивистского движения ($\beta = 0.01$, дипольное излучение) и случая $\beta = 0.5$

Наибольший интерес представляет случай ультрарелятивистского движения ($\gamma \gg 1$). Пользуясь формулой $\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ и раскладывая выражение (1.44) в ряд по малому параметру $1/\gamma$, находим:

$$\theta_m \approx \frac{1}{2\gamma}. \quad (1.45)$$

Таким образом, для ультрарелятивистских частиц угол θ_m очень мал — порядка отношения энергии покоя частицы к её полной энергии. Излучение сосредоточено в узком конусе вокруг направления движения.

Вычислим полную мгновенную мощность излучения при $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$:

$$\begin{aligned} W_{\parallel} &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \theta d\theta d\varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_{-1}^1 \frac{(1 - x^2) dx}{(1 - \beta x)^5} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^6 = \gamma^6 W_0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где W_0 — мгновенная мощность излучения нерелятивистского заряда (см. (1.37)). Выразим величину W через силу, действующую на частицу. Мы можем записать:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt_s} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Пусть $\vec{\alpha}$ — единичный вектор в направлении скорости \vec{v} . Если скорость частицы не меняется по направлению, а меняется только по абсолютной величине, то выражение для силы \vec{F} можно представить в виде:

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} \frac{d}{dt_s} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m\vec{\alpha} \dot{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \gamma^3 m \dot{\vec{v}}. \quad (1.47)$$

Выразив из (1.47) величину $\dot{\vec{v}}$ и подставив её в (1.46), получим:

$$W_{\parallel} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} F^2. \quad (1.48)$$

Задача. Релятивистская частица движется прямолинейно. Её скорость убывает от значения v_0 до нуля в течение промежутка времени τ . Найти угловое распределение излучения, испущенного за всё время движения частицы, считая ускорение постоянным. Какая длительность импульса будет зарегистрирована покоящимся прибором?

1.4.3. Излучение при мгновенном движении заряда по окружности

Обратимся теперь к случаю мгновенного движения заряженной частицы по окружности, когда вектора скорости и ускорения перпендикулярны ($\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$). Пусть $\vec{\beta} = \vec{e}_z v/c$, а $\dot{\vec{\beta}} = \vec{e}_x \dot{v}/c$ (см. рис. 1.5). Тогда $(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) = (v \sin \theta \cos \varphi)/c$, $(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = (v \cos \theta)/c$. После несложных преобразований из формулы (1.42)

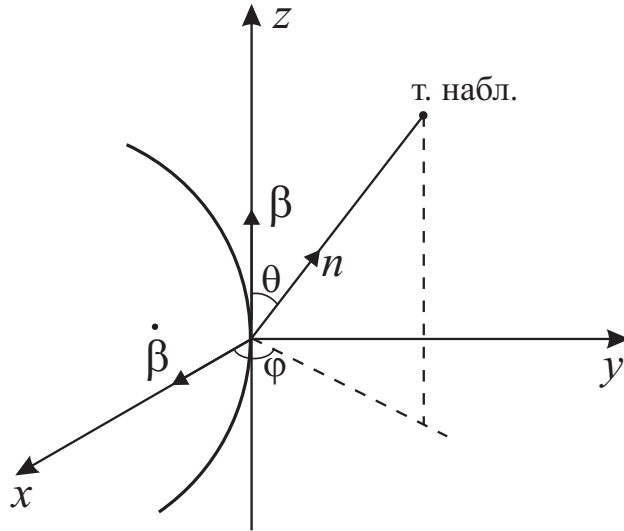


Рис. 1.5. Траектория движения заряда в случае $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$

получаем диаграмму направленности:

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (1.49)$$

Сечения нормированной диаграммы $4\pi c^3 P/(q^2 \dot{v}^2)$ плоскостями xz ($\varphi = 0$) и yz ($\varphi = \pi/2$), рассчитанные по формуле (1.49) при $\beta = 0.5$, показаны на рис. 1.6. Как видно из рис. 1.6, имеется характерная релятивистская концентрация излучения в направлении движения частицы. Для ультрарелятивистских частиц с $\gamma \gg 1$ диаграмма излучения “вытягивается” и представляет собой узкий конус с углом раствора $\sim 1/\gamma$.

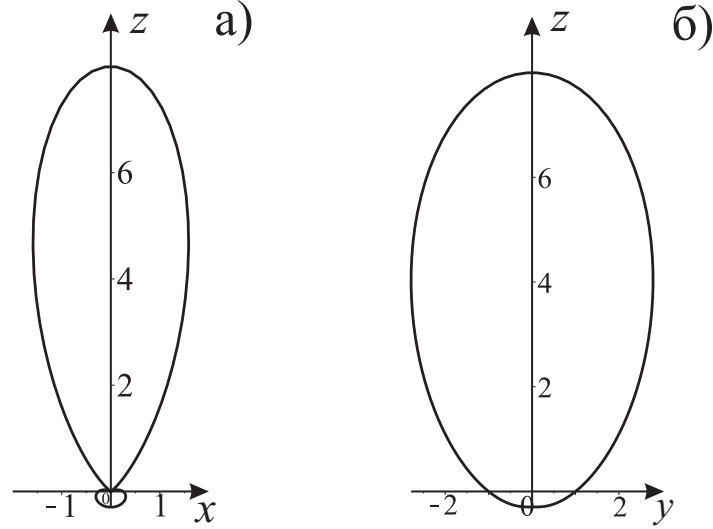


Рис. 1.6. Нормированная диаграмма направленности излучения заряда ($4\pi c^3 P/(q^2 \dot{v}^2)$) при мгновенном движении по окружности: а) — плоскость xz ($\varphi = 0$); б) — плоскость yz ($\varphi = \pi/2$). Рисунки построены для случая $\beta = 0.5$

Найдем полную мгновенную мощность излучения частицы, движущейся по окружности. Интегрируя выражение (1.49), получим

$$\begin{aligned}
 W_{\perp} &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^3} - \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right\} = \\
 &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{2c^3} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - \beta x)^3} - \frac{1}{2\gamma^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - x^2) dx}{(1 - \beta x)^5} \right\} = \\
 &= \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3} \gamma^4 = \gamma^4 W_0. \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

Выразим W_{\perp} через значение действующей на частицу силы F . Если скорость частицы $\vec{v} = v\vec{\alpha}$ меняется только по направлению, то мы получим:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt_s} \left(\frac{mv\vec{\alpha}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt_s} (v\vec{\alpha}) = m\gamma \dot{\vec{v}}.$$

Откуда с учетом (1.48):

$$W_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \gamma^2 F^2 = \gamma^2 W_{\parallel}. \quad (1.51)$$

1.4.4. Об излучении при произвольном ультрарелятивистском движении. Ондюляторное излучение

Таким образом, при одинаковой величине приложенной к частице силы F мощность излучения в γ^2 раз больше при поперечном ускорении, чем при продольном. Исходя из этого обстоятельства можно сделать выводы и об излучении заряженной частицы, совершающей произвольное ультрарелятивистское движение. Излучение при произвольном непрямолинейном движении можно рассматривать как когерентную суперпозицию излучений, обусловленных составляющими ускорения, параллельной и перпендикулярной скорости. Поскольку при одинаковом порядке величины продольной и поперечной сил излучение, обусловленное продольной составляющей, пренебрежимо мало ($\sim 1/\gamma^2$) по сравнению с излучением, обусловленным поперечной составляющей, им можно пренебречь. Другими словами, излучение заряженной частицы при произвольном ультрарелятивистском движении в каждый момент времени приближенно совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности с мгновенным радиусом кривизны ρ , определяемым формулой

$$\rho = v^2 / \dot{v}_{\perp} \approx c^2 / \dot{v}_{\perp}, \quad (1.52)$$

где \dot{v}_{\perp} — поперечная составляющая ускорения. Диаграмма направленности излучения определяется при этом формулой (1.49) и при $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \gg 1$ представляет собой узкий конус с углом раствора $\sim 1/\gamma$.

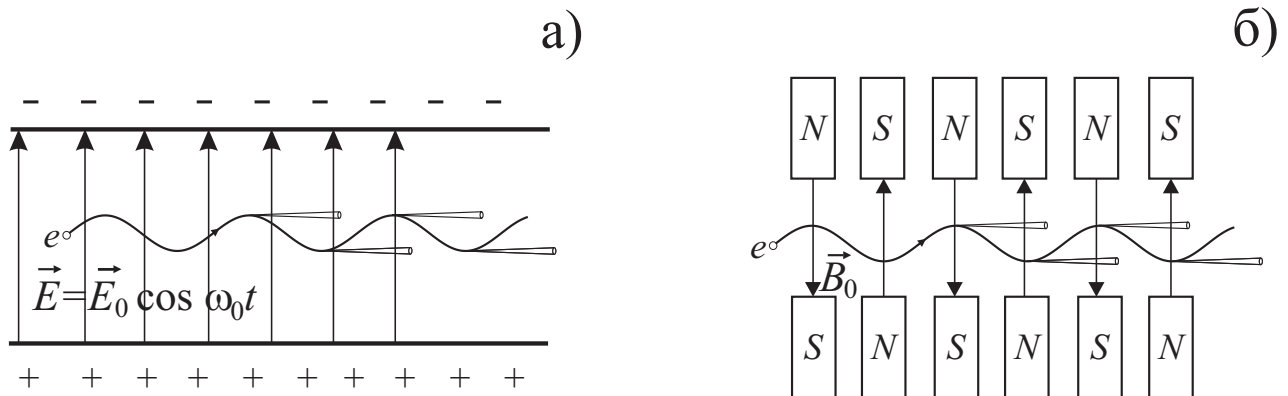


Рис. 1.7. Движение и излучение электронов в электрическом (а) и магнитном (б) ондуляторах. На рисунке б) траектория движения электрона лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка

Рассмотренные нами здесь характерные особенности излучения релятивистских частиц (в основном электронов) широко используются при создании различных приборов и экспериментальных установок. Широкое распространение получили ондуляторы. Ондулятор — устройство, в котором создаются электромагнитные поля, действующие на движущиеся в нем заряженные частицы с периодической силой. Принципиальные схемы электрического и магнитного ондуляторов показаны на рис. 1.7а и 1.7б соответственно. Электрический ондулятор представляет собой плоский конденсатор, между обкладками которого создается однородное в пространстве, но переменное во времени электрическое поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega_0 t$. Релятивистский электрон, влетевший в ондулятор, под действием поперечной по отношению к большой продольной скорости частицы силы испытывает поперечное ускорение и излучает электромагнитные волны. Для быстрых частиц траектория движения в ондуляторе слабо отличается от прямой. При этом излучение идет практически вдоль установки. В магнитном ондуляторе с помощью системы магнитов (такое устройство называется вигглером (англ. wiggler)) создается периодическое в пространстве постоянное магнитное поле, что тоже приводит к циклическим колебаниям частицы и излучению. Если поместить вигглер между зеркалами плоского резонатора, то мы получим принципиальную схему так называемого лазера на свободных электронах (ЛСЭ). В таком устройстве может наблюдаться генерация когерентного электромагнитного излучения пучком энергичных заряженных частиц. Лазеры на свободных электронах (англ. free-electron laser, FEL) обладают рядом уникальных особенностей. Так, например, меняя энергию электронного пучка, а также параметры ондулятора (силу магнитного поля и расстояние между магнитами), можно в широких пределах менять частоту лазерного излучения. При этом вполне достижимы частоты рентгеновского диапазона и огромные плотности энергии в лазерном импульсе. Лазеры на свободных электронах представляют бурно развивающийся раздел экспериментальной физики.

1.5. Спектральное распределение энергии, излучаемой ускоренными зарядами

С точки зрения многочисленных экспериментальных приложений важнейшей характеристикой электромагнитного излучения, испускаемого движущимися зарядами, является, кроме диаграммы направленности, его спектральный состав. Будем рассматривать мощность излучения, испускаемого в еди-

ницу телесного угла, т.е. величину

$$P = \frac{c}{4\pi} R^2 E^2 \Big|_{t_s}$$

как функцию времени t в лабораторной системе отсчета, так как основной интерес представляет частотный спектр излучения, регистрируемого в точке наблюдения. Предположим вначале, что движение заряженной частицы периодическое с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, а точка наблюдения находится на большом расстоянии от области движения заряда. Для средней за период энергии, излученной в единицу телесного угла, имеем:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{F}(t)|^2 dt. \quad (1.53)$$

Здесь мы ввели удобную для дальнейшего рассмотрения величину \vec{F} :

$$\vec{F} = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R \vec{E} \Big|_{t_s}$$

Разложим действительную периодическую функцию $\vec{F}(t)$ в ряд Фурье:

$$\vec{F}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{f}_k e^{ik\omega_0 t} = \vec{F}^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{f}_k^* e^{-ik\omega_0 t}, \quad (1.54)$$

где

$$\vec{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F}(t) e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (1.55)$$

Из (1.54) получаем свойство симметрии коэффициентов Фурье действительной функции: $\vec{f}_k = \vec{f}_{-k}^*$. Учитывая (1.55), из (1.53) находим:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{f}_k \vec{f}_n^* e^{i\omega_0(k-n)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{f}_k \vec{f}_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\vec{f}_k|^2. \quad (1.56)$$

В случае, когда постоянная составляющая отсутствует ($\vec{f}_0 = 0$), получим:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(\Omega), \quad (1.57)$$

где $\mathcal{P}_k(\Omega) = 2|\vec{f}_k|^2$ — диаграмма направленности излучения на k -й гармонике частоты ω_0 . Принимая во внимание (1.55) и (1.38), величину \vec{f}_k здесь можно записать как

$$\vec{f}_k = \frac{q}{2T\sqrt{\pi c}} \int_0^T \frac{1}{\kappa^3} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] \Big|_{t_s} e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (1.58)$$

Для непериодического движения, применяя разложение в интеграл Фурье, нетрудно получить следующую формулу, описывающую спектральное распределение энергии, излученной в единицу телесного угла за всё время движения:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{F}(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(\Omega, \omega) d\omega, \quad (1.59)$$

где $\mathcal{P}(\Omega, \omega) = 2|\vec{f}(\omega)|^2$ — энергия, излучаемая в единицу телесного угла в единичном интервале частот, а

$$\vec{f}(\omega) = \frac{q}{\pi\sqrt{8c}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] \Big|_{t_s} e^{-i\omega t} dt. \quad (1.60)$$

Полученные формулы для анализа спектрального состава излучения могут быть упрощены, если предположить, что область ускоренного движения заряда находится на большом расстоянии от точки наблюдения, так, что $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0(t)|$, а вектор \vec{n} можно считать постоянным во времени. Проведем соответствующие преобразования для случая периодического движения. Переходя в формуле (1.58) к интегрированию по t_s ($\partial t / \partial t_s = \kappa$), находим

$$\vec{f}_k = \frac{q}{2T\sqrt{\pi c}} \int_0^T \frac{1}{\kappa^2} \left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right] e^{-ik\omega_0(t_s + R(t_s)/c)} dt_s. \quad (1.61)$$

Далее,

$$\begin{aligned} R(t_s) &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0(t_s))^2} = r \sqrt{1 - \frac{2(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2}} \approx \\ &\approx r - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)}{r} = r - (\vec{n} \cdot \vec{r}_0). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Если \vec{n} — постоянный, не зависящий от t_s вектор, то непосредственным дифференцированием можно установить соотношение:

$$\frac{\left[\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]}{(1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta}))^2} = \frac{d}{dt_s} \left(\frac{\left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right]}{\kappa} \right). \quad (1.63)$$

Подставив (1.62) и (1.63) в (1.61), получаем:

$$\vec{f}_k = \frac{qe^{-ik\omega_0 r/c}}{2T\sqrt{\pi c}} \int_0^T \frac{d}{dt_s} \left(\frac{[\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{\beta}]]}{\kappa} \right) e^{-ik\omega_0(t_s - (\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t_s))/c)} dt_s. \quad (1.64)$$

Интегрируя в (1.64) по частям и учитывая периодичность движения, окончательно находим:

$$\mathcal{P}_k = \frac{q^2 k^2 \omega_0^2}{2T^2 \pi c} \left| \int_0^T (\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}) e^{-ik\omega_0(t - (\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t))/c)} dt \right|^2. \quad (1.65)$$

Здесь мы для краткости опустили индекс “ s ” у переменной интегрирования. Заметим также, что полученная формула может быть использована для определения спектрального состава и интенсивности излучения с некоторой заданной поляризацией. Для этого надо найти сначала скалярное произведение подынтегрального выражения в (1.65) на соответствующий единичный вектор поляризации, а затем вычислить квадрат модуля полученной функции. Мы воспользуемся этим обстоятельством в следующем разделе.

1.6. Магнито-тормозное излучение

1.6.1. Угловое распределение и поляризация магнито-тормозного излучения

Применим развитую в предыдущем разделе теорию для анализа характеристик излучения заряда, движущегося по окружности в постоянном однородном магнитном поле \vec{B}_0 . Такое излучение называется магнито-тормозным. Напомним, что форму окружности имеет траектория заряда, влетающего в начальный момент времени в область, занятую магнитным полем, перпендикулярно направлению силовых линий. Выберем направление оси z декартовой системы координат в направлении магнитного поля так, что $\vec{B}_0 = \vec{e}_z B_0$. Тогда траектория заряда лежит в плоскости xy (см. рис. 1.8).

Радиус-вектор и вектор скорости частицы можно записать как:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0(t) &= \vec{e}_x r_B \cos \omega_B t + \vec{e}_y r_B \sin \omega_B t, \\ \vec{v}(t) &= -\vec{e}_x r_B \omega_B \sin \omega_B t + \vec{e}_y r_B \omega_B \cos \omega_B t, \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $\omega_B = qB_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}/(mc) = \omega_B^{(0)}/\gamma$ — гирочастота релятивистской частицы ($\omega_B^{(0)}$ — гирочастота в нерелятивистском случае), m — масса частицы,

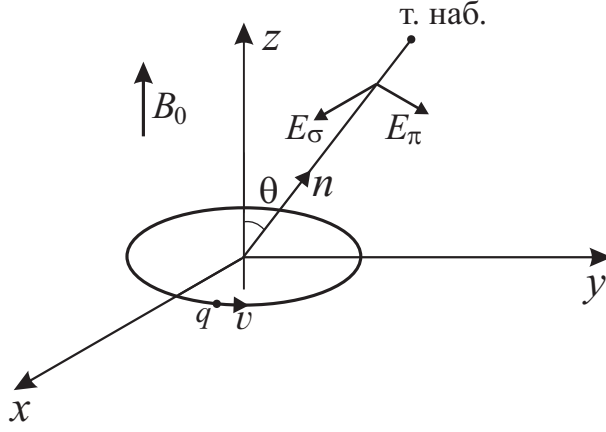


Рис. 1.8. Траектория движения заряда в постоянном однородном магнитном поле

$r_{\text{в}} = v/\omega_{\text{в}}$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. В силу азимутальной симметрии задачи без ограничения общности можно считать, что точка наблюдения и вектор \vec{n} лежат в плоскости yz . Учитывая, что $\vec{n} = \vec{e}_y \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta$, имеем

$$\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta} = -\vec{e}_x \frac{v_x}{c} - \vec{e}_y \cos^2 \theta \frac{v_y}{c} + \vec{e}_z \sin \theta \cos \theta \frac{v_y}{c}. \quad (1.67)$$

В целях дальнейшего исследования поляризационных свойств излучения заряда ортогональное вектору \vec{n} волновое электрическое поле представим в виде суперпозиции взаимно перпендикулярных \vec{E}_{π} - и \vec{E}_{σ} -компонент. Вектор \vec{E}_{σ} направлен вдоль оси x , а вектор \vec{E}_{π} лежит в плоскости yz и имеет составляющие E_y и E_z , такие, что $(\vec{E}_{\pi} \cdot \vec{e}_y)/(\vec{E}_{\pi} \cdot \vec{e}_z) = -\text{ctg} \theta$ и $(\vec{E}_{\pi} \cdot \vec{n}) = 0$. Таким образом, вектора \vec{n} и \vec{E}_{π} взаимно перпендикулярны, как и \vec{n} и \vec{E}_{σ} (см. рис. 1.8). Первое слагаемое в (1.67), очевидно, отвечает компоненте \vec{E}_{σ} , а последние два образуют вектор, коллинеарный \vec{E}_{π} .

Подставив (1.67) в (1.65), находим:

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^{(\sigma)} + \mathcal{P}_k^{(\pi)} = \frac{q^2 \omega_{\text{в}}^2 k^2}{8\pi^3 c^3} (|I_x|^2 + \cos^2 \theta |I_y|^2), \quad (1.68)$$

где

$$\mathcal{P}_k^{(\sigma)} = \frac{q^2 \omega_{\text{в}}^2 k^2}{8\pi^3 c^3} |I_x|^2, \quad \mathcal{P}_k^{(\pi)} = \frac{q^2 \omega_{\text{в}}^2 k^2}{8\pi^3 c^3} \cos^2 \theta |I_y|^2.$$

Величины $\mathcal{P}_k^{(\sigma)}$ и $\mathcal{P}_k^{(\pi)}$ отвечают вкладам излучения с σ - и π -поляризацией соответственно (см. примечание после формулы (1.65)). Выращения для воз-

никающих здесь интегралов I_x и I_y имеют вид:

$$I_x = \int_0^T v_x(t) e^{-ik\omega_B(t - (\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t))/c)} dt = -r_B \int_0^{2\pi} \sin \xi \exp(-ik\xi + ib \sin \xi) d\xi,$$

$$I_y = \int_0^T v_y(t) e^{-ik\omega_B(t - (\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t))/c)} dt = r_B \int_0^{2\pi} \cos \xi \exp(-ik\xi + ib \sin \xi) d\xi, \quad (1.69)$$

где $T = 2\pi/\omega_B$, $\xi = \omega_B t$, $b = k\beta \sin \theta$, $\beta = v/c = \omega_B r_B/c$. Интегралы (1.69) можно вычислить с помощью известной формулы [4, 5]:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\xi + ib \sin \xi} d\xi = 2\pi J_k(b), \quad (1.70)$$

где J_k — функция Бесселя первого рода порядка k . Дифференцируя равенство (1.70) по параметру b , находим:

$$I_x = 2\pi i r_B J'_k(k\beta \sin \theta), \quad (1.71)$$

где штрих обозначает производную по всему аргументу. Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \xi e^{-ik\xi + ib \sin \xi} d\xi &= \int_0^{2\pi} \left(\cos \xi - \frac{k}{b} \right) e^{-ik\xi + ib \sin \xi} d\xi + \frac{k}{b} \int_0^{2\pi} e^{-ik\xi + ib \sin \xi} d\xi = \\ &= -\frac{k}{b} \int_0^{2\pi} e^{-ik\eta} d\eta + \frac{2\pi k}{b} J_k(b) = \frac{2\pi k}{b} J_k(b). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$I_y = 2\pi r_B \frac{J_k(k\beta \sin \theta)}{\beta \sin \theta}. \quad (1.72)$$

Подставив (1.71) и (1.72) в (1.68), имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^{(\sigma)} &= \frac{q^2 \omega_B^2 k^2}{2\pi c} \beta^2 [J'_k(k\beta \sin \theta)]^2, \\ \mathcal{P}_k^{(\pi)} &= \frac{q^2 \omega_B^2 k^2}{2\pi c} \text{ctg}^2 \theta J_k^2(k\beta \sin \theta), \\ \mathcal{P}_k &= \mathcal{P}_k^{(\sigma)} + \mathcal{P}_k^{(\pi)} = \frac{q^2 \omega_B^2 k^2}{2\pi c} \left\{ \beta^2 [J'_k(k\beta \sin \theta)]^2 + \text{ctg}^2 \theta J_k^2(k\beta \sin \theta) \right\}. \quad (1.73) \end{aligned}$$

Полная диаграмма направленности находится как

$$P(\theta) = P^{(\sigma)}(\theta) + P^{(\pi)}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(\theta), \quad (1.74)$$

где

$$P^{(\sigma,\pi)}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k^{(\sigma,\pi)}(\theta). \quad (1.75)$$

Величины $P^{(\sigma)}(\theta)$ и $P^{(\pi)}(\theta)$, отвечают вкладам в полную диаграмму направленности излучения с σ - и π -поляризацией соответственно. Ряды (1.74) и (1.75) можно просуммировать, используя соотношения из теории бesselевых функций [4]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 J_k^2(kx) &= \frac{x^2(4+x^2)}{16(1-x^2)^{7/2}}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [J'_k(kx)]^2 &= \frac{4+3x^2}{16(1-x^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где $|x| < 1$. Из формул (1.73) и (1.76) находим:

$$\begin{aligned} P^{(\sigma)}(\theta) &= \frac{q^4 B_0^2}{32\pi m^2 c^3} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \frac{4+3\beta^2 \sin^2 \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}, \\ P^{(\pi)}(\theta) &= \frac{q^4 B_0^2}{32\pi m^2 c^3} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \frac{\cos^2 \theta (4+\beta^2 \sin^2 \theta)}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}}, \\ P(\theta) &= \frac{q^4 B_0^2}{8\pi m^2 c^3} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \frac{1+\cos^2 \theta - \frac{\beta^2}{4}(1+3\beta^2) \sin^4 \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Найдем полную (среднюю за период вращения заряда) энергию излучения $W = W^{(\sigma)} + W^{(\pi)}$, где

$$W^{(\sigma,\pi)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P^{(\sigma,\pi)}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.78)$$

Интегрирование выражений (1.77) можно провести с помощью формулы [6]

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n+1} \theta \cos^{2l} \theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{n+l+3/2}} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(n+l+3/2)(1-\beta^2)^{n+1}}, \quad (1.79)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Gamma(k+1/2) = (2k)! \sqrt{\pi} / (4^k k!)$ (k — целое число). В результате находим:

$$\begin{aligned} W^{(\sigma)} &= \frac{q^2 [\omega_B^{(0)}]^2}{12c} \frac{\beta^2(6+\beta^2)}{1-\beta^2}, & W^{(\pi)} &= \frac{q^2 [\omega_B^{(0)}]^2}{12c} \frac{\beta^2(2-\beta^2)}{1-\beta^2}, \\ W &= W^{(\sigma)} + W^{(\pi)} = \frac{2}{3} \frac{q^2 [\omega_B^{(0)}]^2}{c} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Отношение энергии излучения с π -поляризацией к энергии излучения с σ -поляризацией равно

$$\frac{W^{(\pi)}}{W^{(\sigma)}} = \frac{2 - \beta^2}{6 + \beta^2}. \quad (1.81)$$

При анализе полученных формул обратимся вначале к случаю $\beta \ll 1$. Магнито-тормозное излучение нерелятивистского заряда называют циклотронным. Как было отмечено в разделе 1.3, для нерелятивистского движения вектор напряженности электрического поля в фиксированный момент времени t лежит в плоскости векторов \vec{n} и $\vec{v}(t)$ и перпендикулярен \vec{n} . В результате, циклотронное излучение при $\theta = 0$ имеет круговую поляризацию, при $\theta = \pi/2$ — линейную, а в промежуточной области углов эллиптически поляризовано. Как следует из (1.77), диаграмма направленности циклотронного излучения определяется формулой $P(\theta) \sim 1 + \cos^2 \theta$. Эта диаграмма совпадает с диаграммой направленности излучения двух точечных ортогональных электрических диполей, монохроматические токи в которых сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (диполи расположены в начале координат и ориентированы по осям x и y), или, что то же, перпендикулярного магнитному полю постоянного электрического диполя, вращающегося в плоскости xy с угловой частотой ω_B . Нормированная на множитель $q^4 B_0^2 / (8\pi m^2 c^3)$ диаграмма направленности циклотронного излучения, построенная по формуле (1.77) при $\beta = 0.1$, показана на рис. 1.9а. Отметим ещё, что максимальная интенсивность наблюдается здесь в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты ($\theta = \pi/2$), а отношение $W^{(\pi)}/W^{(\sigma)} \approx 1/3$. Полная энергия циклотронного излучения

$$W \approx \frac{2}{3} \frac{q^2 [\omega_B^{(0)}]^2}{c} \beta^2, \quad \beta \ll 1.$$

Совершенно иная картина имеет место при $\beta \rightarrow 1$. Излучение релятивистского заряда в магнитном поле называют синхротронным. Диаграмма направленности “вытягивается” здесь в поперечном к магнитному полю направлении (см. рис. 1.9б) и для ультрарелятивистских частиц с $\gamma \gg 1$ принимает дискообразную форму. Интенсивность при $\theta = \pi/2$ сильно возрастает. Излучение оказывается сконцентрированным в узком интервале углов $\Delta\theta \approx 1/\gamma$ в окрестности поперечного направления $\theta = \pi/2$ (в соответствии с выводами раздела 1.4). Рассмотрим теперь вопрос о поляризации синхротронного излучения. В общем случае (за исключением углов $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$) мы имеем эллиптическую поляризацию. Из (1.81) при $\beta \rightarrow 1$ имеем $W^{(\pi)}/W^{(\sigma)} \rightarrow 1/7$, так что σ -компонента в 7 раз интенсивнее π -компоненты. Поскольку, кроме того, синхротронное излучение сконцентрировано вблизи плоскости орбиты, можно утверждать, что поляризация излучения ультрарелятивистских частиц соответствует σ -компоненте, т.е., близка к линейной с вектором электрического

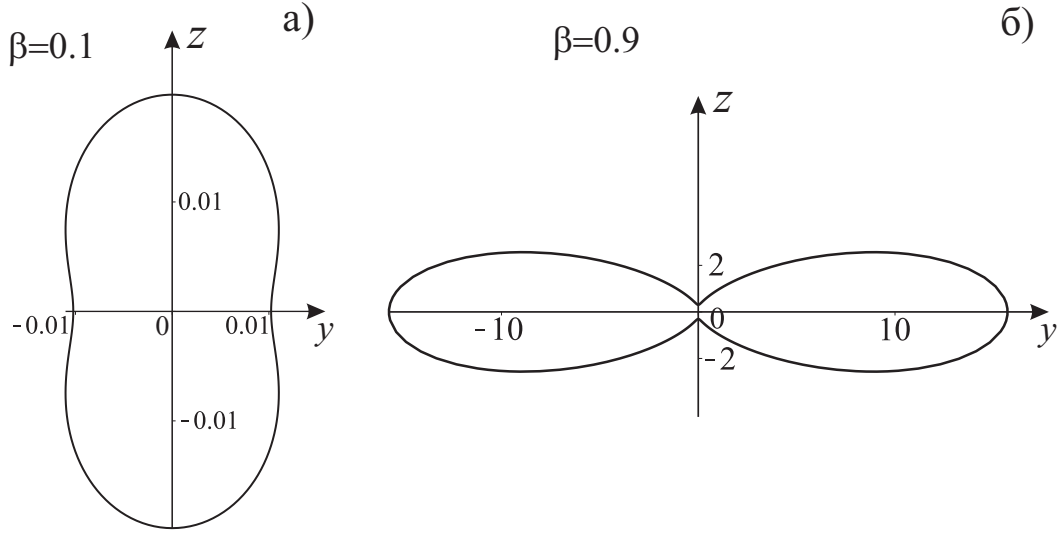


Рис. 1.9. Сечение нормированной диаграммы направленности ($8\pi m^2 c^3 P / (q^4 B_0^2)$) магнито-тормозного излучения плоскостью yz : а) — циклотронное излучение ($\beta = 0.1$); б) — синхротронное излучение ($\beta = 0.9$)

поля, колеблющимся вдоль оси x на рис. 1.8 (при $\theta = \pi/2$ поляризация строго вырождается в линейную).

1.6.2. Спектральное распределение магнито-тормозного излучения

Перейдем к исследованию спектральных характеристик магнито-тормозного излучения. В соответствии с (1.73), средняя за период энергия излучения на k -й гармонике основной частоты ω_B может быть записана в виде:

$$W_k = \frac{q^2 \omega_B^2 k^2}{c} \int_0^\pi \left\{ \beta^2 [J'_k(k\beta \sin \theta)]^2 + \operatorname{ctg}^2 \theta J_k^2(k\beta \sin \theta) \right\} \sin \theta d\theta. \quad (1.82)$$

Выражение (1.82) можно также преобразовать следующим образом [6]:

$$W_k = \frac{q^2 \omega_B^2}{\beta c} k \left[2\beta^2 J'_{2k}(2k\beta) - 2k(1 - \beta^2) \int_0^\beta J_{2k}(2k\xi) d\xi \right]. \quad (1.83)$$

Рассмотрим нерелятивистский случай $\beta \ll 1$. Используя разложение бessel-левой функции в ряд [7], находим:

$$J'_{2k}(2k\beta) \approx \frac{(k\beta)^{2k-1}}{2(2k-1)!}, \quad \int_0^{2k\beta} J_{2k}(x) dx \approx \frac{2(k\beta)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

В результате, для энергии циклотронного излучения имеем:

$$W_k = \frac{2q^2[\omega_B^{(0)}]^2}{c} \beta^{2k} \frac{(k+1)(k)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (1.84)$$

Отсюда видно, что $W_{k+1} \sim \beta^2 W_k$, т.е., энергия излучения каждой последующей гармоники имеет порядок $\beta^2 \ll 1$ относительно предыдущей. В результате, практически вся энергия излучается на основной частоте и циклотронное излучение можно считать монохроматическим с частотой $\omega_B \approx \omega_B^{(0)}$:

$$W \approx W_1 = \frac{2q^2[\omega_B^{(0)}]^2}{3c} \beta^2. \quad (1.85)$$

Спектр циклотронного излучения показан на рис. 1.10. Длина волны циклотронного излучения $\lambda \approx 2\pi c/\omega_B^{(0)} = 2\pi r_B c/v \gg r_B$ намного превышает радиус орбиты (см. раздел 1.3).

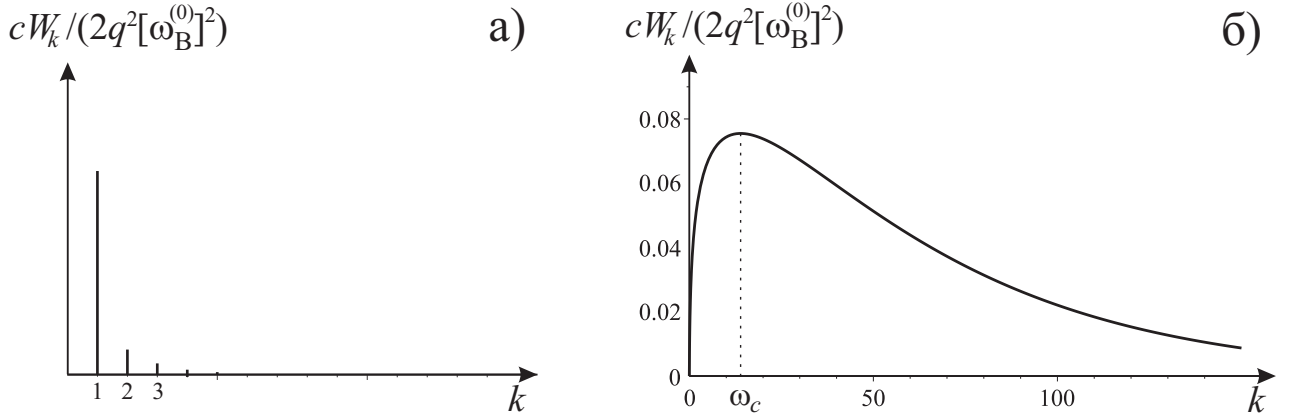


Рис. 1.10. Нормированный спектр магнито-тормозного излучения: а) — циклотронное излучение ($\beta = 0.1$); б) — синхротронное излучение ($\beta = 0.95$)

Перейдем к исследованию спектра синхротронного излучения. В принципе, формула (1.83) удобна для численных расчетов при значениях параметра $\beta = v/c$ не слишком близких к единице. На рис. 1.10 показан спектр излучения при $\beta = 0.95$ ($\gamma \approx 3.2$), рассчитанный в соответствии с (1.83). Как видно из данного рисунка, спектр синхротронного излучения имеет максимум на высоких гармониках гирочастоты ω_B (примерно $14\omega_B$ при $\beta = 0.95$). Поэтому для ультрарелятивистских частиц, скорость которых очень мало отличается от скорости света, подобный численный расчет затруднен ввиду необходимости вычисления значений функций Бесселя с большими значениями порядка и аргумента. В связи с этим, значительный интерес представляет асимптотическое разложение выражения (1.83) в случае $\beta \rightarrow 1$ и $k \gg 1$. Опуская здесь детали соответствующих математических преобразований (см. Приложение),

приведем окончательный результат, описывающий поведение величины W_k :

$$W_k \approx \frac{q^2[\omega_B^{(0)}]^2}{c} \begin{cases} \frac{0.52 k^{1/3}}{\gamma^2} & \text{при } 1 \ll k \ll \gamma^3, \\ \frac{k^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\gamma^{5/2}} \exp\left(-\frac{2k}{3\gamma^3}\right) & \text{при } k \gg \gamma^3 \end{cases} \quad (1.86)$$

Максимум спектра приходится на номер гармоники $k \approx \gamma^3$ при котором показатель экспоненты в (1.86) становится равным величине порядка единицы. Соответствующая частота $\omega_c \approx \omega_B \gamma^3 = \omega_B^{(0)} \gamma^2$. Поскольку частота ω_c очень велика по сравнению с расстоянием ω_B между двумя соседними гармониками, спектр синхротронного излучения состоит из очень большого числа спектральных линий и часто аппроксимируется непрерывной кривой (рис. 1.10б).

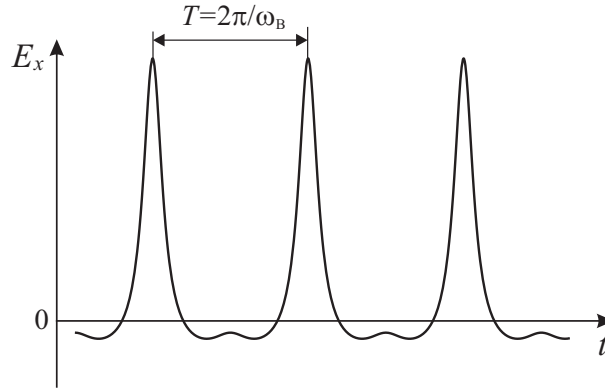


Рис. 1.11. Зависимость компоненты электрического поля E_x от времени в волновой зоне для релятивистского заряда, вращающегося по окружности

Качественные особенности спектров магнито-тормозного излучения можно выяснить, учитывая выводы раздела 1.4 и руководствуясь простыми физическими соображениями. Ускоренный релятивистский заряд излучает практически в направлении вектора скорости движения. Поэтому наблюдатель, находящийся в плоскости орбиты или вблизи неё в пределах углов $\Delta\theta \lesssim 1/\gamma$, зафиксирует короткие импульсы излучения, следующие друг за другом через промежутки времени, равные периоду обращения заряда (см. рис. 1.11). Эти импульсы отвечают излучению, испущенному в моменты времени, когда вектор скорости частицы направлен практически на наблюдателя. Если скорость заряженной частицы близка к скорости света, то вследствие эффекта Доплера происходит сильное сжатие импульсов (их продолжительность уменьшается с увеличением γ). В спектр последовательности коротких импульсов существенный вклад дают высокие гармоники основной частоты, ответственные за быстрые изменения поля во времени. В нерелятивистском же случае

(скорость движения источника волн много меньше скорости распространения самих волн) эффект Доплера несущественен и поле в точке наблюдения меняется практически по монохроматическому закону с частотой вращения заряда.

Коротко остановимся на случае, когда частица имеет продольную (по отношению к внешнему магнитному полю \vec{B}_0) компоненту скорости $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ (α — угол между \vec{B}_0 и \vec{v}). В этом случае заряженная частица движется по винтовой линии и вектор скорости, вращаясь с частотой ω_B , описывает поверхность конуса с осью вдоль направления \vec{B}_0 . В ультрарелятивистском случае излучение будет сконцентрировано вблизи образующих этого конуса скоростей. Качественные особенности спектрального распределения излучения здесь аналогичны рассмотренным выше для случая движения по окружности. Мы не будем здесь приводить соответствующие формулы, ограничившись ссылкой на монографию [8], в которой можно найти достаточно подробное изложение вопроса.

Задача. Релятивистская частица движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле, теряя энергию на излучение. Найти закон изменения энергии частицы со временем. В начальный момент времени энергия частицы равна \mathcal{E}_0 .

1.7. Тормозное излучение

Тормозным называется излучение, испускаемое заряженной частицей при её ускорении (торможении) в электрическом поле. Чаще всего наблюдается тормозное излучение, возникающее при ускоренном движении электронов в электростатическом поле атомных ядер твердых, жидких или газообразных сред или в поле ионов плазмы. В настоящем разделе мы рассмотрим излучение системы, состоящей из двух заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона и движущихся с нерелятивистскими скоростями. Дипольный момент системы можно записать как $\vec{d} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2$, где $q_{1,2}$ и $\vec{r}_{1,2}$ — заряды и радиус-вектора частиц соответственно. Выбрав начало координат в центре инерции, мы получим:

$$\vec{d} = \frac{q_1 m_2 - q_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (1.87)$$

где $m_{1,2}$ — массы частиц, а $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ — радиус-вектор между ними. Отсюда видно, что при взаимодействии двух частиц с одинаковым зарядом и массой (например, двух электронов), $\vec{d} = 0$ и дипольное излучение отсутствует. Это, однако, не означает, что в нерелятивистском приближении одинаковые взаимодействующие заряженные частицы вообще не излучают. Испускаемое в данном случае излучение описывается следующими членами разложения

по малому параметру a/λ отношения размеров системы к длине волны (см. раздел 1.3) и отвечает квадрупольному и более высоким мультипольным моментам системы. Как эффект более высокого порядка, квадрупольное излучение обычно мало и не представляет особого практического интереса. В связи с отмеченным выше, основное внимание мы уделим излучению электрона, движущегося в кулоновском поле положительно заряженного иона. Такая постановка задачи типична при рассмотрении электрон-ионных столкновений в разреженной плазме. Характерные тепловые скорости электронов в плазме имеют порядок $v \sim 10^4$ м/с $\ll c$, что делает применение дипольного приближения вполне оправданным.

1.7.1. Общие кинематические формулы, описывающие нерелятивистское движение электрона в кулоновском поле иона

Рассмотрим вначале кинематику движения электрона в поле иона. Поскольку даже самый легкий ион (ион водорода — протон) в ≈ 1836 раз тяжелее электрона, будем считать ион неподвижным и поместим его в начало системы координат. Как известно из курса аналитической механики, при движении в центральном поле сохраняется момент импульса системы относительно центра (иона) и траектория движения электрона лежит в одной плоскости. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{Ze^2}{r}, \quad (1.88)$$

где r — радиальная координата электрона, φ — азимутальный угол, m и e — масса и абсолютное значение заряда электрона, соответственно, Z — заряд иона. Уравнения движения записываются в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.89)$$

Поскольку $\partial L / \partial \varphi = 0$, как уже отмечалось, сохраняется обобщенный импульс $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = M = \text{const}$, совпадающий в данном случае с моментом по оси z . Из (1.89) находим уравнение, описывающее изменение радиальной координаты:

$$m\ddot{r} - \frac{M^2}{mr^3} + \frac{Ze^2}{r^2} = 0. \quad (1.90)$$

Умножив (1.90) на \dot{r} и проинтегрировав по t , получим интеграл энергии:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} = E - U_{\text{eff}}(r). \quad (1.91)$$

Таким образом, уравнение, описывающее изменение радиальной координаты во времени, формально совпадает с уравнением одномерного движения в поле с эффективной потенциальной энергией

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}. \quad (1.92)$$

График функции $U_{\text{eff}}(r)$ показан на рис. 1.12. Движение, очевидно, возможно только в области, где $U_{\text{eff}}(r) < E$. Например, в случае $E < 0$ это область $r_1 < r < r_2$ и движение является финитным движением по эллиптической орбите. Вырожденный случай $E = 0$ соответствует инфинитному движению по параболе, а при $E > 0$ электрон движется по гиперболической траектории.

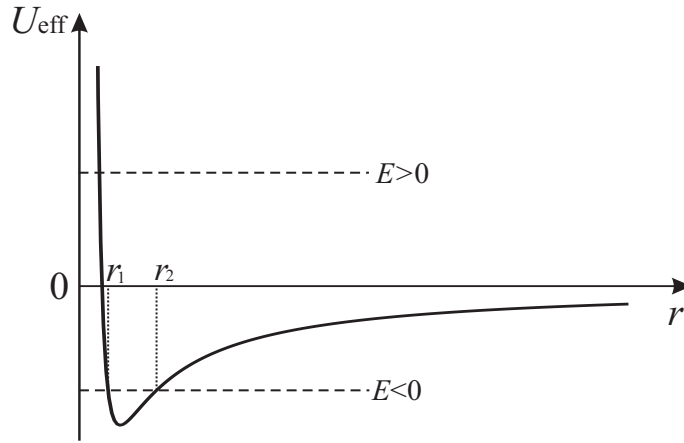


Рис. 1.12. Зависимость эффективного потенциала U_{eff} от радиальной координаты

Из уравнения (1.91) находим:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}. \quad (1.93)$$

Далее, мы можем написать: $\varphi'_t = \varphi'_r r'_t = M/(mr^2)$. Отсюда имеем: $\varphi'_r = M/(mr^2)t'_r$. И, следовательно,

$$\varphi = \pm M \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E + Ze^2/r) - M^2/r^2}}. \quad (1.94)$$

Делая в этом интеграле замену

$$\eta = \frac{M}{r} - \frac{mZe^2}{M},$$

получим:

$$\varphi = \pm \int \frac{d\eta}{\sqrt{A - \eta^2}} = \mp \arccos \left(\frac{\eta}{\sqrt{A}} \right) + \text{const}, \quad (1.95)$$

где $A = 2mE + (me^2Z/M)^2$. Предполагаем, как обычно, что азимутальный угол меняется в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поэтому при $0 \leq \varphi \leq \pi$ в (1.95) следует выбрать знак “+” перед \arccos и положить $\text{const} = 0$, а в области $\pi < \varphi < 2\pi$ — знак “-” и $\text{const} = 2\pi$. В результате приходим к уравнению конического сечения:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (1.96)$$

где параметр p и эксцентриситет ε определяются выражениями:

$$p = \frac{M^2}{mZe^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2M^2E}{mZ^2e^4}}. \quad (1.97)$$

1.7.2. Излучение при движении электрона по эллиптической орбите

Рассмотрим вначале случай $E < 0$. Тогда

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2M^2|E|}{mZ^2e^4}} < 1$$

и уравнение (1.96) описывает эллипс (см. рис. 1.13).

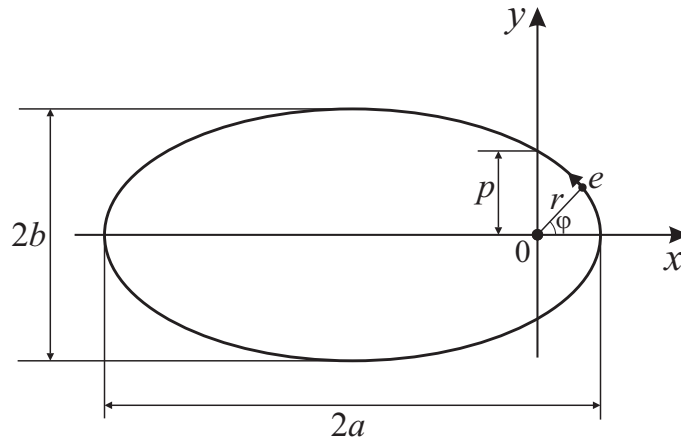


Рис. 1.13. Эллиптическая траектория движения электрона в кулоновском поле иона

Большая и малая полуоси эллипса задаются формулами

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{Ze^2}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (1.98)$$

Из (1.93) получим:

$$\begin{aligned} t &= \pm \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{2ar - r^2 - M^2/(2m|E|)}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{\varepsilon^2 a^2 - (r - a)^2}}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Подстановка

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi) \quad (1.100)$$

приводит данный интеграл к виду

$$t = \pm a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{(1 - \varepsilon \cos \xi) \sin \xi d\xi}{|\sin \xi|}.$$

Выбирая знак “+” при $\xi > 0$ и знак “-” при $\xi < 0$ и положив константу интегрирования равной нулю, находим:

$$t = a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} (\xi - \varepsilon \sin \xi). \quad (1.101)$$

Величина $\omega_0 = \sqrt{2|E|/(ma^2)}$ задает угловую частоту вращения электрона по эллиптической орбите. Поэтому (1.101) можно также записать как $\omega_0 t = \xi - \varepsilon \sin \xi$. Отметим, что изменению времени t на период T отвечает изменение параметра ξ на 2π . Учитывая (1.96), получим

$$x = r \cos \varphi = a(\cos \xi - \varepsilon), \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \xi. \quad (1.102)$$

Формулы (1.101) и (1.102) полностью определяют в параметрическом виде (через параметр ξ) закон движения электрона по эллиптической орбите.

Будем интересоваться средней (за период движения $T = 2\pi/\omega_0$) мощностью излучения электрона. Согласно формуле Лармора (1.37), эта величина записывается как

$$\overline{W} = \frac{2e^2}{3c^3 T} \int_0^T (\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2) dt. \quad (1.103)$$

Разложим периодически меняющиеся во времени компоненты скорости в ряды Фурье:

$$v_{x,y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_{x,y}^{(k)} \exp(ik\omega_0 t), \quad (1.104)$$

где

$$\tilde{v}_{x,y}^{(k)} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{x,y}(t) \exp(-ik\omega_0 t) dt, \quad (1.105)$$

а коэффициенты Фурье обладают свойством $\tilde{v}_{x,y}^{(-k)} = (\tilde{v}_{x,y}^{(k)})^*$ в силу вещественности $v_{x,y}$. Компоненты ускорения тогда можно записать в виде:

$$\dot{v}_{x,y}(t) = i\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \tilde{v}_{x,y}^{(k)} \exp(ik\omega_0 t). \quad (1.106)$$

Подставив разложения (1.106) в (1.103) и проинтегрировав по периоду (см. раздел 1.5), получим:

$$\overline{W} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{W}_k = \frac{4e^2\omega_0^2}{3c^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(|\tilde{v}_x^{(k)}|^2 + |\tilde{v}_y^{(k)}|^2 \right). \quad (1.107)$$

Вычислим теперь коэффициенты $\tilde{v}_{x,y}^{(k)}$. Подставив выражения

$$v_x(t) = -a \sin \xi \frac{d\xi}{dt}, \quad v_y(t) = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \cos \xi \frac{d\xi}{dt} \quad (1.108)$$

в (1.105) и учитывая (1.101), находим

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x^{(k)} &= -\frac{a\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \xi \exp(-ik\xi + ik\varepsilon \sin \xi) d\xi = ia\omega_0 J'_k(k\varepsilon), \\ \tilde{v}_y^{(k)} &= \frac{a\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \xi \exp(-ik\xi + ik\varepsilon \sin \xi) d\xi = \\ &= a\omega_0 \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} J_k(k\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.109)$$

Интегралы в (1.109) аналогичны интегралам (1.69). Подставив (1.109) в (1.107) в результате получим:

$$\overline{W}_k = \frac{4e^2 a^2 \omega_0^4}{3c^3} k^2 \left\{ [J'_k(k\varepsilon)]^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_k^2(k\varepsilon) \right\}. \quad (1.110)$$

Формула (1.110) удобна для анализа распределения излучаемой мощности по спектру. Это распределение существенно зависит от величины эксцентриситета ε . Обратимся вначале к случаю малого ε ($\varepsilon \ll 1$), что соответствует

эллиптической орбите, близкой к окружности. Используя известное разложение функции Бесселя в ряд

$$J_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n},$$

находим мощность излучения на основной частоте ω_0 и гармонике $2\omega_0$:

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= \frac{2e^2 a^2 \omega_0^4}{3c^3} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ \bar{W}_2 &= \frac{8e^2 a^2 \omega_0^4}{3c^3} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.111)$$

Видно, что $\bar{W}_2 \sim \varepsilon^2 \bar{W}_1 \ll \bar{W}_1$. Аналогично нетрудно убедиться в том, что мощность излучения на каждой последующей гармонике меньше, чем мощность излучения на предыдущей в $\sim \varepsilon^2$ раз, где ε — малый параметр. Таким образом, практически вся мощность излучается на частоте вращения электрона ω_0 . Поле в точке наблюдения меняется практически по гармоническому закону.

Характеристики излучения качественно меняются в случае сильно вытянутой эллиптической орбиты, когда эксцентриситет ε близок к единице ($1 - \varepsilon \ll 1$). Спектр мощности имеет при этом максимум в области больших значений k ($k \approx k_c = 2(1 - \varepsilon^2)^{-3/2} \gg 1$), что соответствует высоким гармоникам частоты вращения ω_0 . Можно показать (см. Приложение), что при $1 \ll k \ll k_c$ величина \bar{W}_k возрастает по закону $\bar{W}_k \propto k^{2/3}$, а при $k \gg k_c$ — спадает как $\bar{W}_k \propto k \exp(-4k/(3k_c))$. Спектр состоит из большого числа спектральных линий и имеет квазинепрерывный характер. Максимум спектра излучения в области высоких гармоник для электрона, движущегося по сильно вытянутой эллиптической орбите, объясняется следующим образом. Наиболее сильное излучение создается в те моменты времени, когда скорость электрона претерпевает резкие изменения. Эти моменты времени отвечают более искривленным участкам эллиптической траектории (данные участки показаны сплошными линиями на рис. 1.14). Поскольку время движения по искривленным участкам много меньше периода T обращения электрона по орбите, испускаемое излучение будет представлять собой короткие импульсы с характерной длительностью много меньшей T . В спектральное разложение такого импульсного сигнала, естественно, будут вносить существенный вклад высокие гармоники основной частоты $\omega_0 = 2\pi/T$.

Заметим, что в качественном отношении спектры излучения электрона, движущегося в поле иона по круговой и сильно вытянутой эллиптической орбите, похожи на спектры циклотронного и синхротронного излучения со-

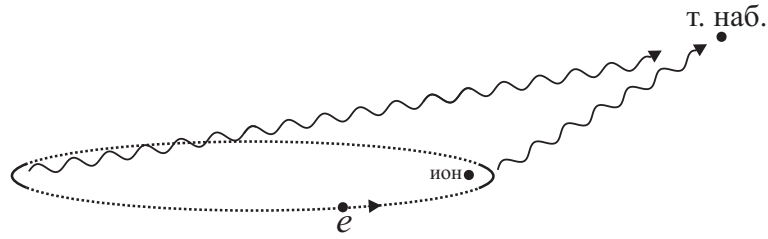


Рис. 1.14. Излучение электромагнитных волн при движении электрона в кулоновском поле иона по сильно вытянутой эллиптической орбите

ответственно (см. рис. 1.10). Мы не будем более подробно рассматривать тормозное излучение при финитном движении электрона и перейдем к гораздо более важному с практической точки зрения случаю движения по гиперболической траектории.

1.7.3. Излучение при движении электрона по гиперболической траектории

Движению по гиперболе (см. рис. 1.15) отвечают положительные значения константы E , которая, как следует из соотношения (1.91) при $r \rightarrow \infty$, имеет смысл кинетической энергии налетающего электрона: $E = mv^2/2$, где v — скорость электрона при $r \rightarrow \infty$. Прицельное расстояние ρ связано с v соотношением $M = \rho mv$.

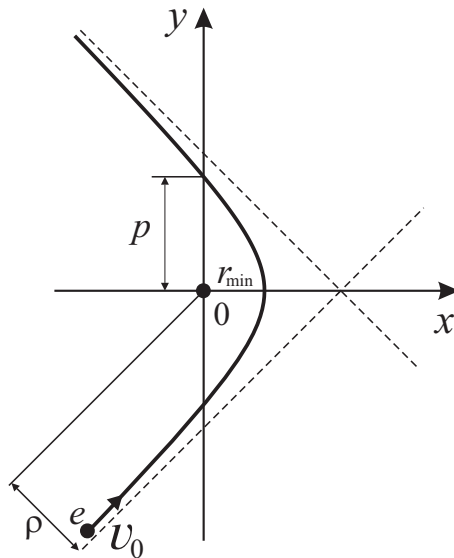


Рис. 1.15. Гиперболическая траектория движения электрона в кулоновском поле иона

Параметр p и эксцентриситет ε определены в (1.97), а минимальное рас-

стояние r_{\min} и “полуось” гиперболы a записываются как:

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon + 1} = a(\varepsilon - 1), \quad a = \frac{Ze^2}{2E} = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (1.112)$$

По аналогии с (1.99) получаем:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{r dr}{\sqrt{(r+a)^2 - \varepsilon^2 a^2}}. \quad (1.113)$$

Делая в этом интеграле подстановку

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi - 1), \quad (1.114)$$

находим:

$$\begin{aligned} t/\tau &= \varepsilon \operatorname{sh} \xi - \xi, \\ x &= a(\varepsilon - \operatorname{ch} \xi), \\ y &= a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \xi, \end{aligned} \quad (1.115)$$

где $\tau = a\sqrt{m/(2E)} = a/v$ — характерный масштаб длительности кулоновского взаимодействия. Формулы (1.115) определяют в параметрическом виде закон движения электрона по гиперболической орбите.

Вычислим полную энергию E_{Σ} , излученную за всё время кулоновского столкновения электрона с ионом:

$$E_{\Sigma} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2) dt. \quad (1.116)$$

Поскольку процесс движения по гиперболе неперiodический, излучение имеет сплошной спектр. Разложим компоненты скорости и ускорения в интегралы Фурье:

$$\begin{aligned} v_{x,y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_{x,y}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \\ \dot{v}_{x,y}(t) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{v}_{x,y}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \end{aligned} \quad (1.117)$$

где $\tilde{v}_{x,y}(-\omega) = [\tilde{v}_{x,y}(\omega)]^*$. Подставив (1.117) в (1.116) и проинтегрировав вначале по t с учетом известного представления δ -функции:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dt, \quad (1.118)$$

приходим к следующему выражению

$$E_{\Sigma} = \frac{8\pi e^2}{3c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 (|\tilde{v}_x(\omega)|^2 + |\tilde{v}_y(\omega)|^2) d\omega = \int_0^{\infty} U(\omega) d\omega. \quad (1.119)$$

Здесь $U(\omega)$ — спектральная плотность энергии, т.е. энергия, излученная за всё время столкновения и заключённая в единичном интервале частот.

Найдем теперь величины $\tilde{v}_{x,y}(\omega)$. Аналогично (1.108) и (1.109) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= -\frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sh } \xi \exp(i\nu\xi - i\nu\varepsilon \text{sh } \xi) d\xi, \\ \tilde{v}_y &= \frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch } \xi \exp(i\nu\xi - i\nu\varepsilon \text{sh } \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.120)$$

где $\nu = \omega\tau$. Для вычисления интегралов, входящих в (1.120), используем формулу [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu\xi - i\nu\varepsilon \text{sh } \xi) d\xi = i\pi H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon), \quad (1.121)$$

где $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ — функция Ханкеля 1-го рода мнимого порядка $i\nu$. Продифференцировав (1.121) по параметру $i\nu\varepsilon$, находим:

$$\tilde{v}_x = \frac{ia}{2} [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]', \quad (1.122)$$

где штрих означает производную по всему аргументу. Выражение для \tilde{v}_y преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_y &= \frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{ch } \xi - \frac{1}{\varepsilon} \right) \exp(i\nu\xi - i\nu\varepsilon \text{sh } \xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu\xi - i\nu\varepsilon \text{sh } \xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu\eta) d\eta + \frac{i\pi}{\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) \right] = \\ &= \frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{2\varepsilon} \left[2\delta(\nu) + iH_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Учитывая символическое равенство $\omega^2\delta(\omega\tau) = 0$, для спектральной плотности энергии тормозного излучения окончательно получаем:

$$U = \frac{2\pi e^2 a^2}{3c^3\tau^2} \nu^2 \left(|[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]'|^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)|^2 \right). \quad (1.124)$$

Рассмотрим поведение функции $U(\omega)$ на малых частотах. При выполнении условий $\nu = \omega\tau \ll 1$ и $\nu\varepsilon \ll 1$ можно аппроксимировать функции Ханкеля в (1.124) функциями нулевого порядка и воспользоваться для последних известными асимптотическими представлениями [7]:

$$\begin{aligned} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) &\approx H_0^{(1)}(i\nu\varepsilon) \approx \frac{2}{\pi i} \ln \left(\frac{2}{1.78i\nu\varepsilon} \right), \\ [H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]' &\approx [H_0^{(1)}(i\nu\varepsilon)]' \approx \frac{2}{\pi\nu\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Подставив (1.125) в (1.124), получим выражение, не зависящее от частоты ω :

$$U \approx U_0 = \frac{8}{3\pi} \frac{e^2 a^2}{c^3 \tau^2 \varepsilon^2}. \quad (1.126)$$

Можно показать (см. Приложение), что на высоких частотах $U(\omega)$ спадает по закону $\propto \omega \exp(-4\sqrt{2}\omega\tau\varepsilon/3)$. В результате, на малых частотах спектральная плотность энергии меняется слабо и примерно совпадает с величиной U_0 , а при значениях $\nu^* = \omega^*\tau$, таких, что показатель экспоненты $\omega\tau\varepsilon$ становится порядка единицы, резко уменьшается. На рис. 1.16 показана зависимость нормированной величины $c^3\tau^2 U/(ea)^2$ от частоты, построенная по формуле (1.124).

Основной вклад в тормозное излучение на практике вносят достаточно быстрые электроны, гиперболические траектории которых имеют большой эксцентриситет и слабо отличаются от прямых линий. В этом случае достаточно хорошей аппроксимацией весьма сложного выражения (1.124) является ступенчатая функция (см. рис. 1.16). При $\varepsilon \gg 1$ мы можем написать:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{mZ^2 e^4}} \approx \sqrt{\frac{2M^2 E}{mZ^2 e^4}} = \frac{2E\rho}{Ze^2} = \frac{\rho}{a}. \quad (1.127)$$

Поэтому для характерной частоты ω^* можно получить следующую оценку:

$$\omega^* = \frac{1}{\tau\varepsilon} \approx \frac{a}{\rho\tau} = \frac{v}{\rho}. \quad (1.128)$$

Таким образом, спектральное распределение тормозного излучения можно представить в виде:

$$U = U(\rho, v, \omega) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < \omega < v/\rho, \\ 0 & \text{при } \omega > v/\rho. \end{cases} \quad (1.129)$$

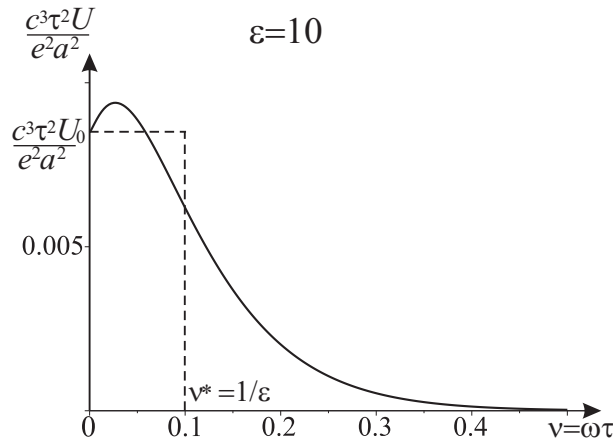


Рис. 1.16. Зависимость нормированной спектральной плотности энергии $c^3\tau^2U/(ea)^2$ от частоты при $\varepsilon = 10$. Сплошная кривая отвечает расчету по строгой формуле (1.124), а пунктир — аппроксимации (1.129)

Величину U_0 (см. (1.126)) удобно переписать в виде

$$U_0 = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c}{\rho^2 v^2}, \quad (1.130)$$

где $r_e = e^2/(mc^2)$ — т.н. классический радиус электрона.

На этом мы закончим рассмотрение характеристик тормозного излучения отдельного электрона. Отметим только, что движение по параболе отвечает ситуации, когда $v = 0$ и электрон начинает своё движение из состояния покоя на бесконечности. Этот случай является вырожденным и не представляет особого интереса. Перейдем к некоторым практическим приложениям рассмотренной теории.

1.8. Тормозное излучение плазмы

Тормозное излучение электронов при столкновениях с ионами — основной источник излучения плазмы при высокой температуре электронов. Оно имеет непрерывный спектр с частотами в диапазоне $\hbar\omega_p < \hbar\omega < E$. Снизу частоты излучаемых электроном волн ограничены плазменной частотой ω_p , как минимальной частотой электромагнитных волн в плазме. Ограничение сверху отвечает закону сохранения энергии: электрон не может излучить квант с энергией, большей чем сама энергия электрона $E = mv^2/2$. Основная доля энергии приходится на высокие частоты $\omega \gg \omega_p$. Используем развитую в предыдущем разделе теорию для вычисления тормозной излучательной способности плазмы.

В задачах об излучении при столкновениях обычно приходится рассматривать рассеяние целого пучка параллельно движущихся частиц. Если плотность потока частиц в пучке равна единице (т.е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих прицельное расстояние между ρ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$). Введем величину κ_ω — спектральную плотность тормозного излучения потока частиц (с единичной плотностью потока) при столкновениях с одной фиксированной частицей:

$$\kappa_\omega = 2\pi \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} U(\rho, v, \omega) \rho d\rho = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c}{v^2} \ln \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \right). \quad (1.131)$$

Поскольку $U \neq 0$ только при $\omega < v/\rho$ (см. (1.129)) или, что то же, $\rho < v/\omega$, то в этом выражении можно положить $\rho_{\max} = v/\omega$. Здесь следует помнить, что поле иона в плазме можно считать кулоновским только на расстояниях $\rho < r_D$ (r_D — дебаевский радиус). На больших расстояниях оно убывает экспоненциально, и, следовательно, столкновения, при которых электрон проходит мимо иона на расстояниях, превышающих r_D , нужно из рассмотрения исключить. Так как $r_D \approx \langle v \rangle / \omega_p$, где $\langle v \rangle$ — средняя максвелловская скорость электронов в плазме, а частоты тормозного излучения $\omega > \omega_p$, то мы действительно можем считать $\rho_{\max} = v/\omega < r_D$ в (1.131). Минимальное прицельное расстояние ρ_{\min} мы можем лишь оценить как длину волны де-Бройля электрона: $\rho_{\min} = \hbar/(mv)$. Именно до таких расстояний можно пользоваться нашей классической теорией. Для столкновений с меньшим прицельным расстоянием становятся существенными квантовые эффекты. Поскольку, однако, ρ_{\min} входит в выражение (1.131) под знаком логарифма, подобная оценка, как мы увидим, приводит к результату, достаточно хорошо согласующемуся с более строгой теорией. В результате, κ_ω можно представить в виде:

$$\kappa_\omega = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c}{v^2} \ln \left(\frac{mv^2}{\hbar\omega} \right). \quad (1.132)$$

Умножив κ_ω на плотность потока ионов $N_i v$ в системе отсчета, связанной с электроном, получим спектральную плотность излучения электрона $\kappa_\omega N_i v$ (энергию, излучаемую электроном со скоростью v в единицу времени в единичном интервале частот). Здесь и далее N_i — концентрация ионов, которые можно считать неподвижными. При движении в плазме электрон будет те-

рять за одну секунду энергию на тормозное излучение, равную

$$\begin{aligned}
 -\frac{dE}{dt} &= \int_{\omega_p}^{\hbar\omega=mv^2/2} \kappa_\omega N_i v d\omega \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c}{\hbar v^2} \int_0^E \ln\left(\frac{mv^2}{x}\right) dx = \\
 &= \frac{8\sqrt{2}}{3} (1 + \ln 2) \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c \sqrt{m}}{\hbar} N_i \sqrt{E}.
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

Для удобства вычислений мы положили здесь равным нулю нижний предел интегрирования, имея в виду, что основной вклад дают частоты $\omega \gg \omega_p$. Интенсивность тормозного излучения плазмы можно найти, интегрируя выражение (1.133) по энергетическому распределению электронов. При максвелловском законе распределения число электронов в единице объёма, имеющих энергию в интервале от E до $E + dE$, даёт формулу:

$$dN_E = N_e \frac{2}{\pi^{1/2} (kT_e)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT_e}\right) dE, \tag{1.134}$$

где k — постоянная Больцмана, N_e и T_e — концентрация и температура электронов соответственно. Интегрируя (1.133) по распределению (1.134), находим энергию, которую излучает 1 см³ плазмы в 1 с:

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{изл}} &= \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} (1 + \ln 2) \frac{Z^2 e^2 r_e^2 c \sqrt{m}}{\hbar (kT_e)^{3/2}} N_i N_e \int_0^\infty E \exp\left(-\frac{E}{kT_e}\right) dE = \\
 &= B Z^2 N_i N_e \sqrt{T_e^0},
 \end{aligned} \tag{1.135}$$

где численный множитель $B \approx 1.26 \times 10^{-27}$. Более точный и весьма громоздкий расчет с учетом квантовых эффектов приводит к выражению (1.135) с $B \approx 1.5 \times 10^{-27}$ [9].

В плазме, содержащей ионы нескольких веществ, $Q_{\text{изл}}$ будет представляться суммой выражений вида (1.135) со значениями N_i и Z , соответствующими разным компонентам. Поэтому присутствие даже очень незначительной примеси тяжёлых многозарядных ионов в плазме, которая в основном содержит ионы легкого вещества, приводит к резкому возрастанию интенсивности тормозного излучения. Отметим в заключение, что подобная особенность — сильная зависимость интенсивности от атомного номера элемента (заряда ядра атома) характерна и для тормозного излучения быстрых электронов в твердых, жидких и газообразных средах, состоящих из нейтральных частиц (атомов или молекул).

1.9. О влиянии излучения частицы на её движение

При решении рассмотренных ранее задач мы сначала определяли закон движения частицы в заданном внешнем поле (без учета излучения), а затем находили характеристики излучения, возникающего при движении частицы по полученной траектории. Подобный подход справедлив лишь приближенно. Излучение приводит к потере энергии, импульса и момента импульса и поэтому должно влиять на движение частиц. Корректная постановка задачи должна включать учет реакции излучения на движение частиц. Тем не менее, полученные выше результаты хорошо согласуются с опытом. Ответ на вопрос, почему во многих задачах можно пренебрегать реакцией излучения, заключается в том, что влияние этих эффектов незначительно. Можно обойтись без усложнения, связанного с учетом реакции излучения. Более того, удовлетворительного описания эффектов реакции излучения фактически не существует. Трудности этой проблемы затрагивают наиболее фундаментальные вопросы физики, связанные с природой элементарных частиц.

Произведем некоторые оценки, показывающие, когда можно пренебрегать реакцией излучения. Ограничимся нерелятивистским случаем. Если частица с зарядом e испытывает во внешнем поле ускорение порядка a , то энергия, излученная за время T по формуле Лармора (численные коэффициенты типа $2/3$ не принимаем во внимание) $E_{\text{изл}} \approx e^2 a^2 T / c^3$. Если $E_{\text{изл}} \ll E$, где $E \approx mv^2 = ma^2 T^2$ — характерная энергия частицы, то реакцией излучения можно пренебречь. Отсюда получаем, что должно быть:

$$T \gg \tau = \frac{e^2}{mc^3}. \quad (1.136)$$

При периодическом движении с частотой ω и амплитудой d имеем: $a \approx \omega^2 d$, $E \approx m\omega^2 d^2$ и характерное время ускорения $T \approx 1/\omega$. В результате, условие $E_{\text{изл}} \ll E$ для периодического движения сводится опять к (1.136). Мы получаем, что для интервалов времени, больших, чем $\tau = e^2/(mc^3)$, реакция излучения несущественна. Только если внешние силы таковы, что движение частицы заметно меняется за время порядка τ , необходимо учитывать эффекты реакции излучения. Наибольшим характерным временем τ из заряженных частиц обладают электроны. Для электрона $\tau \approx 6.26 \times 10^{-24}$ с. Условие (1.136) можно переписать как $\lambda = cT \gg c\tau = r_e$, где $r_e \approx 2.8 \times 10^{-13}$ см — классический радиус электрона. Как известно, энергия собственного кулоновского поля точечного электрона обращается в бесконечность, что говорит о внутренних противоречиях электродинамики и её неприменимости на малых расстояниях. Порядок величины этих расстояний можно оценить, если приравнять собственную электромагнитную энергию электрона как частицы,

обладающей некоторым гипотетическим радиусом, e^2/r к его энергии покоя mc^2 . Полученную при этом величину $r = r_e = e^2/(mc^2)$ и называют классическим радиусом электрона. Такая оценка является довольно грубой, поскольку классическая электродинамика становится неприменимой уже при расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона $\lambda_c = \hbar/(mc) \approx 137 r_e$. В итоге, можно говорить лишь о том, что на расстояниях, меньших r_e , должны действовать какие-то силы неэлектромагнитного происхождения, обеспечивающие стабильность частицы, о природе которых мы в настоящее время ничего сказать не можем. Не можем мы поэтому и определить, какая часть наблюдаемой массы электрона имеет электромагнитное происхождение, а также ответить на вопрос, почему масса и заряд этой частицы имеют именно такие численные значения. Эта проблема электромагнитной массы электрона и приводит к различным противоречиям при попытках учесть эффекты реакции излучения.

Найдем выражение для силы реакции излучения. Для примера мы ограничимся лишь классическим нерелятивистским случаем. Чтобы учесть потери энергии частицы с массой m на излучение, дополним уравнение второго закона Ньютона силой реакции излучения:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{изл}}. \quad (1.137)$$

Здесь \vec{F} — внешняя сила, вызывающая ускорение частицы (например, сила Лоренца). Сила реакции излучения $\vec{F}_{\text{изл}}$ должна обращаться в нуль при $\dot{\vec{v}} = 0$ и быть пропорциональной e^2 — квадрату заряда частицы, поскольку согласно формуле Лармора мощность излучения не зависит от знака e и пропорциональна e^2 . Потребуем, чтобы работа силы $\vec{F}_{\text{изл}}$ в течение некоторого интервала времени $t_1 < t < t_2$ была равна излученной за это время энергии с обратным знаком. При этом, по крайней мере за данный интервал времени, будет выполняться закон сохранения энергии. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{изл}} \cdot \vec{v} dt &= -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} dt = \\ &= -\frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Здесь мы проинтегрировали по частям. Пусть движение частицы периодическое или такое, что $(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}) = 0$ в моменты времени t_1 и t_2 . Тогда из (1.138) находим, что

$$\vec{F}_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} = m \tau \ddot{\vec{v}}. \quad (1.139)$$

Уравнение движения (1.137) можно переписать в виде:

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}}) = \vec{F} \quad (1.140)$$

или $m(\vec{r}''_{tt} - \tau \vec{r}'''_{ttt}) = \vec{F}$. Это уравнение называется уравнением Абрагама-Лоренца. Оно противоречит обычным требованиям, предъявляемым к динамическому уравнению движения, поскольку является уравнением третьего порядка по времени. Особенно легко заметить возникающие здесь проблемы в предельном случае $\vec{F} = 0$. При $\vec{F} = 0$ уравнение (1.140) имеет (наряду с тривиальным решением $\vec{v} = \text{const}$) решение вида $\dot{\vec{v}} = \vec{a}(t=0) \exp(t/\tau)$. Это решение отвечает экспоненциально “самоускоряющейся” за очень малое характерное время τ частице и, очевидно, противоречит как экспериментальным данным, так и самому здравому смыслу. Корни этой проблемы связаны, как уже отмечалось, с бесконечной электромагнитной массой электрона и неприменимостью электродинамики на малых расстояниях. На самом деле, уравнением (1.140) можно пользоваться, но только в случае, когда реакция излучения является малой поправкой к внешней силе \vec{F} . Иными словами, должно выполняться условие $|\vec{F}_{\text{изл}}| \ll |\vec{F}|$. Отметим в заключение, что проблема реакции излучения рассматривалась многими физиками на протяжении уже более века. Существуют как классическое релятивистское обобщение формулы Абрагама-Лоренца (1.140), так и рассмотрение в рамках квантовой электродинамики. Однако все предложенные теории имеют свои недостатки.

Глава 2

Излучение электромагнитных волн заряженными частицами, движущимися в среде

2.1. Излучение Вавилова-Черенкова

2.1.1. История открытия и простое качественное объяснение

В 1934 г. Павлом Алексеевичем Черенковым было обнаружено и в дальнейшем исследовано свечение прозрачных жидкостей под действием γ -лучей радиоактивных изотопов (см. рис. 2.1). Нужно сказать, что в природе широко распространено явление люминесценции. Люминесценция — нетепловое свечение веществ под действием ультрафиолетового, рентгеновского, γ -излучения, быстрых электронов. Свечение происходит при переходах электронов в атомах вещества из возбужденного состояния в основное. Свечение под действием γ -лучей наблюдалось и до Черенкова, но на него не обращали особого внимания. Черенковым были установлены следующие необычные свойства свечения.

1. Свечение является универсальным. В любой прозрачной жидкости при облучении её γ -лучами наблюдается слабое видимое свечение. То же самое, как выяснилось в дальнейшем, имеет место и для твердых тел.
2. У жидкостей самого разного химического состава и плотности интенсивность свечения практически одинакова.
3. Свечение частично поляризовано. Электрический вектор ориентирован по направлению пучка γ -лучей.
4. Полностью отсутствует влияние температуры и тушащих агентов, что нетипично для люминесценции.

Всё это дало основание С. И. Вавилову (бывшему в то время руководителем аспиранта П. А. Черенкова) утверждать, что свечение не может быть каким-либо видом люминесценции. Вавилов предположил, что излучают быстрые электроны, выбиваемые из атомов в направлении γ -лучей. Опыты с источниками β -лучей показали, что электроны действительно возбуждают в жидкостях такое же свечение, что и γ -лучи. Единственный бывший известным механизм такого излучения — тормозное излучение. Но тормозное излучение должно сильно зависеть от атомного номера вещества. Ничего подобного в экспериментах не наблюдалось. Кроме того, интенсивность излучения оказалась слишком велика по сравнению с ожидаемой для тормозного излучения. Черенковым было также показано, что излучение имеет выраженную направленность. Максимум интенсивности наблюдался под определенным острым углом к направлению движения электронов (см. рис. 2.1).

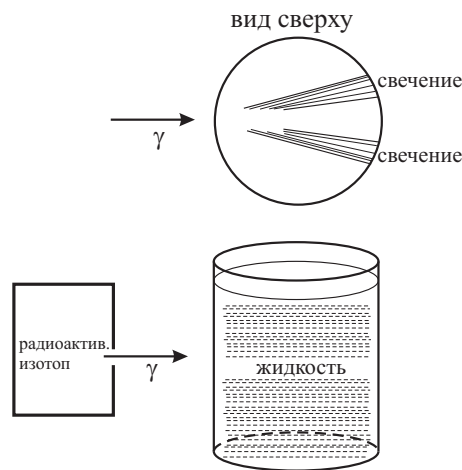


Рис. 2.1. Свечение жидкости в опытах П. А. Черенкова

Так был обнаружен новый физический эффект, получивший в литературе название излучения Вавилова-Черенкова или просто черенковского излучения (Cherenkov radiation в англоязычной литературе). Нобелевская премия по физике 1958 г. была присуждена П. А. Черенкову за экспериментальное открытие этого эффекта, а также И. Е. Тамму и И. М. Франку за его теоретическое объяснение. Суть эффекта Вавилова-Черенкова заключается в том, что равномерно движущийся в однородной среде заряд может излучать электромагнитные волны, если его скорость движения превышает фазовую скорость света в этой среде. Это излучение можно рассматривать как излучение среды под действием движущейся в ней частицы. Характерные особенности явления можно понять, используя принцип Гюйгенса: каждая точка на пути заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью v , служит источником сферической волны, испускаемой в момент прохождения через неё заряда

(см. рис. 2.2). Скорость распространения этих волн равна фазовой скорости

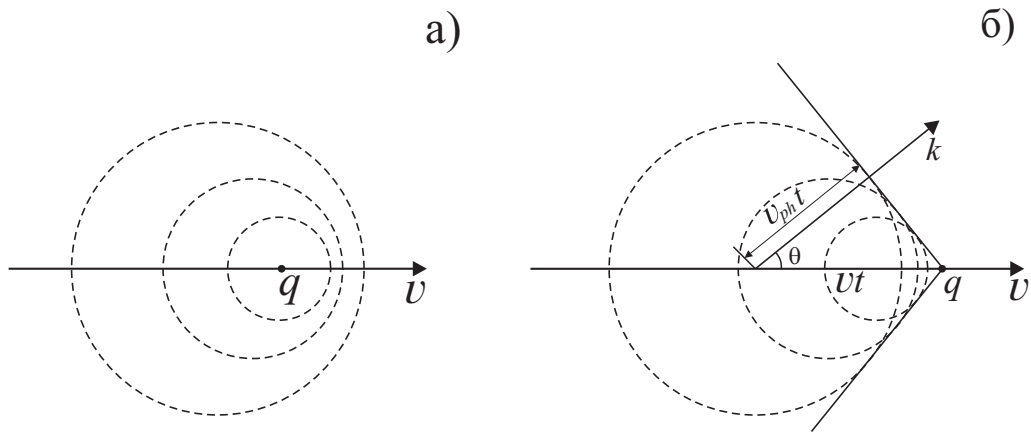


Рис. 2.2. Волновые фронты в случае $v < v_{ph}$ (а) и в случае $v > v_{ph}$ (б)

света в среде $v_{ph} = c/n$ (n — показатель преломления среды, который для простоты считаем постоянным). В случае $v < v_{ph}$, показанном на рис. 2.2а, как и при равномерном прямолинейном движении заряда в вакууме, сферические фронты не имеют общей огибающей, гасят друг друга, и в результате в суммарном поле отсутствует волновая составляющая (см. раздел 1.1). Картина качественно меняется при $v > v_{ph}$: сферы имеют общую огибающую — конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением заряда (см. рис. 2.2б), причём угол θ определяется выражением $\cos \theta = v_{ph}/v = c/(vn)$. Этот конус аналогичен конусу Маха, характеризующему ударную волну, возникающую при сверхзвуковом движении источника (пули, снаряда, самолета) в воздухе. Таким образом, излучение Вавилова-Черенкова — это электродинамический аналог известного ещё с XIX века акустического явления.

2.1.2. Вывод интегральных представлений компонент поля

Перейдем к подробному рассмотрению теории эффекта Вавилова-Черенкова. Пусть через неограниченную немагнитную среду движется равномерно и прямолинейно точечная заряженная частица. Ось z выберем в направлении движения частицы. Для решения задачи об излучении движущейся частицы в среде применим метод преобразования Фурье. Будем представлять все величины (векторы напряженности поля и индукции, плотности заряда и тока, а также скалярный и векторный потенциалы) в виде интегралов Фурье по частоте вида

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.1)$$

где

$$\vec{F}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Поле на частоте ω описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, \omega) + i\frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{r}, \omega), \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, \omega) &= -i\frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}, \omega), \\ \text{div } \vec{D}(\vec{r}, \omega) &= 4\pi\rho(\vec{r}, \omega), \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}, \omega)$. Комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$ считаем известной. Вводя стандартным образом потенциалы \vec{A} и φ (см. (1.14)), для их Фурье-образов имеем:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\nabla\varphi(\vec{r}, \omega) - i\frac{\omega}{c}\vec{A}(\vec{r}, \omega), \quad \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, \omega). \quad (2.4)$$

В лоренцевской калибровке

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\varphi(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (2.5)$$

получим:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\vec{A}(\vec{r}, \omega) &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, \omega), \\ \Delta\varphi(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\varphi(\vec{r}, \omega) &= -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)}\rho(\vec{r}, \omega). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Плотности стороннего заряда и плотности стороннего тока $\rho(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$, отвечающие равномерно движущейся в направлении оси z частице, даются формулами (1.13), в которых следует положить $\vec{r}_0(t) = \vec{e}_z vt$. Вычисляя Фурье-образы этих величин, находим:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{q\delta(x)\delta(y)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - vt) e^{-i\omega t} dt = \frac{q\delta(x)\delta(y)}{2\pi v} e^{-i\omega z/v}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогично,

$$\vec{j}(\vec{r}, \omega) = \vec{e}_z \frac{q\delta(x)\delta(y)}{2\pi} e^{-i\omega z/v}. \quad (2.8)$$

Поскольку вектор \vec{j} ориентирован вдоль оси z , поле описывается одной компонентой векторного потенциала A_z . Представим $A_z(\vec{r}, \omega)$ как интеграл Фурье вида:

$$A_z(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\vec{k}, \omega) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d\vec{k}, \quad (2.9)$$

где $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$ и интегрирование проводится по всем трём компонентам волнового вектора. Подставив (2.9) в (2.6) и учитывая (2.8), получим:

$$A_z(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{j_z(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2}, \quad (2.10)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ и

$$j_z(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} j_z(\vec{r}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d\vec{r} = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(k_z - \omega/v). \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) и (2.10) в (2.9), приходим к следующему интегральному представлению z -компоненты векторного потенциала:

$$\begin{aligned} A_z(\vec{r}, t) &= \frac{q}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(k_z - \omega/v)}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} \exp(i\omega t - i(\vec{k} \cdot \vec{r})) d\vec{k} d\omega = \\ &= \frac{q}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega(t - z/v) - ik_x x - ik_y y)}{k_{\perp}^2 + \kappa^2} dk_x dk_y d\omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\kappa^2 = (1 - \varepsilon(\omega)\beta^2)\omega^2/v^2$ и $\beta = v/c$. Для дальнейшего интегрирования удобно перейти к “полярным координатам” k_{\perp} и χ , где χ — угол между проекцией волнового вектора \vec{k} на плоскость xy и осью x . Вводя также цилиндрические координаты $(\rho, \varphi$ и $z)$ точки наблюдения, получим:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{\perp} \cos \chi, & x &= \rho \cos \varphi, \\ k_y &= k_{\perp} \sin \chi, & y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставив (2.13) в (2.12) и учитывая, что якобиан такой замены переменных равен k_{\perp} , находим:

$$A_z = \frac{q}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(i\omega(t - z/v) - ik_{\perp} \rho \cos(\chi - \varphi))}{k_{\perp}^2 + \kappa^2} k_{\perp} dk_{\perp} d\chi d\omega. \quad (2.14)$$

Проинтегрировав в (2.14) по углу χ с помощью известной формулы [5]

$$\int_0^{2\pi} \exp[-ik_{\perp}\rho \cos(\chi - \varphi)] d\chi = 2\pi J_0(k_{\perp}\rho), \quad (2.15)$$

получим:

$$A_z(\rho, z, t) = \frac{q}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} J_0(k_{\perp}\rho) \exp(i\omega(t - z/v))}{k_{\perp}^2 + \kappa^2} dk_{\perp} d\omega. \quad (2.16)$$

Интеграл по k_{\perp} в (2.16) также является табличным [5]:

$$\int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} J_0(k_{\perp}\rho)}{k_{\perp}^2 + \kappa^2} dk_{\perp} = K_0(\kappa\rho), \quad (2.17)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда [7]. Формула (2.17) справедлива при условии $\text{Re } \kappa > 0$. В итоге, z -компоненту векторного потенциала можно представить в виде:

$$A_z(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega, \rho) e^{i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (2.18)$$

где

$$a(\omega, \rho) = \begin{cases} \frac{q}{\pi c} K_0(\kappa\rho) & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

$\kappa = |\omega| \rho \sqrt{1 - \varepsilon(\omega)\beta^2}/v$ и следует выбирать ветвь корня с положительной реальной частью. Здесь мы учли свойство симметрии Фурье-образа действительной функции: $a(\omega, \rho) = a^*(-\omega, \rho)$. Отметим, что комплексная диэлектрическая проницаемость среды также удовлетворяет подобному соотношению [10]: $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega)$. Совершенно аналогично для скалярного потенциала получим:

$$\varphi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega, \rho) e^{i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (2.20)$$

где

$$\Phi(\omega, \rho) = \begin{cases} \frac{q}{\pi v \varepsilon(\omega)} K_0(\kappa\rho) & \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно сопряж.} & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Выпишем отличные от нуля компоненты электромагнитного поля E_ρ , E_z и B_φ . Дифференцируя φ и A_z (см. также формулы (1.6)), находим:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, z, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\varepsilon(\omega)} \frac{\partial a(\omega, \rho)}{\partial \rho} e^{i\omega(t-z/v)} d\omega, \\ E_z(\rho, z, t) &= -\frac{i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon(\omega)}\right) a(\omega, \rho) e^{i\omega(t-z/v)} \omega d\omega, \\ B_\varphi(\rho, z, t) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a(\omega, \rho)}{\partial \rho} e^{i\omega(t-z/v)} d\omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для окончательного определения компонент поля равномерно и прямолинейно движущейся в среде заряженной частицы по формулам (2.22) необходимо задать выражение для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$.

Пусть $\varepsilon(\omega)$ действительно, что соответствует прозрачной среде (среде без потерь). Если в некотором интервале частот $\beta^2\varepsilon(\omega) < 1$ ($v < v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon}$) или, как говорят, условие Вавилова-Черенкова не выполнено, то действительной является также величина $\kappa = |\omega| \sqrt{1 - \beta^2\varepsilon(\omega)}/v$ и функции $a(\omega, \rho)$ и $\Phi(\omega, \rho)$ (функция Макдональда действительного аргумента является действительной). Согласно известному асимптотическому представлению функции Макдональда при больших значениях аргумента [7]

$$K_0(\kappa\rho) \underset{\kappa\rho \gg 1}{\approx} \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa\rho}} e^{-\kappa\rho}. \quad (2.23)$$

Поэтому, при $\beta^2\varepsilon(\omega) < 1$ волновое поле отсутствует: потенциалы и компоненты поля разлагаются по гармоникам, экспоненциально затухающим при $\rho \rightarrow \infty$. Иная ситуация имеет место, если условие Вавилова-Черенкова выполнено ($\beta^2\varepsilon(\omega) > 1$ или $v > v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon}$). Величина κ , входящая в аргумент функции K_0 является мнимой. При $\omega > 0$ следует положить:

$$\kappa = \omega \sqrt{1 - \beta^2\varepsilon(\omega)}/v = i s, \quad (2.24)$$

где $s = |\kappa| = \omega \sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}/v$. Тогда получим:

$$K_0(\kappa\rho) = K_0(i\rho s) \underset{\rho s \gg 1}{\approx} \sqrt{\frac{\pi}{2i\rho s}} e^{-i\rho s}. \quad (2.25)$$

Таким образом, при $\beta^2\varepsilon(\omega) > 1$ гармоники потенциалов и компонент поля отвечают расходящимся в радиальном направлении коническим волнам вида

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\omega(t-z/v) - i\rho s}. \quad (2.26)$$

Выбор знака корня в (2.24) должен соответствовать выбору разложения по расходящимся волнам. При $\omega < 0$ следует положить:

$$\kappa = -i\rho s = -i\rho|\omega|\sqrt{\beta^2\varepsilon(|\omega|) - 1}/v.$$

Тогда при $\omega < 0$ имеем (см. (2.19) и (2.21)):

$$K_0(\kappa\rho) = K_0(-i\rho s) = [K_0(i\rho s)]^* \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{i\rho s},$$

что дает правильный множитель $e^{i\omega(t-z/v)+i\rho s}$ для расходящихся в радиальном направлении волн при отрицательных значениях ω . В результате, при выполнении условия Вавилова-Черенкова поле состоит из волн, уходящих в бесконечность под углом θ к оси z , вдоль которой движется заряд. Тангенс этого угла равен отношению поперечной (s) и продольной ($|\omega|/v$) компонент волнового вектора \vec{k} (см. (2.26) и рис. 2.2): $\operatorname{tg} \theta = sv/|\omega| = \sqrt{\beta^2\varepsilon(\omega) - 1}$, $\cos \theta = v_{ph}/v = c/(v\sqrt{\varepsilon})$.

2.1.3. Излучение Вавилова-Черенкова в среде без дисперсии

Интегралы, определяющие потенциалы и компоненты поля, можно вычислить аналитически, если пренебречь дисперсией в среде. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость ε не зависит от частоты. Тогда при $\beta^2\varepsilon < 1$ интегрирование в формуле (2.20) дает [5]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2q}{\pi v \varepsilon} \int_0^\infty K_0\left(\frac{\rho\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}\right) \cos(\omega(t-z/v)) d\omega = \\ &= \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon\beta^2)\rho^2 + (z-vt)^2}}, \\ A_z &= \varepsilon\beta\varphi. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В случае $\varepsilon = 1$ эти формулы совпадают, естественно, с формулами (1.4) для потенциалов равномерно движущегося заряда в вакууме. В случае же $\beta^2\varepsilon > 1$ потенциал φ следует записать как

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{iq}{2v\varepsilon} \int_0^\infty \left[H_0^{(1)}(\rho s) e^{i\omega(t-z/v)} - H_0^{(2)}(\rho s) e^{-i\omega(t-z/v)} \right] d\omega = \\ &= \frac{q}{v\varepsilon} \left[\int_0^\infty J_0\left(\frac{\rho\omega}{v}\sqrt{\beta^2\varepsilon-1}\right) \sin(\omega(t-z/v)) d\omega - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty Y_0\left(\frac{\rho\omega}{v}\sqrt{\beta^2\varepsilon-1}\right) \cos(\omega(t-z/v)) d\omega \right], \end{aligned} \tag{2.28}$$

где Y_0 — функция Бесселя второго рода (функция Неймана) и использованы следующие формулы связи между функциями Макдональда и Ханкеля [7]:

$$K_0(-i\rho s) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\rho s) = \left[-\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\rho s) \right]^* = [K_0(i\rho s)]^*. \quad (2.29)$$

Подставляя значения табличных интегралов в (2.28), получаем:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2q}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2 - (\varepsilon\beta^2 - 1)\rho^2}} & \text{при } z < vt, \quad vt - z > \rho\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}, \\ 0 & \text{(в остальном пространстве)}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Таким образом, при выполнении условия Вавилова-Черенкова потенциалы равномерно и прямолинейно движущегося заряда в среде без дисперсии являются разрывными. Поле отлично от нуля только внутри черенковского конуса (см. рис. 2.2б), поверхность которого описывается уравнением:

$$z - vt + \rho\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1} = 0. \quad (2.31)$$

Отметим, что компоненты поля на данной поверхности обращаются в бесконечность. Эта расходимость является следствием пренебрежения дисперсией. Наличие дисперсии в реальной среде приводит к “размыванию” черенковского конуса и напряженности полей остаются везде конечными. Коническая волна распространяется вдоль оси z со скоростью заряда. Нормаль к волновому фронту составляет с осью z угол $\theta = \arctg(z/\rho) = \sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}$. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости векторов \vec{v} и \vec{k} (имеет единственную отличную от нуля компоненту B_φ). Электрическое поле перпендикулярно магнитному и лежит в этой плоскости.

2.1.4. Потери энергии заряженной частицы, движущейся в среде. Формула Тамма-Франка

Перейдем к исследованию энергетических характеристик излучения Вавилова-Черенкова. Поскольку при наличии излучения энергия частицы изменяется, приходится сталкиваться с вопросом — можно ли считать скорость заряда постоянной. Ответ на этот вопрос положителен. Например, если энергию излучающей частицы можно считать большой, то изменения её скорости в результате излучения очень малы. Кроме того, потери энергии можно компенсировать за счет работы внешних источников. Вопрос о потерях энергии заряженной частицы при её движении в среде имеет важное прикладное значение. Для вычисления этих потерь окружим путь частицы цилиндрической

поверхностью радиуса b , ось которой совпадает с осью z (траекторией движения частицы). Поток вектора Пойнтинга через эту поверхность характеризует потери энергии частицы в единицу времени.

Энергия, излучаемая частицей через поверхность цилиндра радиуса b единичной длины равна:

$$\begin{aligned}
E &= 2\pi b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} \times \vec{B} \right] \Big|_{\rho=b} \cdot \vec{e}_\rho dt = -\frac{bc}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(b, z, t) B_\varphi(b, z, t) dt = \\
&= -\frac{ibc}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right) a(\omega, b) e^{i\omega(t-z/v)} \omega d\omega \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a(\omega', \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} e^{i\omega'(t-z/v)} d\omega' dt. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Проинтегрировав в (2.32) сначала по t , воспользовавшись формулой (1.118), а затем по ω' , получим:

$$E = -i\pi b \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right) a(\omega, b) \frac{\partial a(-\omega, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} \omega d\omega. \tag{2.33}$$

Учитывая (2.19), а также соотношение $K_0'(x) = -K_1(x)$, находим:

$$\frac{\partial a(-\omega, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = -\frac{q}{\pi c} \kappa(-\omega) K_1(\kappa(-\omega)b). \tag{2.34}$$

Принимая во внимание, что $\kappa(-\omega) = \kappa^*(\omega)$, запишем (2.33) в виде интеграла по положительным частотам:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{q^2 b}{\pi c^2} \left[\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right) \kappa^* K_1(\kappa^* b) K_0(\kappa b) i \omega d\omega + \right. \\
&+ \left. \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right)^* \kappa K_1(\kappa b) K_0(\kappa^* b) i^* \omega d\omega \right] = \\
&= \frac{2q^2 b}{\pi c^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right) \kappa^* K_1(\kappa^* b) K_0(\kappa b) i \omega d\omega. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Найдем излучаемую энергию в прозрачной среде. Если ε — действительная величина, то в подынтегральном выражении (2.35) присутствуют неинтегрируемые особенности в точках, где $\varepsilon(\omega) = 0$, и величина E обращается

в бесконечность. Для придания смысла этому выражению при действительном ε необходимо использовать принцип предельного поглощения, т.е., учесть диссипативные потери, присутствующие в любой реальной среде, вычислить соответствующий интеграл, а затем, устремляя потери к нулю, перейти к идеализированному случаю прозрачной среды и действительного ε . Учет исчезающе малых потерь (затухания волн) в среде отвечает появлению бесконечно малой отрицательной мнимой части у комплексной диэлектрической проницаемости ε , что можно формально представить как замену действительной величины $\varepsilon(\omega)$ на $\varepsilon(\omega) - i0$, где символ “ $i0$ ” обозначает бесконечно малую мнимую добавку. Сделав такую замену в подынтегральном выражении (2.35), воспользуемся известными соотношениями теории обобщенных функций (см. [11] и формулу (1.20)):

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega) - i0} = i\pi \delta(\varepsilon(\omega)) + \mathcal{P} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} = i\pi \sum_n \frac{\delta(\omega - \omega_n)}{|\varepsilon'(\omega_n)|} + \mathcal{P} \frac{1}{\varepsilon(\omega)}, \quad (2.36)$$

где ω_n — положительные корни уравнения $\varepsilon(\omega) = 0$, а символ “ \mathcal{P} ” обозначает главное значение интеграла. С учётом (2.36), выражение (2.35) для прозрачной среды принимает вид:

$$E = \frac{2q^2}{v^2} \sum_n \frac{\omega_n}{|\varepsilon'(\omega_n)|} \kappa_n b K_0(\kappa_n b) K_1(\kappa_n b) + \frac{2q^2 b}{\pi c^2} \operatorname{Re} \left[\int_{\beta^2 \varepsilon > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)} \right) \kappa^* K_1(\kappa^* b) K_0(\kappa b) i \omega d\omega \right]. \quad (2.37)$$

Здесь $\kappa_n = \kappa(\omega_n) = \omega_n/v$ и интегрирование проводится по положительным частотам, удовлетворяющим условию Вавилова-Черенкова. Формула (2.37) показывает, что движущаяся заряженная частица теряет энергию не только на излучение волн Вавилова-Черенкова, но также возбуждает колебания на частотах, для которых диэлектрическая проницаемость среды обращается в нуль. Возникновение на частотах ω_n продольных (относительно оси z) колебаний электрического поля можно представлять как результат поляризации атомов среды близко пролетающей заряженной частицей. Первое слагаемое в (2.37) дает так называемые поляризационные потери, связанные с затратами энергии на возбуждение этих колебаний.

Преобразуем второе слагаемое в (2.37), определяющее потери энергии на излучение Вавилова-Черенкова. Полагая $\kappa = is$, а также учитывая наряду с

(2.29) соотношение $K_1(-isb) = -\pi H_1^{(1)}(sb)/2$, получим:

$$\begin{aligned} E_{\text{В.-ч.}} &= \frac{\pi q^2 b}{2c^2} \int_{\beta^2 \varepsilon > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) \operatorname{Re} \left[i H_1^{(1)}(sb) H_0^{(2)}(sb) \right] s \omega d\omega = \\ &= \frac{\pi q^2 b}{2c^2} \int_{\beta^2 \varepsilon > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) [J_1(sb) Y_0(sb) - J_0(sb) Y_1(sb)] s \omega d\omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

Воспользовавшись известным в теории Бесселевых функций тождеством [7]

$$J_1(sb) Y_0(sb) - J_0(sb) Y_1(sb) = \frac{2}{\pi sb}, \quad (2.39)$$

получаем формулу Тамма-Франка:

$$E_{\text{В.-ч.}} = \frac{q^2}{c^2} \int_{\beta^2 \varepsilon > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) \omega d\omega. \quad (2.40)$$

Заметим, что это выражение не зависит от величины b .

Формулу Тамма-Франка можно получить и иным, возможно, даже более простым методом. В методических целях приведём другой способ вывода выражения (2.40). Мощность излучения равна взятой со знаком минус работе, совершаемой в единицу времени силой Лоренца над зарядом:

$$\begin{aligned} W &= -(\vec{F} \cdot \vec{v}) = -qvE_z|_{z \rightarrow vt, \rho \rightarrow 0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow vt, \rho \rightarrow 0} \frac{iqv}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) a(\omega, \rho) e^{i\omega(t-z/v)} \omega d\omega = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{iqv}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) a(\omega, \rho) \omega d\omega. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Используя асимптотику функции Макдональда при малых значениях аргумента [7], в области частот черенковского излучения получим:

$$\begin{aligned} K_0(\kappa\rho) &= K_0(i\rho s) \underset{\rho \rightarrow 0}{\approx} -\ln(i\rho s) = -\ln(\rho s) - i\pi/2 \quad (\omega > 0), \\ K_0(\kappa\rho) &= K_0(-i\rho s) \underset{\rho \rightarrow 0}{\approx} -\ln(-i\rho s) = -\ln(\rho s) + i\pi/2 \quad (\omega < 0). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Отсюда с учётом (2.19) находим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{iq^2 v}{\pi c^2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) (-\ln(\rho s) - i\pi/2) \omega d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon(\omega)}\right) (-\ln(\rho s) + i\pi/2) \omega d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Сделав в последнем интеграле замену $\omega' = -\omega$ и принимая во внимание, что в прозрачной среде $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(-\omega)$ и $s(\omega) = s(-\omega)$, легко убедиться в том, что члены с логарифмами сокращаются. Разделив результат на скорость v , получаем формулу (2.40), т.е. потери энергии, отнесённые к единице длины пути частицы.

2.1.5. Расчет потерь энергии заряженной частицы в модели среды с упруго связанными электронами

Рассмотрим модель среды с упруго связанными электронами (т.н. “электроны на пружинках”). Иными словами, мы будем предполагать, что поляризация среды обусловлена смещением электронов, рассматриваемых как классические точечные частицы массы m , упруго связанные с ядрами атомов, под действием внешнего поля. Уравнение движения электрона в атоме в поле плоской монохроматической электромагнитной волны запишем в виде:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = -e\vec{E}\exp(i\omega t), \quad (2.44)$$

где \vec{r} — смещение электрона, ω_0 — частота собственных колебаний под действием упругой силы. При записи уравнения (2.44) мы пренебрегли магнитной частью силы Лоренца, так как скорости $|\dot{\vec{r}}|$ электронов в атомах малы по сравнению со скоростью света c . Расстояния $|\vec{r}|$ проходимые ими за период волны, соответственно, малы по сравнению с длиной волны λ : $|\vec{r}| \approx v/\omega \ll \lambda = 2\pi c/\omega$. Последнее неравенство можно также записать как $|\vec{k} \cdot \vec{r}| \ll 1$, что дает право положить фазовый множитель $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})$ в выражении для плоской волны равным единице.

Вынужденное решение уравнения (2.44) имеет вид:

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}\exp(i\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2.45)$$

Вектор поляризации (электрический дипольный момент единицы объёма среды) находится как: $\vec{P} = -eN\vec{r}$, где N — концентрация электронов. Вводя стандартным образом вектор электрической индукции $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$, находим выражение для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$, связывающей комплексные амплитуды величин \vec{D} и \vec{E} :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2.46)$$

где $\Omega = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$. В предельном случае $\omega_0 = 0$, что отвечает электронам, не связанным с неподвижными атомными ядрами, получаем отсюда диэлектрическую проницаемость холодной изотропной плазмы, а величина Ω приобретает смысл плазменной частоты. Отметим также, что выражение (2.46)

(как и диэлектрическая проницаемость любой среды) сводится к диэлектрической проницаемости плазмы на очень больших частотах ($\omega \gg \omega_0$).

Рассмотрим поляризационные потери $E_{\text{пол.}}$ (первое слагаемое в выражении (2.37)) в модели среды (2.46):

$$E_{\text{пол.}} = \frac{q^2 \Omega^2 \omega_g b}{v^2 v} K_0 \left(\frac{\omega_g b}{v} \right) K_1 \left(\frac{\omega_g b}{v} \right), \quad (2.47)$$

где $\omega_g = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$ — “гибридная” частота ($\varepsilon(\omega_g) = 0$). В случае $\omega_g b/v \ll 1$, учитывая, что $K_0(x) \approx -\ln x$ и $K_1(x) \approx 1/x$ при $x \ll 1$, из (2.47) имеем:

$$E_{\text{пол.}} \approx \frac{q^2 \Omega^2}{v^2} \ln \left(\frac{v}{\omega_g b} \right). \quad (2.48)$$

Следовательно, $E_{\text{пол.}} \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow 0$. В случае же $\omega_g b/v \gg 1$, учитывая асимптотику (2.25), получаем $E_{\text{пол.}} \sim \exp(-2\omega_g b/v)$, т.е., экспоненциально малую величину. Таким образом, в рамках изложенной классической теории величина $E_{\text{пол.}}$ существенно зависит от параметра b (радиуса цилиндра, через поверхность которого подсчитывается поток вектора Пойнтинга). Только при малых значениях b поляризационные потери будут давать сколько-нибудь заметный вклад в полные потери энергии. Это объясняется тем, что поляризационные колебания возбуждаются на малых расстояниях от траектории движения заряженной частицы. Вопрос о том, чему следует положить величину b для согласия приведенных выше формул с экспериментом, не может быть решен в рамках классической теории, поскольку взаимодействие частицы с атомами среды на малых расстояниях должно рассчитываться с учетом квантовых эффектов. Минимальное значение b , при котором классическая электродинамика ещё справедлива, по оценкам приблизительно равно c/Ω [12]. Полагая $b = c/\Omega$, по формуле (2.47) можно найти ту часть потерь энергии, которая описывается классической электродинамикой. Чтобы получить полные потери, к (2.47) нужно добавить потери энергии на соударения с прицельным расстоянием меньшим, чем b , вычисленные по квантовым формулам. Изложение этой теории выходит за рамки настоящего пособия, целью которого является рассмотрение вопросов теории излучения волн.

Рассчитаем теперь потери энергии частицы на излучение волн Вавилова-Черенкова в среде, диэлектрическая проницаемость которой описывается выражением (2.46).

График функции $\varepsilon(\omega)$ (2.46) показан на рис. 2.3. Если на графике $\varepsilon(\omega)$ провести параллельную оси абсцисс прямую с ординатой $1/\beta^2$, то условию Вавилова-Черенкова $\varepsilon(\omega) > 1/\beta^2$ будут удовлетворять частоты, для которых точки графика функции $\varepsilon(\omega)$ лежат выше этой прямой. В случае $1/\beta >$

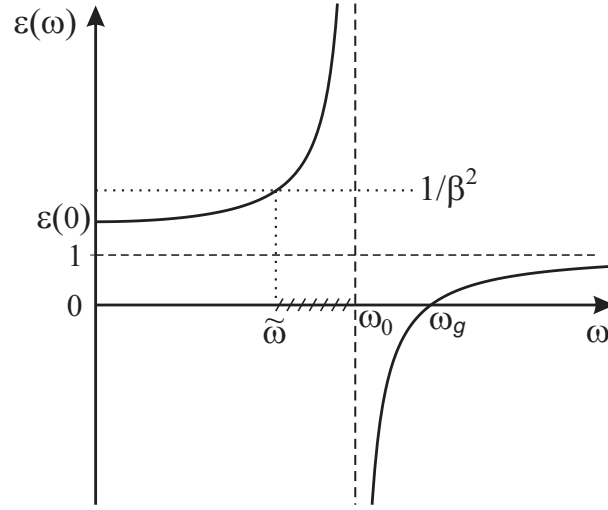


Рис. 2.3. Зависимость диэлектрической проницаемости (2.46) от частоты

$\sqrt{\varepsilon(0)}$, где $\varepsilon(0) = \varepsilon(\omega = 0) = 1 + \Omega^2/\omega_0^2$, область частот излучения Вавилова-Черенкова (заштрихованная на рис. 2.3) представляет собой интервал $\tilde{\omega} < \omega < \omega_0$. Низшая частота $\tilde{\omega}$ находится из условия $\varepsilon(\tilde{\omega}) = 1/\beta^2$ и равна

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_0^2 - \beta^2 \omega_g^2}{1 - \beta^2}.$$

Применяя формулу Тамма-Франка (2.40) и вычисляя интеграл, получаем:

$$\begin{aligned} E_{\text{В.-ч.}} &= \frac{q^2}{c^2} \int_{\tilde{\omega}}^{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\beta^2(\omega_g^2 - \omega^2)} \right) \omega d\omega = \frac{q^2}{c^2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \int_{\tilde{\omega}}^{\omega_0} \frac{\omega^2 - \tilde{\omega}^2}{\omega_g^2 - \omega^2} \omega d\omega = \\ &= -\frac{q^2 \Omega^2}{2c^2 \beta^2} [\beta^2 + \ln(1 - \beta^2)] > 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

При $1/\beta < \sqrt{\varepsilon(0)}$ условию Вавилова-Черенкова удовлетворяют все частоты диапазона $0 < \omega < \omega_0$. Интегрируя в формуле (2.40) от нуля до ω_0 , находим:

$$E_{\text{В.-ч.}} = \frac{q^2 \Omega^2}{2c^2 \beta^2} \left[\ln \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(0) - 1} - \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon(0) - 1} \right]. \quad (2.50)$$

Зависимость нормированной величины $c^2 E_{\text{В.-ч.}} / (q^2 \Omega^2)$ от параметра β (скорости частицы), рассчитанная по формулам (2.49) и (2.50), показана на рис. 2.4.

Нетрудно заметить (см. формулу (2.40)), что потери энергии на излучение Вавилова-Черенкова оказываются больше всего в тех спектральных областях, где $\varepsilon(\omega)$ велико. В модели прозрачной среды (2.46) диэлектрическая

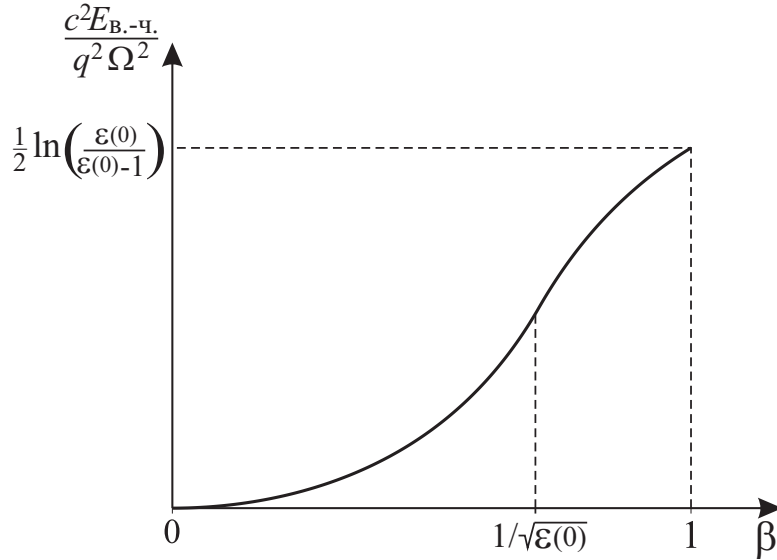


Рис. 2.4. Зависимость нормированных потерь энергии на излучение Вавилова-Черенкова $c^2 E_{\text{В.-ч.}} / (q^2 \Omega^2)$ от величины $\beta = v/c$, рассчитанная по формуле (2.49) при $\beta < 1/\sqrt{\epsilon(0)}$ и по формуле (2.50) при $\beta > 1/\sqrt{\epsilon(0)}$

проницаемость велика вблизи резонансной частоты ω_0 . При $\omega \rightarrow \omega_0$ величина ϵ обращается в бесконечность. В связи с этим может даже показаться, что излучение Вавилова-Черенкова будет существовать и при сколь угодно малых скоростях движения частицы (даже если ордината прямой $1/\beta^2 = c^2/v^2$ на рис. 2.3 неограниченно возрастает, то вблизи ω_0 существуют частоты, для которых $\epsilon(\omega) > 1/\beta^2$). Такие рассуждения, разумеется, ошибочны и часть кривой на рис. 2.4, отвечающая малым β , весьма условна. Во-первых, при ω , близких к ω_0 длина волн $\lambda = 2\pi c / (\omega \sqrt{\epsilon(\omega)})$ может принимать столь малые значения, что такие волны уже не будут описываться классической электродинамикой. Электродинамика сплошных сред предполагает усреднение поля в определенном объеме и длина волны не может быть меньше некоторой величины. Как уже отмечалось, в качестве этой величины можно взять отношение c/Ω . Во-вторых, модель прозрачной среды становится здесь неприменимой, поскольку вблизи частоты ω_0 необходимо учитывать поглощение. В более реальной модели дисперсии диэлектрической проницаемости выражение (2.46) следует заменить на

$$\epsilon(\omega) = 1 + \Omega^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}, \quad (2.51)$$

где f_k — т.н. силы осцилляторов, γ_k — коэффициенты затухания. Формула (2.51) учитывает наличие нескольких электронных оболочек в атомах среды. В окрестности частот ω_k становится велика мнимая часть диэлектрической проницаемости (полосы поглощения в диэлектрике). Действительная

же часть $\varepsilon(\omega)$ при учете поглощения уже не обращается в бесконечность, и значения ω , близкие к ω_k , не дают большого вклада в излучение Вавилова - Черенкова. Кроме того, само определение излучения Вавилова-Черенкова в среде с поглощением является до некоторой степени условным, так как излучение поглощается в среде.

Резюмируя, можно говорить, что хотя рассмотренная в настоящем разделе теория проясняет все основные физические аспекты проблемы, ряд важных для приложений вопросов (например, вопрос о том, какая доля полных потерь энергии частицы приходится на поляризационные потери, а какая — на излучение Вавилова-Черенкова) требует учета квантовых эффектов и конкретизации физико-химического строения среды.

Задача. Показать, что минимальная скорость движения частицы v_m , при которой возникает излучение Вавилова-Черенкова в данном направлении, удовлетворяет условию $v_m \cos \theta = v_g(\omega_0)$, где v_g — групповая скорость в среде, ω_0 — частота, при которой показатель преломления имеет максимум, θ — угол между направлением излучения и скоростью частицы. Среда считается прозрачной.

2.1.6. Применение излучения Вавилова-Черенкова

В годы, когда было сделано открытие излучения Вавилова-Черенкова и дано его объяснение ещё не рассматривались его возможные применения. Излучение было настолько слабым, что само его наблюдение представляло трудности. Положение изменилось, когда были созданы фотоэлектронные умножители (ФЭУ) — приборы, позволяющие уверенно регистрировать даже столь слабое излучение, как излучение Вавилова-Черенкова от единственной заряженной частицы [13]. В настоящее время излучение Вавилова-Черенкова находит широкое применение в черенковских счетчиках — устройствах для регистрации быстрых заряженных частиц. Принципиальная схема простейшего подобного устройства показана на рис. 2.5.

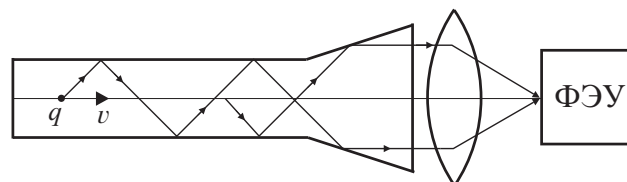


Рис. 2.5. Схема черенковского счетчика

Та часть черенковского счетчика, в которой генерируется излучение, называется радиатором. Радиатор заполнен прозрачной средой. На рис. 2.5 изображен радиатор, состоящий из цилиндрической части и примыкающей конической части. Такой радиатор даёт параллельный поток лучей, который

фокусируется линзой на фотокатод фотоумножителя. Техника черенковских счетчиков получила широкое развитие. Существуют различные конструкции этих приборов. Благодаря направленности излучения Вавилова-Черенкова, черенковские счетчики могут не только регистрировать прохождение частицы, но и определять скорость и направление её движения. Если частицы с данной скоростью проходят через среду с известной диэлектрической проницаемостью, то свет будет испускаться под черенковским углом θ . Таким образом, измерение угла θ позволяет определить скорость. Так как диэлектрическая проницаемость среды зависит от частоты (см. рис. 2.3), световое излучение разной длины волны будет испускаться под несколько различающимися углами. Как уже отмечалось, вблизи резонансной частоты ω_0 реальная среда обладает сильным поглощением, поэтому максимум спектрального распределения черенковского излучения лежит несколько ниже значения ω_0 . Чтобы выделить малый интервал частот и повысить тем самым точность измерений скорости, применяются узкополосные фильтры. Для быстрых частиц в качестве среды, заполняющей радиатор счетчика, используется газ; тогда диэлектрическая проницаемость мало отличается от единицы, а величину $(\epsilon - 1)$ можно менять в широких пределах, изменяя давление газа. Важным преимуществом черенковских счетчиков (по сравнению, например, со счетчиками Гейгера) является их высокое быстродействие.

В 1996 г. в Японии вошёл в строй гигантский черенковский детектор “Супер-Камиоканде”. Он размещён в горных выработках на километровой глубине под землёй. Детектор представляет собой цилиндрический бак из нержавеющей стали. Высота бака 41 м, диаметр 39 м. Бак вмещает 50000 т воды, причём вода подвергается тщательнейшей очистке, для того чтобы свести к минимуму поглощение и рассеяние в ней света. На стенках бака расположены 11146 фотоумножителей. Гигантский размер этого черенковского счетчика позволяет регистрировать отдельные и не очень частые акты взаимодействия нейтрино с протонами и нейтронами в атомных ядрах молекул воды. При энергичного нейтрино с протонами и нейтронами рождаются быстрые заряженные частицы. Проходя через толщу воды, наполняющей счетчик, быстрые частицы дают излучение Вавилова-Черенкова. Оно улавливается фотоумножителями и анализируется. Измерения, проведённые на детекторе “Супер-Камиоканде”, дали убедительные доказательства в пользу наличия т.н. нейтринных осцилляций. За эти работы была присуждена Нобелевская премия по физике 2015 г.

В заключение отметим, что излучение Вавилова-Черенкова, понимаемое в широком смысле как излучение при равномерном и прямолинейном движении источника, не обладающего собственной частотой, имеет место для волн

различной физической природы (электромагнитных, акустических, сейсмических). Теория этого явления имеет несомненное общезначение, формирует определенные представления и “черенковскую” идеологию и, тем самым, способствует развитию других направлений.

2.2. Переходное излучение

В отличие от излучения Вавилова-Черенкова, переходное излучение было вначале предсказано теоретически В. Л. Гинзбургом и И. М. Франком в 1945 г. и лишь затем обнаружено экспериментально. Рассмотрим вначале качественно механизм этого явления. Напомним, что характеризующий излучение заряда в вакууме безразмерный параметр имеет вид $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. Для появления излучения необходимо, чтобы величина $\vec{\beta}$ изменялась. Поскольку $c = \text{const}$, то производная $\dot{\vec{\beta}}$ может быть отлична от нуля только для ускоряющегося заряда, когда $\dot{\vec{v}} \neq 0$. Для частицы, движущейся в среде, параметр равен отношению скорости частицы к фазовой скорости электромагнитных волн в среде, т.е. $\vec{v}/v_{ph} = \vec{v}n/c$, где n — показатель преломления. Этот параметр может меняться не только из-за изменения скорости \vec{v} , но и из-за изменения вдоль траектории частицы фазовой скорости волн. Излучение, возникающее в случае $\vec{v} = \text{const}$ при изменении n и v_{ph} , и называется переходным [3, 15, 16, 17]. Это излучение равномерно и прямолинейно движущегося заряда в неоднородной и/или нестационарной среде. В отличие от излучения Вавилова-Черенкова, переходное излучение существует при любых скоростях движения частицы. Обычно переходное излучение сосуществует и может интерферировать с излучением Вавилова-Черенкова. Наиболее простой и наглядный пример когда возникает переходное излучение — нормальное падение заряда из вакуума на идеальное зеркало. Электромагнитное поле в вакууме можно представить при этом как суперпозицию поля самого заряда и поля заряда другого знака (его “изображения”), движущегося “за зеркалом” навстречу. При пересечении границы зеркала заряд и его изображение “аннигилируют” или, можно сказать, резко останавливаются на границе. Заряд как бы исчезает в зеркале. При этом его поле резко меняется — возникает излучение.

2.2.1. Вычисление компонент поля

Рассмотрим теперь более общую задачу, когда движущийся с постоянной скоростью заряд q пересекает по нормали границу раздела двух немагнитных сред с разными диэлектрическими проницаемостями (см. рис. 2.6). Будем считать, что граница раздела совпадает с плоскостью $z = 0$.

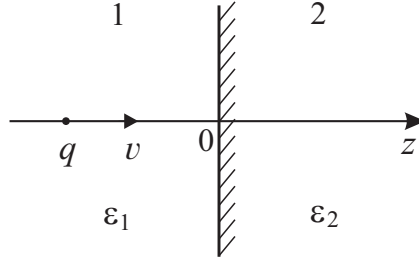


Рис. 2.6. Пересечение зарядом границы раздела двух сред

Эту задачу можно рассматривать как обобщение задачи о черенковском излучении заряда в однородной среде. В силу азимутальной симметрии относительно оси z электромагнитное поле описывается одной компонентой A_z векторного потенциала. Величина $A_z(\vec{r}, \omega)$ и скалярный потенциал $\varphi(\vec{r}, \omega)$ в каждой из сред, нумеруемых индексами “1” или “2”, удовлетворяют уравнениям (2.6) с соответствующими значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{1,2}(\omega)$. Величины $j_z(\vec{r}, \omega)$ и $\rho(\vec{r}, \omega)$ даются формулами (2.7) и (2.8). Разложим функции $A_z(\vec{r}, \omega)$, $\varphi(\vec{r}, \omega)$, $j_z(\vec{r}, \omega)$ и $\rho(\vec{r}, \omega)$ в интегралы Фурье по поперечным компонентам k_x и k_y волнового вектора. Фурье-образы будем обозначать значком “ \sim ”. Выпишем подробно такое разложение, например, для величины $A_z(\vec{r}, \omega)$:

$$A_z(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_z(k_x, k_y, z, \omega) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y. \quad (2.52)$$

Переходя к интегрированию по k_{\perp} и χ и вводя цилиндрические координаты точки наблюдения (см. (2.13) и (2.15)), находим:

$$A_z(\vec{r}, \omega) = A_z(\rho, z, \omega) = 2\pi \int_0^{\infty} k_{\perp} J_0(k_{\perp} \rho) \tilde{A}_z(k_{\perp}, z, \omega) dk_{\perp}. \quad (2.53)$$

Запишем теперь преобразование Фурье, обратное преобразованию (2.52):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_z(k_x, k_y, z, \omega) &= \tilde{A}_z(k_{\perp}, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\vec{r}, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A_z(\rho, z, \omega) e^{ik_{\perp} \rho \cos(\chi - \varphi)} \rho d\rho d\chi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{\infty} \rho J_0(k_{\perp} \rho) A_z(\rho, z, \omega) d\rho. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Преобразование (2.53) называется преобразованием Фурье-Бесселя. Обратное преобразование даётся формулой (2.54). Подставив (2.53) в (2.54), получим:

$$\tilde{A}_z(k_\perp, z, \omega) = \int_0^\infty \rho J_0(k_\perp \rho) \int_0^\infty k'_\perp J_0(k'_\perp \rho) \tilde{A}_z(k'_\perp, z, \omega) dk'_\perp d\rho. \quad (2.55)$$

Отсюда следует соотношение:

$$\int_0^\infty \rho J_0(k_\perp \rho) J_0(k'_\perp \rho) d\rho = \frac{\delta(k'_\perp - k_\perp)}{k'_\perp}. \quad (2.56)$$

Можно показать [14], что аналогичное (2.56) соотношение ортогональности справедливо для Бесселевых функций с любым индексом $\nu > -1/2$:

$$\int_0^\infty \rho J_\nu(k_\perp \rho) J_\nu(k'_\perp \rho) d\rho = \frac{\delta(k_\perp - k'_\perp)}{k_\perp}. \quad (2.57)$$

Соответственно, формулы преобразования Фурье-Бесселя останутся справедливыми при замене индекса Бесселевых функций с “0” на “ ν ”.

Подставив разложения вида (2.52) в (2.6), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_\perp^2 \right) \tilde{A}_z &= -\frac{4\pi}{c} \tilde{j}_z, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon \tilde{\varphi}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_\perp^2 \right) (\varepsilon \tilde{\varphi}) &= -4\pi \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\tilde{\rho} = \tilde{j}_z/v$,

$$\tilde{j}_z = \tilde{j}_z(k_\perp, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty j_z(\vec{r}, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy = \frac{q}{(2\pi)^3} e^{-i\omega z/v}. \quad (2.59)$$

В пределах каждой из сред диэлектрическая проницаемость ε является постоянной величиной и не зависит от z . Однако на границе раздела (при $z = 0$) она испытывает скачок. Уравнения (2.58) нужно поэтому решить в каждой из сред и сшить решения, используя граничные условия при $z = 0$. Поскольку \tilde{A}_z и $\tilde{\varphi}$ связаны калибровкой, фактически достаточно решить одно уравнение для $\tilde{\varphi}$. В пределах каждой из двух сред записываем решение как частное решение неоднородного уравнения (вынужденное решение $\tilde{\varphi}^q$) плюс общее решение $\tilde{\varphi}^R$ однородного уравнения:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^q + \tilde{\varphi}^R. \quad (2.60)$$

Вынужденное решение ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}^q = \tilde{\varphi}_0^q \exp(-i\omega z/v). \quad (2.61)$$

Подставив (2.61) в (2.58), находим $\tilde{\varphi}^q$:

$$\tilde{\varphi}^q = -\frac{qc^2 \exp(-i\omega z/v)}{2\pi^2\omega^2 v \varepsilon(\varepsilon - 1/\beta^2 - n_\perp^2)}, \quad (2.62)$$

где $\beta = v/c$, $n_\perp = k_\perp/k_0$ — нормированное (на k_0) поперечное волновое число, $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме. Величину \tilde{A}_z также записываем в виде:

$$\tilde{A}_z = \tilde{A}_z^q + \tilde{A}_z^R, \quad (2.63)$$

где $\tilde{A}_z^q = \varepsilon\beta\tilde{\varphi}^q$ и, соответственно, $\partial\tilde{A}_z^q/\partial z + ik_0\varepsilon\tilde{\varphi}^q = 0$. Найдём поле \tilde{E}_z^q , отвечающее потенциалам $\tilde{\varphi}^q$ и \tilde{A}_z^q :

$$\tilde{E}_z^q = -\frac{\partial\tilde{\varphi}^q}{\partial z} - ik_0\tilde{A}_z^q = \frac{iq}{2\pi^2\omega} \left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right) \frac{\exp(-i\omega z/v)}{(\varepsilon - 1/\beta^2 - n_\perp^2)}. \quad (2.64)$$

В этом выражении следует, разумеется, положить $\varepsilon = \varepsilon_1$ при $z < 0$ (в первой среде) и $\varepsilon = \varepsilon_2$ при $z > 0$ (во второй среде). Решение $\tilde{\varphi}^R$ однородного уравнения

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}^R}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_\perp^2\right)\tilde{\varphi}^R = 0$$

можно записать в виде:

$$\tilde{\varphi}^R = -\frac{qc}{2\pi^2\omega^2 n_\perp^2} (a_1 e^{ik_0 p z} - a_2 e^{-ik_0 p z}), \quad (2.65)$$

где $p = \sqrt{\varepsilon - n_\perp^2}$ — продольное волновое число, $a_{1,2}$ — произвольные постоянные. Множитель $-qcp/(2\pi^2\omega^2 n_\perp^2)$ выделен в (2.65) для удобства. Поле \tilde{E}^R , отвечающее потенциалам $\tilde{\varphi}^R$ и \tilde{A}_z^R , в волновой зоне представляет собой поле, описывающее переходное излучение. Оно должно распространяться от границы раздела сред. Поэтому в среде “1” (при $z < 0$) следует считать

$$\tilde{\varphi}_1^R = -\frac{qc}{2\pi^2\omega^2 n_\perp^2} a_1 \exp(ik_0 p_1 z), \quad (2.66)$$

а в среде “2” (при $z > 0$)

$$\tilde{\varphi}_2^R = \frac{qc}{2\pi^2\omega^2 n_\perp^2} a_2 \exp(-ik_0 p_2 z), \quad (2.67)$$

где $p_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} - n_\perp^2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} - c^2 k_\perp^2 / \omega^2} > 0$, т.е. под величинами $p_{1,2}$ понимаются арифметические значения корней. Необходимо помнить, что такое

представление потенциала поля излучения отвечает положительным значениям частоты ω . Поэтому при вычислении зависимости компонент поля от координат и времени в дальнейшем следует сначала перейти к интегрированию по положительным ω .

Отметим ещё, что формулы (2.66) и (2.67) описывают потенциал поля излучения только если $\varepsilon > n_{\perp}^2$. При $\varepsilon < n_{\perp}^2$ нужно положить $p_{1,2} = -i|p_{1,2}| = -i\sqrt{n_{\perp}^2 - \varepsilon_{1,2}}$, что соответствует полю, экспоненциально затухающему от границы. Такие затухающие от границы волны обязательно присутствуют при рассмотрении переходного излучения, так как волны могут на границе испытать полное внутреннее отражение. Кроме этого, существует решение однородного уравнения для потенциала $\tilde{\varphi}$, отвечающее возбуждению продольных колебаний на частотах, для которых $\varepsilon(\omega) = 0$. Наконец, при $\beta^2\varepsilon > 1$ частица излучает волны Вавилова-Черенкова. Мы не будем рассматривать все эти сопутствующие эффекты (считаем условие Вавилова-Черенкова невыполненным) и сосредоточимся далее на анализе именно переходного излучения.

Найдем z -компоненту векторного потенциала поля излучения. Величина \tilde{A}_z^R зависит от z по закону $\sim \exp(\pm ik_0 p_{1,2} z)$, где верхний знак относится к среде "1", а нижний — к среде "2". Из условия калибровки

$$\frac{\partial \tilde{A}_z^R}{\partial z} + ik_0 \varepsilon \tilde{\varphi}^R = 0 \quad (2.68)$$

получаем:

$$\tilde{A}_{z1}^R = -\frac{\varepsilon_1}{p_1} \tilde{\varphi}_1^R, \quad \tilde{A}_{z2}^R = \frac{\varepsilon_2}{p_2} \tilde{\varphi}_2^R \quad (2.69)$$

в первой и второй среде, соответственно. Для продольной компоненты \tilde{E}_z^R поля излучения имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z1}^R &= -\frac{\partial \tilde{\varphi}_1^R}{\partial z} - ik_0 \tilde{A}_{z1}^R = \frac{ik_0(\varepsilon_1 - p_1^2)}{p_1} \tilde{\varphi}_1^R = \frac{ik_0 n_{\perp}^2}{p_1} \tilde{\varphi}_1^R = \\ &= -\frac{iq}{2\pi^2 \omega} a_1 \exp(ik_0 p_1 z). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Во второй среде получим:

$$\tilde{E}_{z2}^R = -\frac{ik_0 n_{\perp}^2}{p_2} \tilde{\varphi}_2^R = -\frac{iq}{2\pi^2 \omega} a_2 \exp(-ik_0 p_2 z). \quad (2.71)$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред можно записать как:

$$E_{\rho 1} = E_{\rho 2}|_{z=0} \quad \varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}|_{z=0}, \quad (2.72)$$

что отвечает непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля E_{ρ} и нормальной компоненты электрической индукции $D_z = \varepsilon E_z$ при

$z = 0$. Значки “1” и “2” в выражениях (2.72) обозначают пределы соответствующих величин при стремлении координаты z к нулю слева и справа от границы. Вместо второго условия (2.72) можно использовать и эквивалентное ему условие непрерывности тангенциальных компонент напряженности магнитного поля.

Радиальная компонента электрического поля может быть представлена как

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, z, t) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -2\pi\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\tilde{\varphi}(k_\perp, z, \omega)k_\perp J_0(k_\perp\rho)e^{i\omega t}dk_\perp d\omega = \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(\tilde{\varphi}^q(k_\perp, z, \omega) + \tilde{\varphi}^R(k_\perp, z, \omega))k_\perp^2 J_1(k_\perp\rho)e^{i\omega t}dk_\perp d\omega \end{aligned} \quad (2.73)$$

Непрерывность компоненты E_ρ эквивалентна условию:

$$\tilde{\varphi}_1^q + \tilde{\varphi}_1^R = \tilde{\varphi}_2^q + \tilde{\varphi}_2^R \Big|_{z=0}. \quad (2.74)$$

Пользуясь формулами (2.62), (2.66) и (2.67), из (2.74) получим:

$$\frac{n_\perp^2}{\varepsilon_1(p_1^2 - 1/\beta^2)} + \beta a_1 p_1 = \frac{n_\perp^2}{\varepsilon_2(p_2^2 - 1/\beta^2)} - \beta a_2 p_2. \quad (2.75)$$

В соответствии с (2.64), (2.70) и (2.71) второе граничное условие (2.72) даёт:

$$\frac{n_\perp^2}{p_1^2 - 1/\beta^2} - \varepsilon_1 a_1 = \frac{n_\perp^2}{p_2^2 - 1/\beta^2} - \varepsilon_2 a_2. \quad (2.76)$$

Формулы (2.75) и (2.76) представляют собой систему двух уравнений для коэффициентов a_1 и a_2 . Решая её, находим:

$$a_1 = \frac{\beta n_\perp^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta p_2)}{\varepsilon_1 (1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta^2 n_\perp^2)(1 + \beta p_2)(\varepsilon_1 p_2 + \varepsilon_2 p_1)}. \quad (2.77)$$

Величину a_2 можно получить из (2.77) с помощью замен $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$ и $\beta \rightarrow -\beta$. Знание коэффициентов a_1 и a_2 позволяет записать интегральные представления всех компонент поля переходного излучения в обеих средах.

2.2.2. Спектральное и угловое распределение энергии переходного излучения. Общие формулы

Рассмотрим энергетические характеристики переходного излучения, представляющие большой интерес для различных приложений. Пусть среда 1 это вакуум и $\varepsilon_1 = 1$. Найдём полную энергию U_1 , излучаемую частицей в вакуум,

т.е. назад по направлению движения. Для этого проще не вычислять поток вектора Пойнтинга, а воспользоваться иным способом. Частица пересекает границу раздела сред в момент времени $t = 0$. При $t \rightarrow \infty$ волновое поле и ближнее поле заряда разделяются, поскольку импульс переходного излучения уходит далеко влево от границы. Поле этого импульса затухает в обе стороны по z . Поэтому энергию U_1 можно найти интегрированием плотности энергии поля излучения по всему пространству, распространив интегрирование по координате z от $-\infty$ до ∞ . Замечая далее, что в волновой зоне плотности электрической и магнитной энергии одинаковы, запишем:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}^R|^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((E_\rho^R)^2 + (E_z^R)^2) \rho d\rho dz. \quad (2.78)$$

Вычислим сначала интегралы от $(E_\rho^R)^2$. Квадрат радиальной компоненты поля излучения в первой среде записывается в виде (см. (2.73)):

$$(E_\rho^R)^2 = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(k_\perp, z, \omega) \tilde{\varphi}_1^R(k'_\perp, z, \omega') \times \\ \times k_\perp^2 k'_\perp^2 J_1(k_\perp \rho) J_1(k'_\perp \rho) e^{i(\omega+\omega')t} dk_\perp dk'_\perp d\omega d\omega'. \quad (2.79)$$

Умножая это выражение на ρ и интегрируя по ρ с помощью соотношения (2.57), а затем вычисляя интеграл по k'_\perp , получим:

$$\int_0^{\infty} (E_\rho^R)^2 \rho d\rho = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(k_\perp, z, \omega) \tilde{\varphi}_1^R(k_\perp, z, \omega') k_\perp^3 e^{i(\omega+\omega')t} dk_\perp d\omega d\omega' \quad (2.80)$$

При интегрировании по ω и ω' в (2.80) перейдем к положительным значениям частот. Поскольку для Фурье-образа действительной величины φ_1^R выполняется соотношение $\tilde{\varphi}_1^R(\omega) = [\tilde{\varphi}_1^R(-\omega)]^*$, находим:

$$\int_0^{\infty} (E_\rho^R)^2 \rho d\rho = 4\pi^2 \int_0^{\infty} k_\perp^3 dk_\perp \left[\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} [\tilde{\varphi}_1^R(\omega)]^* e^{-i\omega t} d\omega \right] \times \\ \times \left[\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' + \int_0^{\infty} [\tilde{\varphi}_1^R(\omega')]^* e^{-i\omega' t} d\omega' \right] = \\ = 4\pi^2 \int_0^{\infty} k_\perp^3 dk_\perp \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\tilde{\varphi}_1^R(\omega) \tilde{\varphi}_1^R(\omega') e^{i(\omega+\omega')t} + \right. \\ \left. + \tilde{\varphi}_1^R(\omega) [\tilde{\varphi}_1^R(\omega')]^* e^{i(\omega-\omega')t} + \text{к.с.} \right] d\omega d\omega', \quad (2.81)$$

где “к.с.” обозначает комплексно-сопряжённую величину и мы для краткости опустили зависимость от k_{\perp} и z . Проинтегрируем теперь выражение (2.81) по z . Пользуясь формулой (2.67), получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(k_{\perp}, z, \omega) \tilde{\varphi}_1^R(k_{\perp}, z, \omega') dz = \\
& = \frac{q^2}{4\pi^4 c^2 k_{\perp}^4} p_1(k_{\perp}, \omega) p_1(k_{\perp}, \omega') a_1(k_{\perp}, \omega) a_1(k_{\perp}, \omega') \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{\omega}{c} p_1(k_{\perp}, \omega) z + i \frac{\omega'}{c} p_1(k_{\perp}, \omega') z \right] dz = \\
& = \frac{q^2}{2\pi^3 c^2 k_{\perp}^4} p_1(k_{\perp}, \omega) p_1(k_{\perp}, \omega') a_1(k_{\perp}, \omega) a_1(k_{\perp}, \omega') \times \\
& \times \delta \left[\frac{\omega}{c} p_1(k_{\perp}, \omega) + \frac{\omega'}{c} p_1(k_{\perp}, \omega') \right]. \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1^R(k_{\perp}, z, \omega) [\tilde{\varphi}_1^R(k_{\perp}, z, \omega')]^* dz = \\
& = \frac{q^2}{2\pi^3 c^2 k_{\perp}^4} p_1(k_{\perp}, \omega) p_1(k_{\perp}, \omega') a_1(k_{\perp}, \omega) a_1^*(k_{\perp}, \omega') \times \\
& \times \delta \left[\frac{\omega}{c} p_1(k_{\perp}, \omega) - \frac{\omega'}{c} p_1(k_{\perp}, \omega') \right]. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что p_1 — действительная величина (точнее, только те значения переменных k_{\perp} и ω , для которых p_1 действительно и будут описывать распространяющиеся волны переходного излучения). Подставим (2.82), (2.83) и комплексно-сопряженные им выражения в (2.81) и произведём интегрирование по ω' , воспользовавшись формулой (1.20). Так как аргумент δ -функции в (2.82) и комплексно-сопряженном ему выражении не обращается в нуль при $0 < \omega' < \infty$, то интегрирование этих членов приводит к нулевому результату. При интегрировании (2.83) и комплексно-сопряженного ему выражения δ -функция “срабатывает” в точке $\omega' = \omega$ и мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (E_{\rho}^R)^2 \rho d\rho dz = \frac{4q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} \int_{k_{\perp} < \omega/c}^{\infty} \frac{1}{k_{\perp}} p_1^3(k_{\perp}, \omega) |a_1(k_{\perp}, \omega)|^2 dk_{\perp} d\omega. \tag{2.84}$$

Совершенно аналогично для интеграла от квадрата z -компоненты поля излучения находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (E_z^R)^2 \rho d\rho dz = \frac{4q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} \int_{k_{\perp} < \omega/c}^{\infty} \frac{k_{\perp} c^2}{\omega^2} p_1(k_{\perp}, \omega) |a_1(k_{\perp}, \omega)|^2 dk_{\perp} d\omega. \quad (2.85)$$

Подстановка (2.84) и (2.85) в (2.78) приводит к окончательному результату:

$$U_1 = \frac{2q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} \int_{k_{\perp} < \omega/c}^{\infty} \frac{|a_1(k_{\perp}, \omega)|^2}{k_{\perp}^2} \sqrt{1 - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2}} dk_{\perp} d\omega. \quad (2.86)$$

Введём угол θ между волновым вектором излучения и направлением, противоположным направлению оси z и скорости частицы (так, что $\theta = 0$ отвечает излучению строго назад по отношению к направлению движения частицы). Тогда $k_{\perp} = (\omega/c) \sin \theta$. Перейдём теперь в двойном интеграле (2.86) от интегрирования по k_{\perp} и ω к интегрированию по θ и $\omega' = \omega$. Якобиан $D(k_{\perp}, \omega)/D(\theta, \omega')$ такой замены переменных равен $(\omega/c) \cos \theta$. В итоге (2.86) приводится к виду:

$$U_1 = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} U_1(\omega, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta d\omega, \quad (2.87)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(\omega, \theta) &= \frac{q^2 \cos^2 \theta}{\pi^2 c \sin^2 \theta} |a_1(\omega, \theta)|^2 = \\ &= \frac{q^2 \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left| \frac{(\varepsilon_2 - 1)(1 - \beta^2 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta})}{(1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta})(\varepsilon_2 \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \theta})} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Функция $U_1(\omega, \theta)$ даёт спектральное и угловое распределение излучения. Она имеет смысл энергии, излучаемой в единицу телесного угла и заключённой в единичном интервале частот.

2.2.3. Энергетические характеристики переходного излучения при влёте частицы из вакуума в среду

Рассмотрим энергетические характеристики переходного излучения назад, возникающего при влёте частицы из вакуума в среду. Обратимся вначале к простейшему случаю падения частицы на идеальный проводник ($\varepsilon_2 \rightarrow \infty$). Из (2.88) при этом следует, что

$$U_1(\omega, \theta) = \frac{q^2 \beta^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (2.89)$$

В нерелятивистском случае ($\beta \ll 1$) имеем:

$$U_1(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2 c} \sin^2 \theta. \quad (2.90)$$

Таким образом, диаграмма направленности переходного излучения назад от нерелятивистской частицы совпадает с диаграммой направленности точечного диполя, расположенного на границе раздела.

В ультрарелятивистском случае, когда $\beta \approx 1$ и $1 - \beta^2 \ll 1$, знаменатель в выражении (2.89) можно представить как

$$1 - \beta^2 \cos^2 \theta = 1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \theta \approx 1 - \beta^2 + \sin^2 \theta.$$

В результате, интенсивность излучения имеет максимум в области малых углов $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma \ll 1$ и распределение энергии (2.89) можно упростить следующим образом:

$$U_1(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2}. \quad (2.91)$$

Отметим, что в качественном отношении угловое распределение энергии (2.89) переходного излучения при $\beta \rightarrow 1$ аналогично угловому распределению энергии излучения при прямолинейном ускоренном движении частицы в вакууме (см. (1.43)).

Спектральная плотность излучения $U_1(\omega)$ получается интегрированием выражения (2.89) по телесному углу:

$$U_1(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} U_1(\omega, \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{q^2}{\pi c} \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 1 \right]. \quad (2.92)$$

Поскольку (2.89) не зависит от частоты, $U_1(\omega)$ также не зависит от частоты. Полная энергия

$$U_1 = \int_0^{\infty} U_1(\omega) \, d\omega, \quad (2.93)$$

в модели идеально проводящей среды, следовательно, обращается в бесконечность. Для вычисления полной энергии переходного излучения необходимо учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим теперь ультрарелятивистскую частицу, влетающую в произвольную среду с проницаемостью $\varepsilon_2(\omega)$. Будем считать, что $\varepsilon_2 \gg 1 - \beta^2$.

Поскольку основная энергия излучения сосредоточена в области малых углов, пренебрегая в (2.88) $\sin \theta$ по сравнению с ε_2 и полагая $\cos \theta \approx 1$, получим:

$$\begin{aligned} U_1(\omega, \theta) &\approx \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2} \left| \frac{(\varepsilon_2 - 1)\sqrt{\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_2} + 1)(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2})} \right|^2 = \\ &= \frac{q^2 \beta^2}{\pi^2 c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} + 1} \right|^2 \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Найдём спектральную плотность излучения. Так как основной вклад дают значения $\theta \approx 1/\gamma \ll 1$, а при бóльших углах $U_1(\omega, \theta)$ быстро спадает, для удобства вычислений можно положить верхний предел интегрирования равным единице:

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &\approx \int_0^1 U_1(\omega, \theta) 2\pi\theta d\theta = \pi \int_0^1 U_1(\omega, \theta) d(\theta^2) = \\ &= \frac{q^2}{\pi c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} + 1} \right|^2 \int_0^1 \frac{xdx}{(1 - \beta^2 + x^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{(1 - \beta^2 + x^2)^2} &= \frac{\ln(1 - \beta^2) - \ln(2 - \beta^2) + 1}{\beta^2 - 2} \underset{\beta \rightarrow 1}{\approx} \\ &\underset{\beta \rightarrow 1}{\approx} \ln \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) = 2 \ln \gamma, \end{aligned} \quad (2.96)$$

получим:

$$U_1(\omega) \approx \frac{2q^2}{\pi c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} + 1} \right|^2 \ln \gamma. \quad (2.97)$$

В результате, спектральная плотность энергии (а, следовательно, и полная энергия) излучения назад медленно (логарифмически) растёт с ростом энергии частицы $\mathcal{E} = \gamma mc^2$.

При больших частотах для диэлектрической проницаемости любой среды можно пользоваться плазменной формулой $\varepsilon_2(\omega) = 1 - \Omega^2/\omega^2$ (см. выражение (2.46) и комментарии к нему). Используя аппроксимацию

$$\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\approx} 1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2}, \quad (2.98)$$

из (2.97) находим, что при больших частотах спектральная плотность энергии быстро падает с ростом ω по закону $U_1(\omega) \sim \omega^{-4}$. Следовательно, основной вклад в энергию дают сравнительно низкие частоты $\omega \lesssim \Omega$ и для произвольных сред (кроме плазмы) подсчитывать полную энергию, пользуясь плазменной формулой, нельзя.

В случае, когда вторая среда — плазма, можно найти полную энергию:

$$U_1 = \frac{2q^2}{\pi c} \ln \gamma \int_{\Omega}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} - \omega}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} + \omega} \right)^2 d\omega = \frac{2q^2}{15\pi c} \Omega \ln \gamma, \quad (2.99)$$

где $\Omega = \omega_p$ — плазменная частота электронов.

2.2.4. Энергетические характеристики переходного излучения при вылете частицы из среды в вакуум

Рассмотрим теперь энергетические характеристики переходного излучения вперёд, возникающего при вылете частицы из среды “1” с проницаемостью ε_1 в вакуум ($\varepsilon_2 = 1$). Угол θ мы будем отсчитывать от направления скорости движения частицы (оси z). Заменяя в выражении (2.88) a_1 на a_2 (см. примечание к формуле (2.77)), запишем спектральное и угловое распределение излучения в виде:

$$\begin{aligned} U_2(\omega, \theta) &= \frac{q^2 \cos^2 \theta}{\pi^2 c \sin^2 \theta} |a_2(\omega, \theta)|^2 = \\ &= \frac{q^2 \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left| \frac{(\varepsilon_1 - 1)(1 - \beta^2 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta})}{(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta})(\varepsilon_1 \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta})} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Основной интерес представляет ультрарелятивистский случай $\beta \rightarrow 1$. Будем считать, что $\varepsilon_1 \gg 1 - \beta^2$. Из-за наличия в знаменателе множителя $(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2$ основной вклад будут опять вносить малые углы $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma \ll 1$. Заменяя в выражении (2.100) $\sin \theta$ на θ и $\cos \theta$ на единицу, а также пренебрегая θ^2 по сравнению с ε_1 , получим:

$$U_2(\omega, \theta) \approx \frac{q^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - 1}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \theta^2}} \right|^2. \quad (2.101)$$

В выражении $1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \theta^2}$, входящем в знаменатель формулы (2.101), нельзя положить $\beta = 1$ и пренебречь θ^2 по сравнению с ε_1 , поскольку в этом случае диэлектрическая проницаемость сократится и U_2 вообще не будет зависеть от частоты. Поскольку на больших частотах $\varepsilon_1(\omega) \rightarrow 1$, при $\beta \rightarrow 1$ и малых углах величина $1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \theta^2}$ мала и существенно определяет U_2 .

Используя на больших частотах плазменное выражение $\varepsilon_1(\omega) = 1 - \Omega^2/\omega^2$, можно записать:

$$1 - \beta\sqrt{\varepsilon_1(\omega) - \theta^2} \approx 1 - \beta\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \theta^2} \underset{\omega \gg \Omega}{\approx} 1 - \beta \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2} - \frac{\theta^2}{2} \right) \approx \frac{1}{2} \left(1 - \beta^2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2} + \theta^2 \right). \quad (2.102)$$

Учитывая, что $\sqrt{\varepsilon_1} - 1 \approx -\Omega^2/(2\omega^2)$ при $\omega \gg \Omega$, получим:

$$U_2(\omega, \theta) \underset{\omega \gg \Omega}{\approx} \frac{q^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2} \frac{\Omega^4}{\omega^4 (1 - \beta^2 + \theta^2 + \Omega^2/\omega^2)^2}. \quad (2.103)$$

Если $1 - \beta^2 \ll \Omega^2/\omega^2 \ll 1$ и, следовательно, отношение Ω^2/ω^2 много больше квадрата характерного угла $\theta^2 \approx 1 - \beta^2$ максимума излучения, то зависимость от ω в (2.103) сокращается и U_2 практически не зависит от частоты. Если же частоты столь высоки, что выполняется условие $\Omega^2/\omega^2 \ll 1 - \beta^2$ ($\omega \gg \gamma\Omega$, где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$), то спектральная плотность энергии быстро спадает по закону $U_2 \sim \omega^{-4}$. Всё это означает, что основной вклад в энергию переходного излучения вперёд дают высокие частоты $\omega \approx \gamma\Omega \gg \Omega$ и использование плазменного приближения для диэлектрической проницаемости справедливо для любых сред.

Найдём полную энергию. Удобно сначала проинтегрировать выражение (2.103) по частоте. Имея в виду, что основной вклад дают высокие частоты, можно интегрировать по ω от нуля до бесконечности, пользуясь плазменной формулой [5]:

$$U_2(\theta) \approx \frac{q^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{((1 - \beta^2 + \theta^2)\omega^2/\Omega^2 + 1)^2} = \frac{q^2 \Omega}{4\pi c} \frac{\theta^2}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^{5/2}}. \quad (2.104)$$

Интегрируя теперь по углу θ , распространив, опять-таки, для удобства область интегрирования от нуля до бесконечности, окончательно находим:

$$U_2 \approx \frac{q^2 \Omega}{4\pi c} \int_0^\infty \frac{\theta^2 2\pi \theta d\theta}{(1 - \beta^2 + \theta^2)^{5/2}} = \frac{q^2 \Omega}{3c\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{q^2 \Omega \gamma}{3c}. \quad (2.105)$$

Мы получили важный результат: полная энергия переходного излучения U_2 , возникающего при вылете частицы из среды в вакуум, пропорциональна энергии частицы \mathcal{E} ($U_2 \sim \gamma = \mathcal{E}/(mc^2)$).

2.2.5. Переходное излучение неподвижного заряда (переходное рассеяние)

Рассмотренная выше задача о переходном излучении при пересечении границы раздела — это лишь простейший случай. Как уже отмечалось, переходное излучение возникает всегда, когда заряд равномерно и прямолинейно движется в неоднородной и/или нестационарной среде. Важным случаем неоднородной среды является периодически неоднородная среда. Когда заряд движется в периодически неоднородной среде, можно сказать (встав на “точку зрения” заряда), что на этот заряд падает волна диэлектрической проницаемости (показателя преломления) [17]. Рассеяние этой волны на заряде и порождает переходное излучение. Поскольку эффект сохраняется даже для неподвижного заряда, более естественно здесь применять термин не “переходное излучение”, а “переходное рассеяние”.

Рассмотрим, например, прозрачную среду с диэлектрической проницаемостью ε . Если в такой среде распространяется акустическая волна, то плотность среды ρ меняется по закону

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} \sin(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}),$$

где $\rho^{(0)}$ — невозмущенное значение плотности, $|\rho^{(1)}| \ll \rho^{(0)}$ — малая амплитуда, а ω_0 и \vec{k}_0 — частота и волновой вектор акустической волны, соответственно. Частота ω_0 и волновое число $k_0 = |\vec{k}_0|$ связаны дисперсионным соотношением $\omega_0/k_0 = c_s$, где c_s — скорость звука. При изменении плотности среды меняется и диэлектрическая проницаемость. Поэтому в среде распространяется волна проницаемости:

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sin(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}), \quad (2.106)$$

где $\varepsilon^{(0)}$ — проницаемость в отсутствие акустической волны, $|\varepsilon^{(1)}| \ll \varepsilon^{(0)}$ — изменение ε за счет изменения плотности.

Поместим теперь в среде неподвижный точечный заряд q . Если волны нет, то заряд создаёт в среде кулоновское поле:

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{q\vec{r}}{\varepsilon^{(0)}r^3}, \quad \vec{D}^{(0)} = \frac{q\vec{r}}{r^3}.$$

При наличии волны (2.106) в первом приближении (при $|\varepsilon^{(1)}| \ll \varepsilon^{(0)}$) возникает дополнительная поляризация

$$\delta\vec{P} = \frac{\delta\vec{D}}{4\pi} = \frac{\varepsilon^{(1)}}{4\pi} \vec{E}^{(0)} \sin(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.107)$$

Такая поляризация, не обладающая сферической симметрией, вызывает появление расходящейся от заряда электромагнитной волны с частотой ω_0 и

волновым вектором \vec{k} . Частота ω_0 и волновое число $k = |\vec{k}|$ электромагнитной волны связаны дисперсионным соотношением $\omega_0/k = c/\sqrt{\epsilon_0}$.

Возникающую электромагнитную волну можно считать рассеянной на заряде. Если среда представляет собой плазму, а падающая волна является продольной (плазменной) волной, то такой процесс переходного рассеяния представляет собой трансформацию продольной волны в поперечную электромагнитную волну. Переходное рассеяние играет значительную роль в физике плазмы.

2.2.6. Применение переходного излучения

Переходное излучение находит важные применения в физике частиц высоких энергий. Согласно формуле (2.105), энергия U_2 пропорциональна энергии частицы \mathcal{E} . Поэтому, измеряя U_2 , легко определить \mathcal{E} . Использование излучения Вавилова-Черенкова для определения энергии ультрарелятивистских частиц, скорость которых очень мало отличается от скорости света, неэффективно. Когда $v \rightarrow c$, черенковский угол $\theta = \arccos(c/(nv))$ и энергия излучения (см. рис. 2.4) очень мало чувствительны к энергии частицы $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Изменению \mathcal{E} во много раз отвечает весьма слабое изменение скорости. На измерении энергии переходного излучения вперёд основаны переходные счетчики. Заряженные частицы высокой энергии, проходя через металлическую фольгу, создают переходное излучение (преимущественно, в рентгеновском диапазоне). Измерение энергии этого излучения позволяет найти энергию частицы. Переходные счетчики применяются в экспериментах на ускорителях заряженных частиц, при исследовании космических лучей.

Кроме того, с развитием экспериментальных методов определение переходного излучения назад в оптической области стало настолько точным, что по его параметрам (спектру, поляризации, угловому распределению) можно исследовать оптические свойства поверхностей.

Подобно излучению Вавилова-Черенкова, переходное излучение имеет место для волн различной физической природы. Например, переходное излучение в механике возникает при равномерном и прямолинейном движении механического объекта вдоль неоднородной упругой системы (струны, балки, мембраны) [18]. Важный пример такой системы — железнодорожный путь. Колеса поезда возбуждают в рельсах упругие волны. Причиной излучения является неоднородность пути (шпалы, стыки и т.п.). Переходное излучение высокоскоростных поездов может влиять на динамику и приводить к деформации рельсового пути.

Приложение

Асимптотики цилиндрических функций при больших абсолютных значениях аргумента и порядка

При исследовании спектров тормозного и магнитотормозного излучения возникает нетривиальная задача получения асимптотических представлений цилиндрических функции при больших значениях их аргумента и порядка. В этом разделе мы приведём достаточно подробный вывод соответствующих формул, использованных в первой главе пособия.

Рассмотрим функцию Бесселя $J_{2k}(2k\xi)$, где $k \rightarrow \infty$, а $\xi \rightarrow 1$ ($\xi < 1$). Используя известное интегральное представление [7, 14] для этой функции, запишем:

$$J_{2k}(2k\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2k(\psi - \xi \sin \psi)] d\psi. \quad (\text{П.1})$$

При больших k подынтегральное выражение быстро осциллирует и основной вклад в интеграл будут давать малые значения переменной ψ . Поэтому для приближенного вычисления интеграла достаточно аппроксимировать подынтегральное выражение в окрестности точки $\psi = 0$. Раскладывая $\sin \psi$ в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим:

$$\begin{aligned} J_{2k}(2k\xi) &\underset{k \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 1}{\approx} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2k(\psi - \xi\psi + \xi\psi^3/6)] d\psi \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos[k(1 - \xi^2)\psi + k\psi^3/3] d\psi. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Кубический член здесь должен быть сохранён ввиду наличия в линейном члене малого коэффициента. Этот коэффициент для удобства представлен в виде $1 - \xi \approx (1 - \xi)(1 + \xi)/2 = (1 - \xi^2)/2$. Интеграл (П.2) быстро сходится и

верхний предел интегрирования можно заменить на бесконечность:

$$J_{2k}(2k\xi) \underset{k \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 1}{\approx} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(1 - \xi^2)\psi + k\psi^3/3] d\psi. \quad (\text{П.3})$$

Интеграл (П.3), в свою очередь, простой подстановкой $t = k^{1/3}\psi$ приводится к интегралу Эйри:

$$J_{2k}(2k\xi) \underset{k \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 1}{\approx} k^{-1/3} \text{Ai} [k^{2/3}(1 - \xi^2)], \quad (\text{П.4})$$

где

$$\text{Ai}(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{t^3}{3} + \eta t \right) dt. \quad (\text{П.5})$$

Функция (или интеграл) Эйри является известной, хорошо изученной специальной функцией [7]. Она является частным решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{\eta\eta} - \eta y = 0$ и часто встречается в физических задачах. Выпишем полезные для дальнейшего асимптотические представления функции Эйри и её производной при больших значениях аргумента:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\eta) &\underset{\eta \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\eta^{1/4}} \exp \left(-\frac{2\eta^{3/2}}{3} \right), \\ \text{Ai}'(\eta) &\underset{\eta \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{\eta^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{2\eta^{3/2}}{3} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Для производной $J'_{2k}(2k\beta)$ получим:

$$\begin{aligned} J'_{2k}(2k\beta) &= \frac{d}{d(2k\beta)} J_{2k}(2k\beta) \approx \\ &\approx \frac{1}{2k} \frac{d}{d\beta} (k^{-1/3} \text{Ai} [k^{2/3}(1 - \beta^2)]) \approx -k^{-2/3} \text{Ai}'(u), \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где $u = k^{2/3}(1 - \beta^2) = k^{2/3}/\gamma^2$. Найдём теперь интеграл

$$\begin{aligned} 2k \int_0^{\beta} J_{2k}(2k\xi) d\xi &\underset{\eta \rightarrow \infty}{\approx} 2k \int_0^{\beta} k^{-1/3} \text{Ai} [k^{2/3}(1 - \xi^2)] d\xi \approx \\ &\approx - \int_{k^{2/3}}^u \frac{1}{\xi} \text{Ai}(\eta) d\eta \approx \int_u^{\infty} \text{Ai}(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где в рамках используемых приближений величина ξ заменена на единицу, а k — на бесконечность. Учитывая (П.4) и (П.7), выражение (1.83) можно приближенно представить следующим образом [1]:

$$W_k \underset{k \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 1}{\approx} -\frac{2q^2[\omega_B^{(0)}]^2}{c\gamma} \left[u^{1/2} \text{Ai}'(u) + \frac{u^{3/2}}{2} \int_u^\infty \text{Ai}(\eta) d\eta \right]. \quad (\text{П.9})$$

В случае $u \ll 1$ (т.е. $1 \ll k \ll \gamma^3$) интеграл в (П.9) сводится к некоторой численной постоянной, значение которой несущественно. Второе слагаемое в (П.9) мало по сравнению с первым и учитывая, что $\text{Ai}'(0) \approx -0,258$, приходим к соответствующей асимптотике в формуле (1.86).

В случае $u \gg 1$ ($k \gg \gamma^3$), учитывая (П.6), имеем:

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \text{Ai}(\eta) d\eta &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \frac{1}{\eta^{1/4}} \exp\left(-\frac{2\eta^{3/2}}{3}\right) d\eta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} u^{3/4}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

где $\text{erf}(x)$ — интеграл вероятностей, определяемый как

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{П.11})$$

Используя асимптотическое разложение функции $\text{erf}(x)$ при больших значениях аргумента, находим:

$$\int_u^\infty \text{Ai}(\eta) d\eta \underset{u \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/4} \exp\left(-\frac{2u^{3/2}}{3}\right). \quad (\text{П.12})$$

Подставив (П.6) и (П.12) в (П.9), приходим к формуле (1.86) в случае $k \gg \gamma^3$.

Совершенно аналогично с помощью полученных выше формул можно проанализировать спектральное распределение тормозного излучения, испускаемого электроном, движущимся по сильно вытянутой эллиптической орбите с $\varepsilon \gg 1$ в кулоновском поле иона (см. (1.110)). В случае $1 \ll k \ll k_c$ ($k_c = 2(1 - \varepsilon^2)^{-3/2}$) из (П.4) и (П.7) получим $\bar{W}_k \propto k^{2/3}$, а при $k \gg k_c$, с учётом (П.6), $-\bar{W}_k \propto k \exp(-4k/(3k_c))$.

Рассмотрим теперь асимптотики функций Ханкеля при больших абсолютных значениях аргумента и порядка. Из интегрального представления (1.121)

имеем:

$$\begin{aligned}
 H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) &= \frac{2}{i\pi} \int_0^{\infty} \cos(\nu\xi - \nu\varepsilon \operatorname{sh} \xi) d\xi \underset{\nu \rightarrow \infty}{\approx} \\
 &\underset{\nu \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{i\pi} \int_0^{\infty} \cos[\nu\varepsilon\xi^3/6 + (\varepsilon - 1)\nu\xi] d\xi \approx -i2^{7/6}\mu^{-1/2}\operatorname{Ai}(\mu), \quad (\text{П.13})
 \end{aligned}$$

где $\mu = 2^{1/3}(\nu\varepsilon)^{2/3}$ и считается, что $\varepsilon \gg 1$. Для производной по аргументу от функции $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ получим:

$$[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]' = \frac{1}{i\nu} \frac{d}{d\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) = \frac{4}{3\mu^2} [\operatorname{Ai}(\mu) - 2\mu\operatorname{Ai}'(\mu)]. \quad (\text{П.14})$$

Подставляя (П.13) и (П.14) в формулу (1.124) и пользуясь при $\nu = \omega\tau \rightarrow \infty$ асимптотиками (П.6), находим, что $U(\omega) \propto \omega \exp(-4\sqrt{2}\omega\tau\varepsilon/3)$.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1990.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1980.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
6. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля (2-е изд.). — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.
8. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1974.
9. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
12. Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова-Черенкова// Успехи физических наук. 1957. Т. 62, № 7. С. 201–246.
13. Болотовский Б. М. Излучение Вавилова-Черенкова: открытие и применение// Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 11. С. 1161–1173.
14. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
15. Басс Ф. Г., Яковенко В. М. Теория излучения заряда, проходящего через электрически неоднородную среду// Успехи физических наук. 1965. Т. 86, № 2. С. 189–230.
16. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния// Успехи физических наук. 1978. Т. 126, № 4. С. 553–608.

17. Гинзбург В. Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления)// Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 10. С. 1033–1042.
18. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Переходное излучение в механике// Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 10. С. 1043–1068.

Евгений Юрьевич Петров

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ**

Учебное пособие

Компьютерная верстка — Е. Ю. Петров

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского”.
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.