

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО  
ХАОСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**ЧАСТЬ 1. ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ  
АТТРАКТОРЫ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород  
2019

УДК 517.938  
ББК 22.161.6  
М-33

М-33 Математическая теория динамического хаоса и её приложения. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы: Учебно-методическое пособие. Авторы: Гонченко А.С., Гонченко С.В., Гринес Е.А., Казаков А.О., Леванова Т.А., Лукьянов В.И., Смирнов Л.А. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 72 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. **Н.Ю. Золотых**

Математическая теория динамического хаоса является одним из наиболее интересных и актуальных разделов нелинейной динамики. Благодаря этой теории многие проблемы естествознания и техники получили адекватное описание. Однако, не смотря на весьма значительные достижения в этой области математического знания, здесь остается еще масса нерешенных проблем и, как показывают исследования последних лет, важных потенциальных открытий. Цель данного пособия – дать представление о современном состоянии математической теории динамического хаоса, а также ее приложений к исследованию конкретных моделей.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов дневного отделения Института информационных технологий, математики и механики. Рекомендуется при изучении дисциплины «Математическая теория динамического хаоса». Для успешного усвоения материала необходимо предварительное изучение дисциплин «Дифференциальные уравнения» и «Концепции современного естествознания».

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Планом мероприятий по реализации программы повышения конкурентоспособности ННГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы, при поддержке Минобрнауки (Госзадание 1.539.2016/ФПМ).

УДК 517.938  
ББК 22.161.6

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

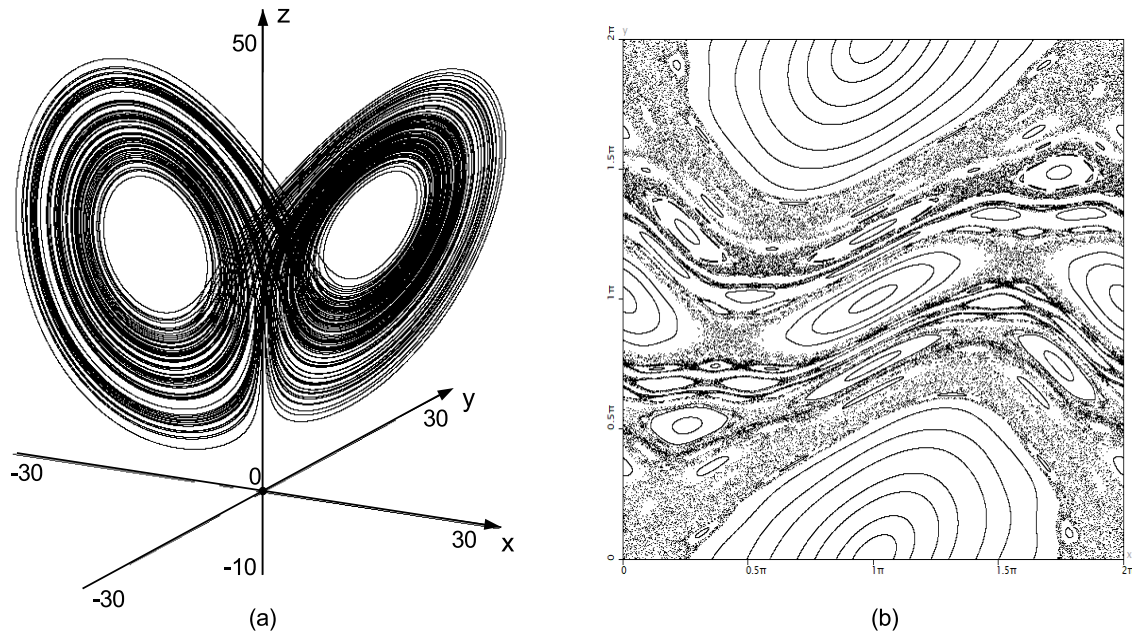
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1. Аттрактор Лоренца</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1. О возникновении аттрактора Лоренца . . . . .	20
1.2. Задачи к главе 1 . . . . .	25
<b>2. Псевдогиперболичность и гомоклинические касания</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3. О феноменологических сценариях возникновения странных аттракторов трехмерных отображений</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1. Метод карт седел . . . . .	36
3.2. Задачи к главе 3 . . . . .	40
<b>4. Примеры странных аттракторов в обобщенных отображениях Эно</b> . . . . .	<b>42</b>
4.1. Примеры псевдогиперболических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно . . . . .	43
<b>5. К определению псевдогиперболичности отображений</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>Приложение А. Теория бифуркаций и модель Лоренца (Л.П. Шильников)</b> . . . . .	<b>55</b>

# Введение

Открытие динамического хаоса, т.е. сложного непредсказуемого поведения траекторий в детерминированных системах, по праву считается одним из важнейших недавних достижений науки, благодаря ему многие проблемы естествознания и техники получили адекватное математическое описание. О математической теории динамического хаоса и ее приложениях к исследованию конкретных моделей из различных областей физики, биологии, химии можно сейчас прочесть не только в многочисленных оригинальных статьях, но также в учебниках и книгах (см., например, [1–7]). Тем не менее, в настоящее время – это весьма активно развивающаяся математическая дисциплина, в которой еще осталось много нерешенных проблем, не только рассматриваемых как определенные конкретные задачи, но и, как показывают совсем недавние достижения, в концептуальном плане – и здесь открываются совершенно неожиданные, новые и весьма важные направления исследований.

В настоящее время можно выделить три различных формы динамического хаоса гладких конечномерных систем – это **диссипативный хаос**, **консервативный хаос** и **смешанная динамика**. *Диссипативный хаос* характеризуется существованием у (диссипативной) системы *странного аттрактора* – нетривиального притягивающего замкнутого инвариантного множества, лежащего в фазовом пространстве системы внутри поглощающей области, в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области. В отличие от этого, *консервативный хаос* распространяется на всё фазовое пространство, поведение траекторий на котором, типично, может быть представлено как движение в некотором хаотическом море с беспорядочно расположенными в нем эллиптическими островами. На рисунке 1 показаны примеры (а) странного аттрактора (классический аттрактор Лоренца) и (б) консервативного хаоса (фазовый портрет стандартного отображения или, как его еще называют, отображения Чирикова).

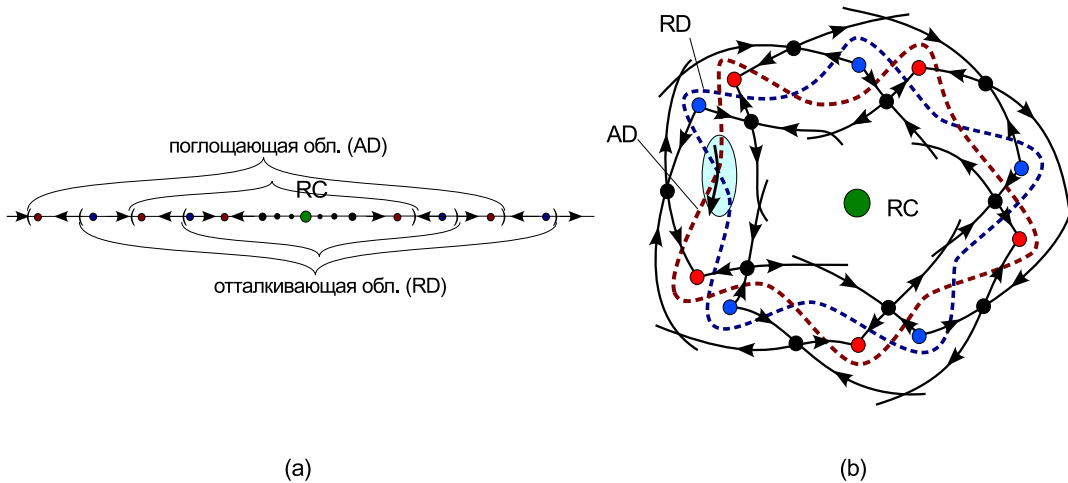
Для сравнения, *смешанная динамика* – это тот новый тип хаоса, который характеризуется тем, что он обладает одновременно и аттракторами, лежащими в поглощающих областях (absorbing domains), и репеллерами, лежащими в «отталкивающих» областях (repelling domains) (т.е. поглощающих областях в обратном времени); эти области, при этом, пересекаются,



**Рис. 1.** Примеры хаоса в потоках и отображениях: (а) пример странного аттрактора в модели Лоренца, смотри систему (3), при классических значениях параметров  $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ ; (б) пример консервативного хаоса в отображении Чирикова  $\bar{x} = x + \bar{y}, \bar{y} = y + k \sin x$  при  $k = 0.7$ , заданное на двумерном торе  $T^2$  ( $x$  и  $y$  –  $2\pi$ -периодические функции)

и в своем пересечении содержат так называемое обратимое ядро (reversible core) – замкнутое инвариантное множество, состоящее из траекторий консервативного, нейтрального, типа, которые сами ничего не притягивают и ничего не отталкивают. В некотором смысле простейшие примеры систем с таким поведением траекторий показаны на рисунке 2:

- (а) Пример одномерной системы (пусть это будет, например, одномерный поток), имеющей счетное множество устойчивых и вполне неустойчивых состояний равновесия, которые накапливаются к центральному состоянию равновесия  $RC$ . Очевидно, в любой окрестности  $RC$  есть счетное множество вложенных друг в друга поглощающих и, соответственно, отталкивающих областей, которые все имеют непустое пересечение, а точка  $RC$  (обратимое ядро) принадлежит всем этим областям.
- (б) Пример двумерного отображения, имеющего неподвижную точку  $RC$  (эллиптического типа), окруженную периодическими точками: седловыми, асимптотически устойчивыми (стоки) и вполне неустойчивыми (источники). Стоки лежат в поглощающих областях  $AD$ , а источники в отталкивающих областях  $RD$ . Эти области пересекаются (все они содержат неподвижную точку  $RC$ ).



**Рис. 2.** Примеры смешанной динамики в потоках и отображениях: (a) Пример одномерного потока с обратимым ядром – состояние равновесия  $RC$ ; (b) Пример двумерного отображения, имеющего обратимое ядро – неподвижная точка  $RC$  эллиптического типа. Здесь показан только один резонансный уровень, в котором лежат один устойчивый цикл периода 5, один вполне неустойчивый цикл периода 5 и два седловых цикла периода 5. Можно представить, что таких уровней может быть бесконечно много (в некотором смысле это типичная ситуация [8, 9] – тогда  $RC$  будет обратимым ядром)

Математическое обоснование возможности такого поведения траекторий в динамических системах было дано сравнительно недавно [8]. Заметим, что, фактически, явление смешанной динамики было открыто в работе [10], в которой было доказано существование у двумерных отображений (диффеоморфизмов) такого поведения траекторий, при котором устойчивые периодические траектории оказываются в совокупности не отделимы от вполне неустойчивых (в том смысле, что замыкания множеств таких траекторий имеют непустое пересечение). Естественно, что при любом определении аттрактора, это должно быть, во всяком случае, замкнутое инвариантное множество, которое устойчиво и которое должно содержать все устойчивые периодические траектории из поглощающей области, если они есть. То же самое (относительно вполне неустойчивых периодических траекторий) должно выполняться и для репеллеров. Таким образом, в [10] было показано, что аттрактор может пересекаться с репеллером, и это свойство является в определенном смысле типичным<sup>1</sup>.

Что касается странных аттракторов, которым посвящено настоящее пособие, то их общепринятого определения, которое годилось бы на все случаи жизни, до сих пор не существует. Исключение составляют так называемые

<sup>1</sup>Оно выполняется для систем, образующих подмножество второй категории некоторой открытой (в  $C^2$ -топологии) области из банахового пространства динамических систем.

*настоящие странные аттракторы*, определение которых включают три основных момента:

- 1) существование поглощающей области в фазовом пространстве;
- 2) неустойчивость траекторий на аттракторе, которая постулируется тем, что у каждой траектории аттрактора существует положительный максимальный ляпуновский показатель;
- 3) свойства 1) и 2) выполняются для всех  $C^1$ -близких систем.

Самыми известными типами настоящих странных аттракторов являются *гиперболические аттракторы* и *аттракторы Лоренца*. Гиперболические аттракторы в пособии не рассматриваются, в силу определенной специфики соответствующей тематики, тем не менее интересующийся читатель может ознакомиться с ней, например, по книге [6]. Что касается аттракторов Лоренца, то им в пособии уделяется достаточно большое внимание. Основная причина – это то, что аттракторы Лоренца являются классическим и простейшим примером *псевдогиперболических аттракторов*, теории которых в основном и посвящено настоящее пособие.

Нужно также отметить, что к странным аттракторам, помимо настоящих аттракторов, с должным на то основанием [11], относятся также так называемые *квазиаттракторы*. Квазиаттракторы – это нетривиальные притягивающие инвариантные множества, которые либо сами содержат устойчивые периодические траектории весьма больших периодов (и с очень узкими областями притяжения), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых гладких возмущениях. Соответственно, для квазиаттракторов не выполняются свойства 2) и 3) выше. Это связано с тем, что квазиаттракторы допускают существование седловых периодических траекторий, у которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально, а бифуркации таких гомоклинических касаний приводят к рождению асимптотически устойчивых периодических траекторий.

Заметим, что у гиперболических аттракторов и аттракторов Лоренца *не существует гомоклинических касаний* – у них инвариантные многообразия седловых периодических траекторий всегда пересекаются трансверсально. При этом гиперболические аттракторы являются грубыми, тогда как аттракторы Лоренца – негрубые. Последнее обстоятельство связано с тем, что аттрактор Лоренца содержит седловое состояние равновесия вместе с его одномерными неустойчивыми многообразиями (сепаратрисами), которые при изменении параметра непрерывным образом либо замыкаются, образуя

гомоклинические петли седла, либо размыкаются, что соответствует разрушению петли, т.е. все время, как говорят, перманентно, происходят бифуркации.

У псевдогиперболических аттракторов других типов, отличных от аттракторов лоренцевского типа<sup>2</sup>, существование гомоклинических касаний является их характерным свойством. Однако бифуркации этих гомоклинических касаний не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий, в отличие от бифуркации гомоклинических касаний таких типов, которые встречаются у квазиаттракторов (см. подробнее в главе 2).

Можно сказать, что большинство известных странных аттракторов гладких динамических систем, встречающихся в приложениях, являются квазиаттракторами. Примерами таких аттракторов являются многочисленные аттракторы типа «тор-хаос», возникающие в результате разрушения двумерного тора, [12]; аттрактор Эно [13, 14]; аттракторы в периодически возмущенных двумерных системах с гомоклиническими восьмерками седла [15]; спиральные аттракторы трехмерных потоков, содержащие состояния равновесия типа седло-фокус; и многие другие.

До сравнительно недавнего времени к настоящим странным аттракторам гладких динамических систем можно было с уверенностью относить только лишь гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Однако ситуация изменилась после работы Тураева и Шильникова [16], в которой был введен новый класс настоящих странных аттракторов, так называемых *диких гиперболических аттракторов*. Эти аттракторы, в отличие от гиперболических, допускают существование гомоклинических касаний, но не содержат устойчивых периодических траекторий и любых других собственных устойчивых инвариантных подмножеств, которые не возникают также при малых гладких возмущениях.<sup>3</sup>

В работе [16] был также построен пример четырехмерного потока с диким спиральным аттрактором, содержащим состояние равновесия типа седло-фокус. Одной из главных особенностей спирального аттрактора Тураева-Шильникова является то, что он обладает *псевдогиперболической структурой*. В двух словах, эта его особенность проявляется в том, что в некоторой

---

<sup>2</sup>которые называются также квазигиперболическими или сингулярно гиперболическими аттракторами

<sup>3</sup>Системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, т.е. открытым (в  $C^2$ -топологии) областям из пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями. Сам термин «дикий» восходит к статье Ньюхауса [17], в которой было введено понятие «дикого гиперболического множества», т.е. такого равномерно гиперболического инвариантного множества, у которого среди его устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий всегда есть пересекающиеся нетрансверсально, и это свойство сохраняется при все малых  $C^2$ -гладких возмущениях.



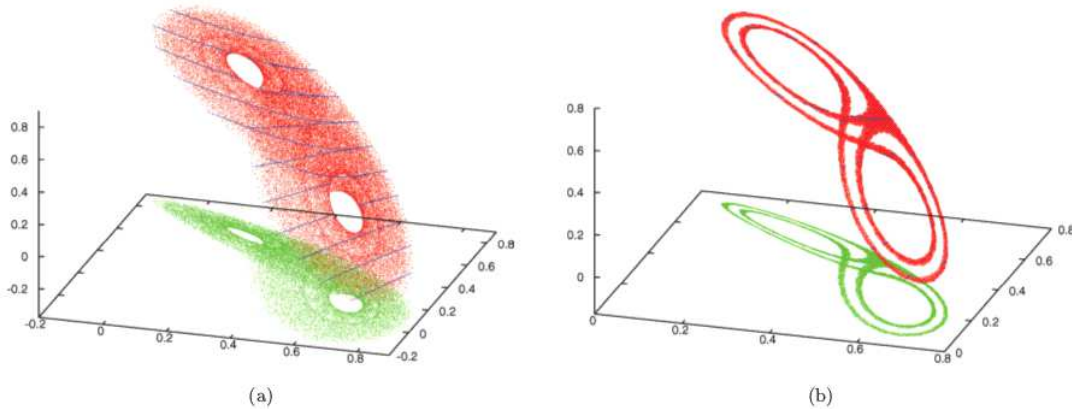
(достаточно малой) окрестности  $D$  аттрактора, лежащей в его поглощающей области, имеет место следующий слабый вариант гиперболичности. Он заключается в том, что существует разбиение окрестности на трансверсальные подпространства, инвариантные относительно дифференциала и такие, что на одном из них имеет место экспоненциальное сжатие вдоль всех направлений, а на другом – экспоненциальное растяжение объема. Требуется также, что такое разбиение непрерывно зависит от точки на  $D$ ; соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения, а также углы между касательными векторами подпространств равномерно ограничены; в растягивающем объеме подпространстве если и есть какие-то сжатия, то все они равномерно слабее, чем любое сжатие в сильно сжимающем пространстве. Заметим, что условия псевдогиперболичности проверяются для точек поглощающей области  $D$ . Если они выполняются, то тогда, как показано в [16], аттрактор существует и он единственный, у каждой его траектории существует положительный максимальный ляпуновский показатель (это вытекает из свойства растяжения объемов). Фактически, в работе [16] были заложены основы очень перспективной теории *псевдогиперболических странных аттракторов*.

Новые примеры таких аттракторов были также вскоре найдены. Так, в работе [20] было показано, что у трехмерных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (1)$$

где  $M_1, M_2, B$  – параметры ( $B$  – якобиан отображения), в некоторой области параметров, примыкающих к точке  $A^* = (M_1 = 1/4, M_2 = 1, B = 1)$ , существуют так называемые *дискретные аттракторы Лоренца*. Псевдогиперболичность таких аттракторов постулировалась в [20] на основе того, что при близких к  $A^*$  значениях параметров квадрат отображения в некоторой окрестности седловой неподвижной точки может быть представлен как отображение Пуанкаре периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока (см. систему (4)), которая имеет аттрактор Лоренца [21]. Если возмущение достаточно мало (что определяется близостью параметров к  $A^*$ ), то искомая псевдогиперболичность должна естественно наследоваться от аттрактора Лоренца (который сам является таковым [22, 23]). В частности, в работе [24] было показано, что свойство псевдогиперболичности потоков сохраняется также и для их отображений Пуанкаре при малых периодических возмущениях.

На рисунке 3 показаны примеры аттракторов в случае отображения (1). Очевидно, их фазовые портреты очень похожи на потоковые аттракторы Лоренца. Заметим только, что значения параметров, при которых эти дис-



**Рис. 3.** Портреты дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1) при (a)  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$  и (b)  $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$ . В обоих случаях показано порядка  $10^5$  итераций одной начальной точки на аттракторе. Показаны также проекции аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и некоторые срезы аттрактора плоскостью  $z = const$  (хотя эти срезы выглядят как линии, на самом деле они имеют сложную канторовскую структуру)

кретные аттракторы Лоренца найдены, совсем не близки к  $A^*$ : здесь  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$  в случае рисунка 3(a) и  $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$  в случае рисунка 3(b). Поэтому условия псевдогиперболичности таких аттракторов нужно проверять дополнительно.

Соответствующая задача является весьма сложной, если ее рассматривать в качестве задачи типа «computer-assisted proof», когда строгое математическое доказательство проводится с помощью компьютерных вычислений, правильность и непротиворечивость которых проверяется на каждом шаге. Однако в этой общей задаче можно выделить некоторые вполне разумные с точки зрения «обыкновенного вычислителя» подзадачи, имеющие вполне самостоятельный интерес. Так, для начала можно проверить некоторые необходимые условия. Например, для псевдогиперболического аттрактора трехмерного отображения его ляпуновские показатели  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  должны удовлетворять условиям

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \quad (2)$$

Первое и третье условия говорят о том, что наблюдаемый аттрактор является странным, а второе – то, что на нем имеет место растяжение двумерных площадей. Если для некоторых траекторий из аттрактора условия (2) не выполняются, то аттрактор точно не псевдогиперболический.

Однако, если условия (2) выполняются для выбранных (пусть даже случайным образом) траекторий, это не означает, что аттрактор является псев-

догиперболическим. Дело в том, что ляпуновские показатели являются усредненными характеристиками траекторий на аттракторе, поэтому, в принципе, не исключена ситуация, когда аттрактор имеет очень маленькие «дырки» (размеры которых могут быть меньше всякой разумной точности счета), где условия (2) для соответствующих траекторий нарушается.

С другой стороны, иногда по типу гомоклинических касаний, встречающихся в аттракторе, можно определенно отнести его к квазиаттракторам.

Это нельзя (автоматически) сделать для аттракторов на рисунке 3, которые содержат седловую неподвижную точку с мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0, |\lambda_2| > |\lambda_3|$  и  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = B = 0.7 < 1$ , а кроме того, седловая величина  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_2|$  больше 1. Тогда неизбежно возникающие здесь гомоклинические касания в общем случае будут такими, что их бифуркации не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [18, 19].<sup>4</sup>

С другой стороны, устойчивые периодические траектории обязательно рождаются, если  $\sigma < 1$  и  $\dim W^s(0) = 2$ , или если неподвижная (периодическая) точка на аттракторе является седло-фокусом (неважно, с одномерным или двумерным неустойчивым многообразием). В частности, спиральные аттракторы трехмерных гладких отображений или потоков всегда являются квазиаттракторами.

**Замечание 1.** В этой связи, кажется весьма интересной и такая проблема-гипотеза: пусть трехмерный диффеоморфизм в  $R^3$  имеет странный аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку с двумерным неустойчивым инвариантным многообразием, тогда этот аттрактор является квазиаттрактором.<sup>5</sup>

Предлагаемое пособие посвящено в основном математической теории псевдогиперболических аттракторов. Его можно условно разделить на две сравнительно независимые части. Первая часть (глава 1) посвящена классической теории аттракторов Лоренца, основы которой были заложены в работах нижегородских математиков В.С. Афраймовича, В.В. Быкова и Шильникова [26–28]. Последняя из указанных работ, [28], для удобства читателя добавлена в Приложении к в настоящему пособию. Во второй части (главы 2-5)

<sup>4</sup>В общем случае такие (квадратичные) гомоклинические касания (как на рис. 13) называются простыми [19], и в случае  $\sigma > 1$  они не разрушают псевдогиперболичность, если сама неподвижная точка является псевдогиперболической, хотя и влекут «дикую гиперболичность». Смотри подробнее в главе 2.

<sup>5</sup>Эта проблема кажется весьма трудной, и ее решение связано, например, с доказательством существования так называемых непростых гомоклинических касаний (примеры которых показаны на рис. 14, только здесь направление стрелок нужно поменять на противоположное, чтобы неустойчивое многообразие точки  $O$  стало двумерным). Заметим, что бифуркации таких касаний приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [25]. В свою очередь, появление непростых касаний в рассматриваемом случае следует ожидать из-за того, что само двумерное неустойчивое многообразие, чтобы оно принадлежало аттрактору, должно бесконечно много раз «складываться» в разных направлениях (это похоже на то, как если бы мы пытались «упаковать» двумерную плоскость в трехмерный куб, избегая при этом появления острых углов).

рассматривается математическая теория псевдогиперболических аттракторов трехмерных отображений – диффеоморфизмов. Это совсем новая теория, она находится сейчас в процессе своего развития, тем не менее здесь уже получен ряд значительных результатов. Более того, многие элементы этой теории уже сейчас входят в курс «Математическая теория динамического хаоса», читаемый в ННГУ.

# 1. Аттрактор Лоренца

В 1963 г. Э. Лоренц обнаружил [29] асимптотически устойчивое сложное непериодическое поведение траекторий в системе, полученной при аппроксимации уравнений Обербека-Буссинеска, описывающих конвекцию в плоском слое теплопроводящей жидкости, подогреваемой снизу.<sup>1</sup> Система Лоренца (или Зальцмана-Лоренца) имеет следующий вид

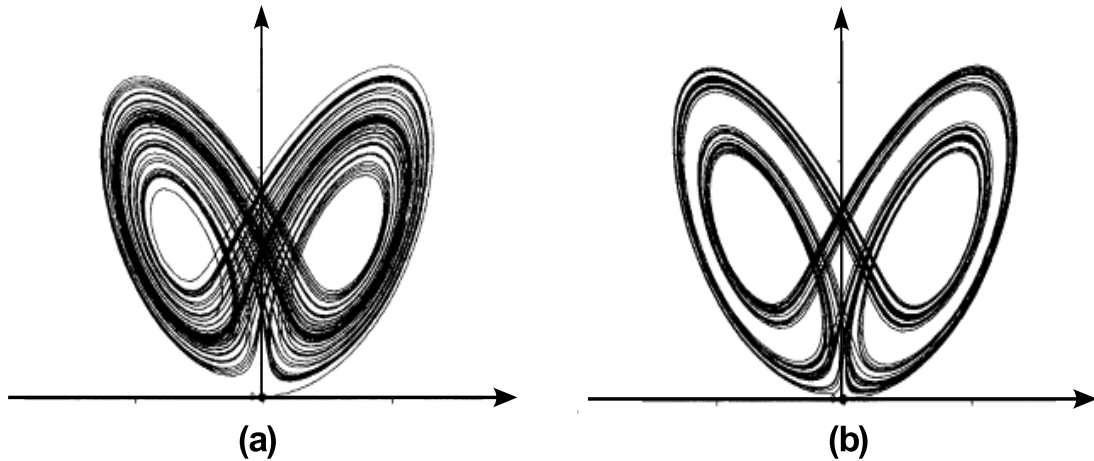
$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (3)$$

Параметры  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  имеют вполне определенный физический смысл (например,  $\sigma$  – это число Прандтля,  $r$  – число Рэлея  $R$  с некоторым коэффициентом (в [29]  $r = R/q$ , где  $q = 27\pi^4/4$ ), а  $b$  – геометрический параметр.). При  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$  Лоренц с помощью компьютерных экспериментов обнаружил хаотическое поведение траекторий. На рисунке 4 показано типичное поведение одной из неустойчивых сепаратрис седлового состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Поведение другой неустойчивой сепаратрисы будет симметричным, т.к. система 3 допускает симметрию вида  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ . Рисунок 4 дает адекватное представление о форме аттрактора Лоренца, т.к. в типичном случае этот аттрактор является замыканием любой из неустойчивых сепаратрис седлового равновесия.

В то время (60-е годы и начало 70-х) такое поведение траекторий казалось весьма экзотическим и непонятным, а сама система Лоренца весьма слабо ассоциировалась с моделью, которая могла бы адекватно описывать динамические процессы, происходящие в реальной жидкости. Она была «слишком маломерной». Конечно, математиков и физиков очень интересовали в то время (как и сейчас) проблемы турбулентности, в частности, механизмы возникновения (пространственно-временного) хаоса в гидродинамических моделях, который легко наблюдался в экспериментах. Основное представление, существовавшее в 60-х годах, состояло в том, что наблюдаемый хаос

---

<sup>1</sup>Это была так называемая задача Рэлея, в которой изучалось течение, возникающее в слое жидкости постоянной толщины  $H$  при условии, что разность температур между нижней и верхней границами поддерживается равной постоянной величине  $\Delta T$ . Такая система допускает равновесное решение, когда нет движения, а температура линейно меняется с глубиной. Если это решение неустойчиво развивается конвекция. В этой задаче есть характерные физические параметры  $g, \alpha, \nu$  и  $\kappa$ , обозначающие соответственно ускорение силы тяжести, коэффициент теплового расширения, кинематическую вязкость и теплопроводность, и связанные с ними универсальные величины – число Рэлея  $R = g\alpha H^3 \Delta T \nu^{-1} \kappa^{-1}$  и число Прандтля  $\sigma = \kappa^{-1} \nu$ .



**Рис. 4.** Два типа аттракторов Лоренца: (а) стандартный и (б) с лакуной, содержащей седловое периодическое движение без гомоклинических траекторий

связан с особенностями бесконечномерной динамики (комментарии по этому поводу смотри, например, в [30]). В частности, известный (и в то время – единственный) сценарий Ландау-Хопфа перехода к турбулентности предполагал бесконечную цепочку усложнения квазипериодических движений – от одномерного тора к двумерному, от двумерного тора к трехмерному и т.д., до бесконечности. Поэтому долгое время работа Э. Лоренца [29] была неизвестна математикам и не сильно интересовала физиков.

Однако в начале 70-х годов ситуация изменилась. Рюэль и Такенс в своей знаменитой статье [31] (ее перевод на русский есть в [30]) показали, что цепочка Ландау-Хопфа может обрываться на стадии трехмерного тора: при выполнении определенных резонансных условий на частоты хаос может возникать при сколь угодно малых гладких возмущениях. То есть, уже у конечномерных систем могут существовать нетривиальные притягивающие множества со сложной структурой (содержащие счетное множество периодических седловых траекторий, континуум устойчивых по Пуассону траекторий и т.д.). В этой же работе [31] был предложен термин «странный аттрактор» для обозначения таких множеств, и введен ряд базовых понятий на эту тему. Заметим также, что практически в это же время Афраймович и Шильников [32] показали, что хаос может также возникать даже при разрушении двумерного инвариантного тора<sup>2</sup>, и что соответствующие явления играют важную роль в задачах синхронизации колебаний. Все это привело к тому, что в конце 70-х годов системами со сложной динамикой заинтересовались

<sup>2</sup>По этому поводу смотри интересные комментарии в гл. 4 книги [7].

физики и математики, а также и ученые из других областей науки.

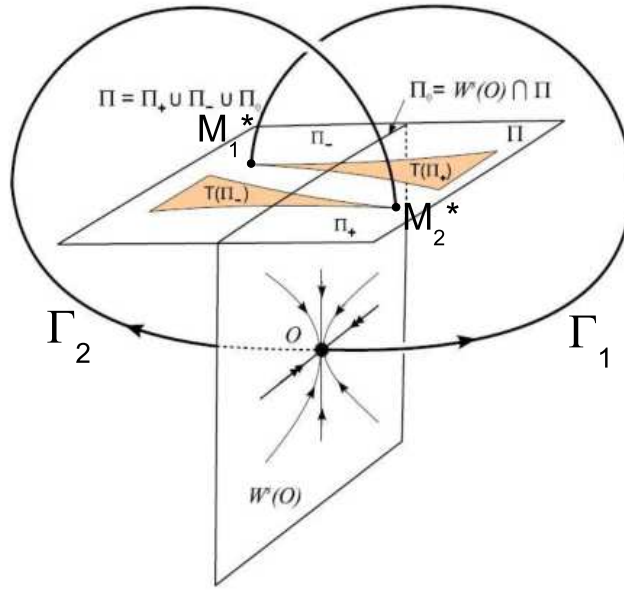
Вскоре после этого и сама работа Э. Лоренца попала в поле зрения математиков. Об этой работе узнали и математики из Горьковского университета. В частности, как только Л.П. Шильников узнал о этой работе Лоренца, он сразу понял, что исследование системы Лоренца должно привести к совершенно новому взгляду на природу динамического хаоса. Более того, эта задача казалась ему вполне разрешимой, поскольку все необходимые качественные методы исследования систем подобного типа были уже разработаны. В частности, основные такие методы были созданы Шильниковым при изучении глобальных бифуркаций многомерных систем с гомоклиническими петлями седловых состояний равновесия [33, 34] и гомоклиническими кривыми Пуанкаре [35, 36]. Идея теперь состояла в том, чтобы соединить эти методы с компьютерными экспериментами, и на основании этого изучить динамику и бифуркации в системах лоренцевского типа.

Для работ над системой Лоренца Шильников привлек группу своих сотрудников. Костяк группы составили В.С. Афраймович и В.В. Быков, вместе с которыми и были написаны главные работы [26–28]. Подход Шильникова состоял в том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием так называемой геометрической модели – двумерного разрывного сингулярно-гиперболического отображения с определенными эффективно проверяемыми свойствами. Эта модель была описана в работах [26–28]. Тот факт, что отображение Пуанкаре в системе Лоренца удовлетворяет требованиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова, проверялся численно, а теоретически исследовалась уже геометрическая модель<sup>3</sup>. По существу, эта модель обобщала свойства отображения Пуанкаре вблизи сепаратрисы седла [34] (см. рис. 6), а условия гиперболичности были записаны в форме, близкой к принципу кольца, предложенному в работах по разрушению двумерного инвариантного тора [32].

Если обратиться к рисунку 5, на котором показаны основные элементы геометрической структуры трехмерного потока с аттрактором Лоренца, то можно понять в общих чертах как строится геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова. На этом рисунке показаны кусок двумерного устойчивого многообразия  $W^s(O)$  седлового состояния равновесия  $O$  и

---

<sup>3</sup>Однако строгое математическое доказательство того факта, что аттрактор в системе Лоренца может быть полностью описан геометрической моделью, было получено лишь через большой промежуток времени. Именно, в работе Такера [22] было дано соответствующее доказательство с помощью компьютера, так называемое «computer-assisted proof». Несомненно, результат Такера является весьма важным для теории аттракторов Лоренца, однако само доказательство не является «эффективно проверяемым». Поэтому в недавней работе И. Овсянникова и Д. Тураева [23] было предложено другое доказательство того, что «аттрактор Лоренца существует», основанное на критериях Шильникова [37] возникновения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях.

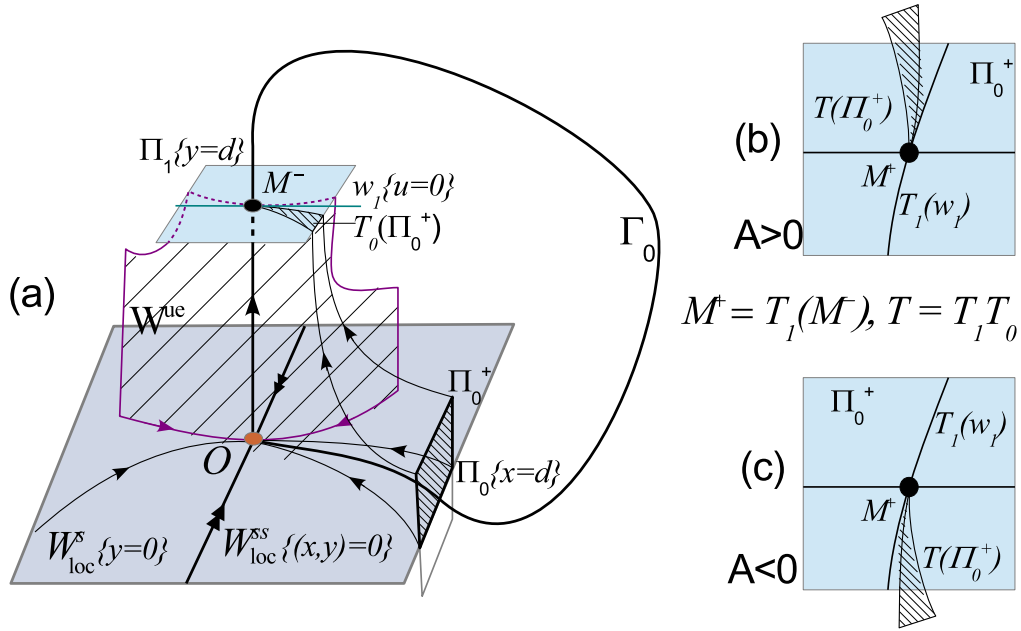


**Рис. 5.** Элементы «поточковой картинки» в случае аттрактора Лоренца

две неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$ , которые пересекают некоторую трансверсальную к  $W^s(O)$  площадку  $\Pi$  в точках  $M_1^* = \Gamma_1 \cap \Pi$  и  $M_2^* = \Gamma_2 \cap \Pi$ . Двумерные площадки  $W^s(O)$  и  $\Pi$  пересекаются вдоль некоторой линии  $\Pi_0 = W^s(O) \cap \Pi$ , которая разделяет площадку  $\Pi$  на две половины  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$ . Площадка  $\Pi$  выбирается таким образом, что все траектории (из некоторой поглощающей области), кроме равновесия  $O$ , ее обязательно пересекают. Соответственно все траектории аттрактора  $A$  (кроме  $O$ ) будут иметь точки пересечения с  $\Pi$ . А это означает, что для того, чтобы изучить структуру аттрактора, достаточно исследовать динамику соответствующего отображения Пуанкаре секущей  $\Pi$  на себя. Обозначим это отображение через  $T$ .

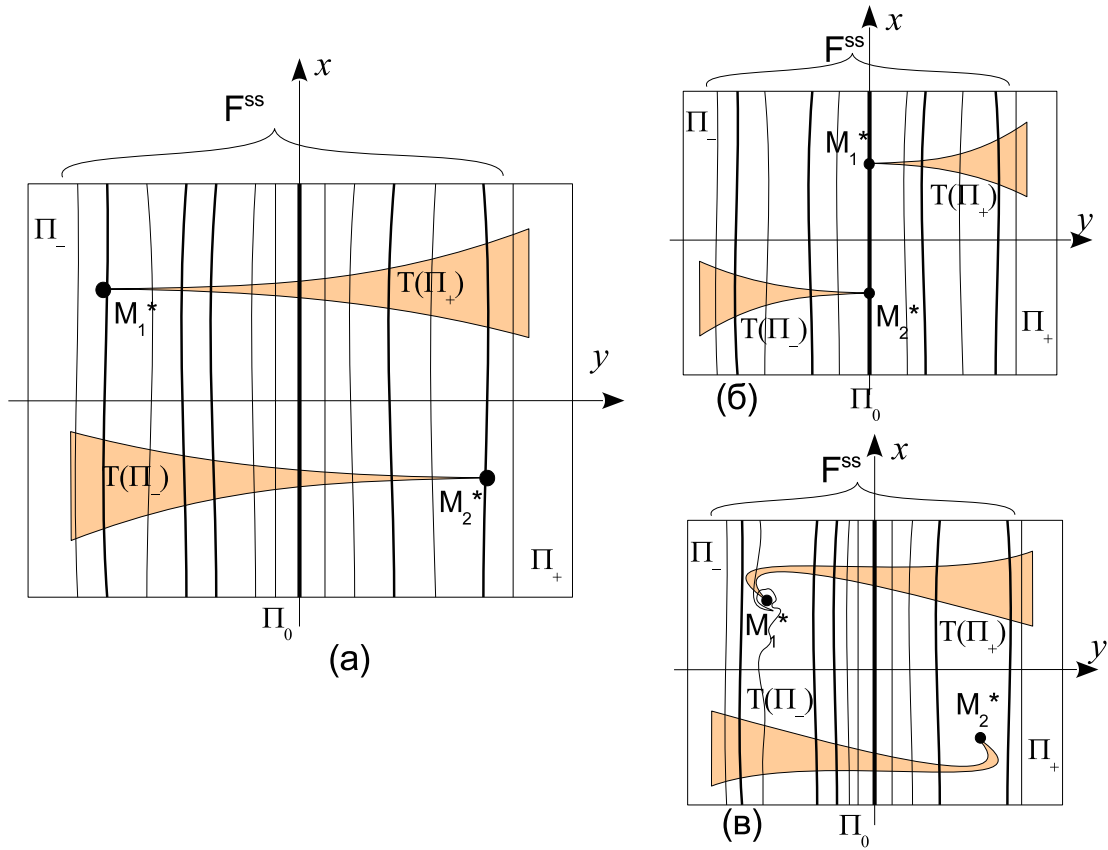
Опять же, рисунок 5 подсказывает каким должно быть это отображение. Во-первых, оно должно быть разрывным: именно,  $\Pi_0$  – линия его разрыва. Отображение  $T$  не определено на  $\Pi_0$ , так как траектории всех точек на  $\Pi_0$  стремятся к  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Однако траектории всех точек на  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$  будут пересекать площадку  $\Pi$ , причем трансверсально (если взять, например, последовательность точек  $M_k^+$  на  $\Pi_+$ , накапливающихся при  $k \rightarrow \infty$  к  $\Pi_0$  справа, то  $T(M_k^+) \rightarrow M_1^*$ ; аналогично для точек  $M_k^- \in \Pi_-$ , накапливающихся при  $k \rightarrow \infty$  к  $\Pi_0$  слева, получаем, что  $T(M_k^-) \rightarrow M_2^*$ ). Во-вторых, поведение траекторий точек, стартующих вблизи линии разрыва  $\Pi_0$ , долж-





**Рис. 6.** Геометрия отображения Пуанкаре в окрестности гомоклинической петли к седловому состоянию равновесия. (а) Пример гомоклинической петли  $\Gamma_0$  состояния равновесия  $O$  типа седло в трехмерном случае. Седло  $O$  имеет здесь собственные значения  $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0 < \lambda_u$ . Если  $\lambda_u + \lambda_s < 0$ , то при соответствующем расщеплении петли вовнутрь рождается единственный устойчивый предельный цикл. Если  $\lambda_u + \lambda_s > 0$ , то для рождения единственного (уже седлового) предельного цикла требуются дополнительные условия общего положения. Так, петля  $\Gamma_0$  должна входить в седло  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , касаясь ведущего направления (отвечающего  $\lambda_s$ ), и сепаратрисная величина  $A$  отлична от нуля (что влечет, но не эквивалентно тому, что устойчивое многообразие  $W^s(O)$  при  $t \rightarrow -\infty$  будет касаться в  $O$  неведущего многообразия  $W^{ss}_{loc}$ ). Если  $A > 0$ , рис.(b), то предельный цикл рождается при расщеплении петли наружу, а если  $A < 0$ , рис.(c), – при расщеплении вовнутрь

но быть тем же самым, что и в случае седла (сравните с рис. 6). Поэтому нужно считать, что образы  $T(\Pi_+)$  и  $T(\Pi_-)$  площадок  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$  имеют форму треугольных клиньев с острями в точках  $M_1^*$  и  $M_2^*$  соответственно. Только предельные точки  $M_1^*$  и  $M_2^*$  будут лежать в  $\Pi_-$  и  $\Pi_+$  соответственно: для случая аттрактора Лоренца эти точки отделены от  $\Pi_0$ , рисунок 7(а); в случае, когда в системе появляется гомоклиническая восьмерка седла (см. рис.9(б), соответствующий значениям параметров на кривой  $l_1$ ) обе эти точки лежат на  $\Pi_0$ , смотри рисунок 7(б); за границей существования аттрактора Лоренца, когда у клиньев появляются «крючки» и соответственно ни гиперболичности, ни гладкого слоения уже нет, рисунок 7(в). В-третьих, для случая аттрактора (Лоренца), площадка  $\Pi$  должна быть такой, что  $T(\Pi_+)$  и  $T(\Pi_-)$  лежат целиком внутри нее. Кроме этих трех чисто геометрических условий в работах [26–28] были наложены еще и определен-



**Рис. 7.** Геометрия отображения  $T$  при различных значениях параметров: (а)  $r > r_2$ , когда существует аттрактор Лоренца; (б)  $r = r_2$  – момент существования гомоклинической восьмерки-бабочки седла  $O$ ; (в) значения  $r$  за границей существования аттрактора Лоренца

ные аналитические условия, гарантирующие то, что отображение  $T$  является сингулярно-гиперболическим (см., например, условия (6) из статьи [28], см. Приложение А). Когда эти условия выполняются, отображение  $T$  является экспоненциально сжимающим по одной из координат и растягивающим по другой. Более того, в этом случае на  $\Pi$  существует инвариантное сильно сжимающее слоение  $F^{ss}$ . На рис. 7(а) представлена качественная картинка действия отображения  $T$ , определенного на прямоугольнике  $\Pi$ . Здесь также схематически показано инвариантное слоение  $F^{ss}$ , содержащее в качестве слоя линию  $\Pi_0 = \Pi \cap W^s(O)$  и счетное множество ее прообразов – линий пересечения глобального куска устойчивого многообразия точки  $O$  с прямоугольником  $\Pi$ .

**Замечание 2.** В [27] было показано, что в геометрической модели эти линии плотно заполняют  $\Pi$ . А это означает, что в однопараметрических семействах таких отображений будут плотны значения параметров, отвечающих существованию (многообходных) гомоклинических петель (восьмерок-бабочек – в симметричном случае) седла  $O$ . В свою очередь это влечет *негрубость аттрактора Лоренца* (в нем при малых возмущениях возникают и исчезают петли сепаратрис),

причем такого типа (так называемая «грубая негрубость»), что в пространстве динамических систем системам с аттракторами Лоренца отвечают открытые (в  $C^1$ -топологии) области негрубых систем.

Геометрическая модель позволила дать детальное описание структуры аттрактора Лоренца (см., например, Теоремы 1-4 из [28]). В работах [26–28] были также исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его рождению и изменению структуры, в частности, с образованием лакун, содержащих седловые периодические траектории (на рис. 4(b) показан пример аттрактора Лоренца с лакуной)<sup>4</sup>.

Практически одновременно с работами [26–28] и независимо на Западе появилось большое число статей по аттрактору Лоренца (см. [30]). Тем не менее, теория Афраймовича-Быкова-Шильникова до сих пор остается наиболее полной и удобной для практического анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных системах.

Помимо собственно задачи изучения структуры лоренцевского аттрактора, Шильникова также (может быть еще в большей степени) интересовали вопросы о бифуркационных механизмах возникновения и разрушения аттрактора Лоренца. В частности, он предложил эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях [37]<sup>5</sup>. Позднее, в его работе с Д.В. Тураевым и А.Л. Шильниковым [38] были построены также критерии рождения аттрактора Лоренца при локальных бифуркациях.

Еще при работе над первыми статьями [26, 27] было замечено, что аттрактор Лоренца может разрушаться при образовании так называемых «крючков» в отображении Пуанкаре<sup>6</sup>, смотри рисунок 7(в), и центральную роль при этом играет бифуркация образования гетероклинического контура, содержащего седло и седло-фокусы. Такие бифуркации были исследованы в работах В.В. Быкова [39, 40]. Тот факт, что при переходе за «быковскую точку» аттрактор в системе Лоренца теряет гиперболичность (перестает быть аттрактором Лоренца), и в нем появляются устойчивые периодические траектории больших периодов, послужил непосредственным толчком для формирования концепции квазиаттрактора – притягивающего множества, кото-

---

<sup>4</sup>Лакуна в аттракторе Лоренца – это «дырка» в поглощающей области, в которой лежит седловое периодическое движение без гомоклинических траекторий. Его неустойчивое инвариантное многообразие пересекается с устойчивыми многообразиями периодических траекторий аттрактора, однако устойчивое многообразие расположено так, что оно не пересекается с неустойчивыми многообразиями траекторий аттрактора.

<sup>5</sup>Критерии Шильникова, в частности, были использованы в работе И. Овсянникова и Д. Тураева [23] для аналитического доказательства существования аттрактора Лоренца в так называемой расширенной модели Лоренца.

<sup>6</sup>Образование таких «крючков» связано с тем, что у соответствующих петель сепаратрис меняет знак сепаратрисная величина  $A$ , сравните рисунки 6(b) и 6(c).

рое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов [11]. Сейчас принято считать, что идея квазиаттрактора дает наиболее адекватный математический образ динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах и в большинстве известных на сегодня математических моделях.

Заметим, что аттрактор Лоренца встречается во многих трехмерных и многомерных системах. Одна из наиболее известных – это система Шимицу-Мориока

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - \lambda y - xz, \quad \dot{z} = -\alpha z + x^2, \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$  – параметры. Отметим, что эта система имеет важное значение для математической теории лоренцевских аттракторов. Дело в том, что она служит локальной нормальной формой некоторых типов бифуркаций состояния равновесия с тремя нулевыми собственными значениями и дополнительной симметрией [38]. Поскольку в самой системе Шимицу-Мориока существует аттрактор Лоренца в некоторой области значений параметров<sup>7</sup>, на этом пути можно получить эффективно проверяемые критерии рождения аттрактора Лоренца в результате локальных бифуркаций.

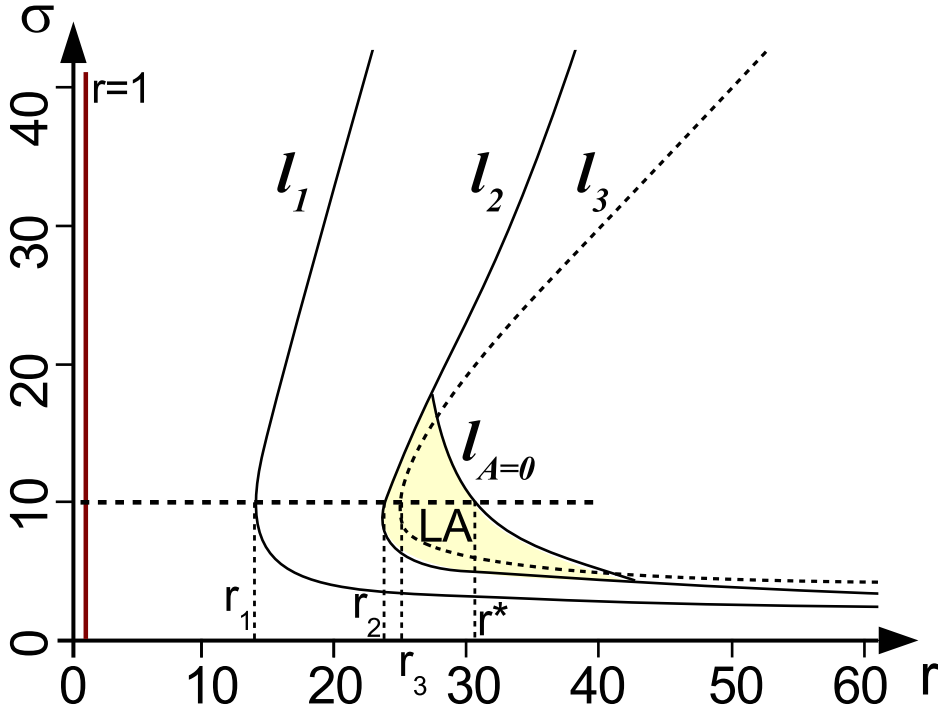
## 1.1. О возникновении аттрактора Лоренца

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о бифуркационных сценариях возникновения аттрактора Лоренца на примере самой модели Лоренца (3). Основные результаты в этом направлении были получены в работах [26, 28]. Также как и в этих работах, опишем картину эволюции фазовых портретов системы (3) в случае однопараметрического семейства с параметром  $r$  при фиксированных  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , где  $r$  изменяется от 0 до 40 – пунктирная линия на рисунке 8. Эту картину удобно представить состоящей из следующих этапов.

**I.** Сначала при  $r < 1$  система имеет одно асимптотически устойчивое состояние равновесие  $O(0, 0, 0)$ , которое при  $r > 1$  теряет устойчивость в результате симметричной бифуркации вилки: точка  $O$  становится седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие  $W^s$  и одномерное неустойчивое многообразие, состоящее из двух траекторий  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые называются сепаратрисами, а в ее окрестности появляются два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$O_1(x = y = -\sqrt{b(r-1)}, z = r-1) \text{ и } O_2(x = y = \sqrt{b(r-1)}, z = r-1).$$

<sup>7</sup>Заметим, что рисунке 4 показано как раз поведение сепаратрис для аттрактора Лоренца в системе Шимицу-Мориока.



**Рис. 8.** Элементы бифуркационной диаграммы для системы Лоренца при  $b = 8/3$  на плоскости параметров  $r$  и  $\sigma$ . Здесь отмечена область **LA** – область существования аттрактора Лоренца, ограниченная куском кривой  $l_2$  и кривой  $l_{A=0}$ , на которой обращается в нуль сепаратрисная величина  $A$  у гомоклинических петель седла  $O$

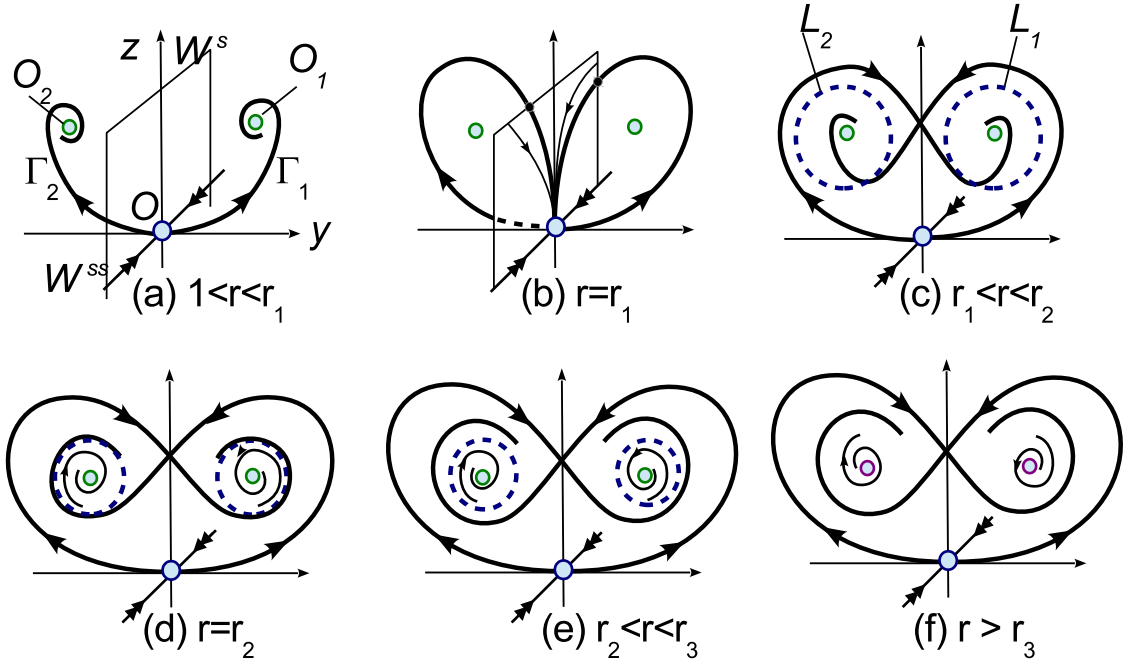
При  $1 < r < r_1 \simeq 13,92$  одна из сепаратрис,  $\Gamma_1$ , стремится к устойчивому состоянию равновесия  $O_1$ , а другая,  $\Gamma_2$ , – к  $O_2$ , смотри рисунок 9(a).

**II.** При  $r = r_1$  каждая из сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  становится двоякоасимптотической к седлу  $O$  – образуется так называемая «гомоклиническая восьмерка-бабочка», смотри рисунок 9(b), поскольку  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  симметричны относительно преобразования  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . При этом седловая величина  $s$  седла  $O$  положительна (**проверить!**).

Напомним, что седловая величина состояния равновесия с собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , где  $Re\lambda_i < 0$  и  $Re\gamma_j > 0$ , определяется как

$$s = \max Re\lambda_i + \min Re\gamma_j.$$

Тогда при переходе  $r$  через  $r = r_1$  из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому периодическому движению  $L_1$  и  $L_2$ , в соответствии с теоремой Шильникова [34]. Более того, вместе с рождением  $L_1$  и  $L_2$  появляется инвариантное неблуждающее множество  $\Omega_1$ , содержащее подкову Смейла. На рисунке 10 показано как такое множество образуется при изменении  $r$ :



**Рис. 9.** Основные этапы сценария возникновения аттрактора Лоренца в модели Лоренца при фиксированных  $b = 8/3$  и  $\sigma = 10$ , когда  $r$  меняется в пределах от  $r = 10$  до  $r = 28$

(а) при  $1 < r < r_1$  неблуждающее множество системы состоит только из трех состояний равновесия:  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$ ; (б) при  $r = r_1$  у этого множества появляются еще две траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ; (с) при  $r > r_1$  неблуждающее множество сразу, «взрывом», становится нетривиальным – в частности, у отображения  $T$  существует подкова  $\hat{\Omega}_1 = \Omega_1 \cap \Pi$ . Однако множество  $\Omega_1$  не является притягивающим, и, следовательно, устойчивыми предельными множествами остаются равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . Такая ситуация будет иметь место при  $r \in (r_1, r_2)$ , где  $r_2 \simeq 24.06$ , только теперь  $\Gamma_1$  будет стремиться к  $O_2$ , а  $\Gamma_2$  – к  $O_1$ , сравните рисунки 9(а) и 9(с).

**Замечание 3.** Заметим, что подкову  $\hat{\Omega}_1$ , как гиперболическое множество отображения  $T$ , здесь можно увидеть следующим образом. Возьмем узкий прямоугольник  $\pi$ , содержащий линию разрыва  $\Pi_0$  (напомним, что  $\Pi_0 = W_{loc}^s(O) \cap \Pi$ ), так, что точки  $M_1^*$  и  $M_2^*$  лежат вне  $\pi$ , смотри рисунок 10(с). Так как седловая величина  $s > 0$ , то этот прямоугольник отображается относительно  $T$  следующим образом: его половинки  $\pi_+$  и  $\pi_-$  отображаются в клинья  $T(\pi_+)$  и  $T(\pi_-)$  с сильным сжатием вдоль оси  $x$  и сильным растяжением вдоль оси  $y$ , а геометрия пересечения прямоугольника  $\pi$  с  $T(\pi_+)$  и  $T(\pi_-)$  такая же, как и у геометрической подковы Смейла. А сильное сжатие и растяжение (экспоненциально сильное вблизи  $\Pi_0$ ) гарантируют гиперболичность получаемого инвариантного множества.

**III.** Момент  $r = r_2$  является бифуркационным. Он характерен тем, что

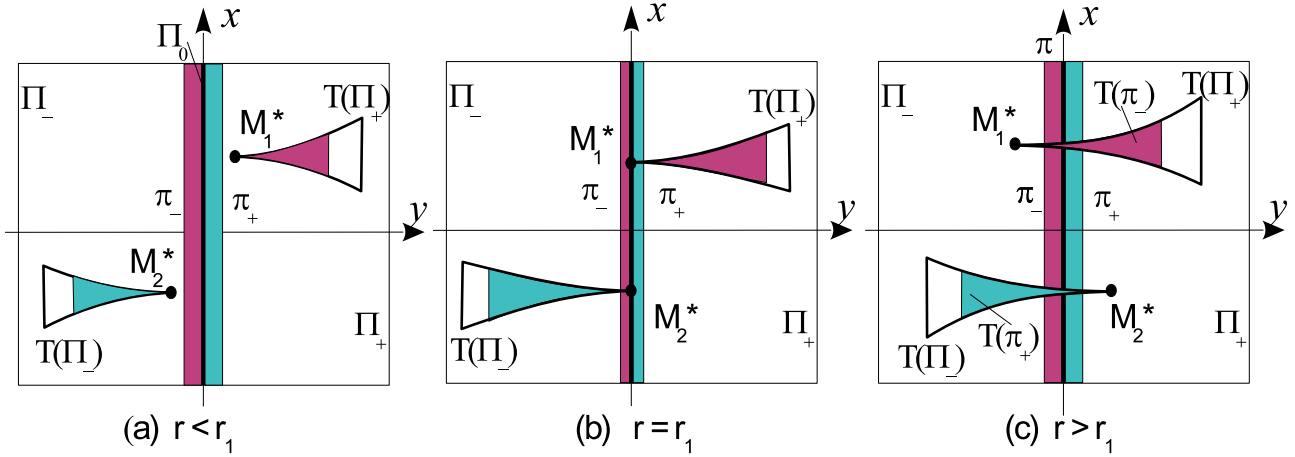


Рис. 10. Процесс развития подковы у отображения  $T$

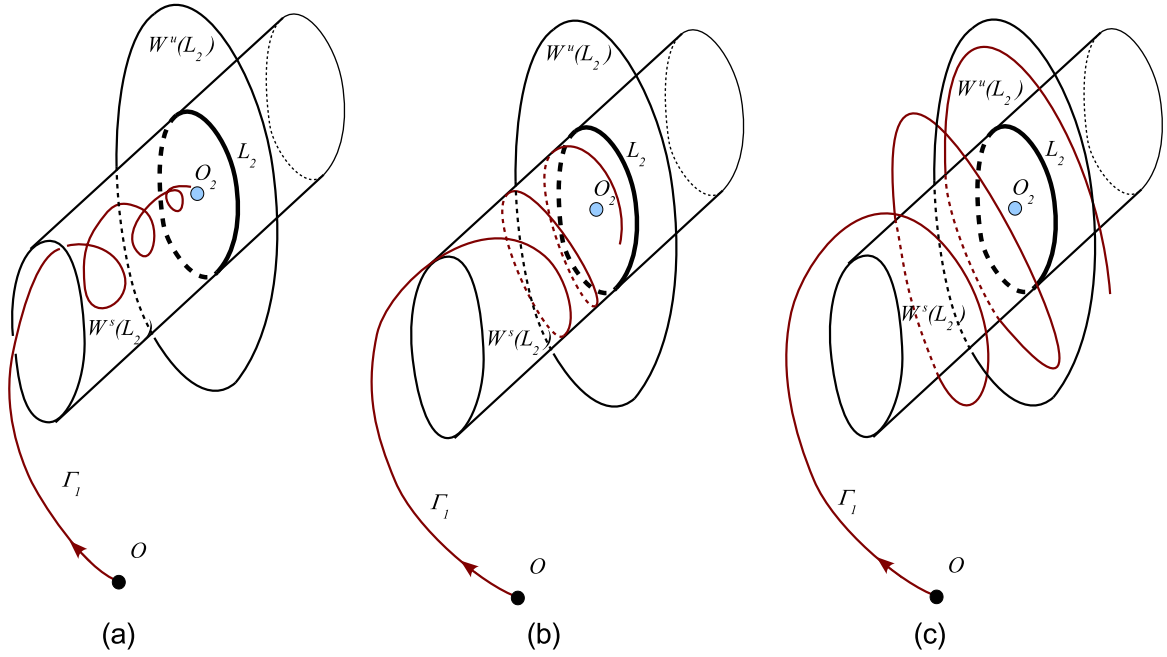
если раньше  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  шли в устойчивые фокусы  $O_2$  и  $O_1$  соответственно, то при  $r = r_2$  сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будут стремиться к седловым периодическим движениям  $L_2$  и  $L_1$  соответственно, рис. 9(d). Это приводит к тому, что при  $r > r_2$  на месте  $\Omega_1$  возникает уже сингулярно гиперболическое предельное множество  $\Omega_2$ , которому принадлежат также сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Это множество  $\Omega_2$  и называется аттрактором Лоренца.

Если  $r_2 < r < r_3 \simeq 24.74$ , в фазовом пространстве системы будут существовать три аттрактора: аттрактор Лоренца  $\Omega_2$  и состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 9(e)). Границей области притяжения аттрактора Лоренца в этом случае являются устойчивые многообразия предельных циклов  $L_1$  и  $L_2$ .

Перестройки в поведении сепаратрисы  $\Gamma_1$  при переходе  $r$  через  $r = r_2$  показаны на рисунке 11.

**IV.** При  $r \in (r_2, r^*)$ , где  $r^* \simeq 30.4$ , система будет иметь устойчивое предельное множество  $\Omega_2$ , обладающее свойствами [26–28]:

- 1)  $\Omega_2$  является негрубым: это связано, в частности, с тем, что седло  $O$  принадлежит  $\Omega_2$  вместе со своими сепаратрисами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Смотри Замечание 2.
- 2) Периодические движения плотны в  $\Omega_2$  и все они являются грубыми, седлового типа.
- 3) В  $\Omega_2$  имеет место экспоненциальное разбегание траекторий, каждая траектория из  $\Omega_2$  имеет положительный максимальный ляпуновский показатель.



**Рис. 11.** Перестройки в поведении сепаратрисы  $\Gamma_1$  при изменении  $r$ : (а) при  $r_1 < r < r_2$  траектория  $\Gamma_1$  стремится при  $t \rightarrow \infty$  к равновесию  $O_2$ ; (б) бифуркационный момент: при  $r = r_2$  траектория  $\Gamma_1$  стремится при  $t \rightarrow \infty$  к седловому предельному циклу  $L_2$ , в этом случае  $\Gamma_1 \subset W^s(L_2)$ ; (с) при  $r > r_2$  траектория  $\Gamma_1$  входит в  $\Omega_2$

- 4) Исчезновение периодических движений при изменении  $r$  возможно только путем влипания их в петли сепаратрис седла  $O$ .
- 5) В интервале  $(r_2, r_3)$ , где  $r_3 \simeq 24.74$ , в фазовом пространстве будут существовать три аттрактора:  $\Omega_2$  – аттрактор Лоренца, и состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 9(е)). Границей области притяжения аттрактора Лоренца являются устойчивые многообразия периодических движений  $L_1$  и  $L_2$ .
- 6) При  $r \rightarrow r_3$  периодические движения  $L_1$  и  $L_2$  стягиваются к состояниям равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , которые при  $r = r_3$  теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа, что приводит к жесткому режиму потери мультистабильности.
- 7) При  $r \in (r_3, r^*)$  единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца (рис. 9(ф)).

**Замечание 4.** Значение  $r = 28$  соответствует тому классическому значению параметров  $r, \sigma, b$  ( $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$ ), которое было указано в работе [29]. Однако аттрактор Лоренца существует при  $b = 8/3$  в области **LA**, ограниченной куском кривой  $l_2$  и кривой  $l_{A=0}$ , на которой обращается в нуль сепаратрисная величина  $A$  у гомоклинических петель седла  $O$ , смотри рисунок 8 (т.е. при  $\sigma = 10, b = 8/3$  аттрактор Лоренца существует при  $r_2 < r < r^* \simeq 30.4$ ). За



границей этой области он становится квазиаттрактором, в силу того, что у отображения  $T$  возникают «крючки» как на рисунке 7. В результате чего инвариантное слоение  $F^{ss}$  разрушается и соответственно у седловых периодических траекторий возникают гомоклинические касания, бифуркации которых неизбежно приводят к рождению устойчивых периодических траекторий. Заметим, что кривая  $l_{A=0}$  была получена численно [41, 42].

## 1.2. Задачи к главе 1

**Задача 1.** Дать аналитическое обоснование геометрических конструкций рисунка 6 в модельном случае, т.е. когда поток вблизи состояния равновесия  $O$  линейный:

$$\dot{x} = \lambda_s x, \quad \dot{u} = \lambda_{ss} u, \quad \dot{y} = \lambda_u y,$$

где  $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0 < \lambda_u$ , а глобальное отображение  $T_1 : \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$  имеет вид

$$\bar{u} = ax + bu, \quad \bar{y} = Ax + cu,$$

где  $\Pi_0 = \{x = x^+, |u| < \varepsilon_0, |y| < \varepsilon_0\}$ ,  $\Pi_1 = \{|x| < \varepsilon_1, |u| < \varepsilon_1, y = d\}$ . Рассмотреть случаи, когда седловая величина  $\sigma = \lambda_u + \lambda_s$  меньше и больше нуля.

**Задача 2.** Изучить бифуркации состояний равновесия в системе Лоренца (3) в «физической» области параметров  $r > 0, \sigma > 0, b > 0$ . В частности, исследовать следующие задачи.

1. Найти значения параметров, при которых состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  является а) устойчивым узлом; б) седлом типа (2,1) (т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями).
2. Найти значения параметров, при которых в системе (3) существует а) одно с.р., б) 3 с.р.  $O, O_1$  и  $O_2$ .
3. Найти значения параметров, при которых  $O_1$  и  $O_2$  являются а) устойчивыми с.р.; б) седло-фокусами типа (1,2); в) найти уравнение бифуркационной кривой  $l_3$ , на которой у  $O_1$  и  $O_2$  появляются собственные значения на мнимой оси (с.з.  $\pm i\omega$ ).

**Задача 3.** Показать, что если  $\sigma - 1 > 2b$ , то для седловой величины  $s$  седла  $O$  (см. главу 1.1, п. II) справедлива формула

$$s = -b - \frac{1}{2}(\sigma + 1) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(r - 1)}.$$

И тогда  $s > 0$ , если

$$r > 1 + \frac{b^2 + b(\sigma + 1)}{\sigma}$$

**Задача 4.** (а) Показать, что при  $r > r_1$  (см. рис. 10(с)) у отображения  $T$  существует подкова Смейла (см. Замечание 3).

(б) Объяснить, что появление «крючков» у  $T(\Pi_+)$  и  $T(\Pi_-)$ , смотри рисунок 7(в), может быть связано с тем, что у состояния равновесия  $O$  появляются гомоклинические петли, у которых сепаратрисная величина  $A$  (см. задачу 1) меняет знак.

## 2. Псевдогиперболичность и гомоклинические касания

В этом параграфе мы рассмотрим основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов. В случае потоков определение псевдогиперболичности было дано в работе Тураева и Шильникова [16], а в случае отображений – в [51], смотри также главу 5. Если говорить коротко, то *псевдогиперболичность диффеоморфизма  $f$*  на некоторой области  $\mathcal{D}$  означает следующее: в каждой точке области  $\mathcal{D}$  существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала  $Df$  отображения, такие, что  $Df$  является экспоненциально сильно сжимающим на  $N_1$  и растягивающим (экспоненциально) объемы на  $N_2$  (здесь слово «сильно» означает, что любое возможное сжатие в  $N_2$  равномерно слабее любого сжатия в  $N_1$ ). Таким образом, в отличие от гиперболичности, здесь не требуется, чтобы растяжение в  $N_2$  существовало по всем направлениям. Тем не менее, псевдогиперболичность, также как и гиперболичность, сохраняется при малых гладких возмущениях [16]. Поэтому если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, т.к. растяжение объемов в  $N_2$  гарантирует существование положительного максимального ляпуновского показателя у любой траектории. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Однако в отличие от гиперболических аттракторов и аттракторов Лоренца, у псевдогиперболических аттракторов могут существовать *гомоклинические касания*. Более того, если заранее не известно, что странный аттрактор является гиперболическим, то у него помимо грубых гомоклинических траекторий (в точках которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седловых периодических траекторий пересекаются трансверсально), должны существовать и негрубые.

**Замечание 5.** Само по себе возникновение определенного гомоклинического касания не является чем-то исключительным – это бифуркационный момент коразмерности один в общем случае (когда касание квадратичное). Однако эта бифуркация влечет чрезвычайно сложную структуру бифуркационного множества. В частности, здесь возникает бесконечно много вторичных гомоклинических касаний, эти касания могут быть вырожденными [45], что, в свою очередь, означает возможность появления сколь угодно вырожденных периодических траекторий и т.п. Все это приводит к тому, что бифуркации гомоклинических касаний нельзя изучить полностью,

например, с помощью конечно-параметрических семейств – традиционного аппарата классической теории бифуркаций. Здесь по необходимости возникают задачи другого рода, связанные с исследованием основных бифуркаций и основных характеристических свойств таких систем. При этом, что является весьма важным и интересным, вопрос о том, какие бифуркации и какие характеристические свойства являются основными, должен решать сам исследователь.

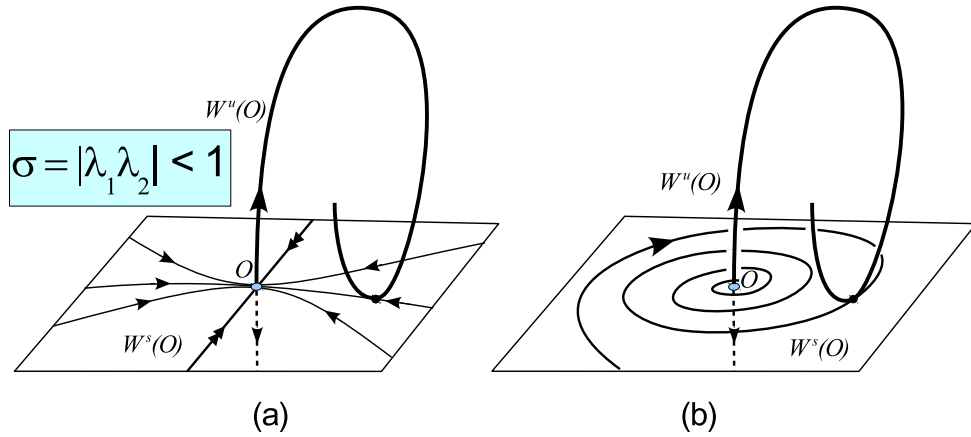
В связи с вышесказанным, в теории странных аттракторов гладких многомерных динамических систем задачи, связанные с определением того, является ли данный аттрактор квазиаттрактором или настоящим аттрактором (псевдогиперболическим), приобретают особый интерес и важность. Иногда соответствующие вопросы решаются просто и параллельно с основными компьютерными вычислениями (или вообще без них). Так, в случае странных аттракторов двумерных диффеоморфизмов (если таковые не являются гиперболическими), бифуркации неизбежных в них гомоклинических касаний приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий весьма больших периодов [36], и соответственно, любой такой аттрактор следует считать квазиаттрактором.<sup>1</sup>

В случае странных аттракторов трехмерных диффеоморфизмов, которые являются основным объектом настоящей статьи, вопрос об определении их типов (квазиаттрактор или настоящий аттрактор) является более сложным. Однако и здесь гомоклинические касания, обнаруживаемые в аттракторах, являются своеобразными индикаторами. Так, если аттрактор допускает гомоклинические касания к неподвижной или периодической точке такие, как на рисунке 12, то он определенно является квазиаттрактором. В первом случае, как на рисунке 12(a), неподвижная точка является седлом с седловой величиной  $\sigma$  меньше единицы, а во втором случае – рисунок 12(b) – седло-фокусом. Здесь требуется только, что якобиан  $J$  неподвижной точки меньше единицы, и в случае седла его неустойчивое многообразие одномерно (в случае седло-фокуса оно может быть как одномерным, так и двумерным).

С другой стороны, весьма важно, что существуют гомоклинические касания, которые не разрушают псевдогиперболичность. В случае трехмерных диффеоморфизмов таковыми являются *простые гомоклинические касания*, [18, 19], при условии, что  $\sigma > 1$ . Пусть, например, диффеоморфизм  $f$  имеет седловую неподвижную (периодическую) точку  $O$  с действительными мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$  при условии, что  $\sigma = |\lambda_1||\lambda_2| > 1$ . У таких касаний сама точка является псевдогиперболической: у неё  $N_1(O)$  – это прямая, проходящая через  $O$  в

---

<sup>1</sup>Это справедливо, например, и для аттракторов Эно, у которых устойчивые периодические траектории могут отсутствовать для значений параметров, образующих нигде не плотное множество положительной меры, согласно теории Бенедикса-Карлесона [14], однако они сразу возникают при сколь угодно малых возмущениях.



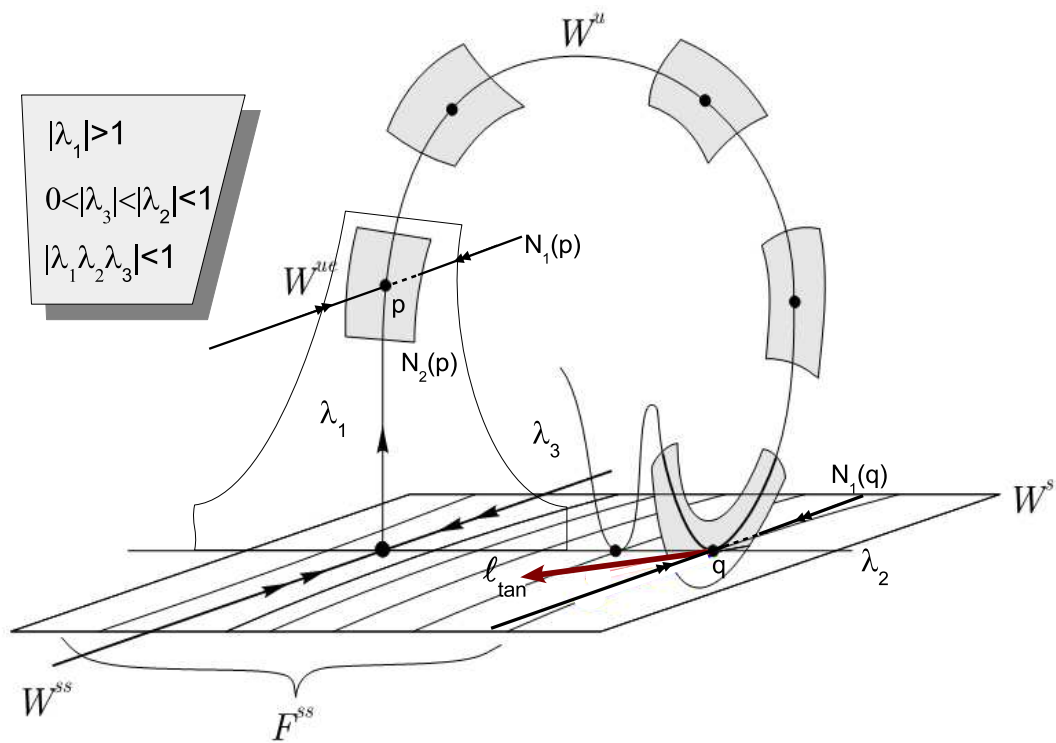
**Рис. 12.** Гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий: (а) точка  $O$  – седло с действительными собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $0 < |\lambda_3| \leq |\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$  и  $|\lambda_1||\lambda_2| < 1$ ; (б) точка  $O$  – седло-фокус (либо типа (2,1), как на рисунке, либо типа (1,2), если направление стрелок поменять на противоположное) с якобианом меньше 1

направлении собственного вектора матрицы линеаризации  $A$ , отвечающего её сильно устойчивому собственному значению (мультипликатору)  $\lambda_3$ , а  $N_2(O)$  – это плоскость, натянутая на собственные вектора матрицы  $A$ , отвечающие мультипликаторам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Очевидно, у любой точки  $p$  из малой окрестности  $U(O)$  седла  $O$  будут такие же инвариантные разложения на пространства  $N_1(p)$  и  $N_2(p)$ . Такие же инвариантные разложения вблизи всей гомоклинической траектории также удастся получить, если гомоклиническое касание простое.

Последнее означает следующее. Возьмем две произвольные гомоклинические точки  $p$  и  $q$  в  $U(O)$  такие, что  $p \in W_{loc}^u(O)$  и  $q \in W_{loc}^s(O)$ , по которым<sup>2</sup> определим так называемое глобальное отображение  $T_1$ , строящееся по траекториям рассматриваемого диффеоморфизма и действующее из малой окрестности  $V(p)$  точки  $p$  в малую окрестность точки  $q$  так, что  $T_1(p) = q$  (заметим, что  $f^s(p) = q$  для некоторого натурального  $s$ , тогда  $T_1 = f^s|_{V(p)}$ ). Тогда требуется, что плоскость  $DT_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $N_1(q)$  и с  $W_{loc}^s(O)$ . Заметим, что при этом кривая  $T_1(W_{loc}^u(O))$  касается двумерной плоскости  $W_{loc}^s(O)$  вдоль вектора  $\ell_{tan}$ , который, в свою очередь, образует ненулевой угол с прямой  $N_1(q)$ , смотри рисунок 13.

Если аттрактор трехмерного гладкого отображения является псевдогиперболическим, то он может содержать только простые гомоклинические

<sup>2</sup>Заметим, что локальные инвариантные многообразия  $W_{loc}^u(O)$  и  $W_{loc}^s(O)$  всегда можно распрямить, введя в  $U(O)$  такие  $C^r$ -гладкие координаты  $(x, y, z)$ , в которых  $W_{loc}^u(O) = \{x = 0, y = 0\}$  и  $W_{loc}^s(O) = \{z = 0\}$ , [19].)

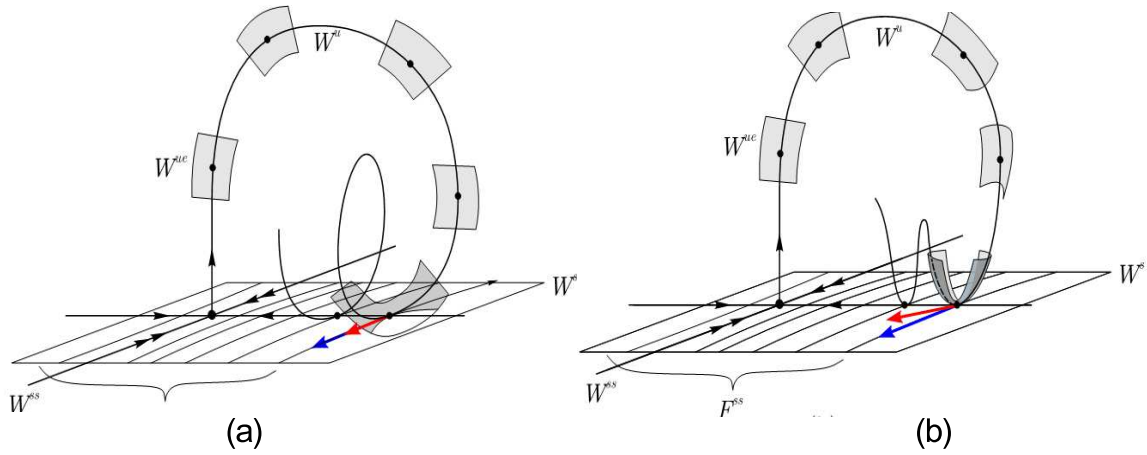


**Рис. 13.** К определению простого гомоклинического касания

касания.<sup>3</sup> При любых малых гладких возмущениях псевдогиперболичность сохраняется, но если эти возмущения не слишком малы, она может разрушиться. При этом само разрушение может быть вызвано появлением таких гомоклинических касаний как на рисунке 12 (например, сама неподвижная точка, первоначально с  $\sigma > 1$ , в процессе эволюции может стать точкой с  $\sigma < 1$ , или, вообще, седло-фокусом). Более тонкий механизм разрушения псевдогиперболичности связан с возникновением так называемых непростых гомоклинических касаний, примеры которых показаны на рисунке 14. При бифуркациях таких гомоклинических касаний уже могут рождаться устойчивые периодические траектории, замкнутые инвариантные кривые и даже нетривиальные притягивающие инвариантные множества, например, маленькие аттракторы лоренцевского типа [46].

Отсюда можно сделать важный вывод для теории странных аттракторов трехмерных гладких отображений: если такой аттрактор является на-

<sup>3</sup>При этом кроме квадратичных касаний, здесь могут существовать гомоклинические касания произвольно больших порядков [45], однако все они тоже являются простыми (в том смысле, что в любой гомоклинической точке  $p$  подпространства  $N_2(p)$  и  $N_1(p)$  пересекаются трансверсально).



**Рис. 14.** Два типа непростых гомоклинических касаний, когда (а) поверхность  $T_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $W^s_{loc}(O)$ , но вектор  $\ell_{tan}$  лежит в  $N_1(q)$ ; (б) поверхность  $T_1(N_2(p))$  касается  $W^s_{loc}(O)$

стоящим, то он должен быть либо гиперболическим, либо псевдогиперболическим. Что касается гиперболических аттракторов, то их математическая теория достаточно хорошо развита; смотри, например, [6, 47]. Более того, такие аттракторы встречаются также и в приложениях, смотри [6] и имеющиеся там ссылки. К настоящему времени для доказательства того, что странный аттрактор в некоторой модели является гиперболическим, разработаны достаточно тонкие качественные и компьютерные методы. Как мы знаем, аналогичные методы сейчас создаются и для исследования псевдогиперболических аттракторов. В частности, в наших недавних работах были предложены новые качественные методы исследования таких аттракторов, включая построение феноменологических сценариев их возникновения в однопараметрических семействах, поисковые методы, основанные на эффективном использовании так называемых «карт седел» [50] и ляпуновских диаграмм и т.п. В следующих параграфах мы дадим некоторый обзор этих методов и приведем примеры полученных с их помощью аттракторов, которые при первом рассмотрении кажутся настоящими (псевдогиперболическими) аттракторами.

### 3. О феноменологических сценариях возникновения странных аттракторов трехмерных отображений

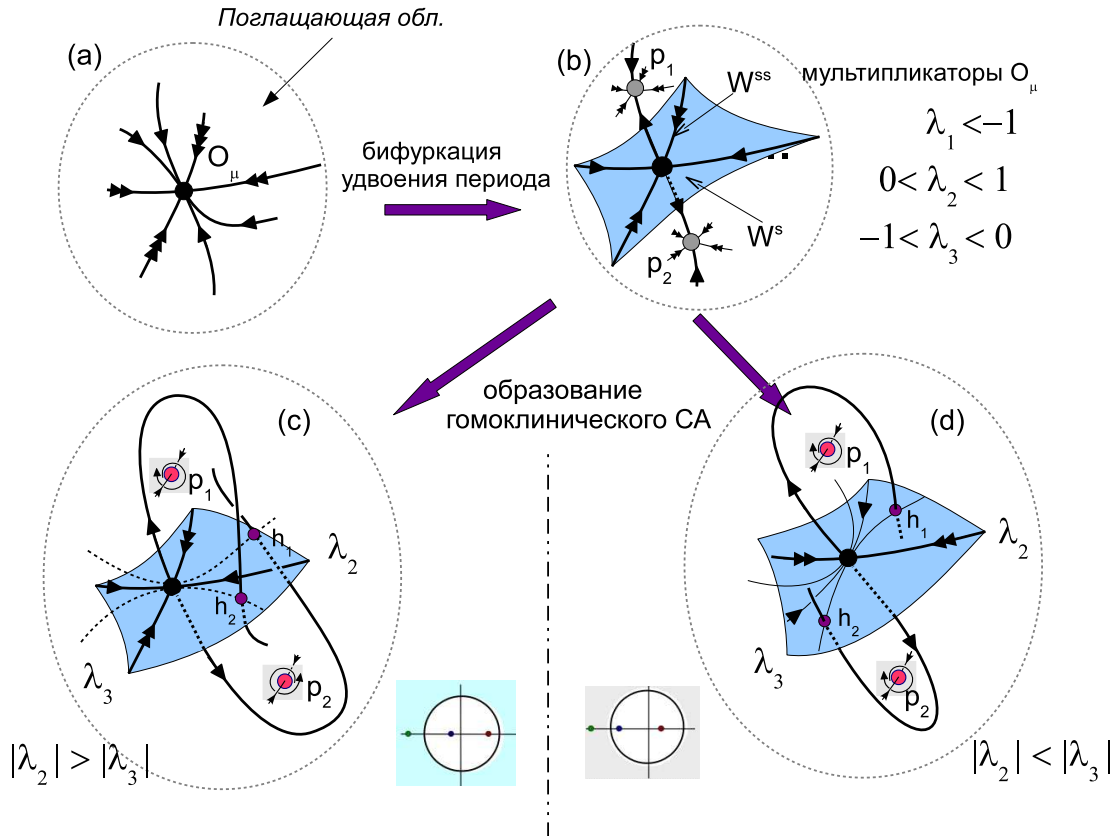
В этом параграфе мы рассмотрим вопросы качественного изучения странных аттракторов трехмерных отображений. При этом основное внимание будем уделять тем аттракторам, которые могут быть псевдогиперболическими. Здесь имеется в виду то, что для рассматриваемых аттракторов мы проверяем только необходимое условие (2), смотри также Замечание 1. Кроме того, мы ограничимся исследованием так называемых *гомоклинических аттракторов*, то есть, таких, которые содержат только одну неподвижную точку  $O$  и её неустойчивое многообразие.

При этом под аттрактором отображения  $f$ , следуя Рюэлю [52], мы будем понимать *замкнутое, инвариантное, устойчивое и цепно-транзитивное множество*  $\mathcal{A}$ . В качестве устойчивости здесь будем рассматривать обычную асимптотическую устойчивость, которая означает, что аттрактор лежит внутри некоторой поглощающей области  $\mathcal{D}$ , все точки которой при положительных итерациях отображения  $f$  стремятся к  $\mathcal{A}$ .

Напомним, что *цепная транзитивность* (см., например, [16]) означает, что любые две точки на аттракторе могут быть соединены  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ . Последнее означает, что для любых точек  $a, b \in \mathcal{A}$  и любого  $\varepsilon > 0$  в  $\mathcal{A}$  существуют точки  $a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b$ , где  $N = N(\varepsilon)$  такие, что  $x_i \in \mathcal{A}$  и  $\text{dist}(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Последовательность таких точек  $\{x_i\}$  называется  *$\varepsilon$ -траекторией* точки  $x_0$  длины  $N+1$ , а точка  $b$  называется  *$\varepsilon$ -достижимой* от точки  $a$ . Тогда *гомоклинический аттрактор* с точкой  $O$  – это замкнутое, инвариантное множество, состоящее из точек,  $\varepsilon$ -достижимых от точки  $O$ , или, как говорят,  $\mathcal{A}$  является *пролонгацией* точки  $O$ .

В этом случае геометрически аттрактор  $\mathcal{A}$ , как множество в  $R^3$ , можно рассматривать как замыкание (пролонгацию) неустойчивого многообразия его неподвижной точки  $O$ . Из этого в общем-то очевидного наблюдения, можно сделать вывод, что геометрические а также динамические свойства





**Рис. 15.** Два феноменологических сценария возникновения гомоклинических аттракторов либо лоренцевского типа, путь (a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (c); либо восьмерочного типа, путь (a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (d)

гомоклинического аттрактора во многом определяются его гомоклинической структурой, т.е. характером пересечений устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий самой точки  $O$ . В связи с этим, в работе [44] нами были предложены достаточно простые феноменологические сценарии возникновения некоторых типов гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах отображений, начинающихся с простого аттрактора – устойчивой неподвижной точки. Два таких сценария схематически представлены на рисунке 15.

Отметим в этих сценариях две главные, с нашей точки зрения, особенности. Первая – это то, что устойчивая неподвижная точка  $O$  теряет устойчивость при изменении параметра в результате бифуркации удвоения периода. Сразу после этой бифуркации точка  $O$  становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается устойчивый цикл  $(p_1, p_2)$  периода 2 (т.е.  $f(p_1) = p_2$  и  $f(p_2) = p_1$ ), который становится аттрактором. При этом точка  $O$  должна иметь собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такие, что  $\lambda_1 < -1$ ,  $|\lambda_{2,3}| < 1$  и  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ . Пусть при дальнейшем измене-

нии параметра точка  $O$  больше не претерпевает бифуркаций, а цикл  $(p_1, p_2)$  теряет свою устойчивость. Каким образом это происходит, пока не имеет значения, но вот что важно – и это является второй главной особенностью указанных сценариев – происходит глобальная бифуркация, связанная с образованием гомоклинических пересечений одномерного неустойчивого  $W^u$  и двумерного устойчивого  $W^s$  инвариантных многообразий точки  $O$ . При этом конфигурация этих многообразий будет похожа на то, что мы видим на рисунке 15(c) и (d).

Чтобы объяснить, как образуются две такие разные конфигурации, предположим, для определенности, что  $\lambda_2 > 0$  и  $\lambda_3 < 0$  (здесь также  $\lambda_1 < -1$ ). Тогда  $W^u$  разбивается точкой  $O$  на две связанные компоненты-сепаратрисы  $W^{u+}$  и  $W^{u-}$ , инвариантные относительно  $f^2$ , такие, что  $f(W^{u+}) = W^{u-}$  и  $f(W^{u-}) = W^{u+}$ . Пусть, скажем,  $W^{u+}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_1$ , тогда, автоматически,  $W^{u-}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_2 = f(h_1)$ . Отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  устроено очень просто: оно имеет здесь устойчивую неподвижную точку  $O$  типа неориентируемый узел, так как  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ .

В случае, когда  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ , как на рисунке 15(c), на  $W_{loc}^s(O)$  существует сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}$  – инвариантная относительно  $f$  кривая, касающаяся в точке  $O$  собственного направления, отвечающего отрицательному мультипликатору  $\lambda_3$ . Кривая  $W^{ss}$  разбивает плоскость  $W_{loc}^s(O)$  на две компоненты  $W_1^s$  и  $W_2^s$ . Так как  $\lambda_2 > 0$  (и  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ ), то каждая из компонент инвариантна относительно  $f$ , т.е. точки из  $W_1^s$  не могут попасть в  $W_2^s$  при итерациях  $f$ , и наоборот. На  $W_{loc}^s$  существуют также непрерывное семейство гладких инвариантных кривых, которые все входят в точку  $O$ , касаясь ведущего собственного направления, отвечающего положительному мультипликатору  $\lambda_2$ . Пусть точка  $h_1$  принадлежит какой-то из этих кривых, скажем  $l_1$ . Тогда кривая  $l_2 = f(l_1)$  будет также инвариантной кривой из этого семейства, и  $h_2 \in l_2$ . Кривые  $l_1$  и  $l_2$  лежат ровно в одной компоненте, в  $W_1^s$  или  $W_2^s$ , и входят в  $O$ , образуя конфигурацию «клина с нулевым углом». Соответственно, конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$ , смотри рисунок 15(c), будет напоминать ту, которая характерна для неустойчивых сепаратрис аттрактора Лоренца. Поэтому возникающий здесь аттрактор был назван в [43] «дискретным аттрактором Лоренца» (рисунки 3 и 17 дают представление о типичной форме такого аттрактора).

Аналогичные простые геометрические рассуждения для случая  $|\lambda_2| < |\lambda_3|$ , как на рисунке 15(d), показывают, что здесь конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$  будет совсем другой. Она скорее похожа на конфигурацию сепаратрис в аттракторе отображения Пуанкаре периодически

возмущенной двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седла, [15]. Поэтому возникающий в этом случае аттрактор был назван в [48] «дискретным восьмерочным аттрактором».

Заметим, что для обоих таких аттракторов условие  $\sigma > 1$  (здесь  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_2|$  в лоренцевском и  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3|$  в восьмерочном случаях соответственно) является очень важным, так как оно просто необходимо для того, чтобы рассматриваемый аттрактор был псевдогиперболическим. В противном случае, это будут либо *квазиаттракторы* лоренцевского или восьмерочного типа; либо – другой вариант – из образовавшейся гомоклинической конфигурации в случае  $\sigma < 1$  может «отродиться» большая охватывающая её устойчивая замкнутая инвариантная кривая (тор), которая может, в свою очередь, разрушиться и на её месте может возникнуть хаос уже совсем другой природы (например, «тор-хаос»). Обе эти возможности хорошо наблюдаются при компьютерных экспериментах (см., например [44]).

Эти очевидные наблюдения подсказывают нам, что и в случаях седловых неподвижных точек других типов также можно ожидать существование гомоклинических аттракторов, конфигурация которых будет существенно зависеть от собственных значений этих точек, и в первую очередь от их знаков. В случае, когда среди собственных значений есть комплексно-сопряженные, можно ожидать также существование дискретных аттракторов спирального типа.

**Замечание 6.** Однако наши «дискретные» лоренцевский и восьмерочный аттракторы существенно отличаются от их аналогов, получаемых в отображениях Пуанкаре периодически возмущенных трехмерных потоков. Так при малом периодическом возмущении системы с аттрактором Лоренца получается псевдогиперболический аттрактор [24], который имеет седловую неподвижную точку со всеми положительными мультипликаторами, и в «дырках» аттрактора лежат неподвижные точки. В случае «дискретного аттрактора Лоренца» неподвижная точка имеет два отрицательных мультипликатора, и в «дырках» лежит траектория периода два. Кажется, что «дискретные восьмерочные аттракторы» вообще не имеют потоковых аналогов. Это связано с тем, что если соответствующая система имеет гомоклиническую восьмерку седла, то либо эта «восьмерка» устойчива (аттрактор), но тогда получаемый аттрактор будет иметь  $\sigma < 1$ , либо неустойчива, тогда аттрактора вообще нет. Это позволяет говорить, что и «дискретный аттрактор Лоренца» и «дискретный восьмерочный аттрактор» являются новыми.

Сама задача изучения и классификации гомоклинических аттракторов трехмерных диффеоморфизмов была впервые поставлена в работе [44], хотя первые результаты на эту тему были получены ещё в работе [20], в которой у трехмерных отображений Эно были обнаружены дискретные аттракторы Лоренца. Заметим, что возможность появления таких аттракторов при локальных бифуркациях трехкратно вырожденных неподвижных точек, например, имеющих мультипликаторы  $+1; -1; -1$ , была исследована в работе [38]. Так как отображение Эно (1) содержит три параметра, то в нем та-

кая точка существует, и более того, как показано в [20], для нее выполнены условия из [38]. Таким образом, основная идея нашей работы [20] состояла в применении знаний о свойствах вырожденных локальных бифуркаций к конкретной ситуации. Очевидно, что этот подход может быть также использован при изучении различных других моделей, содержащих не менее трех параметров.

В работе [44] была предложена другая идея, основанная на реализации феноменологических сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов, возможных в однопараметрических семействах трехмерных отображений. Такие сценарии, как, например, представленные на рисунке 15, выглядят вполне реализуемыми в конкретных системах и очень удобными для компьютерных исследований – здесь, например, не нужно знать всех тонкостей глобальной бифуркации, приводящей к возникновению гомоклинических структур, а достаточно только вычислить/построить основные простые характеристики (фазовый портрет, мультипликаторы неподвижной точки, ляпуновские показатели и т.п.). Сама идея изучения странных аттракторов с помощью феноменологических сценариев, включающих два основных бифуркационных этапа – потеря устойчивости простого аттрактора (состояния равновесия, предельного цикла, неподвижной точки и т.п.) и возникновения гомоклинического аттрактора – впервые была предложена в работе Л.П. Шильникова [49], в которой такой сценарий был предложен для объяснения явления возникновения спирального хаоса в случае многомерных потоков.

В настоящей работе мы проиллюстрируем как эти идеи могут быть использованы при исследовании странных гомоклинических аттракторов в конкретных моделях.

### 3.1. Метод карт седел

Тот факт, что конфигурация таких аттракторов существенно зависит от собственных значений их неподвижных точек, был использован в работе [50] для целей их классификации в случае ориентируемых трехмерных отображений. Если ограничиться только псевдогиперболическими гомоклиническими аттракторами, то такая задача оказывается вполне разрешимой, если различать аттракторы по типам их гомоклинических структур. В этом случае, как показано в [50], возможно 5 разных типов таких псевдогиперболических аттракторов. Все они относятся к случаю, когда неподвижная точка является седлом (все мультипликаторы действительны) с одномерным неустойчивым многообразием. Два из этих типов – дискретные лоренцевские

и восьмерочные аттракторы – наблюдаются в случае, когда неустойчивый мультипликатор  $\lambda_1$  отрицателен,  $\lambda_1 < -1$ , а остальные («двойной восьмерочный», «супервосьмерочный» и «суперлоренцевский») – к случаю, когда  $\lambda_1 > 1$ .

Для нахождения таких аттракторов в конкретных моделях в работе [50] был предложен так называемый «метод карт седел». Проиллюстрируем суть этого метода на примере *трехмерного обобщенного отображения Эно* вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Ay + Cz + f(y, z), \quad (5)$$

где функция  $f$  зависит только от координат  $y$  и  $z$ , а также  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = f'_z(0, 0) = 0$ . Отображение (5) зависит от трех параметров  $A, B$  и  $C$ , имеет постоянный якобиан, равный  $B$ . Очевидно, к виду (5) может быть приведено любое отображение вида  $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = M_1 + Bx + g(y, z)$ , имеющее неподвижную точку (например, отображение (1) при  $(1+B-M_2)^2 + 4M_1 > 0$ ), если эту точку сдвинуть в начало координат.

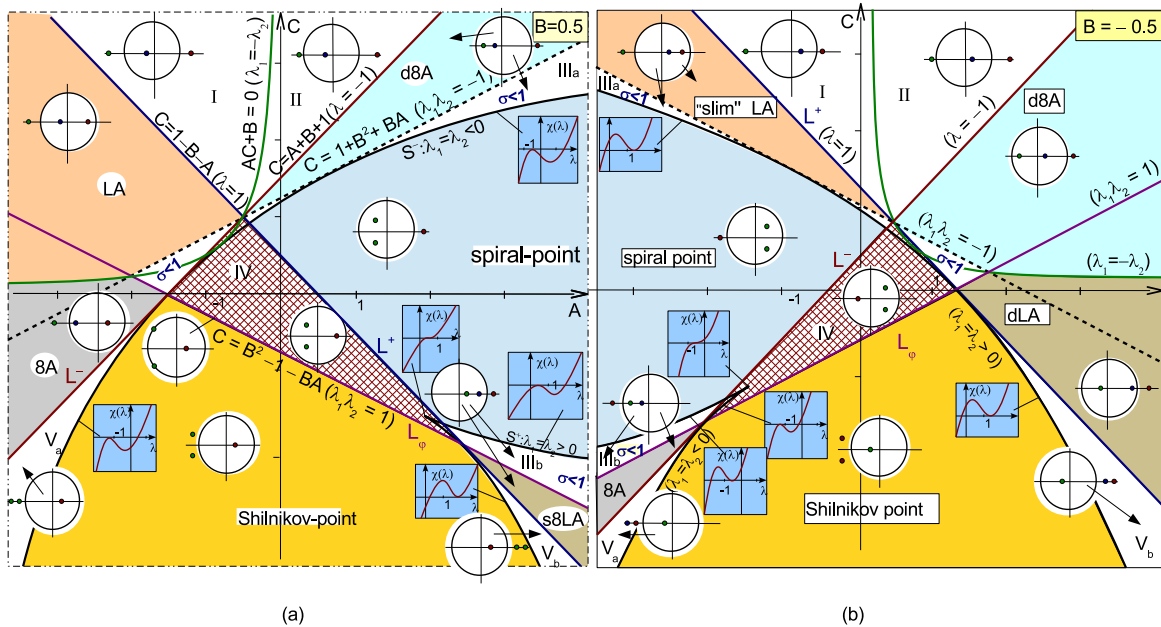
Точка  $O(0, 0, 0)$  является неподвижной для отображения (5), в которой оно имеет характеристическое уравнение вида

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \quad (6)$$

Здесь важно, что собственные значения точки  $O$  уже не зависят от нелинейностей  $f(y, z)$ , а являются функциями только параметров  $A, B$  и  $C$ . Поэтому для отображения (5) можно построить разбиение множества значений параметров на области, отвечающие разным типам расположения собственных значений точки  $O$ . Такое разбиение при фиксированном значении якобиана, т.е. в данном случае при фиксированном  $B$ , называется «*картой седел*» [50].<sup>1</sup> Отметим также, что на этой карте мы различаем также области, отвечающие  $\sigma > 1$  и  $\sigma < 1$  в случае, когда неустойчивое многообразие точки  $O$  одномерно. Примеры таких карт седел при  $B = 0.5$  и  $B = -0.5$  показаны на рисунке 16.

На этих картах выделена область IV, так называемый «треугольник устойчивости» (область  $\{C > B^2 - 1 - BA\} \cap \{C < A + B + 1\} \cap \{C < 1 - B - A\}$ ), когда неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  является асимптотически устойчивой. При всех других значениях параметров  $A$  и  $C$  (кроме бифуркационных кривых) точка  $O(0, 0, 0)$  является седловой – она имеет мультипликаторы как внутри, так и вне единичного круга (их расположение также показано на рисунке 16). Границами областей на карте седел служат 7 основных кривых.

<sup>1</sup>В случае трехмерных потоков аналогичная «карта седел» для состояний равновесия была предложена в [4] в форме таблицы, смотри там Приложение С.2.



**Рис. 16.** Пример карты седел для отображения (5) в случае (a)  $B = 0.5$  и (b)  $B = -0.5$

Это, во-первых, три бифуркационные кривые, при значениях параметров на которых у точки  $O(0, 0, 0)$  появляются мультипликаторы на единичной окружности:

- кривая  $L_+$ :  $C = 1 - B - A$  (мультипликатор  $\lambda = +1$ );
- кривая  $L_-$ :  $C = 1 + B + A$  (мультипликатор  $\lambda = -1$ );
- кривая  $L_\varphi$ :  $C = B^2 - 1 - BA$  при  $-2 < A - B < 2$  (мультипликаторы  $e^{\pm i\varphi}$ ).

Заметим, что кривая  $C = B^2 - 1 - BA$  входит в границы областей на самом деле целиком, но при  $|A - B| \geq 2$  она не является бифуркационной: здесь при  $A - B \leq -2$  точка  $M$  имеет мультипликаторы вида  $(B, -|\lambda|, -|\lambda|^{-1})$ , а при  $A - B \geq 2$  – вида  $(B, |\lambda|, |\lambda|^{-1})$ . Еще на карте седел есть 4 дополнительные кривые:

- «резонансная кривая»  $AC + B = 0$ ,  $A < 0$  (когда  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ),
- кривая « $\sigma = 1$ »  $C = 1 + B^2 + AB$  (когда  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ ),
- $S^-$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ),
- $S^+$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ).

Последние две кривые разделяют области с точками типа «узел» и «фокус», а также «седло» и «седло-фокус». Эти кривые (ещё называемые кривыми

«равных корней») задаются формулой

$$S^\pm : (\lambda_\pm)^3 - A(\lambda_\pm)^2 - C\lambda_\pm - B = 0,$$

где

$$\lambda_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 3C}}{3}$$

при  $A^2 + 3C > 0$  (т.е.  $\lambda_\pm$  – это корни уравнения  $3\lambda^2 - 2A\lambda - C = 0$ ).

Для целей нашей статьи (исследование псевдогиперболических аттракторов) наибольший интерес представляют 4 области, при значении параметров из которых, неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  отображения (5) является седловой с одномерным неустойчивым многообразием и седловой величиной  $\sigma$  большей 1. Это области **LA**, **8A**, **d8A** и **sL8A** в ориентируемом случае – смотри рисунок 16(a); а также области «slim» **LA**, **8A**, **d8A** и **dLA** в неориентируемом случае – смотри рисунок 16(b). В остальных областях, кроме «треугольника устойчивости» точка является либо седло-фокусом, либо седлом с двумерным неустойчивым многообразием, либо имеет  $\sigma < 1$ . Как мы предполагаем, если отображение имеет гомоклинический аттрактор (содержащий точку  $O$ ) при значениях параметров из этих последних областей, то он является, по нашему мнению, квазиаттрактором, смотри Замечание 1.

Использование карт седел при численных исследованиях является очень удобным вспомогательным инструментом наряду с методом ляпуновских диаграмм. Однако здесь мы также несколько модифицируем этот последний метод. Стандартно, он состоит в построении карт ляпуновских показателей, в которых разным цветом обозначаются области параметров, отвечающих разным спектрам ляпуновских показателей  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ . Мы используем, в частности, зеленый цвет (на черно-белых рисунках обозначается также цифрой «1») для устойчивых периодических режимов ( $\Lambda_1 < 0$ ); голубой (цифра «2») – для квазипериодических ( $\Lambda_1 = 0$ ); желтый (цифра «3»), когда  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0$ , красный (цифра «4»), когда  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 \sim 0$ , и синий (цифра «5»), когда  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$  – для странных аттракторов.<sup>2</sup> К этим пяти цветам мы добавили еще один – темно-серый (цифра «6») для обозначения областей с гомоклиническими аттракторами (когда численно получаемые точки на аттракторе приближаются к точке  $O$  на расстояние не меньше, чем  $10^{-4}$ ).

<sup>2</sup>Области с красным цветом,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 \sim 0$ , были специально выделены еще в работе [20], для обозначения тех областей, у которых значение  $\Lambda_2$  либо всегда колебалось в очень узких границах около нуля, либо отличалось от нуля на величину (порядка  $10^{-5}$  или  $10^{-6}$ ), сравнимую с точностью вычисления показателей. На удивление, такие области оказались весьма большими, и этот феномен (связанный, по-видимому, с тем, что отображение на аттракторе оказалось очень близким к дискретизации некоторого потока, например, с аттрактором Лоренца), обсуждался в [20].

### 3.2. Задачи к главе 3

**Задача 5.** 1) Показать, что у линейного отображения  $L$  вида

$$\bar{x} = \nu_1 x, \quad \bar{y} = \nu_2 y,$$

где  $0 < |\nu_2| < |\nu_1| < 1$ , существуют инвариантные кривые вида

$$y = Cx^\theta, \quad \text{где } \theta = \frac{\ln |\nu_2|}{\ln |\nu_1|}.$$

2) Рассмотреть случаи:

(а) отображение  $L$  ориентируемое, т.е.  $\nu_1 \nu_2 > 0$ ;

(б) отображение  $L$  неориентируемое, т.е.  $\nu_1 \nu_2 < 0$ ;

и исследовать как траектории отображения  $L$  прыгают по указанным в п.1 инвариантным кривым. На основании этого объяснить конфигурацию гомоклинических аттракторов, показанных на рисунке 15(с) и (д).

**Задача 6.** Рассмотрим линейное отображения  $L$  вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \rho(\cos \phi \cdot x - \sin \phi \cdot y), \\ \bar{y} &= \rho(\sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y), \end{aligned}$$

где  $0 < \rho < 1$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  и  $\phi \neq \pi$ .

1) Показать, что в полярных координатах  $(r, \alpha)$  отображение  $L$  может быть представлено в виде

$$\bar{r} = \rho \cdot r, \quad \bar{\alpha} = \alpha + \phi,$$

т.е. это отображение представляет собой поворот на угол  $\phi$  с одновременным сжатием расстояния от точки  $r = 0$  с коэффициентом  $\rho$ . 2) Показать, что у отображения  $L$  в полярных координатах существуют инвариантные кривые (логарифмические спирали) вида  $r = Ce^{b\alpha}$ , где  $b = \frac{1}{\phi} \ln \rho$  и  $C > 0$  – произвольная константа.

Решение. 1) В комплексных координатах  $z = x + iy, z^* = x - iy$  отображение  $L$  записывается в виде  $\bar{z} = \rho e^{i\phi} z$  или, что эквивалентно  $\bar{z}^* = \rho e^{-i\phi} z^*$  (проверить!). Тогда имеем  $\bar{z}\bar{z}^* = \bar{r}^2 = \rho^2 z z^* = \rho^2 r^2$  или  $\bar{r} = \rho \cdot r$ . Так как  $z = r e^{i\alpha}$ , то соотношение  $\bar{z} = \rho e^{i\phi} z$  можно переписать как  $\bar{r} e^{i\bar{\alpha}} = \rho e^{i\phi} r e^{i\alpha}$ . Так как  $\bar{r} = \rho \cdot r$  отсюда получаем  $e^{i\bar{\alpha}} = e^{i\phi + i\alpha}$  или  $\bar{\alpha} = \alpha + \phi$ .

2) Рассмотрим кривую  $r = Ce^{b\alpha}$ . Ее образ относительно  $L$  – это кривая вида

$$\bar{r} = \rho C e^{b\alpha} = \rho C e^{b(\bar{\alpha} - \phi)} = C \rho e^{-b\phi} e^{b\bar{\alpha}}.$$

Инвариантность означает, что  $\rho e^{-b\phi} = 1$ . Откуда  $b = \frac{1}{\phi} \ln \rho$ .

В этом случае инвариантную кривую можно записать также в таком виде

$$r = C e^{\frac{\alpha}{\phi} \ln \rho} = C \rho^{\frac{\alpha}{\phi}}.$$



**Задача 7.** Для трехмерного обобщенного отображения Эно вида (5) вывести уравнения бифуркационных поверхностей в пространстве параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , отвечающих появлению у неподвижной точки  $O(0, 0, 0)$  мультипликаторов на единичной окружности. Рассмотреть случаи, когда у точки  $O(0, 0, 0)$  появляются

- (а) мультипликатор  $\lambda = +1$  (поверхность  $L_+$ );
- (б) мультипликатор  $\lambda = -1$  (поверхность  $L_-$ );
- (в) мультипликаторы  $e^{\pm i\varphi}$  (поверхность  $L_\varphi$ ).

**Задача 8.** Для трехмерного обобщенного отображения Эно вида (5) построить карты седел в следующих случаях

- (а)  $B = 0$ ;
- (б)  $B = +1$ ;
- (в)  $B = -1$ .

Сравнить полученные карты с картами рисунка 16.

## 4. Примеры странных аттракторов в обобщенных отображениях Эно

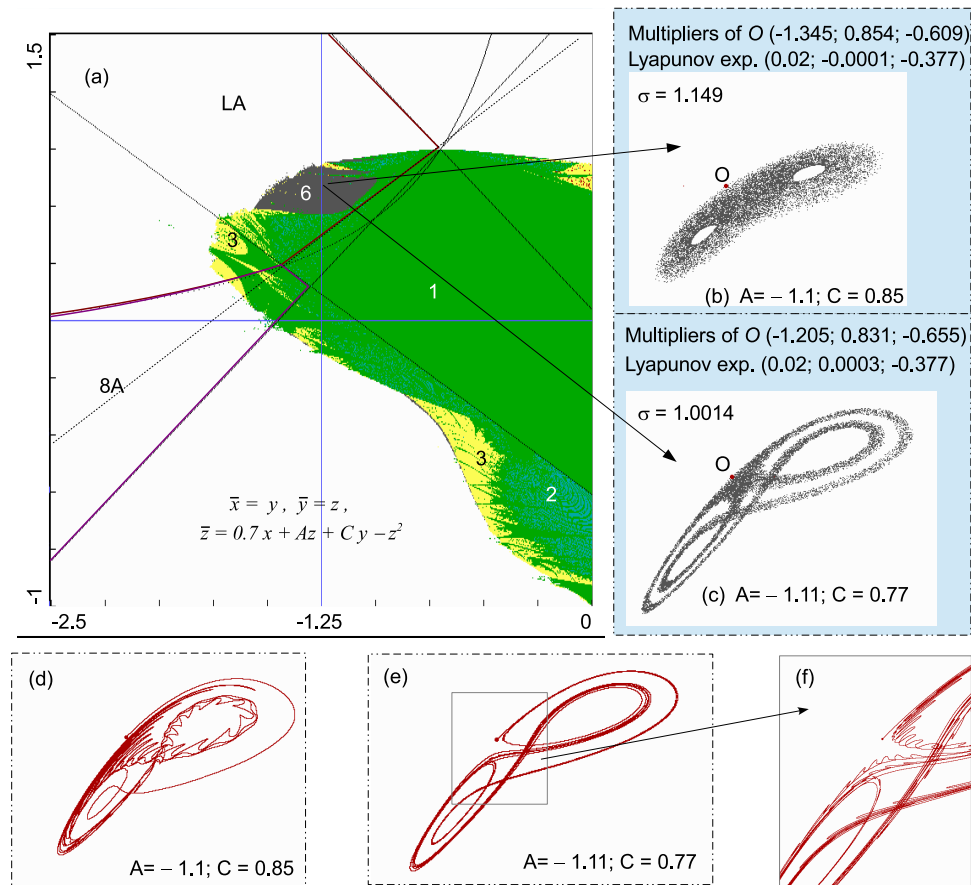
В этом параграфе мы проиллюстрируем как можно эффективно использовать «карту седел», такую как на рисунке 16, для поиска гомоклинических аттракторов различных типов в обобщенных отображениях Эно вида (5).

Заметим, что существует много различных способов исследования хаотической динамики в конкретных моделях. Один из регулярных и разумных подходов к этой проблеме связаны с построением карт динамических режимов и/или диаграмм показателей Ляпунова. Именно таким способом (с привлечением диаграмм ляпуновских показателей) в работе [20] были найдены дискретные аттракторы Лоренца в трехмерном отображении Эно вида (1), показанные на рисунке 3. Теперь мы можем найти такой аттрактор, как говорится, «целенаправленно», используя наш подход. Для этого рассмотрим отображение (1) в «приведенном» виде

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - z^2, \quad (7)$$

и возьмем фактически готовую для него карту седел такую, как на рисунке 16(а), но построенную при нужном фиксированном  $B$ , в данном случае при  $B = 0.7$ . Далее, на фоне этой карты строим численно диаграмму показателей Ляпунова. В результате, получим такую картину, как на рисунке 17, где, в частности, область «темно-серого» хаоса пересекается с областью **LA**. Это говорит о том, что здесь при соответствующих значениях параметров  $A$  и  $C$  может наблюдаться дискретный аттрактор Лоренца. Результаты численного счета, показанные на рисунке 17 из [50], подтверждают это.

Очевидно, в случае отображения (5) вид карты седел не зависит от его нелинейных членов. В то же время, ляпуновская диаграмма как раз и определяется этими членами. На современных компьютерах построение диаграмм ляпуновских показателей, в особенности в случае отображений, не занимает много времени (а карта седел для отображения (5) строится мгновенно), в особенности, на «поисковом этапе». Кроме того, как показывает наш опыт, при изменении нелинейностей можно увидеть определенные тенденции, в частности, в изменении места расположения «темно-серого пятна» (когда аттрактор гомоклинический), и при желании его можно «загнать» внутрь любой из областей карты седел (кроме «треугольника устойчивости»), и со-

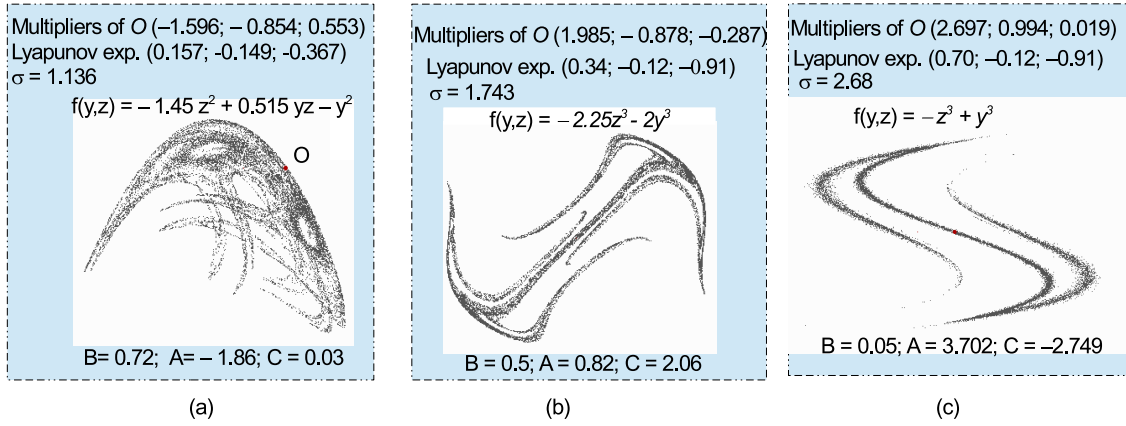


**Рис. 17.** Результаты численного исследования обобщённого отображения Эно: (a) Диаграмма показателей Ляпунова на фоне «карты седел» на плоскости параметров  $A$  и  $C$  для отображения (7) при  $B = 0.7$ ; (b) и (c) фазовые портреты (примерно  $10^4$  итераций одной точки) аттракторов; (d) и (e) численно построенная одна из неустойчивых сепаратрис точки  $O$  (другая сепаратриса будет выглядеть симметрично, т.к.  $\lambda_1 < -1$ ), присутствие характерных «колябушек» на сепаратрисе свидетельствует о том, что аттрактор является диким гиперболическим, т.е. содержит гомоклинические касания; f) увеличение рисунка (e)

ответственно обнаружить интересующий нас аттрактор. На этом пути, в работе [50] были найдены разнообразные гомоклинические аттракторы отображения (5), некоторые из них (для значений параметров  $A$  и  $C$  из областей **LA**, **8A**, **d8A** и **sL8A**), когда выполняется необходимое условие (2), были предъявлены в качестве кандидатов в псевдогиперболические аттракторы. Примеры таких аттракторов показаны на рисунке 18.

#### 4.1. Примеры псевдогиперболических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

Естественно ожидать, что и в случае *неориентируемых* трехмерных отображений (диффеоморфизмов) могут реализовываться сценарии возникновения странных аттракторов аналогичные, например, тем, которые показаны



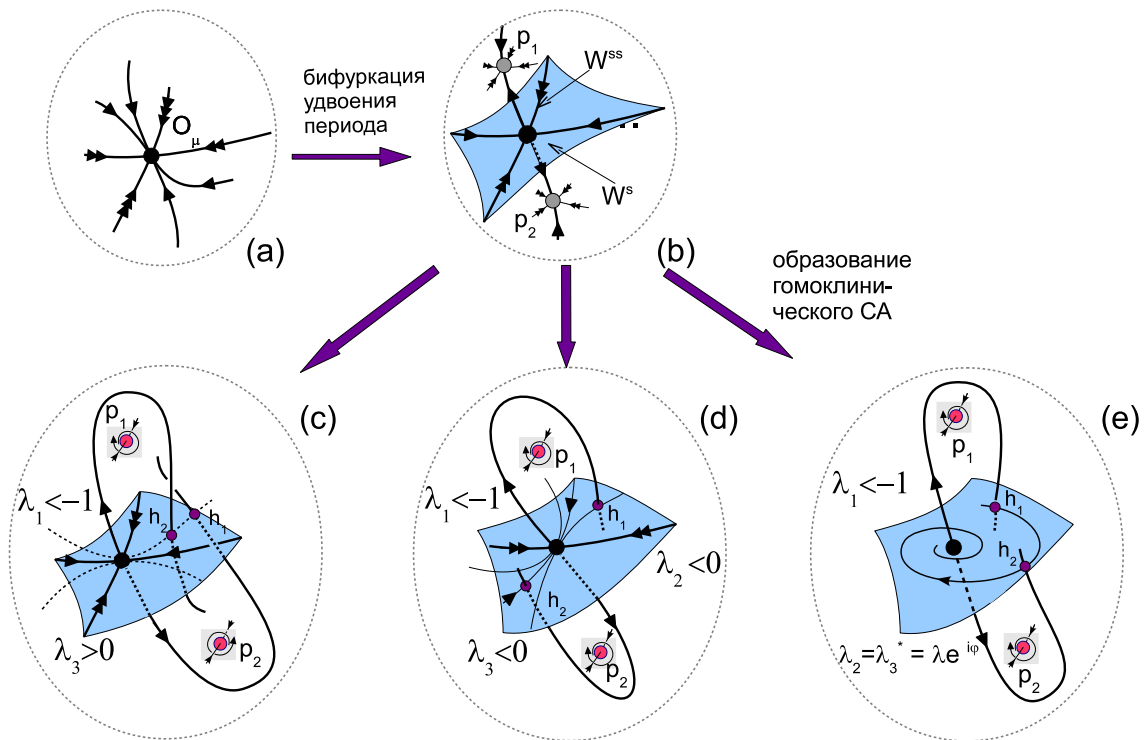
**Рис. 18.** Примеры дискретных гомоклинических аттракторов соответствующих обобщенных отображений Эно: (а) восьмерочный аттрактор (из области **8A**); (б) двойной восьмерочный аттрактор (из области **d8A**); (с) супервосьмерочный аттрактор (из области **sL8A**)

на рисунке 15. Однако, в силу неориентируемости отображений, как показано в работе [53], все они имеют свою специфику.

На рисунке 19 схематически изображены 3 таких сценария, которые могут быть реализованы в однопараметрических семействах. Эти сценарии очень похожи на то, что происходит в ориентируемом случае: все они начинаются с устойчивой неподвижной точки  $O$ , с которой затем происходит бифуркацию удвоения периода, и точка  $O$  становится седловой с одним неустойчивым мультипликатором  $\lambda_1 < -1$  и т.д. Отличие состоит в том, что отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  является ориентируемым, и здесь у  $f|_{W^s}$  точка  $O$  является либо узлом-плюс ( $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ), либо узлом-минус ( $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ), либо фокусом ( $\lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, 0 < \rho < 1$ ). Поэтому и конфигурация получаемых гомоклинических аттракторов становится другой (в этой связи смотри задачи 5, 2а и 2б, а также 6). Будем называть такие дискретные неориентируемые аттракторы соответственно как «тонкий лоренцевский», «восьмерочный» и «спиральный». Первые два могут быть, в принципе, псевдогиперболическими, последний – всегда квазиаттрактор.

**Замечание 7.** Неориентируемый восьмерочный аттрактор очень похож на ориентируемый, сравните рисунки 19(d) и 15(d). «Тонкий лоренцевский» аттрактор не совсем похож на его ориентируемый аналог, сравните рисунки 19(с) и 15(с). Это связано с тем, что в случае «тонкого» аттрактора гомоклиническая точка  $h_1$  на  $W_{loc}^s(O)$  и все её дальнейшие итерации лежат на одной и той же инвариантной кривой  $\ell$ , входящей в  $O$  (отсюда – термин «тонкий»), а у ориентируемого аттрактора итерации точки  $h_1$  лежат поочередно на двух разных кривых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , сходящихся в  $O$ , касаясь друг друга.

Эти аттракторы были найдены в [53] у неориентируемых трехмерных отображений Эно вида (5) при  $B < 0$ . Для таких отображений также может быть построена карта седел, такая как на рисунке 16(b), и модифицированная диаграмма ляпуновских показателей. Тогда, используя тот факт, что

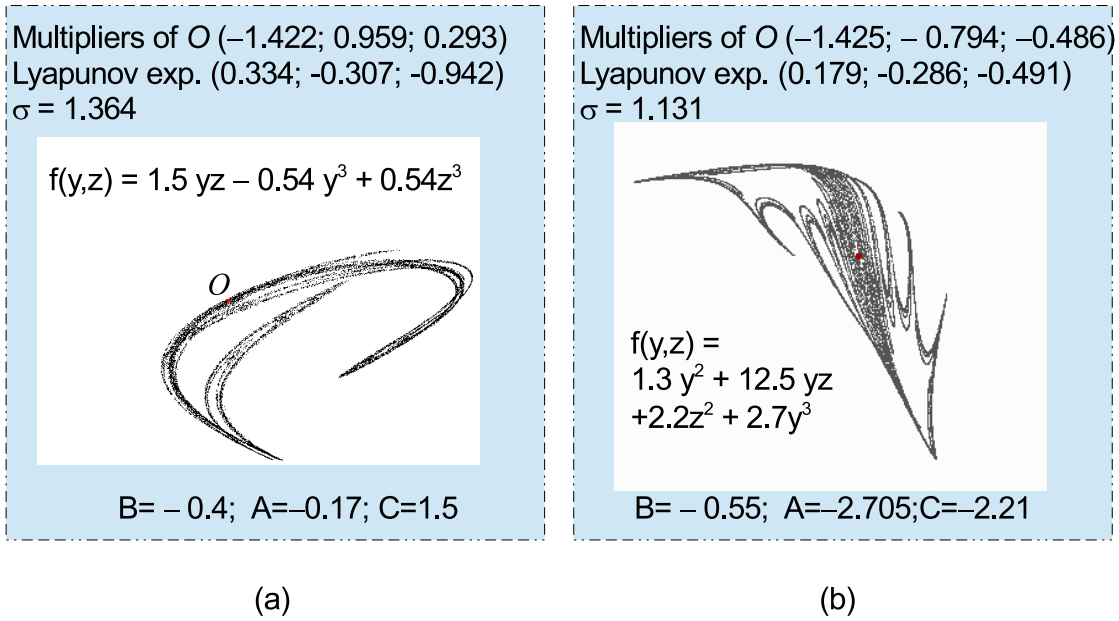


**Рис. 19.** Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: «тонкого» аттрактора Лоренца (путь (a)⇒(b)⇒(c)); восьмерочного аттрактора (путь (a)⇒(b)⇒(d)); спирального аттрактора (путь (a)⇒(b)⇒(e)). Здесь показаны точки  $h_1$  и  $h_2$ , принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что  $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$  и  $h_2 = f(h_1)$ . Эти точки расположены с одной стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в лоренцевском случае (c), по разные стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в случае восьмерочного аттрактора (d), и гомоклинические точки лежат в  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  на спирали, закручивающейся вокруг  $O_\mu$ , в случае спирального аттрактора (e)

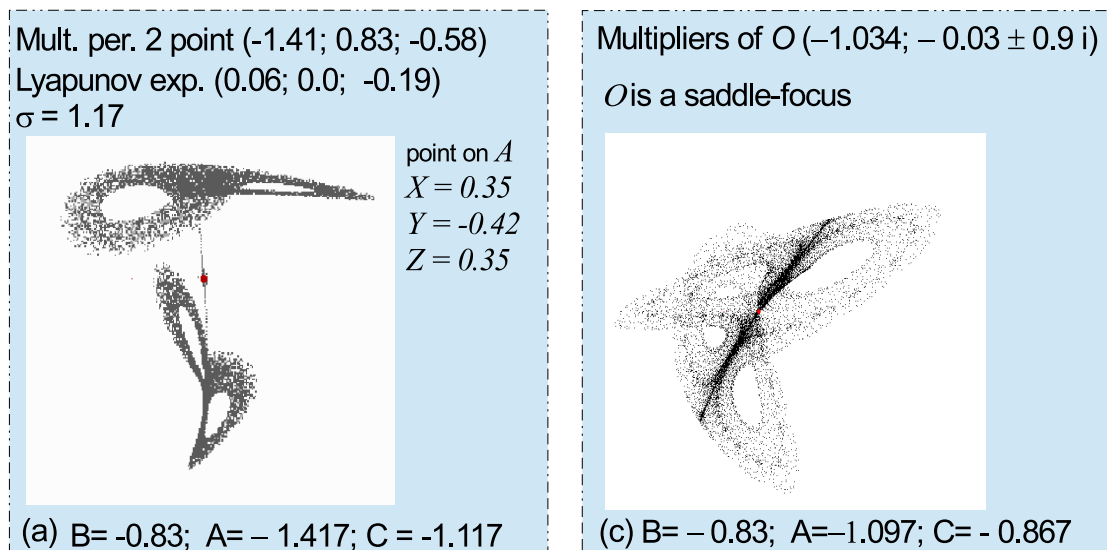
тонкий лоренцевский аттрактор может существовать при значениях параметров  $A$  и  $C$  из области «slim» **LA** а неориентируемый восьмерочный – из области **8A**, можно уже целенаправленно найти такие аттракторы. Примеры тонкого лоренцевского и восьмерочного аттракторов показаны на рисунке 20.

Что весьма интересно, у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два. Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно  $f^2$ . Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца и восьмерочного в случае отображения (7) показаны на рисунках 21(a) и (b) соответственно.

В принципе, эти аттракторы возникают «внутри» неориентируемого сценария (рис. 19), но по ориентируемому сценарию (рис. 15) для отображения  $f^2$ , у которого каждая точка цикла периода 2 является неподвижной. По-



**Рис. 20.** Примеры неориентируемых гомоклинических аттракторов соответствующих отображений Эно: (a) тонкий лоренцевский аттрактор; (b) восьмерочный аттрактор (у этого аттрактора  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -0.107 < 0$ , поэтому он – квазиаттрактор)



**Рис. 21.** Примеры странных аттракторов в неориентируемом отображении (7): (a) дискретный аттрактор Лоренца периода 2; (b) дискретный спирально-лоренцевский аттрактор

нятно, что момент возникновения аттракторов периода 2 рисунка 21 – это некоторый промежуточный этап сценария образования гомоклинического аттрактора с неподвижной точкой  $O$ . Одна из таких финальных стадий этого сценария показана на рисунке 21(b), на котором изображен «четырёхглазый» аттрактор, возникающий при слиянии аттрактора Лоренца периода 2 с неподвижной точкой  $O$  типа седло-фокус. Кажется, что ориентируемость отображения не является необходимым условием для возникновения таких

аттракторов. Кроме того, интересным является вопрос о существовании таких аттракторов с неподвижной точкой типа седло, которые могли бы дать примеры дискретных псевдогиперболических аттракторов новых типов.

## 5. К определению псевдогиперболичности отображений

Рассмотрим диффеоморфизм  $f$ , определенный в  $\mathbb{R}^m$ , и пусть  $Df$  – это его дифференциал.<sup>1</sup> Открытая область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  называется *поглощающей областью* диффеоморфизма  $f$ , если  $f(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$ .

**Определение 1.** Диффеоморфизм  $f$  называется *псевдогиперболическим* на  $\mathcal{D}$ , если выполняются следующие условия.

- 1) У каждой точки из  $\mathcal{D}$  существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , которые имеют дополнительные размерности ( $\dim N_1 = k \geq 1, \dim N_2 = m - k \geq 2$ ), непрерывно зависят от точки, инвариантны относительно  $Df$ , то есть

$$Df(N_1(x)) = N_1(f(x)), \quad Df(N_2(x)) = N_2(f(x)),$$

и такие, что у каждой траектории  $L : \{x_i \mid x_{i+1} = f(x_i), i = 0, 1, \dots; x_0 \in \mathcal{D}\}$  максимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_1$ , строго меньше, чем минимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_2$ , т.е. выполняется такое неравенство:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \sup_{\substack{u \in N_1(x_0) \\ \|u\| = 1}} \|Df^n(x_0)u\| \right) < \\ < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \inf_{\substack{v \in N_2(x_0) \\ \|v\| = 1}} \|Df^n(x_0)v\| \right), \end{aligned} \tag{8}$$

где  $Df^n$  – матрица размера  $m \times m$ , определяемая соотношением

$$Df^n = Df_{x_{n-1}} \cdot \dots \cdot Df_{x_1} \cdot Df_{x_0},$$

$a \limsup_{n \rightarrow \infty}$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  – соответственно верхний и нижний пределы.

---

<sup>1</sup>Напомним, что дифференциал в точке  $x_0$  отображения  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – это линейный оператор  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ , переводящий вектор  $\ell_{x_0}$  в точке  $x_0$  в вектор  $\ell_{x_1} = A\ell_{x_0}$  в точке  $x_1 = f(x_0)$ .



2) Диффеоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_1$  является равномерно сжимающим, т.е. существуют такие константы  $\lambda > 0$  и  $C_1 > 0$ , что

$$\|Df^n(N_1)\| \leq C_1 e^{-\lambda n}. \quad (9)$$

3) Диффеоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_2$  растягивает экспоненциально  $(m - k)$ -мерные объемы, т.е. существуют такие константы  $\sigma > 0$  и  $C_2 > 0$ , что<sup>2</sup>

$$|\det Df^n(N_2)| \geq C_2 e^{\sigma n}. \quad (10)$$

Из определения 1 немедленно вытекает, что :

1\* все траектории в  $\mathcal{D}$  неустойчивы: каждая траектория имеет положительный максимальный ляпуновский показатель

$$\Lambda_{max}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x)\| > 0.$$

Заметим, что условия псевдогиперболичности означают, что на  $(m - k)$ -мерных подпространствах  $N_2$  растягиваются  $(m - k)$ -мерные объемы. Это не запрещает, что на  $N_2$  могут быть и сжимающие направления, но сжатие вдоль них должно быть равномерно не таким сильным как любое сжатие в  $N_1$ . Поэтому условия псевдогиперболичности являются более слабыми, чем условия равномерной гиперболичности, которые означают, что  $\|Df^{-n}(N_2)\| < C e^{-\sigma n}$ , т.е. равномерное растяжение должно иметь место по всем направлениям в  $N_2$ . Тем не менее, также как и в случае гиперболических систем, здесь стандартно доказывается, [16], следующий результат.

2\* Условия псевдогиперболичности сохраняются при всех достаточно малых  $C^r$ -возмущениях системы. Более того, пространства  $N_1$  и  $N_2$  меняются при этом непрерывно.

Из утверждения 1\* вытекает, что если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, и он не содержит устойчивых периодических траекторий, которые, как следует из условия 2\*, не появляются также при малых гладких возмущениях. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

---

<sup>2</sup>Если  $\dim N_2 = 1$ , то получается обычное определение равномерной гиперболичности, поэтому мы требуем в определении, что  $\dim N_2 \geq 2$ .

# Литература

- [1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [2] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы-3 / Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 3, ВИНТИ, М., 1985. С. 5-290.
- [3] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics. World Scientific. Part 1, 1998. 412 с. [Русский перевод – Шильников А.Л., Шильников Л.П., Тураев Д.В., Чуа Л., Методы качественной теории в нелинейной динамике. Институт компьютерных исследований. Часть 1, 2004. 416 с.]
- [4] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics. World Scientific. Part 2, 2001. 577 с. [Русский перевод – Шильников А.Л., Шильников Л.П., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Институт компьютерных исследований. Часть 2, 2009. 546 с.]
- [5] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 516 с.
- [6] Кузнецов С.П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
- [7] Шильников Л.П. Избранные научные труды /Под ред. В.С. Афраймовича и др. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2017. 431 с.
- [8] Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды МИАН, 2017, т. 297. С. 133-157.
- [9] Гонченко С.В., Лэмб Й.С.В., Риос И., Тураев Д.В. Аттракторы и репеллеры в окрестности эллиптических точек обратимых систем // Доклады РАН, 2014, т. 454, №4. С. 375-378.

- [10] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН, 1997, т. 216. С. 76–125.
- [11] Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph. Boston, Pitmen. 1983.
- [12] Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность / Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1983. С. 3-26.
- [13] Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys., 1976, v. 50. Pp. 69-77.
- [14] Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Henon map // Ann. Math., 1991, v. 133. Pp. 73-169.
- [15] Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // Nonlinearity, 2013, v. 26, №3. Pp. 621-678.
- [16] Тураев Д.В., Шильников Л.П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сборник, 1998, т. 189, №2. С. 137-160.
- [17] Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 1979, v. 50. Pp. 101-151.
- [18] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. Росс. Акад. Наук, 1993, т.330, №2. С. 144-147.
- [19] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. // Nonlinearity, 2008, v. 21(5). Pp. 923-972.
- [20] Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int.J. Bifurcation and Chaos, 2005, v.15. Pp. 3493-3508.

- [21] Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу / Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986. С. 180-183.
- [22] Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics, 1999, v. 328, №12. Pp. 1197-1202.
- [23] Ovsyannikov I.I., Turaev D. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model // Nonlinearity, 2017, v. 30. Pp. 115-137.
- [24] Тураев Д.В., Шильников Л.П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады Академии Наук, 2008, т. 418(1). С. 23-27.
- [25] Tatjer J.C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies // Ergodic Theory Dynam. Systems, 2001, v. 21. Pp. 249–302.
- [26] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР, 1977, т. 234, 2. С. 336-339.
- [27] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО, 1982, т. 44. С. 150-212.
- [28] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. Дополнение I к книге: Марсден Дж., Мак- Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
- [29] Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences, 1963, v. 20. P. 130-141 [Перевод на русский язык: Лоренц Эдвард Н. Детерминированное непериодическое течение – в кн. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88-116]
- [30] Странные аттракторы // Ред. Синай Я.Г., Шильников Л.П. М.: Мир, 1981. 256 с.
- [31] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys., 1971, v. 20. P. 167-192.
- [32] Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // ДАН СССР, 1974, т. 219, вып. 6. С. 1281-1284.

- [33] Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических траекторий из особых траекторий // Матем. сб., 1963, т. 61(103), вып. 4. С. 443-466.
- [34] Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло // Матем. сб., 1968, т. 77(119), вып. 3. С. 461-472.
- [35] Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа // Матем. сборник., 1967, т. 74(116), вып. 3. С. 378-397.
- [36] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // Матем. сборник, Ч. 1, 1972, т. 88(130), №4. С. 475-492; Матем. сборник, Ч. 2, 1973, т.90(132), №1. С. 139-156.
- [37] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // УМН, 1981, т. 36, вып. 4.
- [38] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors // Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3. Pp. 1123-1139.
- [39] Быков В.В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом / Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1978. С. 3-32.
- [40] Быков В.В. О бифуркациях динамических систем, близких к системе с сепаратрисным контуром, содержащим седло-фокус / Методы Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1980. С. 44-72.
- [41] Быков В.В., Шильников А.Л. О границах области существования аттрактора Лоренца / Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1989. С. 151-159.
- [42] Barrio R., Shilnikov A., Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012, т. 22, №4. P. 1230016.
- [43] Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Ovsyannikov I.I., Turaev D.V. Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps // Math. Model. Nat. Phenom., 2013, v. 8, №5. Pp. 32-54.

- [44] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная Динамика*, 2012, т. 8, вып. 1. С. 3-28.
- [45] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса. Proc. of Int.Conf. Dedicated to 90th Anniversary of L.S.Pontryagin, v.6 (Dynamical systems) [в кн. Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры, т.67, 1999. С. 69-128.]
- [46] Gonchenko S., Ovsyannikov I., Tatjer J.C. Birth of Discrete Lorenz Attractors at the Bifurcations of 3D Maps with Homoclinic Tangencies to Saddle Points // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014, v. 19, №4. P. 495-505.
- [47] Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А. , Сафонов А.В. , Солодов В.В. , Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В. Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы - 9 // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, т. 66, ВИНТИ, 1991. С. 5-242
- [48] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D.V. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos*, 2014, v. 24(8). P. 1440005
- [49] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность - I / *Методы качественной теории и теории бифуркаций*. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986. С. 150-163.
- [50] Gonchenko A., Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // *Physica D*, 2016, v. 337. P. 43-57.
- [51] Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, v. 15, №5. Pp. 521-538.
- [52] Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // *Comm. Math. Phys.*, 1981, v. 82. Pp. 137-151.
- [53] Гонченко А.С., Козлов А.Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях // *Журнал Средневолжского математического общества*, 2016, т. 18, №4. С. 17-29.

# Приложение А

## ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ И МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Л.П ШИЛЬНИКОВ\*

В последнее время широкое внимание специалистов различных направлений привлечено к системе уравнений

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (1)$$

получившей название модели Лоренца. Система (1) была выведена [29,21] из уравнений Навье-Стокса в задаче о тепловой конвекции, поэтому параметры  $r$ ,  $\sigma$ ,  $b$  имеют вполне определенный гидродинамический смысл:  $r$  – число Рэлея,  $\sigma$  – число Прандтля, а  $b$  характеризует размеры системы. В этой системе Лоренцем [21] с помощью ЭВМ при  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  было обнаружено сложное хаотическое поведение траекторий, которое указывало на возможность существования принципиально новых установившихся режимов – стохастических колебаний, отличных от автоколебаний и биений. А такого рода движения представляют повышенный интерес в связи с объяснением явления турбулентности.

Конечно, имеются и другие динамические модели, в которых отмечалось сложное поведение траекторий<sup>1</sup>. Однако они не вызывали столь большого обсуждения либо по причине своей узкой направленности, либо из-за того, что сложные эффекты обнаруживались в нефизической области параметров, либо обнаруживалась чрезмерная чувствительность притягивающего множества к сдвигам параметров, сопровождающимся появлением и исчезновением устойчивых периодических движений<sup>2</sup>. Одну из таких систем мы все же упомянем – это часы. Как известно, часы – вполне «динамичная» система, работающая либо в режиме автоколебаний (часы Галилея-Гюйгенса), либо в режиме синхронизации. Здесь среди многих моделей современных часов, предложенных Н. Н. Баутиным, одна из них [8] (после дополнительного учета самоиндукции) заслуживает особого внимания: как следует из ее

---

\*Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. / В книге Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Москва: Мир, 1980. С. 317-336.

<sup>1</sup>Так к (1) сводятся модели лазеров [31,6], а также модель дискового динамо [28].

<sup>2</sup>Возникающие в таких системах математические вопросы отчасти отражены в работах [4, 5, 7, 10, 11, 13-15, 19, 20, 22, 23, 34, 35, 37-39].

анализа, проведенного Л. А. Комразом [18], при значениях параметров из некоторой области часы будут иметь «стохастический ход» (правда, неизвестно, имеют ли такие часы какие-либо преимущества перед обычными).

Поскольку математическим образом стохастических колебаний не могут быть устойчивые периодические и квазипериодические движения, то естественно возникает вопрос: что же может им быть? Надо сказать, что специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений хорошо известны примеры притягивающих грубых предельных множеств;  $Y$ -подмногообразия [2], соленоиды Смейла-Вильямса [30, 32], соленоиды Плыкина [24] и т.д. С легкой руки Рюэля и Такенса [26] множества, устойчивость которых сочетается с неустойчивостью каждой индивидуальной траектории, получили название «странных» аттракторов. Однако возможность появления грубых странных аттракторов в простых модельных системах остается пока проблематичной. Поэтому естественно возникают вопросы: может ли быть в модели Лоренца странный аттрактор? И если да, то как он возникает и какова его структура?

Ответы на поставленные вопросы были даны в [6]. Ниже кратко приводятся полученные здесь результаты.

Картину эволюции структуры разбиения фазового пространства на траектории системы (1) будем описывать при изменении  $r$  от 10 до 28, положив  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ .<sup>3</sup> Ее удобно представить состоящей из следующих этапов:

1. При  $r \in [10, r_1]$ , где  $r_1 = 13.92$ , система имеет три состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$ ,  $O_1$  и  $O_2$ , из которых  $O$  является седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие  $W^s$  и две выходящие траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые будем называть сепаратрисами. Одна из них, для определенности  $\Gamma_1$ , стремится к устойчивому состоянию равновесия  $O_1$ , а другая  $\Gamma_2$  – к  $O_2$  (рис. 1,а).

2. При  $r = r_1$  каждая из сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  становится двоякоасимптотической к седлу  $O$  (рис. 1,б)<sup>4</sup>. При переходе  $r$  через  $r_1$  из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому периодическому движению  $L_1$  и  $L_2$ . Более того, вместе с рождением  $L_1$  и  $L_2$  появляется инвариантное предельное множество  $\Omega_1$ , траектории которого находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны последовательностей из двух символов, при этом периодическим последовательностям соответствуют периодические движения седлового типа. Однако это множество не является притягивающим, и, следовательно, устойчивыми предельными множествами остаются  $O_1$  и  $O_2$ . Такая ситуация будет иметь место для  $r \in [r_1, r_2]$ , где

<sup>3</sup>В [6] был рассмотрен и другой путь:  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ ,  $1 \leq \sigma \leq 10$

<sup>4</sup>Система (1) инвариантна относительно замены  $(-x, -y, z) \rightarrow (x, y, z)$ .



$r_2 \simeq 24.06$ , только теперь  $\Gamma_1$  будет стремиться к  $O_2$ , а  $\Gamma_2$  – к  $O_1$  (рис. 1, в).

3. Момент  $r = r_2$  является бифуркационным. Он характерен тем, что если раньше  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  шли в устойчивые фокусы  $O_2$  и  $O_1$ , то при  $r = r_2$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будут стремиться к седловым периодическим движениям  $L_2$  и  $L_1$  соответственно (рис. 1, г). Это приводит к тому, что на месте  $\Omega_1$  возникает уже двумерное предельное множество  $\Omega'_2$ .

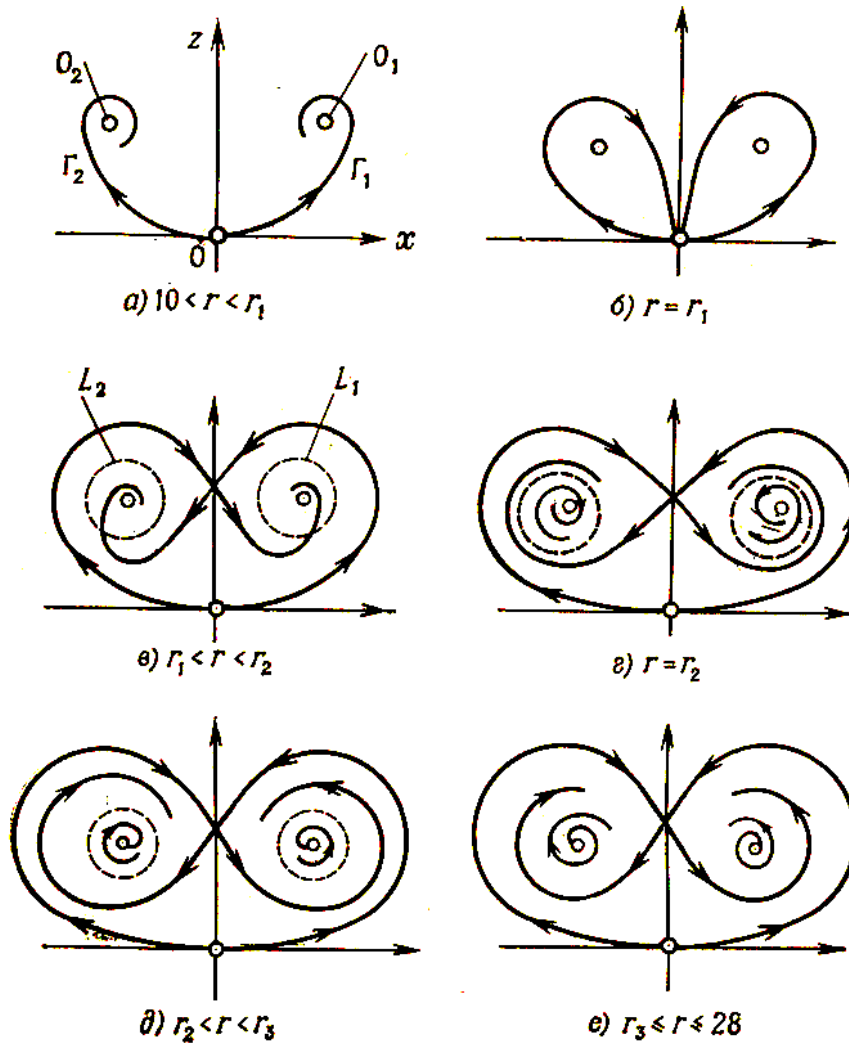


Рис. 1

4. При  $r \in (r_2, 28]$  система будет иметь устойчивое предельное множество  $\Omega_2$ , обладающее свойствами:

1)  $\Omega_2$  является негрубым: это связано, в частности, с тем, что седло  $O$  принадлежит  $\Omega_2$  вместе со своими сепаратрисами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .<sup>5</sup>

2) Периодические движения всюду плотны в  $\Omega_2$  и являются грубыми, седлового типа.

<sup>5</sup>На то, что в (1) аттрактор может быть негиперболическим, обратил внимание Рюэль [27]

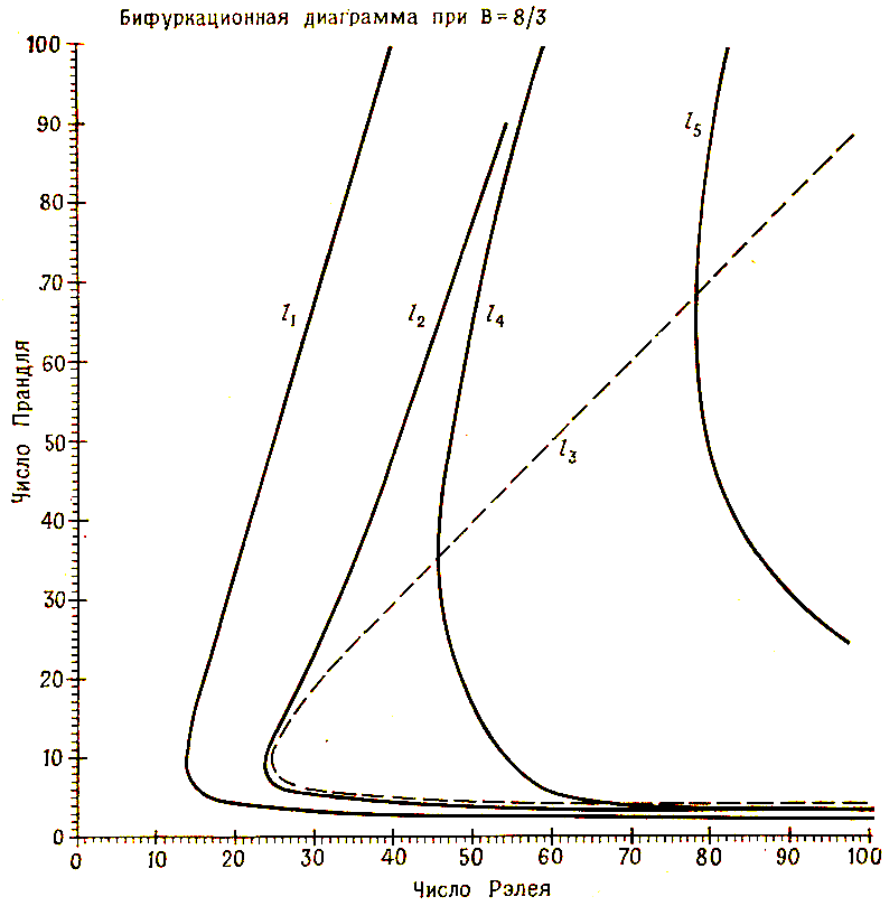


Рис. 2

3) В  $\Omega_2$  имеет место экспоненциальное разбегание траекторий, столь характерное для систем с перемешиванием и непрерывным спектром<sup>6</sup>.

4) Исчезновение периодических движений при изменении  $r$  возможно только путем влипания их в петли сепаратрис седла  $O$ .

5) В интервале  $(r_2, r_3)$ , где  $r_3 \simeq 24.74$ , в фазовом пространстве будут существовать три устойчивых аттрактора:  $\Omega_2$ , который будем называть аттрактором Лоренца, и состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 1. д). Границей области притяжения аттрактора Лоренца являются устойчивые многообразия периодических движений  $L_1$  и  $L_2$ .

6) При  $r \rightarrow r_3$  периодические движения  $L_1$  и  $L_2$  стягиваются к состояниям равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , которые при  $r = r_3$  теряют устойчивость, что приводит к жесткому режиму возникновения стохастичности.

7) При  $r \in (r_3, 28]$  единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца (рис. 1. е).

Поскольку  $r = r_2$  является границей интервала устойчивости  $\Omega_2$ , то при  $r \leq r_2$  изображающая точка покидает окрестность  $\Omega_2$ . Новым установив-

<sup>6</sup>Метрические свойства аттрактора Лоренца изучались Л. А. Бунимовичем и Я. Г. Синаем [12].

шимся режимом будет либо  $O_1$ , либо  $O_2$ . Таким образом, получаем, что  $r = r_2$  является точкой динамически неопределенной опасной границы [9] области устойчивости аттрактора Лоренца.

Отметим, что эта последовательность бифуркаций с теми же численными значениями бифуркационных параметров была указана также Йорком и Капланом [16].

На рис. 2 приведен ряд бифуркационных кривых системы (1) в прямоугольнике:  $0 \leq r \leq 100$ ,  $0 \leq \sigma \leq 100$  при  $b = 8/3$ .<sup>7</sup> На нем отсутствует кривая  $l_0 : r = 1$ , переход через которую соответствует появлению из  $O$  двух устойчивых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . Кривые  $l_1, l_4, l_5$  соответствуют существованию у системы (1) петель сепаратрис седла  $O$ . Качественный вид петли  $\bar{\Gamma}_1$  в проекции на плоскость  $xz$  в случае  $l_1$  изображен на рис. 1,б, в случае  $l_4$  – на рис. 3,а, а в случае  $l_5$  – на рис. 3,б. Из нее при переходе че-

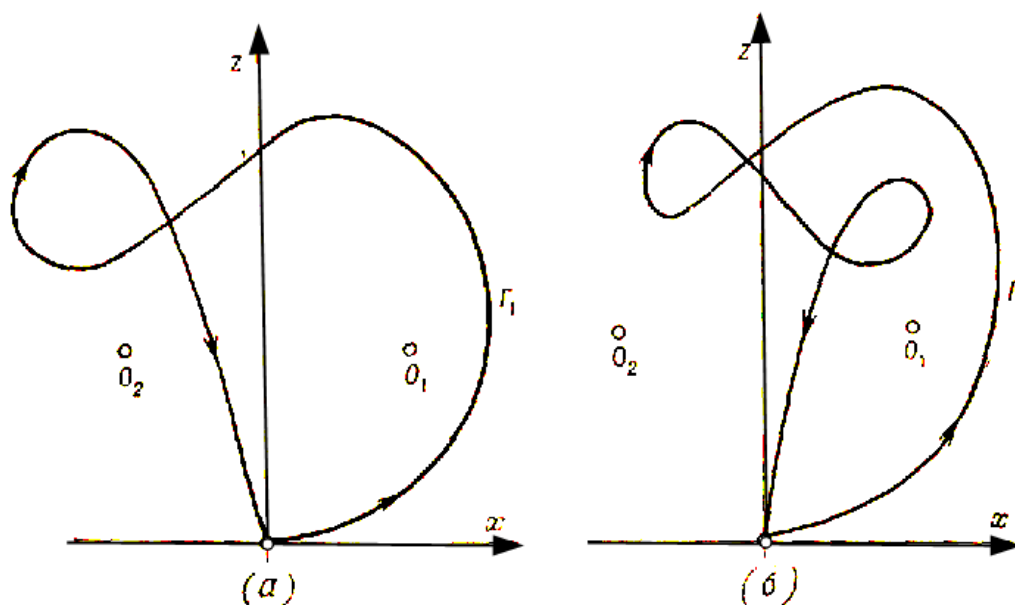


Рис. 3

рез  $l_i$ ,  $i = 1, 4, 5$  будет рождаться периодическое движение седлового типа, инвариантные многообразия которого будут цилиндрами в случае  $l_1$  и  $l_5$  и листами Мёбиуса в случае  $l_4$ . Кривая  $l_2$  соответствует тому моменту, когда  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия родившихся периодических движений (рис. 1. г)). При переходе через  $l_2$  и возникает аттрактор Лоренца<sup>8</sup>. Кривая  $l_3$  хорошо известна:  $r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$ . На ней  $O_1$  и  $O_2$  теряют устойчивость. В последнее время Н. В. Рощиным [25] доказано,

<sup>7</sup>Кривые  $l_1$  и  $l_2$  авторами [6] были указаны на школе по нелинейным задачам гидродинамической устойчивости в Колюбакино (1978 г.).

<sup>8</sup>Правда, нужно еще проверить условие 6, накладываемое на разрывное отображение (см. третий параграф).

что  $l_3$  – опасная граница области устойчивости. Отметим, что  $l_3$  не может пересекать кривые  $l_1$  и  $l_2$ , кривую же  $l_4$  она пересекает по двум точкам.

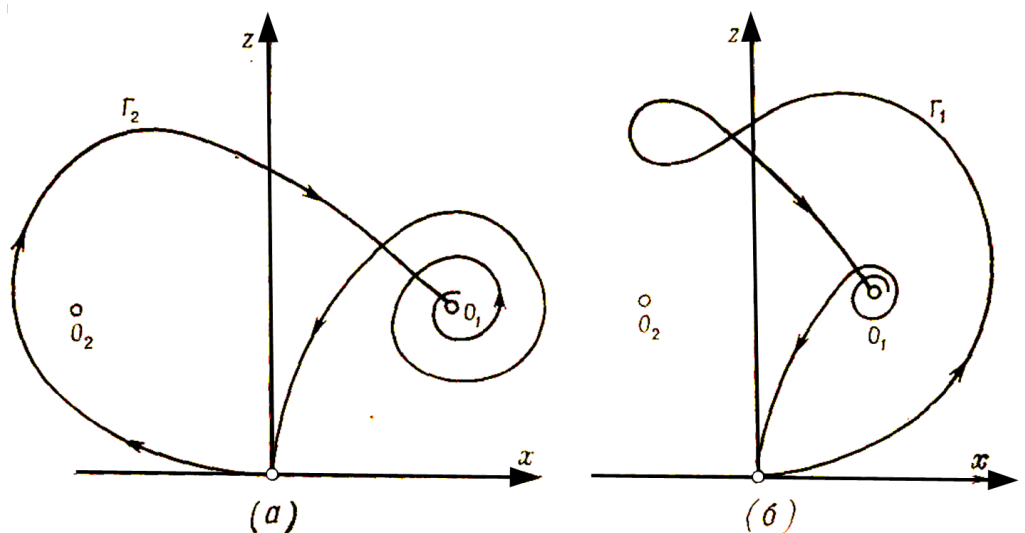


Рис. 4

Помимо указанных кривых имеются и другие кривые, соответствующие петлям сепаратрис, но с более сложным поведением  $\Gamma_i$ . Как следует из теоретического рассмотрения, в некоторой области, примыкающей к  $l_2$ , они образуют счетное всюду плотное множество. Некоторые из таких кривых, в частности  $l_1$ , были просчитаны группой В.И. Юдовича. Кроме того, ими была обнаружена бифуркационная точка  $Q_{10}$  (30.4; 10.2) (многообразие коразмерности два), соответствующая контуру из седел  $O$  и  $O_1$  ( $O_2$ ) и траекторий, их соединяющих, одна из которых является  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_1$ ) (рис. 4,а). Имеется еще одна бифуркационная точка  $Q_{20}$  (85; 11.9), соответствующая контуру из седел  $O$  и  $O_1$  ( $O_2$ ) и траекторий, их соединяющих, одной из которых является  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) (рис. 4.б), также найденная с помощью численного эксперимента. Подобные бифуркации теоретически рассматривались в работе В. В. Быкова [11], из которой, в частности, следует, что существует еще счетное множество бифуркационных точек  $Q_{ij}$   $i = 1, 2; j = 1, 2, \dots$ , соответствующих негрубым сепаратрисным контурам такого же типа, но с более сложным поведением  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , и что к этим точкам примыкают бифуркационные кривые  $L_{ij}$ , соответствующие петлям сепаратрис седел  $O_1$  и  $O_2$ . А это приводит к важному выводу о существовании устойчивых периодических движения (см. ниже).

Несколько слов о схеме доказательства свойств аттрактора Лоренца  $\Omega_2$ . Указывается однопараметрическое семейство систем  $X_\mu$ , имеющих состояние равновесия типа седло  $O$ , одномерные сепаратрисы которого при  $\mu = 0$  возвращаются в него. Предполагается, что системы имеют секущую площад-

ку, на которой определено отображение последования  $T(\mu)$ . Из-за наличия седла  $T(\mu)$  будет разрывным. Но именно это свойство  $T(\mu)$  и позволяет сравнительно просто сформулировать условия, при которых будет существовать странный аттрактор. Теперь возникает вопрос: можно ли проверить условия для модели Лоренца? Что касается отображения Пуанкаре  $T_1$  для системы (1), то оно есть, поскольку имеется подходящая "секущая"  $z = r - 1$ . Однако об аналитических свойствах  $T_1$ , которые как раз и нужны, практически ничего нельзя сказать. Поэтому нами (В.С. Афраимовичем, В.В. Быковым, Л.П. Шильниковым – авторами [6]) проверка теоретических условий для модели Лоренца проводилась с помощью ЭВМ.

Ниже излагается ряд фактов и утверждений, связанных с изучением динамических систем  $X_\mu$  типа модели Лоренца и разрывных отображений порождаемых ими. Предварительно описываются бифуркации петель сепаратрис седла.

### 1. О бифуркациях в окрестности траектории, двоякоасимптотической к седлу

Рассмотрим однопараметрическое семейство  $X_\mu$  трехмерных гладких динамических систем

$$\dot{x} = X(x, \mu). \quad (2)$$

непрерывно зависящих от параметра  $\mu$ . Предположим, что системы (2) при  $0 \leq \mu \leq 1$  имеют состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  типа седло. Пусть  $\lambda_1(\mu)$ ,  $\lambda_2(\mu)$ ,  $\lambda_3(\mu)$  – корни характеристического уравнения в  $O$  и  $Re \lambda_i(0) < 0$ ,  $i = 1, 2$ , а  $\lambda_3(0) > 0$ . Устойчивое двумерное многообразие седла  $O$  будем обозначать через  $W^s(\mu)$ . Предположим, что одна из двух траекторий, выходящих из  $O$ , которую обозначим через  $\Gamma_1(\mu)$  (вторую обозначим через  $\Gamma_2(\mu)$ ), при  $\mu = 0$  возвращается в седло. Ниже  $\Gamma_1(\mu)$  и  $\Gamma_2(\mu)$  мы будем называть сепаратрисами. Будем предполагать, что седловая величина

$$\sigma(0) = \max_{i=1,2} Re \lambda_i(0) + \lambda_3(0) \neq 0.$$

Дальнейшее рассмотрение сводится к трем следующим основным случаям:

I) Пусть  $\sigma(0) < 0$ . Тогда, как известно [33], из петли  $\overline{\Gamma_1(0)} = \Gamma_1(0) \cup O$  может родиться только одно периодическое движение  $L_1(\mu)$ . При этом  $\Gamma_1(\mu)$  при  $t \rightarrow +\infty$  будет наматываться на  $L_1(\mu)$ .

II) Пусть  $\lambda_1(0)$  и  $\lambda_2(0)$  – комплексно-сопряженные и  $\sigma(0) > 0$ . Здесь, как следует из [34, 37], в любой окрестности  $\overline{\Gamma_1(0)}$  будет существовать нетривиальное гиперболическое множество, содержащее счетное множество перио-

дических движений. Однако это множество не исчерпывает всего множества траекторий, целиком лежащих в окрестности  $\overline{\Gamma_1(0)}$ . Это следует из того, что отображение последования  $T(\mu)$  при  $\mu = 0$  на секущей  $D$ , трансверсальной к  $\overline{\Gamma_1(0)}$ , имеет счетное множество подков Смейла  $T : \sigma_k \rightarrow \sigma_k$  (см. рис. 5, где через  $D_1$  обозначена область определения  $T(\mu)$ ) с необязательно грубыми переходами с одной подковы на другую. При  $\mu$  же не равном нулю подков

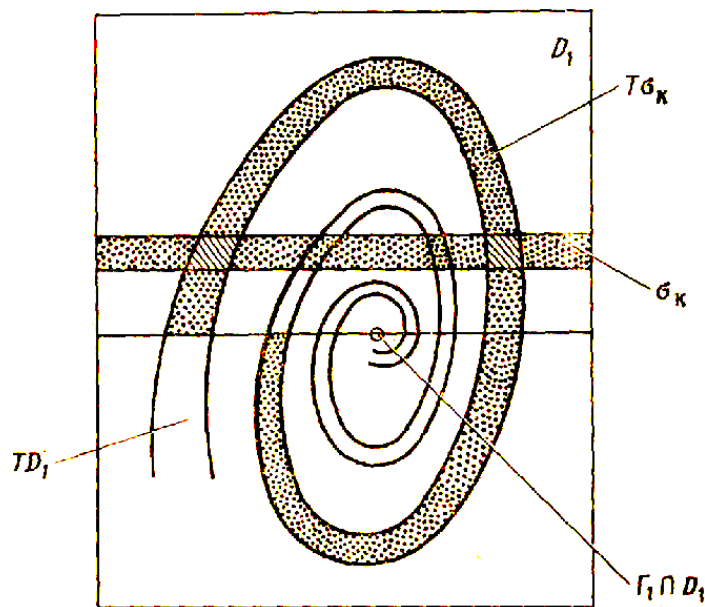


Рис. 5

остается только конечное число. Имеющие здесь место бифуркационные явления будут зависеть от новой седловой величины  $\sigma_1(0) = 2Re \lambda_1(0) + \lambda_3(0)$ . Будем предполагать, что  $\sigma_1(0) \neq 0$ . Тогда можно доказать следующее: 1. При  $\sigma_1(0) < 0$   $X_\mu$  при  $\mu$  из счетного множества интервалов будет иметь устойчивое периодическое движение, смена устойчивости которого сопровождается бифуркацией, связанной с рождением периодического движения удвоенного периода. 2. При  $\sigma_1 > 0$  будет существовать счетное множество интервалов, для значений  $\mu$  из которых система  $X_\mu$  будет иметь вполне неустойчивое периодическое движение (устойчивое при  $t \rightarrow -\infty$ ).

Как уже отмечалось выше, на плоскости параметров  $r, \sigma$  модели Лоренца при  $b = 8/3$  имеется счетное множество кривых  $l_{ij}$ , точкам которых соответствуют петли сепаратрис  $O_1$  и  $O_2$ . Поскольку в седле  $O_1$  ( $O_2$ ) два корня  $\lambda_1^{(1)}$  и  $\lambda_2^{(1)}$  комплексно-сопряженные с  $Re \lambda_i^1 > 0$ , а третий —  $\lambda_3 < 0$ , то  $O_1$  ( $O_2$ ) имеет двумерное неустойчивое многообразие  $W_1^u$  ( $W_2^u$ ) и две траектории  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{12}$  ( $\Gamma_{21}$  и  $\Gamma_{22}$ ), входящие в него. Пусть  $\bar{\Gamma}_{11}$  ( $\bar{\Gamma}_{21}$ ) — петля седла  $O_1$  ( $O_2$ ), соответствующая  $l_{ij}$ . Так как сумма корней равна дивергенции поля в  $O_1$ , а она равна  $-b - \sigma - 1$ , то получаем, что  $2Re \lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} < 0$  и  $Re \lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} < 0$ . Таким образом, с точностью замены времени  $t$  на  $-t$ , мы

находимся в условиях применимости второго случая. А это означает, что модель Лоренца при  $r$  и  $\sigma$  из счетного множества областей имеет устойчивые периодические движения<sup>9</sup>.

III) Пусть  $\lambda_1(0) < \lambda_2(0)$  и  $\sigma(0) > 0$ . Как известно, в рассматриваемом случае все траектории, принадлежащие  $W^s(0)$ , за исключением двух, будут входить в  $O$ , касаясь ведущего направления. Поскольку без ограничения общности можно считать, что система (2) при малых  $\mu$  имеет вид

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu) x_i + F_i(x_1, x_2, x_3, \mu), \quad i = 1, 2, 3,$$

то ведущим направлением будет ось  $x_2$ . Две же исключительные траектории, входящие в  $O$ , касаются оси  $x_1$ . Вместе с  $O$  они образуют неведущее многообразие, которое обозначим через  $W_0^s(0)$ . Оно разделяет  $W^s(0)$  на две области,  $W_+^s(0)$  и  $W_-^s(0)$ . Будем предполагать, что  $\Gamma_i(0) \in W_+^s(0)$ . Пусть  $U$  – некоторая достаточно малая окрестность  $\overline{\Gamma_1(0)}$  и  $\mathfrak{M}_i$  – связная компонента пересечения  $\overline{W_+^s(0)}$  с  $U$ , содержащая  $\Gamma_1(0)$ . Как следует из [36], в общем случае  $\mathfrak{M}_i$  есть двумерная непрерывная поверхность, гомеоморфная либо цилиндру, либо листу Мёбиуса. В 1-м случае  $\overline{\Gamma_1(0)}$  будем называть ориентированной петлей, а во втором – неориентированной.

**Т Е О Р Е М А 1.** [36]. *При сделанных предположениях из  $\overline{\Gamma_1(0)}$  может родиться только одно периодическое движение  $L_1(\mu)$  и притом седлового типа. В случае ориентированной петли  $\overline{\Gamma_1(0)}$  условие рождения состоит в том, чтобы*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Gamma_1(\mu) \supset \Gamma_2(0),$$

*в случае неориентированной*<sup>10</sup> –

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Gamma_1(\mu) = \Gamma_2(0).$$

*В первом случае инвариантные многообразия  $L_1(\mu)$  будут цилиндрами, а во втором – листами Мёбиуса.*

Доказательство теоремы основано на исследовании отображения последования  $T_1(\mu)$ , построенного на некоторой секущей пластинке  $D$  в плоскости  $x_2 = d$  по траекториям, близким к  $\Gamma_1(\mu)$ . В некоторых локальных переменных на  $D$  это отображение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1^{**}(\mu) + y^{\alpha(\mu)} \varphi_1(x, y, \mu), \\ \bar{y} &= y_1^{**}(\mu) + y^{\alpha(\mu)} \psi_1(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>9</sup>Можно также показать, что к каждой точке  $Q_{ij}$  примыкает бифуркационная кривая, соответствующая контуру из  $O_1, \Gamma_{21}, O_2, \Gamma_{11}$ .

<sup>10</sup>Здесь через  $\lim$  обозначен топологический предел.

где  $\alpha(\mu) = |\lambda_2(\mu)| \lambda_3^{-1}(\mu)$ ,  $P_1(x_1^{**}(\mu), y_1^{**}(\mu))$  точка 1-го пересечения  $\Gamma_1$  с  $D$ , причем  $y_1^{**} = 0$ ;  $y = 0$  есть уравнение пересечения  $W^s(\mu)$  с плоскостью  $x_2 = d$ , а функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  определены, непрерывны и дифференцируемы по  $x$  и  $y > 0$  в  $D_1$  при  $\mu \geq 0$ . При  $y \rightarrow 0$   $\varphi_1$  и  $\psi_1$  допускают доопределение по непрерывности величиной, зависящей только от  $\mu$ . Предел  $\psi_1$  при  $y \rightarrow 0$  будем обозначать через  $A_1(\mu)$ . Кроме того, имеют место оценки

$$K_1 < \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y^{1-\beta_1(\mu)} \right| < K_2, \quad K_3 < \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial y} y^{1-\beta_2(\mu)} \right| < K_4,$$

где  $K_1, \dots, K_4$  – константы, а  $\beta_1(\mu)$  и  $\beta_2(\mu)$  – некоторые положительные функции, не превосходящие 1. На языке отображений условие  $A_1(0) > 0$  означает, что петля  $\overline{\Gamma_1(0)}$  ориентируемая,  $A_1(0) < 0$  – что она неориентируема.

Пусть  $W_1^s(\mu)$  и  $W_1^u(\mu)$  устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения  $L_1(\mu)$ . В силу того, что  $L_1(\mu)$  отражается от  $\overline{\Gamma_1(0)}$ , можно показать, что  $W_1^s(\mu)$  при  $\mu \rightarrow 0$  имеет топологическим пределом множество, содержащее  $W_+^s(0)$ , а расстояние между  $W_1^s(\mu)$  и  $W^s(\mu)$  в  $D$  имеет порядок  $|y_1^{**}|^{1/\alpha(\mu)}$ . Относительно  $W_1^u(\mu)$  можно сказать следующее:  $W_1^u(\mu)$  трансверсально пересекает  $W^s(\mu)$  и в его границу входит  $\Gamma_1(\mu)$ .

Как мы уже отмечали, модель Лоренца допускает группу симметрии. Поэтому существование одной петли означает существование другой, причем обе сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будут входить в  $O$ , касаясь друг друга. Из сказанного нетрудно извлечь, что устойчивые и неустойчивые многообразия родившихся периодических движений трансверсально пересекаются. А это означает, что при переходах через  $l_i$ ,  $i = 1, 4, 5$  будет возникать гомоклинический контур, а следовательно, нетривиальное гиперболическое множество [35]. Однако это множество, вообще говоря, уже всего появившегося предельного множества.

## 2. О рождении гиперболического множества $\Omega_1(\mu)$

Предположим, что при  $\mu = 0$  обе сепаратрисы  $\Gamma_1(0)$  и  $\Gamma_2(0)$  возвращаются в седло и выполнены условия случая III. Предположим, что  $\Gamma_1(0)$  и  $\Gamma_2(0)$  входят в седло  $O$ , касаясь друг друга. Очевидно, в этом случае секущую площадку  $D$  можно выбрать так, чтобы и  $\Gamma_1(0)$  и  $\Gamma_2(0)$  пересекали ее. Обозначим точки пересечения  $\Gamma_i(\mu)$  с  $D$  через  $P_i(x_i^{**}(\mu), y_i^{**}(\mu))$ . Аналогично  $T_1(\mu)$ , при  $y < 0$  на  $D_2 \subset D$  можно построить отображение  $T_2(\mu)$ , которое запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_2^{**}(\mu) + (-y)^{\alpha(\mu)} \varphi_2(x, y, \mu), \\ \bar{y} &= y_2^{**}(\mu) - (-y)y^{\alpha(\mu)} \psi_2(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (4)$$



где  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  удовлетворяют условиям, аналогичным  $\varphi_1$  и  $\psi_1$ . Предел  $\psi_2$  при  $y \rightarrow 0$  обозначим через  $A_2(\mu)$ .

Имеют место три основных случая:

Случай А (ориентируемый) —  $A_1(0) > 0$ ,  $A_2(0) > 0$ .

Случай В (полуориентируемый) —  $A_1(0) > 0$ ,  $A_2(0) < 0$ .

Случай С (неориентируемый) —  $A_1(0) < 0$ ,  $A_2(0) < 0$ .

Для определенности будем предполагать, что из  $\Gamma_1(0)$  и  $\Gamma_2(0)$  при  $\mu > 0$  рождаются периодические движения, т.е.  $A_1(0) y_1^{**}(\mu) < 0$  и  $A_2(0) y_2^{**}(\mu) > 0$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $y_1^{**}(\mu)$  и  $y_2^{**}(\mu)$  имеют одинаковый порядок при  $\mu \rightarrow 0$ . Тогда при достаточно малых  $\mu$  множество  $\Omega_1(\mu)$  всех траекторий целиком лежащих в некоторой окрестности  $\overline{\Gamma_1(0) \cup \Gamma_2(0)}$ , исключая  $O$ , будет гомеоморфно надстройке над схемой Бернулли из двух символов<sup>11</sup>.

Надо сказать, что теорема 2 сформулирована при весьма ограничительном предположении, которое, однако, для модели Лоренца выполняется. Ниже мы приведем более сильную теорему, а здесь только заметим, что изучение рассматриваемой бифуркации требует рассмотрения двухпараметрического семейства систем, поскольку системы типа  $X_0$  образуют бифуркационное множество коразмерности два.

### 3. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца

Дальнейшее рассмотрение связано с исследованием предельных множеств  $X_\mu$  при не малых  $\mu$ . Прежде всего будем предполагать  $\lambda_1(\mu) < \lambda_2(\mu)$ ,  $\sigma(\mu) = \max_{i=1,2} \lambda_i(\mu) + \lambda_3(\mu) > 0$ . Кроме того, предположим, что существует площадка без контакта  $D$ , такая, что:

(1) на  $D$  можно ввести евклидовы координаты  $(x, y)$  так, что

$$D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 2\},$$

(2) уравнение  $y = 0$  описывает компоненту связности  $S$  пересечения  $W^s(\mu) \cap D$ , такую, что все  $\omega$ -полутраектории, начинающиеся на  $S$ , не имеют больше точек пересечения с  $D$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;

(3) по траекториям системы определены отображения  $T_1(\mu) : D_1 \rightarrow D$  и  $T_2(\mu) : D_2 \rightarrow D$ , где  $D_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, -1 \leq y < 0\}$ , причем  $T_i(\mu)$  записывается в виде

$$\bar{x} = f_i(x, y, \mu), \quad \bar{y} = g_i(x, y, \mu),$$

где  $f_i, g_i$  — гладкие функции по  $x$  и  $y$  и непрерывные по  $\mu$ .

<sup>11</sup>О надстройках над топологическими марковскими цепями см. [1,3].

(4)  $f_i$  и  $g_i$  допускают доопределение по непрерывности на  $S$ , причем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} f_i(x, y, \mu) &= x_i^{**}(\mu), & \lim_{y \rightarrow 0} g_i(x, y, \mu) &= y_i^{**}(\mu), \\ T_1(\mu)D_1 \cap D &\subset \Pi_1 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, |y| \leq 2\} \\ T_2(\mu)D_2 \cap D &\subset \Pi_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, |y| \leq 2\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из поведения траектории вблизи  $W^s(\mu)$  вытекает, что в малой окрестности  $S$  для  $T_1(\mu)$  имеет место представление вида (3), а для  $T_2(\mu)$  – представление вида (4). Ясно, что точка  $P_i(x_i^{**}(\mu), y_i^{**}(\mu))$ , есть первая точка пересечения  $\Gamma_i(\mu)$  с  $D$ .

Введем отображение  $T(\mu)$ , определенное на  $D_1 \cup D_2$  :

$$\bar{x} = f(x, y, \mu), \quad \bar{y} = g(x, y, \mu),$$

где  $f = f_i$ ,  $g = g_i$ , если  $(x, y) \in D_i$ . Наложим на  $T(\mu)$  следующие ограничения<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \text{а) } \|f_x\| &< 1, & \text{б) } \|g_y^{-1}\| &< 1, \\ \text{в) } 1 - \|f_x\| \|g_y^{-1}\| &> 2 \sqrt{\|g_y^{-1}\| \|g_x\| \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y\|} \\ \text{г) } \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y\| \|g_x\| &< (1 - \|f_x\|) (1 - \|g_y^{-1}\|) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и ниже  $\| \cdot \| = \sup | \cdot |$ ,  $(x, y) \in D_1 \cup D_2$ .

Все наложенные на  $T(\mu)$  условия являются естественным обобщением условий на отображения  $T_1$  и  $T_2$ , которые рассматривались выше при малых  $\mu$ . В частности заметим, что поскольку  $\psi_1$  и  $\psi_2$  представимы в виде  $\psi_i = A_i(\mu) + \dots$ , где многоточие означает члены, стремящиеся к нулю при  $y \rightarrow 0$ , из условия (6) следует, что  $A_i(\mu)$  не меняют знака. Поэтому понятие ориентируемого, полуориентируемого и неориентируемого случая можно распространить на любую систему  $X_\mu$ . Для простоты удобно считать, что  $A_i(\mu)$  не обращаются в нуль. При этом получаем, что для существования периодических движений  $L_1(\mu)$  и  $L_2(\mu)$  в случае  $A$  требуется, чтобы  $P_1 \in D_2$ ,  $P_2 \in D_1$ , в случае  $B$  –  $P_1 \in D_2$ ,  $P_2 \in D_2$ , а в случае  $C$  –  $P_1 \in D_1$ ,  $P_2 \in D_2$ . Неподвижную точку – точку пересечения  $L_i(\mu)$  с  $D$  – будем обозначать через  $M_i(x_i^*(\mu), y_i^*(\mu))$ . В случае  $C$  существует также еще одно периодическое движение  $L_3(\mu)$ , причем такое, что  $L_3(\mu) \cap D = M_3(x_3^*(\mu), y_3^*(\mu)) \cup M_4(x_4^*(\mu), y_4^*(\mu))$ , где  $M_3 \in D_1$ ,  $M_4 \in D_2$ . Ясно, что все эти периодические движения имеют седловой тип. Из наложенных условий вытекает, что уравнения пересечений связных компонент устойчивых многообразий  $W_i^s(\mu)$  периодических движений  $L_i(\mu)$ ,  $i = 1, 2$  с  $D$ , содержащих неподвижные точки  $M_i$ , представимы в виде  $y = y_i(x, \mu)$ ,  $|x| \leq 1$ .

<sup>12</sup>Эти ограничения аналогичны условиям принципа кольца, использованного нами в задаче разрушения инвариантного тора [4, 5]

Будем считать, что  $W_i^s$  в случае  $B$  есть вложенный цилиндр. В случае  $C$  уравнение связной компоненты  $D \cap W_3^s$ , содержащей точку  $M_j$ , также будет записываться в виде

$$y = y_j(x, \mu), \quad |x| \leq 1, \quad j = 3, 4.$$

Определим следующие функции  $R_1(\mu)$  и  $R_2(\mu)$

в случае  $A$   $R_1(\mu) = y_2^{**} - y_1(x_2^{**}(\mu), \mu)$ ,  $R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_2(x_2^{**}(\mu), \mu))$ ;

в случае  $B$   $R_1(\mu) = y_2^{**} - y_1(x_2^{**}(\mu), \mu)$ ,  $R_2(\mu) = v_i^{**}(\mu) - y_1(u_i^{**}(\mu), \mu)$ ,

где  $u_i^{**}(\mu)$ ,  $v_i^{**}(\mu)$  есть координаты  $TP_i$ ,  $i = 1, 2$ ;

в случае  $C$   $R_1(\mu) = y_2^{**} - y_3(x_2^{**}(\mu), \mu)$ ,  $R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_4(x_1^{**}(\mu), \mu))$ .

Обозначим через  $\Sigma(\mu)$  замыкание множества всех точек траекторий отображения  $T(\mu)$ , целиком лежащих в  $D$ .

**Т Е О Р Е М А 3.** Пусть  $R_1(\mu) > 0$ ,  $R_2(\mu) > 0$ . Тогда  $T(\mu)$  на  $\Sigma(\mu)$  сопряжено со схемой Бернулли из двух символов.

Рассмотрим теперь случаи, когда нарушены условия теоремы.

1). Пусть  $R_1(\mu) > 0$ ,  $R_2(\mu) \leq 0$ , ( $R_1(\mu) \leq 0$ ,  $R_2(\mu) > 0$ ). Здесь (при некоторых дополнительных условиях в случаях  $A$  и  $B$ ) будет существовать нульмерное нетривиальное неустойчивое предельное множество  $\Sigma(\mu)$ . Но в отличие от вышеприведенного оно может быть негрубым для нульмерного множества значений  $\mu$ , причем для континуума значений  $\mu \in \Sigma(\mu)$  не будет описываться конечной топологической марковской цепью.

2).  $R_1(\mu) < 0$ ,  $R_2(\mu) = 0$ , ( $R_1(\mu) = 0$ ,  $R_2(\mu) \leq 0$ ). Здесь  $\Sigma(\mu)$  уже будет одномерным. Однако оно неустойчиво.

3).  $R_1(\mu) < 0$ ,  $R_2(\mu) < 0$ . В этом случае  $\Sigma(\mu)$  также будет одномерным. При этом, если из  $\Sigma(\mu)$  выбросить  $M_1 \cup M_2$  в случае  $A$ ,  $M_1$  в случае  $B$ , и  $M_3 \cup M_4$  в случае  $C$ , то оставшееся множество  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  будет притягивающим. С прикладной точки зрения  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  вполне можно считать странным аттрактором, поскольку в нем нет устойчивых периодических точек и они не возникают при шевелении  $\mu$ . Однако  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  может не быть неблуждающим множеством. В том случае, когда оно является неблуждающим,  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  будем называть аттрактором Лоренца.

Дальнейшее рассмотрение мы ограничим случаем  $A$ , да и то симметричным, хотя результаты будут аналогичными и в общем случае.

Предположим, что

$$f_2(x, y, \mu) = -f_1(-x, -y, \mu), \quad g_2(x, y, \mu) = -g_1(-x, -y, \mu).$$

Очевидно, в этом случае  $R_1(\mu) = R_2(\mu) = R(\mu)$ . Пусть  $R(\mu) > 0$  при  $\mu \in (\mu_0, 1]$ . Значение  $\mu = \mu_0$  бифуркационное, в этот момент  $\Gamma_1(\mu)$  ложится на

$W_2^s(\mu_0)$ , а  $\Gamma_2(\mu_0)$  — на  $W_1^s(\mu_0)$  (рис. 6.)<sup>13</sup>.

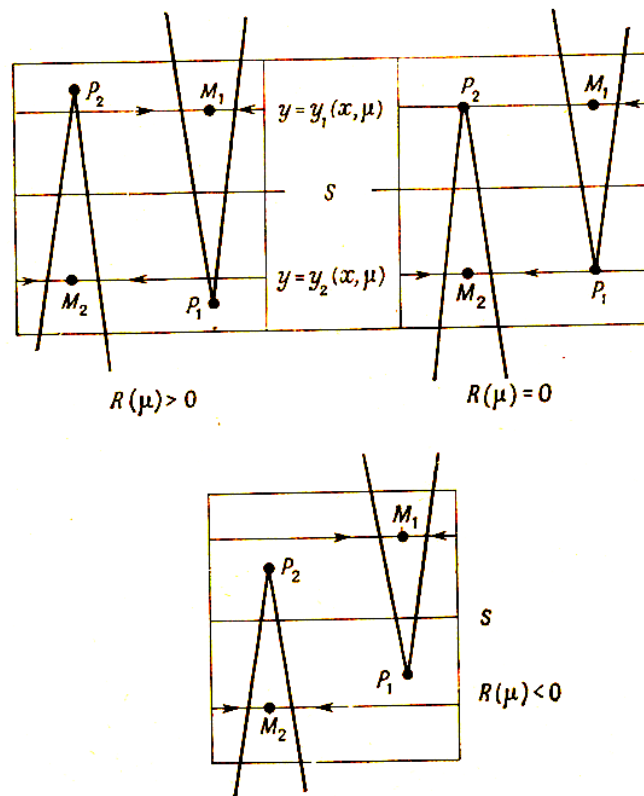


Рис. 6

**ТЕОРЕМА 4.**  $\Sigma(\mu_0)$  одномерно, является неблуждающим множеством, в нем всюду плотны грубые периодические точки, состоит из двух компонент связности, во всех точках не принадлежащих  $y = y_i(x, \mu)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Sigma(\mu_0)$  локально устроено как прямое произведение канторовского множества на отрезок.

Поскольку не все точки неустойчивых многообразий  $W_i^u(\mu_0)$  принадлежат  $\Sigma(\mu_0)$ , то оно неустойчиво. Пусть  $\tilde{D}$  есть область, заключенная между кривыми  $y = y_2(x, \mu)$  и  $y = y_1(x, \mu)$ . Очевидно, в силу условия  $R(\mu) < 0$  при  $\mu > \mu_0$ ,  $T(\mu)(\tilde{D} \setminus S) \subset \tilde{D}$ .

Замыкание множества всех неблуждающих точек  $T(\mu)$  на  $\tilde{D} \setminus S$  и будет  $\tilde{\Sigma}(\mu)$ . Пусть  $N(\mu)$  таково, что при  $k = N(\mu)$   $T^k(\mu)P_2 \in D_1$ , а при  $k = 0, 1, 2, \dots, N(\mu) - 1$   $T^k(\mu)P_2 \notin D_1$ .

Введем в рассмотрение следующую величину:

$$q(\mu) = \frac{1}{2\|g_y^{-1}\|} \left( 1 + \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \|g_y^{-1} \cdot f_y\|} \right)$$

Из условия (6), наложенного на  $T(\mu)$ , можно извлечь, что  $q(\mu) > q_0 > 1$ .

<sup>13</sup>Бифуркации контуров, подобных контуру из  $L_2(\mu_0)$ ,  $\Gamma_1(\mu_0)$ ,  $O$  и траектории, соединяющей  $L_2(\mu_0)$  с  $O$ , рассматривались в [39].

Т Е О Р Е М А 5. При выполнении условия<sup>14</sup>

$$q(\mu)^{N(\mu)} > 2$$

1)  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  есть аттрактор Лоренца; 2)  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  состоит из двух компонент связности, окрестность которых расслоена непрерывным устойчивым слоением на липшицируемые слои, по которым точки притягиваются к нему; 3)  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  – негрубое<sup>15</sup>; 4) в  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  всюду плотны грубые периодические точки; 5) существует последовательность  $T(\mu)$ -инвариантных нульмерных множеств  $\Delta_k(\mu)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , таких, что  $T(\mu) | \Delta_k(\mu)$  сопряжено конечной транзитивной топологической марковской цепи, причем  $\Delta_{k+1} \in \Delta_k(\mu)$  и  $\Delta_k(\mu) \rightarrow \tilde{\Sigma}(\mu)$  при  $k \rightarrow +\infty$ ; 6) в общем случае  $T(\mu)$  на  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  для счетного всюду плотного множества значений  $\mu$  допускает конечное марковское разбиение и не допускает для континуума значений  $\mu$ .<sup>16</sup>

Из того, что  $q(\mu)^{N(\mu)} \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow \mu_0$ , следует, что существует такое  $\mu_1 \leq 1$ , что при  $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$  (а не  $\mu_0 < \mu \leq 1$ , как было неверно выписано в нашей работе [6]) система  $X_\mu$  будет иметь аттрактор Лоренца. Аттрактор Лоренца содержит  $O$ ,  $\Gamma_1(\mu)$  и  $\Gamma_2(\mu)$ , причем заметим, что периодические движения при изменении  $\mu$  могут исчезать только путем влипания в петли сепаратрис седла  $O$ . В случае, когда  $T(\mu)$  допускает конечное марковское разбиение, а оно имеет место, когда  $\Gamma_1(\mu)$  и  $\Gamma_2(\mu)$  стремятся либо к  $O$ , либо к периодическим движениям,  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  устроено весьма просто: в малой окрестности любой точки, не содержащей  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap D$ , оно гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок. В окрестности же точки  $P(\mu)$ , принадлежащей  $\Gamma_i(\mu)$ , связная компонента  $\tilde{\Sigma}(\mu)$ , содержащая  $P(\mu)$  устроена, как букет бесконечного множества лучей, поскольку  $\Gamma_1(\mu)$  и  $\Gamma_2(\mu)$  являются границами неустойчивых многообразий точек  $\tilde{\Sigma}(\mu)$ . Свойство (2) говорит о том, что изучение  $T(\mu)$  можно свести к кусочно-монотонному отображению отрезка на прямой. При этом следует заметить, что на каждом куске непрерывности (а их два) отображение, вообще говоря, будет лишь непрерывным.

В общем случае  $\tilde{\Sigma}(\mu)$  также будем пределом нульмерных множеств  $\Delta_k(\mu)$ , но на них  $T(\mu)$  уже не обязательно будет сопряжено транзитивной марковской цепи. Здесь в  $\tilde{\Sigma}(\mu)$ , кроме одномерного негрубого неблуждающего множества  $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$ , может также входить конечное число грубых нульмерных множеств, как тривиальных (периодические орбиты), так и нетривиальных

<sup>14</sup>Для сравнения заметим, что в несимметричном случае аналогичное условие записывается в виде  $q^{N_1+N_2} > q^{N_1} + q^{N_2}$ .

<sup>15</sup>Эскиз доказательства негрубости в одном весьма частном случае отображения  $T$  был предложен Гукенхаймером [17].

<sup>16</sup>О марковских разбиениях см. [1].

(описываемые ТМЦ). Тем не менее  $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$ , за исключением, быть может, конечного множества значений  $\mu$ , будет «странным» аттрактором.

#### 4. Заключение

Из приведенного видно, что многие методы и приемы теории бифуркаций нашли свое применение при изучении модели Лоренца. При ее рассмотрении мы встретились с самыми различными, но ранее известными типами бифуркаций: это бифуркации состояний равновесия и периодических движений, бифуркации сепаратрисных контуров как с одним и двумя седлами, так и с седлом и периодическим движением и т. д. Однако и модель Лоренца в свою очередь поставила перед теорией бифуркаций ряд принципиально новых вопросов, на некоторые из которых мы ответили, а некоторые еще ждут своего решения. И здесь хочется особо подчеркнуть следующий факт, выявившийся в результате исследования модели Лоренца, но далеко выходящий за рамки данного конкретного случая: «странные» аттракторы могут возникать из неустойчивых предельных множеств. Естественно, что этот практически важный вывод не может не поколебать в какой-то мере укоренившееся представление, что переход от простых движения к сложным должен сопровождаться некоторой серией «мягких» бифуркаций.

Автор считает необходимым отметить, что результаты, связанные с исследованием модели Лоренца, были получены совместно с В.С. Афраймовичем и В.В. Быковым. В основу изложения были положены наряду с [6] работа [40], содержащая развернутое изложение большинства затронутых здесь вопросов, а также результаты новых численных экспериментов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М. Символическая динамика. Одиннадцатая математическая школа, Киев (1976).
2. Аносов Д.В. Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. института им. В.А. Стеклова. АН СССР, 90 (1967).
3. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Об особых множествах систем Морса-Смейла. Труды Московского матем. об-ва, т. 28 (1973), 181-214.
4. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О малых периодических возмущениях автономных систем, ДАН СССР, т. 24, № 4 (1974), 739-742.
5. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. ДАН СССР, т. 219, № 6 (1974), 1281-1285.
6. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца, ДАН СССР, т. 234, № 2 (1977), 336-339.
7. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем, ПММ, т. 41 (1977), 618-627.
8. Баутин Н.Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа, Известия АН СССР (ОТН), № 11 (1957), 116-121.
9. Баутин Н.Н., Шильников Л.П. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости состояний равновесия и периодических движений (опасные и безопасные границы). Дополнение I, наст. книга.
10. Беляков Л.А. Об одном случае рождения периодического движения с двумя гомоклиническими кривыми. Матем. заметки 15, № 4, 571-580 (1974).

11. Быков В.В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом. Межвуз. сб. Методы качественной теории дифф. уравнений, Горький (1978), 3-32.
12. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца, Нелинейные волны, М., Наука, 1979, 212-226.
13. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к негрубой гомоклинической кривой. 1. Матем. сб. т. 88 (130), № 8. (1972), 475-492, II, 90 (132), № 1 (1973), 139-156.
14. Гаврилов Н.К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур, Матем. заметки 14, № 5 (1973), 687-696.
15. Гаврилов Н.К. О  $n$ -мерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, ДАН СССР, 212, № 1 (1973), 276-279.
16. Kaplan J., Jorke J. Preturbulent behaviour in the Lorenz equations (preprint).
17. Guckenheimer J. Strange, strange attractor, J. Marsden, M. MacCracken, The Hopf bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York (1976) 368-381. [См. гл. 12 наст. книги.]
18. Комраз Л.А. Динамические модели маятникового регулятора Гиппа, ПММ, т. 35, №I (1971), 147-162.
19. Леонтович-Андропова Е.А., Шильников Л.П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям, т. II (1970), Киев, 232-290.
20. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. ДАН СССР. т. 243, №.1 (1978), 26-29.
21. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow, Journ. of the Atmospheric Sciences, v. 20, (1963), 130-141.
22. Морозов А.Д., Шильников Л.П. К математической теории синхронизации колебаний, ДАН СССР, 223, № 6, (1975), 543-547.
23. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely sinks, Topology, 12, (1974), 9-18.
24. Плыкин Р.В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей. Матем. сб. 91. №2 (1974), 243-264.
25. Роцин Н.В. Опасные границы устойчивости в модели Лоренца. Прикладная математика и механика, № 5 (1978), 950-952.
26. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys.. 20 (1971), 167-192.
27. Ruelle D. The Lorenz attractor and the problem of turbulence, Lecture Notes in Math., 565 (1976), 146-158.
28. Robbins K.A. A new approach to subcritical instability and turbulent transitions in a simple dynamo, Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc., v. 82, Part 2 (1977). 309-325.
29. Saltzman B. Finite Amplitude free convection as a initial value problem, 1, Journ. of the Atmospheric Sciences, v 19 (1962), 329-341.
30. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. math. Soc. 66 (1967) (русский перевод, УМН. 25 в.1 (1970), 113-185.)
31. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluid and lasers, Phys. letters, v. 53A, N 1 (1975), 77-79.
32. Williams R.F. Classification of one dimensional attractors, Proc. Symp. in Pure math., v. 14, Global analysis. Amer. Math. Soc, Providence (1970), 361-393.
33. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Матем сб. 61 (104), (1963), 443-466.
34. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений, ДАН СССР. т. 160, № 3 (1965), 558-561.
35. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа. Матем. сб. 74 (116), (1967). 378-397.
36. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. Матем сб. т.77 (119), . № 3 (1968). 461-472.
37. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. Матем. сб 81 (123), № 1 (1970), 92-103.
38. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы, ДАН СССР, т. 224. № 5 (1975). 1046-1051.
39. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. VII Internationale Konferenz uber nichtlineare Schwingungen. Band 1, 2, Berlin (1977). 279-293.
40. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Труды Московского матем. общества (т. 44 в печати).

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

## ЧАСТЬ 1. ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ

*Учебно-методическое пособие*

Авторы:

Сергей Владимирович **Гонченко**

Александр Сергеевич **Гонченко**

Евгений Александрович **Гринес** и др.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.