Воздухоохранное планирование с учетом загрязнения многими вредными примесями

Визгунов Н.П.

29 марта 2006 года

1. Рассмотрим планирование охраны воздушного бассейна промышленного города, который загрязнен выше нормы L вредными примесями, $L \geq 1$. Будем считать, что $z = (z_1, z_2), z \in Z$ соответствует территории города, планирование ведется для временного отрезка $1, \ldots, (t+1)$. Загрязнение можно уменьшить, применеяя различные природоохранные проекты. Требуется определить, когда следует реализовать проект $p,\ p \in 1, \ldots, P_l,\ l \in 1, \ldots, L$ — в период $1, \ldots, t$ или в год $t+1$. Переменная $\xi_{l,p}$ будет принимать при этом, соответственно, значения 1 или 0. Если $\xi_{l,p} = 1$, то это приведет к уменьшению загрязнения l–ой вредной примесью на $\Delta C_{l,p}(z),\ z \in Z$ и к затратам $\zeta_{l,p}$. Общие затраты ограничены величиной $\mathcal{D}$. При $\mathcal{D} = 0$ прогноз загрязнения l –ой примесью на конец года t выражен в виде функции $C_l(z),\ z \in Z$.

Самая естественная постановка задачи планирования при таких условиях состоит в следующем.

Минимизировать L целевых функций

$$Y_l \longrightarrow \min,\ l = \overline{1, L} \tag{1}$$

при ограничениях на переменные $y_l,\ \xi_{l,p}$

$$C_l(z) - \sum_{p=1}^{P} \Delta C_{l,p}(z)\, \xi_{l,p} \leq Y_l,\ z \in Z,\ l = \overline{1, L} \tag{2}$$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P_l}\zeta_{l,p}\xi_{l,p}\le\mathcal{D}, \qquad (3)$$

$$\xi_{l,p}\in\{0,1\},\ p=\overline{1,P_l},\ l=\overline{1,L}, \qquad (4)$$

$$Y_l\in\mathcal{R},\ l=\overline{1,L}. \qquad (5)$$

Все примеси можно упорядочить по степени убывания их токсичности, то есть будем полагать в дальнейшем, что частный критерий Y_l важнее критерия $Y_{l+1},\ l=\overline{1,L-1}$,

$$Y_1\succ\cdots\succ Y_l\succ\cdots\succ Y_L. \qquad (6)$$

Самый простой способ решения задачи векторной оптимизации (1)-(5) с учетом лексикографического упорядочения (6) состоит в использовании метода последовательных уступок [1].

- Первый шаг. Следует решать однокритериальную задачу минимизации Y_1 при ограничениях (2)–(5). Находится оптимальное значение Y_1^*.

- l–ый шаг, $l=2,\dots,L$ состоит в минимизации Y_l при ограничениях (2)–(5), дополненных $(l-1)$ условием

$$Y_k\le Y_k^*+\Delta Y_k,\ k=\overline{1,l-1}. \qquad (7)$$

К сожалению, выбор значений уступок $\Delta Y_k,\ k=\overline{1,l-1}$ является самостоятельной сложной задачей и для их определения требуется дополнительная информация о частных критериях $Y_l,\ l=\overline{1,L}$.

2. Рассмотрим теперь другой подход, позволяющий осуществить свертку векторного критерия $Y_1,\dots,Y_L$. Функция полезности будет построена на базе экспертных оценок.

Будем предполагать в дальнейшем, что вред, причиненный человеку загрязнением воздуха Y_l примесью l, выражается некоторой зависимостью

$$\Psi_l(Y_l),\ l \in 1, \ldots, L. \tag{8}$$

Такая зависимость должна учитывать различную токсичность вредных примесей в воздухе. Значения функции $\Psi_l(Y_l)$ в любой фиксированной точке Y_l не имеет физического смысла, и даже часто неясно, в каких единицах следует эти значения измерять. Смысл имеет только отношение $\Psi_l(Y_l)/\Psi_k(Y_k)$, а именно,

- если $\Psi_l(Y_l)/\Psi_k(Y_k) = 1$, то вред, причиненный концентрацией Y_l вещества l, равен вреду, вызванного концентрацией Y_k вещества k;
- если $\Psi_l(Y_l)/\Psi_k(Y_k) > 1$, то концентрация Y_l более вредна, чем концентрация Y_k примеси k;
- и если отношение меньше единицы, то Y_l менее вредна, чем Y_k.

Отметим также, что $\Psi_l(Y_l)/\Psi_k(Y_k) = 2$ говорит только о том, что примесь l с концентрацией Y_l более для человека вредна, чем примесь k с концентрацией Y_k , но нельзя сказать, что примесь l опаснее в два раза для здоровья человека, чем k .

Выпишем условия, которым должна удовлетворять функция вреда $\Psi_l(.),\ l \in 1, \ldots, L$.

1. Считаем, что все вредные примеси расположены в порядке убывания их токсичности. Это упорядочение предполагает, что функция вреда $\Psi_l(.),\ l \in 1, \ldots, L$ обладают свойством

$$\Psi_{l+1}(C) \leq \Psi_l(C) \text{ для любого } C \in \mathcal{R},\ l = \overline{1, L-1}.$$

2. $\Psi_l(C) = C$ для $C \leq 1,\ l \in 1, \ldots, L$. Другими словами, если загрязненность в абсолютных единицах примесью l не превышает пре-

дельно допустимой концентрации, то вред от этой примеси численно равен этой концентрации.

3. $\Psi_l(C),\ l \in 1,\dots,L$ — непрерывные, монотонно возрастающие, выпуклые функции. Действительно, небольшие изменения концентраций должны приводить к небольшим изменениям значений функций вреда. Кроме того, увеличение концентрации любого загрязнителя не может уменьшить вредное воздействие на человека. Выпуклость функций $\Psi_l(.),\ l \in 1,\dots,L$ требуется, чтобы отразить следующее очевидное соображение. Увеличение концентрации загрязнителя, например, в два раза, приводит к увеличению вредного воздействие, вообще говоря, более чем в два раза.

4. Будем предполагать, что все функции $\Psi_l(.),\ l \in 1,\dots,L$ — функции одного класса, то есть либо все полиномы, либо все показательные функции, либо степенные и т.д. Это предположение не следует из каких-либо физических соображений, оно просто удобно для целей моделирования.

В качестве функций $\Psi_l(C)$ для $C \geq 1$ будем в дальнейшем использовать степенную зависимость

$$\Psi_l(C) = \alpha_l C^{\beta_l},\ \alpha_l > 0,\ l = \overline{1,L}. \tag{9}$$

Из свойства 1 следует, что

$$\beta_1 \geq \dots \geq \beta_l \geq \dots \geq \beta_L. \tag{10}$$

Из свойства 2 и непрерывности функций $\Psi_l(.)$ следует

$$\alpha_l = 1,\ l = \overline{1,L}. \tag{11}$$

Коэффициенты $\beta_l,\ l = \overline{1,L}$ можно определить с приемлемой для практики точностью с помощью экспертов – токсикологов. Сначала следует ввести некоторую шкалу измерения для одной из примесей. Будем считать, что для наиболее токсичной примеси L

$$\Psi_L(C_L) = C_L \text{ для любого } C_L \in \mathcal{R}, \tag{12}$$

другими словами, в формуле 9 положим $\beta_L = 1$.

Каждому эксперту из группы в M человек предлагается заполнить следующую таблицу. В таблице заданы значения концентраций L–ой примеси $C_L^1, \ldots, C_L^i, \ldots, C_L^I$, причем

$$C_L^1 = 1,\ C_L^1 < \ldots < C_L^i < \ldots < C_L^I.$$

Эксперту m надо предложить $I(L-1)$ оценок $C_l^{i_m}$, где число $C_l^{i_m}$ есть концентрация примеси l такая, что вред от нее равен вреду от примеси L с концентрацией C_L^i. Другими словами, вред от концентраций $C_1^{i_m}, \ldots, C_l^{i_m}, \ldots, C_L^i$ примесей $1, \ldots, l, \ldots, L$ должен быть равен с точки зрения эксперта m. Вещества расположены в порядке убывания их токсичности, поэтому должно выполняться следующее условие при заполнении таблиц:

$$C_1^{i_m} \leq \ldots \leq C_l^{i_m} \leq \ldots \leq C_L^i,\ i = \overline{1, I},\ m = \overline{1, M}. \tag{13}$$

Чем менее токсична примесь, тем может быть выше ее концентрация.

Пусть коэффициент, характеризующий степень компетентности эксперта m равен $W_m,\ W_m \in 1, \ldots, 10,\ m = \overline{1, M}$. Тогда все M чисел, заполненных экспертами, следует обработать сначала следующим образом:

$$\hat{C}_l^i = \frac{\sum_{m=1}^M W_m C_l^{i_m}}{\sum_{m=1}^M W_m},\ i = \overline{1, I},\ l = \overline{1, L-1}. \tag{14}$$

Очевидно, что из (13) следует, что и усредненные данные $\hat{C}_l^i,\ i = \overline{1, I},\ l = \overline{1, L-1}$ будут удовлетворять условию

$$\hat{C}_1^i \leq \cdots \leq \hat{C}_l^i \leq \cdots \leq \hat{C}_L^i. \tag{15}$$

Теперь рассуждаем следующим образом. Для каждого фиксированного l существует объективно некоторая функция вреда $\Psi_l(.)$, которая каждой точке $C_l^i,\ C_l^i > 1,\ i \in 1,\ldots,I$ ставит в соответствие точку $\Psi_l(C_l^i),\ l \le L$ такую, что

$$\Psi_l(C_l^i)/\Psi_l(C_L^i) = 1. \tag{16}$$

Предполагая, что $\Psi_l(.)$ — функции вида (9), можем (16) записать в следующем виде

$$(C_l^i)^{\beta_l} = C_L^i,\ i = \overline{1,I},\ l \in 1,\ldots,L. \tag{17}$$

Числа $C_l^i,\ i \in 1,\ldots,I$ нам неизвестны, но экспертным путем получены их оценки $\hat{C}_l^i$, причем каждое число $\hat{C}_l^i$ есть приближение C_l^i с относительной ошибкой ε_l^i, точнее

$$C_l^i = \hat{C}_l^i(1+\varepsilon_l^i),\ i \in 1,\ldots,I. \tag{18}$$

Ошибка ε_l^i возникает от неточности экспертных данных и от неточности используемой зависимости (9).

Теперь просто определим параметр β_l в эмпирической формуле (9), пользуясь методом наименьших квадратов

$$[\hat{C}_l^i(1+\varepsilon_l^i)]^{\beta_l} = C_L^i,\ i = \overline{1,I}. \tag{19}$$

Прологарифмируем левую и правую части неравенства

$$\beta_l(\ln \hat{C}_l^i + \ln(1+\varepsilon_l^i)) = \ln C_L^i,\ i = \overline{1,I}.$$

Отсюда

$$\ln(1+\varepsilon_l^i) = \frac{1}{\beta_l}\ln C_L^i - \ln \hat{C}_l^i,\ i = \overline{1,I}.$$

Считая ошибки $\varepsilon_l^i,\ i = \overline{1,I}$ малыми, разложим логарифм в ряд Тейлора и оставим только первый член разложения этого ряда

$$\varepsilon_l^i = \frac{1}{\beta_l}\ln C_L^i - \ln \hat{C}_l^i,\ i = \overline{1,I}.$$

Минимизируем теперь величину

$$\Sigma_l = \sum_{i=1}^{I} (\varepsilon_l^i)^2 = \sum_{i=1}^{I} (\frac{1}{\beta_l} \ln C_L^i - \ln \hat{C}_l^i)^2$$

соответствующим выбором β_l. Для этого вычислим производную

$$\frac{\partial \Sigma_l}{\partial \beta_l} = 2 \sum_{i=1}^{I} (\frac{1}{\beta_l} \ln C_L^i - \ln \hat{C}_l^i)(-\frac{1}{(\beta_l)^2}) \ln C_L^i$$

и приравняем ее к нулю. Отсюда

$$\frac{1}{\beta_l} \sum_{i=1}^{I} \ln C_L^i = \sum_{i=1}^{I} \ln \hat{C}_l^i$$

и, следовательно,

$$\beta_l = (\sum_{i=1}^{I} \ln C_L^i)/(\sum_{i=1}^{I} \ln \hat{C}_l^i). \quad (20)$$

Очевидно, что так можно вычислить β_l для любого $l \in 1, \ldots, L$. Выполнение условия (13) при заполнении таблиц экспертами гарантирует выполнение свойства (10), то есть

$$\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_L = 1.$$

Легко посчитать также $\frac{\partial^2 \Sigma_l}{(\partial \beta_l)^2}$ и убедиться, что вычисленные значения β_l соответствует минимуму Σ_l, а не максимуму или точке перегиба.

Из формулы (17) следует, что

$$C_l^i = (C_L^i)^{\frac{1}{\beta_l}}, \ i = \overline{1, I}, \ l = \overline{1, L-1}$$

и относительные ошибки равны

$$\varepsilon_l^i = \frac{C_l^i - \hat{C}_l^i}{\hat{C}_l^i}, \ i = \overline{1, I}, \ l = \overline{1, L-1}.$$

Если ошибки велики, то полезно повторить экспертизу, познакомив экспертов с результатами обработки таблиц и с мнением тех экспертов, оценки которых наиболее сильно отличаются от усредненных оценок. Отметим также, что легко модифицировать изложенную методику вычисления функций $\Psi_l(.)$, $l = \overline{1, L-1}$ таким образом, чтобы эксперт мог заполнить не всю таблицу, а только столбцы, соответствующие вредным примесям, с действием на человека которых эксперт хорошо знаком.

3. Итак, мы будем теперь считать, что функции $\Psi_l(.)$ уже вычислены. Как теперь свести многокритериальную задачу к задаче с одним критерием?

Пусть имеется два вектора, компоненты каждого из них — концентрации L вредных примесей $(Y_1^{(1)}, \dots, Y_L^{(1)})$ и $(Y_1^{(2)}, \dots, Y_L^{(2)})$. Надо научиться сравнивать эти два вектора, то есть найти соответствующую функцию свертки. Будем считать, что загрязнение $(Y_1^{(1)}, \dots, Y_L^{(1)})$ менее вредно для человека, чем загрязнение $(Y_1^{(2)}, \dots, Y_L^{(2)})$ если

$$\max_{l \in 1,\dots,L} \{\Psi_l(Y_l^{(1)})\} < \max_{l \in 1,\dots,L} \{\Psi_l(Y_l^{(2)})\}, \tag{21}$$

одинаково вредно, если в формуле (21) равенство и более вредно, если стоит знак «больше». Очевидно, что такое представление наиболее близко к действительности, если в каждом векторе

$$(\Psi_1^{(i)}, \dots, \Psi_L^{(i)}),\ i = \overline{1,2}$$

компоненты $\Psi_1^{(i)}, \dots, \Psi_L^{(i)}$ незначительно отличаются друг от друга. Отметим также, что построенную функцию полезности логичнее было бы назвать функцией вредности.

Рассмотрим теперь физическую интерпретацию предложенной свертки. Пусть $(Y_1, \dots, Y_L)$ — произвольный набор концентраций L примесей и

$$V = \max_{l \in 1,\dots,L} \{\Psi_l(Y_l)\}. \tag{22}$$

Тогда векторы $(Y_1, \dots, Y_L)$ и $(0, \dots, 0, V)$ эквивалентны, так как $\Psi_L(V) = V$ согласно принятой шкале измерений. Это позволяет физически представить загрязнение $(Y_1, \dots, Y_L)$ несколькими примесями как загрязнение одной, наименее токсичной примесью L с концентрацией, равной $V,\ V \geq Y_L$.

4. Вернемся к решению многокритериальной задачи. Анализ изучаемого объекта показал, что вместо минимизации L частных критериев

$(Y_1, \ldots, Y_L)$ достаточно минимизировать скаляр

$$\max_{l \in 1,\ldots,L} \{\Psi_l(Y_l)\} \longrightarrow \min \tag{23}$$

при ограничениях (2)–(5).

Решение задачи (23), (2)–(5) легко находится, если известны решения L динамических задач, подробно рассмотренных в работах [2, 3]. Найти значения переменных $Y_l,\ \xi_{l,p},\ p = \overline{1, P_l}$ такие, что

$$Y_l \longrightarrow \min \tag{24}$$

при ограничениях

$$C_l(z) - \sum_{p=1}^{P_l} \Delta C_{l,p}(z)\, \xi_{l,p} \leq Y_l,\ z \in Z, \tag{25}$$

$$\sum_{p=1}^{P_l} \zeta_{l,p} \xi_{l,p} \leq \mathcal{D}_l, \tag{26}$$

$$\xi_{l,p} \in \{0, 1\},\ p = \overline{1, P_l}, \tag{27}$$

$$Y_l \in \mathcal{R},\ l = \overline{1, L}. \tag{28}$$

Пусть $Y_l(d_l)$ является оптимальным значением целевой функции задачи (24)–(28) при ограничении d_l, здесь

d_l – параметр, $0 \leq d_l \leq \sum_{p=1}^{P_l} \zeta_{l,p}$,

$Y_l(.)$ — кусочно-постоянные невозрастающие функции с разрывами первого рода, $l = \overline{1, L}$.

Обозначим

$$V(\mathcal{D}) = \min_{(d_1,\ldots,d_L),\ \sum d_l \leq \mathcal{D}} \ \max_{l \in 1,\ldots,L} \{\Psi_l(Y_l(d_l))\}. \tag{29}$$

Построение функции $V(\mathcal{D})$ можно осуществить конструктивно для всех интересующих нас значений аргумента $0 \leq \mathcal{D} \leq \sum_l \sum_p \zeta_{l,p}$, пользуясь следующим алгоритмом. Рассмотрим сразу произвольный k-ый шаг вычисления функции $V(.)$. Пусть точка $d_l^{(k)}$ соответствует точке разрыва функции $Y_l,\ l \in 1,\dots,L$. Среди этих L точек разрыва выделим такое подмножество $L^{(k)} \subseteq 1,\dots,L$, что $Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k)}) = Y_{l_2}(d_{l_2}^{(k)})$ для любых $l_1, l_2 \in L^{(k)}$, но $Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k)}) > Y_{l_2}(d_{l_2}^{(k)})$ для любых $l_1 \in L^{(k)},\ l_2 \in 1 : L \setminus L^{(k)}$. Другими словами, в любой точке $d_l^{(k)},\ l \in L^{(k)}$ достигается максимум функции $Y_l(d_l^{(k)})$ по $l \in 1 : L$. Пусть $\Delta_l,\ \Delta_l > 0$ — расстояние от точки $d_l^{(k)}$ до ближайшей справа точки разрыва функции $Y_l(.)$. Найдем

$$\Delta_{l_0} = \min_{l \in L^{(k)}} \Delta_l. \tag{30}$$

На шаге k переходим от точки с координатами $(d_1^{(k)},\dots,d_L^{(k)})$ к новой точке, координаты которой вычисляются по формулам

$$d_{l_0}^{(k+1)} = d_{l_0}^{(k)} + \Delta_{l_0}, \tag{31}$$

$$d_l^{(k+1)} = d_l^{(k)} \text{ для } l \in 1 : L \setminus \{l_0\}. \tag{32}$$

При этом функция $V(\mathcal{D})$ на полуинтервале $\mathcal{D} \in [\sum_{l=1}^{L} d_l^{(k)}, \sum_{l=1}^{L} d_l^{(k+1)})$ полагается равной $\Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)}))$. Для построения $V(.)$ потребуется сделать количество шагов, совпадающее с общим числом разрывов функции $Y_l(.),\ l = \overline{1,L}$. Первый шаг $k = 1$ отличается только тем, что в качестве начальной точки, соответствующей разрывам функций $Y_l(.)$ рассматривается

$$(d_1^{(1)},\dots,d_L^{(1)}) = (0,\dots,0)$$

Докажем теперь, что алгоритм строит именно функцию $V(\mathcal{D})$. Для произвольного $\mathcal{D}_0$ на некотором шаге k будет выполнено

$$\sum_{l=1}^{L} d_l^{(k)} \le \mathcal{D}_0 < \sum_{l=1}^{L} d_l^{(k+1)} \tag{33}$$

и получено значение функции

$$\Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)})),\ l_0 \in L^{(k)}. \tag{34}$$

Предположим, что вычисленное по формуле (29) значение функции $V(\mathcal{D}_0)$ меньше того значения, которое получено в результате работы алгоритма, то есть

$$V(\mathcal{D}_0) < \Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)})). \tag{35}$$

Значит существует вектор $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_L)$ такой, что $\sum_{l=1}^{L} \bar{d}_l \leq \mathcal{D}_0$ и

$$V(\mathcal{D}_0) = \max\{\Psi_1(Y_1(\bar{d}_1)), \ldots, \Psi_{l_0}(Y_{l_0}(\bar{d}_{l_0})), \ldots, \Psi_L(Y_L(\bar{d}_L))\}. \tag{36}$$

Из (36) и (35) получаем

$$\Psi_{l_0}(Y_{l_0}(\bar{d}_{l_0})) \leq V(\mathcal{D}_0) < \Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)})), \tag{37}$$

следовательно, учитывая монотонность функций $\Psi_l(.)$, $l = \overline{1, L}$

$$Y_{l_0}(\bar{d}_{l_0}) < Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)}). \tag{38}$$

Кусочно-постоянные невозрастающие функции $Y_l(.)$ уменьшаются только в точках разрыва, поэтому из (38) следует

$$\bar{d}_{l_0} \geq d_{l_0}^{(k)} + \Delta_{l_0}. \tag{39}$$

Неравенство (39) может иметь место в двух случаях.

Случай 1.

$$\bar{d}_l \geq d_l^{(k)} \text{ для всех } l \in 1 : L \setminus \{l_0\}. \tag{40}$$

Из (35), (39), (40), (31)–(33) получаем цепочку неравенств

$$\mathcal{D}_0 \geq \sum_{l=1}^{L} \bar{d}_l \geq \sum_{l \in 1:L\setminus\{l_0\}} d_l^{(k)} + d_{l_0}^{(k)} + \Delta_{l_0} \geq \sum_{l=1}^{L} d_l^{(k+1)} > \mathcal{D}_0,$$

приводящую к противоречию.

Случай 2. Существует такое $l_1 \in 1 : L$, что

$$0 \leq \bar{d}_{l_1} < d_{l_1}^{(k)}. \tag{41}$$

Из условия (41) $d_{l_1}^{(k)} > 0$, следовательно, слева есть ближайшая точка разрыва $d_{l_1}^{(k+1)} \geq 0,\ k_1 < k$. Значение $\Psi_{l_1}(Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k_1)}))$ использовалось при построении искомой функции на шаге $k_1 < k$. Из анализа алгоритма видно, что на каждом шаге значение построенной функции не возрастает. Следовательно,

$$\Psi_{l_1}(Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k)})) \geq \Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)})). \tag{42}$$

Рассмотрим $\tilde{a}_{l_1}$ такое, что

$$\max\{\bar{d}_{l_1}, d_{l_1}^{(k_1)}\} \leq \tilde{d}_{l_1} < d_{l_1}^{(k)}. \tag{43}$$

Из (43) и определения функции $Y_{l_1}(.)$ следует

$$\Psi_{l_1}(Y_{l_1}(\tilde{d}_{l_1})) = \Psi_{l_1}(Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k_1)})). \tag{44}$$

Используя монотонность функций $\Psi_{l_1}(.)$ и невозрастание $Y_{l_1}(.)$ из (36), (43), (44), (42) и (34) получаем цепочку неравенств

$$V(\mathcal{D}_0) \geq \Psi_{l_1}(Y_{l_1}(\bar{d}_{l_1})) \geq \Psi_{l_1}(Y_{l_1}(\tilde{d}_{l_1})) \geq$$

$$\geq \Psi_{l_1}(Y_{l_1}(d_{l_1}^{(k_1)})) \geq \Psi_{l_0}(Y_{l_0}(d_{l_0}^{(k)})) > V(\mathcal{D}_0),$$

приводящую к противоречию.

Итак, доказано, что построенная функция является функцией

$$V(\mathcal{D}),\ 0 \leq \mathcal{D} \leq \sum_{l}^{L} \sum_{p}^{P_l} \zeta_{l,p}.$$

Обозначим через

$\xi_{l,p}^*,\ p = \overline{1, P_l},\ l = \overline{1, L}$ решение общей задачи (23), (2)–(5) при $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$,

$$Y_l^* = \max_{z \in Z}(C_l(z) - \sum_p \Delta_{l,p}(z)\, \xi_{l,p}^*),$$

$$d_l^* = \sum_{p=1}^{P_l} \zeta_{l,p} \xi_{l,p}^*,\ l \in 1 : L,$$

при этом получим оптимальное значение целевой функции, равное

$$\max_{l\in 1:L}\{\Psi_l(Y_l^*)\}. \tag{45}$$

Пользуясь описанным выше алгоритмом, можно найти такое k, что

$$\sum_{l=1}^{L} d_l^{(k)} \le \mathcal{D}_0 < \sum_{l=1}^{L} d_l^{(k+1)}. \tag{46}$$

Пусть $\xi_{l,p}^{(k)},\ p=\overline{1,P_l}$ — решение динамической задачи (24)–(28) с ограничениям $d_l^{(k)}$ и оптимальным значением целевой функции $Y_l(d_l^{(k)})$. Легко заметить, что решение $\xi_{l,p}^*,\ p=\overline{1,P_l}$ является допустимым решением рассматриваемой задачи (24)–(28) для ограничения d_l^*, поэтому

$$Y_l(d_l^*) \le Y_l^* \tag{47}$$

или, из монотонности $\Psi_l(.)$,

$$\Psi_l(Y_l(d_l^*)) \le \Psi_l(Y_l^*). \tag{48}$$

С другой стороны, $\xi_{l,p}^{(k)},\ p=\overline{1,P_l},\ l=\overline{1,L}$ является допустимым решением общей задачи (23), (2)–(5) для $\mathcal{D}=\mathcal{D}_0$, при этом достигается значение целевой функции

$$\max\{\Psi_l(Y_l(d_l^{(k)}))\} = \min_{(d_1,\dots,d_L),\ \sum_l d_l\le\mathcal{D}_0}\ \max_{l\in 1:L}\{\Psi_l(Y_l(d_l))\} = V(\mathcal{D}_0).$$

Применяя соотношения (29) и (48), получим цепочку неравенств

$$V(\mathcal{D}_0) \le \min_{(d_1,\dots,d_L),\ \sum_l d_l\le\mathcal{D}_0}\ \max_{l\in 1:L}\{\Psi_l(Y_l(d_l))\} \le$$
$$\le \max_{l\in 1:L}\{\Psi_l(Y_l(d_l^*))\} \le \max_{l\in 1:L}\{\Psi_l(d_l^*)\},$$

из которой следует, что $\xi_{l,p}^{(k)},\ p=\overline{1,P_l},\ l=\overline{1,L}$ является также и оптимальным решением задачи (23), (2)–(5).

Таким образом, построение функции $V(\mathcal{D}),\ 0\le\mathcal{D}\le\sum_l\sum_p\zeta_{l,p}$, которое весьма просто осуществляется, позволяет свести общую задачу (23), (2) – (5) с $\sum_{l=1}^{L} P_l$ переменными к решению L простейших динамических задач вида (24)–(28), в каждой из которых присутствует только P_l переменных.

5. Теперь повторим кратко общие выводы данной работы. Многокритериальная задача (1)–(5) с лексикографическим упорядочением критериев (6) с помощью полученной из экспертных оценок информации сведена к задаче (23), (2)–(5) с одним критерием. Показано затем, что эта однокритериальная задача решается весьма просто, если известны решения простейших динамических задач вида (24) –(28).

Список литературы

[1] **Батищев Д.И.** Задачи и методы векторной оптимизации// Учебное пособие. - Горький: изд. ГГУ, 1979.

[2] **Визгунов Н.П.** Решение статической задачи регулирования загрязнения атмосферы // Экономический вестник / Под ред. Ф.Ф.Юрлова, Ю.В.Трифонова. Выпуск 2 — Н.Новгород: НГТУ, 2003, с. 96-100.

[3] **Визгунов Н.П.** Перспективное планирование защиты воздушного бассейна города от загрязнения // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Экономика и финансы. Выпуск 1(7) — Н.Новгород: изд. ННГУ, 2005, с. 517-523.