МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Т.Е. Бибишкина,
Л.С. Ефремова

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛАДКОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. ПРИМЕРЫ. ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород

2019

УДК 517
ББК 22.161
Б-59

Б-59 Бибишкина Т.Е., Ефремова Л.С. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛАДКОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. ПРИМЕРЫ. ЗАДАЧИ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 21 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **В.Ж. Сакбаев**

В данном пособии рассмотрен один из наиболее сложных для усвоения вопросов математического анализа: вопрос существования гладкой неявной функции. Здесь приведено доказательство общей теоремы существования гладкой неявной функции. Рассмотрены задачи, показывающие, что теорема существования гладкой неявной функции дает лишь достаточные, но не необходимые условия существования такого рода функции. Пособие содержит также набор задач для самостоятельной работы.

УДК 517
ББК 22.161

Содержание

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Приведем формулировку и доказательство теоремы существования гладкой неявной функции в наиболее общей форме для произвольных конечномерных пространств.

Пусть отображение F определено на открытой $(n+m)$-мерной клетке $I = I_n^x \times I_m^y$, где $I_n^x = I^{x_1} \times I^{x_2} \times \dots \times I^{x_n}$, $I_m^y = I^{y_1} \times I^{y_2} \times \dots \times I^{y_m}$, I^{x_i}, I^{y_j} – интервалы на прямой $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$, причём $F: I \to \mathbf{R}^m$.

Пусть точка (x^0, y^0), где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, содержится в открытой $(n+m)$- мерной клетке I.

Будем решать задачу о нахождении векторных решений при $m > 1$ или скалярного решения при $m = 1$ уравнения

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

равносильного (при $m > 1$) системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(вырождающейся в единственное уравнение при $m = 1$), локально в некоторой окрестности точки (x^0, y^0) так, чтобы эти решения представляли собой функцию переменной $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ со значениями в пространстве переменных $y(y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Определение 1. Пусть существуют окрестность $U_n^x(x^0)$ точки x^0 в I_n^x, окрестность $V_m^y(y^0)$ точки y^0 в I_m^y и функция f: $U_n^x(x^0) \to V_m^y(y^0)$ такие, что верно включение $U_n^x(x^0) \times V_m^y(y^0) \subset I$; а функция $y = f(x)$, где $f(x_0) = y_0$, является решением векторного (при $m > 1$) или скалярного (при $m = 1$) уравнения (1) при всех $x \in U_n^x(x^0)$, $f(x) \in V_m^y(y^0)$.

Тогда функция $y = f(x)$ называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (1) (или, что то же самое, системой уравнений (2)).

Будем использовать следующие матрицы:

$$F_x'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad F_y'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Теорема существования гладкой неявной функции. *Пусть отображение F: $I \to \mathbf{R}^m$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $F \in C^p(I;\ \mathbf{R}^m)$, *где* $p \geq 1$;
2. $F(x^0, y^0) = 0$;
3. $F'_y(x^0, y^0)$ – *обратимая матрица.*

Тогда найдутся окрестность $U_n^x(x^0)$ *точки* x^0 *в* I_n^x, *окрестность* $V_m^y(y^0)$ *точки* y^0 *в* I_m^y *и отображение* $f: U_n^x(x^0) \to V_m^y(y^0)$, *обладающие следующими свойствами:*

1'. $U_n^x(x^0) \times V_m^y(y^0) \subset I$;

2'. *Функция* $y = f(x)$ *является решением уравнения* $F(x;\ y) = 0$ *при всех* $x \in U_n^x(x^0)$, $f(x) \in V_m^y(y^0)$, *то есть является неявной функцией, определяемой уравнением* $F(x;\ y) = 0$;

3'. $y^0 = f(x^0)$;

4'. $f \in C^p(U_n^x(x^0);\ V_m^y(y^0))$, *причем справедливо равенство*

$$f'(x^0) = -(F_y'(x^0;\ y^0))^{-1} \circ (F_x'(x^0;\ y^0)).$$

2. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В $\mathbf{R}^k$ $(k \geq 1)$

Доказательство теоремы существования гладкой неявной функции основано на применении принципа сжимающих отображений. Поэтому на первом шаге мы дадим определение сжимающего отображения, сформулируем и докажем принцип сжимающих отображений в $\mathbf{R}^k$, $k \geq 1$.

Определение 2. Отображение F: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ называется *сжимающим отображением*, если существует положительное число q такое, что $0 < q < 1$, и для любых двух точек $x;\ y \in \mathbf{R}^k$ верно неравенство

$$\rho(F(x);\ F(y)) \leq q\,\rho(x;\ y); \tag{3}$$

где ρ – произвольная метрика в $\mathbf{R}^k$.

Контрольный вопрос 1. Докажите, что любое сжимающее отображение непрерывно на $\mathbf{R}^k$.

Определение 3. Точка $x \in \mathbf{R}^k$ называется *неподвижной точкой* отображения F: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$, если $F(x) = x$.

Принцип сжимающих отображений. *Всякое сжимающее отображение F в пространстве $\mathbf{R}^k$ имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. 1) Возьмем произвольно точку $x_0 \in \mathbf{R}^k$. Определим точки

$$x_1 = F(x_0),\ x_2 = F(x_1) = F^2(x_0),\ \ldots,\ x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0). \tag{4}$$

Установим фундаментальность последовательности $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Воспользуемся формулами (3) – (4). Предположим, для определенности, что $m > n$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(F^n(x_0), F^m(x_0)) \le q^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$
$$\le q^n[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \le$$
$$\le q^n \rho(x_0, x_1)(1 + q + \dots + q^{m-n-1}) \le q^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}.$$

Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$. Решая в натуральных числах неравенство

$$q^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-q} < \varepsilon$$

и полагая

$$n_0 = \max\left\{1, E\left(\log_q\left(\frac{(1-q)\varepsilon}{\rho(x_0, x_1)}\right)\right)\right\},$$

где $E\left(\log_q\left(\frac{(1-q)\varepsilon}{\rho(x_0, x_1)}\right)\right)$ – целая часть числа, убеждаемся в том, что при всех $m > n > n_0$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Последнее означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\ge 1}$ фундаментальна.

2) Используя критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbf{R}^k$, укажем точку $x \in \mathbf{R}^k$ такую, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Покажем, что x – неподвижная точка F.

Действительно, в силу непрерывности сжимающего отображения F и формул (4) верны равенства

$$F(x) = F(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x.$$

Таким образом, x – неподвижная точка F.

3) Установим единственность неподвижной точки, существующей у F. В самом деле, используем неравенство (3) для точек $x, y \in \mathbf{R}^k$ таких, что $F(x) = x$, $F(y) = y$. Тогда имеем:

$$\rho(x, y) \le q\rho(x, y).$$

Т.к. $q < 1$, то получаем отсюда, что $\rho(x; y) = 0$. Следовательно, $x = y$. Принцип сжимающих отображений доказан.

Контрольный вопрос 2. Приведите пример отображения F такого, что

$$\rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y)$$

при любых $x \ne y$, которое не имеет неподвижных точек.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛАДКОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Сделаем ряд подготовительных замечаний к доказательству теоремы, сформулированной в п. 1.

1. В том случае, если начальная точка (x^0, y^0) не совпадает с началом координат, перенесём эту точку в $(0{,}0)$, используя линейную замену $\bar{x} = x - x^0, \bar{y} = y - y^0$.

При этом условия теоремы существования гладкой неявной функции не нарушаются. Поэтому в дальнейшем будем использовать начальные условия $x^0 = 0,\ y^0 = 0$.

2. Введём в рассмотрение однопараметрическое семейство отображений

$$g_x(y) = y - (F_y'(0{,}0))^{-1} F(x, y), \tag{5}$$

зависящих от параметра $x \in U_n^x(0)$, и определённых (как функции переменной y) на окрестности $V_m^y(0)$.

3. Обратим внимание на корректность определения отображений однопараметрического семейства (5).

В самом деле, пусть (x, y) – произвольная точка из $U_n^x(0) \times V_m^y(0)$. Тогда $F(x,y) \in \mathbf{R}^m$. $F_y'(x, y)$ – линейное отображение окрестности $U_n^x(0) \times V_m^y(0)$ в пространство $\mathbf{R}^m$.

Т.к. линейное отображение $F_y'(0{,}0)$: $\mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$ имеет непрерывное обратное отображение $(F_y'(0{,}0))^{-1}$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{n+m}$, то композиция $(F_y'(0{,}0))^{-1} \cdot F(x, y)$ корректно определена и принимает значения в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$.

Таким образом, показано, что при любом $x \in U_n^x(0)$ отображение g_x (как функция переменной y) действует из окрестности $V_m^y(0)$ в пространство $\mathbf{R}^m$.

Следующее утверждение устанавливает взаимосвязь между отображениями однопараметрического семейства (5) и задачей существования неявной функции.

Предложение 1. *Векторное уравнение* (1) *локально разрешимо в некоторой окрестности точки* $(0{,}0)$ *в виде функции* $y = y(x)$ *в том и только том случае, если* $y(x)$ *есть неподвижная точка отображения* g_x.

В самом деле, из формулы (5) следует, что тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ выполнено в том и только в том случае, если справедливо равенство $g_x(y(x)) = y(x)$ (то есть точка $y(x)$ является неподвижной для отображения g_x).

4. Доказательство существования непрерывной неявной функции.

Пусть $U_n^x(0) = U_{n,\alpha}^x(0) = (-\alpha, \alpha)$, $V_m^y(0) = V_{m,\beta}^y(0) = (-\beta, \beta)$, где α, β – радиусы окрестностей $U_n^x(0)$ и $V_m^y(0)$ соответственно.

Убедимся в том, что существует положительное число $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ такое, что при любом $x \in U^x_{n,\alpha}(0)$ таком, что $\|x\| < \gamma$, отображение $g_x(y): V^y_{m,\beta}(0) \to \mathbf{R}^m$ при всех $y \in V^y_{m,\beta}(0)$ таких, что $\|y\| < \gamma$, является сжимающим с коэффициентом сжатия, не превосходящим 1/2.

В самом деле, при любом фиксированном $x \in U^x_{n,\alpha}(0)$ отображение

$$g_x(y): V^y_{m,\beta}(0) \to \mathbf{R}^m$$

дифференцируемо в силу условия 1 теоремы о неявной функции и формулы (5).

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} g_x(y) = E_y - (F_y'(0,0))^{-1} \cdot (F_y'(x,y)) = (F_y'(0,0))^{-1}\left(F_y'(0,0) - F_y'(x,y)\right),$$

где E_y стандартная единичная $(m \times m)$-матрица.

Так как отображение $F_y'(x,y)$ непрерывно в точке (0,0) и обратимо в этой точке, то найдется окрестность

$$W^{x,y}_\gamma\left((0,0)\right) \subset U^x_{n,\alpha}(0) \times V^y_{m,\beta}(0),\ (\gamma < \min\{\alpha,\beta\})$$

точки (0,0) в пространстве $\mathbf{R}^{m+n}$ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial y} g_x(y) = (F_y'(0,0))^{-1}\left(F_y'(0,0) - F_y'(x,y)\right) < \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Всюду в дальнейшем будем считать выполненными неравенства $\|x\| < \gamma$, $\|y\| < \gamma$, так, что верна оценка (6).

Воспользуемся теоремой Лагранжа о конечном приращении. Тогда при всех x, y_1, y_2 таких, что $\|x\|$, $\|y_1\|$, $\|y_2\| < \gamma$, имеем:

$$\|g_x(y_1) - g_x(y_2)\| \le \sup_{\xi \in (y_1, y_2)} \left|\frac{\partial}{\partial y} g_x(\xi)\right| \cdot \|y_1 - y_2\| < \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|. \qquad (7)$$

Наш следующий шаг состоит в нахождении замкнутой инвариантной относительно $g_x(y)$ окрестности точки 0 в пространстве $\mathbf{R}^m$, т.е. такой замкнутой окрестности, образ которой при отображении $g_x(y)$ содержится в этой окрестности. Для нахождения такой окрестности возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon < \gamma$. Воспользуемся непрерывностью отображения $F(x,y)$ в точке (0,0) и по числу $\varepsilon > 0$ выберем $0 < \delta < \gamma$ так, чтобы при всех x, удовлетворяющих неравенству $\|x\| < \delta$, выполнялось

$$\|g_x(0)\| = \left\|(F_y'(0,0))^{-1} \cdot F(x,0)\right\| \le \left\|(F_y'(0,0))^{-1}\right\| \cdot \left\|F(x,0) - F(0,0)\right\| < \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (8)$$

Пусть теперь $\|x\| < \delta(\varepsilon) < \gamma,\quad \|y\| \le \varepsilon < \gamma$. Тогда, используя неравенства (7), (8), получаем

$$\|g_x(y)\| \le \|g_x(y) - g_x(0)\| + \|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что при всех x таких, что $\|x\| < \delta(\varepsilon)$, справедливо включение

$$g_x\left(\overline{V}^y_{m,\varepsilon}(0)\right)\subset \overline{V}^y_{m,\varepsilon}(0),$$

где $\overline{(\cdot)}$ означает замыкание множества.

Из соотношений (7) – (9) следует, что отображение $g_x(y)$ является сжимающим, действующим в полном (инвариантном) метрическом пространстве $\overline{V}^y_{m,\varepsilon}(0)$. Тогда в силу принципа сжимающих отображений при каждом x таком, что $\|x\| < \delta(\varepsilon)$, существует единственная точка $y = y(x)$, где $y(x)\in V^y_{m,\varepsilon}(0)$, которая является единственной неподвижной точкой отображения $g_x(y): \overline{V}^y_{m,\beta}(0) \to \overline{V}^y_{m,\beta}(0)$.

Таким образом, в силу предложения 1 в окрестности $U^x_{n,\delta(\varepsilon)}(0)$ существует единственная неявная функция, определяемая уравнением (1), такая, что $y(x): U^x_{n,\delta(\varepsilon)}(0) \to V^y_{m,\varepsilon}(0)$ и $y(0)=0$. Из приведённых рассуждений следует также, что неявная функция $y = y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Заметим, что в условиях общей теоремы существования неявной функции линейный оператор $F'_y(x,y)$ обратим в некоторой окрестности начальной точки $\left(x^0, y^0\right)$. Поэтому, выбирая любую другую точку из этой окрестности в качестве начальной и повторяя приведённые рассуждения, получаем, что единственная неявная $y = y(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Существование непрерывной неявной функции доказано.

5. Покажем, что линейный оператор

$$L = -\left(F'_y\left(x^0, y^0\right)\right)^{-1}\cdot F'_x\left(x^0, y^0\right)$$

является дифференциалом функции $y = y(x)$ в точке $x = x^0$. Как и в предыдущих рассмотрениях, будем считать, что $x^0 = 0,\ y^0 = 0$.

Используя соотношение (1) и дифференцируемость F в точке (0,0), имеем

$$\|y(x) - y(0) - L(x)\| = \|y(x) - L(x)\| = \left\|y(x) + \left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\cdot\left(F'_x(0,0)\right)(x)\right\| =$$

$$= \left\|\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\cdot\left(\left(F'_x(0,0)\right)(x) + \left(F'_y(0,0)\right)y(x)\right)\right\| =$$

$$= \left\|-\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\cdot\left(F(x,y(x)) - F(0,0) - F'_x(0,0)(x) - F'_y(0,0)y(x)\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|-\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\left(F(x,y(x)) - F(0,0) - F'_x(0,0)(x) - F'_y(0,0)y(x)\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|-\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\right\|\cdot\|\alpha(x,y(x))\|\cdot\left(\|x\| + \|y(x)\|\right),$$

где $\alpha(x, y \to 0)$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Введём следующие обозначения. Положим $\|L\| = a, \left\|\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\right\| = b$. Имеем

$$\|y(x)\| = \|y(x) - L(x) + L(x)\| \le \|y(x) - L(x)\| + a\|x\|.$$

Поэтому, продолжая указанные выше оценки, получаем

$$\|y(x)-L(x)\| \le \frac{(a+1)b}{1-ba(x,y(x))}\|\alpha(x,y(x))\|\cdot\|x\|.$$

Последнее означает, что

$$\|y(x)-y(0)-L(x)\| = \|y(x)-L(x)\| = o(\|x\|), \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, L – дифференциал функции $y = y(x)$ при $x = x^0 = 0$.

6. Из условия 2 общей теоремы существования неявной функции следует, что в некоторой окрестности точки x^0 неявная функция $y = y(x)$ непрерывно дифференцируема, и справедливо равенство

$$y'(x) = -\left(F_y'(x,y(x))\right)^{-1}\cdot\left(F_x'(x,y(x))\right). \tag{10}$$

Из условия 2 и равенства (10) следует также, что $y(x) \in C^p\left(U_n^x(x^0), V_m^y(y^0)\right)$.

Последнее замечание завершает доказательство общей теоремы существования гладкой неявной функции. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная выше теорема дает лишь достаточные условия существования гладкой неявной функции.

Контрольный вопрос 3. Сформулируйте теорему существования гладкой неявной функции и приведите ее доказательство для следующих случаев:

а) $m = n = 1$;

б) $n > 1, \quad m = 1$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

Задача 1. Найти в указанных точках частные производные функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением $u + \ln(x + y + u) = 0$, при (1,–1).

Решение. Проверим выполнение условий теоремы существования неявной функции $u = u(x,y)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 1, y_0 = -1$.

Положим $F(x,y,u) = u + \ln(x + y + u)$. Точке $(x_0, y_0) = (1,-1)$ соответствует значение u_0, удовлетворяющее уравнению $u + \ln(u) = 0$. Используя первую теорему Больцано – Коши об обращении непрерывной функции в ноль и строгую монотонность функций $z = -u$, $z = \ln u$ (рис.1) получаем, что уравнение $u + \ln(u) = 0$ имеет единственное решение $u_0 \in (0,1)$.Тогда точка, в которой необходимо найти частные производные имеет координаты $(1,-1, u_0)$. Поэтому

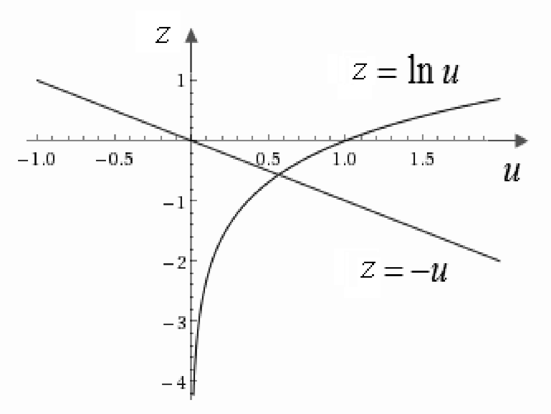

Рис. 1. Графики функций $z = -u$, $z = \ln u$

$F_u' = \frac{\partial}{\partial u}\left(u + \ln(x + y + u)\right)\Big|_{(1,-1,u_0)} = 1 + \frac{1}{u_0}$, причём $F_u' = 1 + \frac{1}{u_0} > 1$. Следовательно, выполнено условие 3) теоремы существования гладкой неявной функции, а также условие 1) для $p = 1$ и условие 2).

Найдём $F_x' = \frac{1}{x + y + u}$, $F_y' = \frac{1}{x + y + u}$, $F_u' = 1 + \frac{1}{x + y + u}$. Поскольку $F_u' \neq 0$ можем найти $u_x' = -\frac{F_x'}{F_u'} = -\frac{1}{u_0\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)} = -\frac{1}{1 + u_0}$, т.к. $F_x' = F_y'$, то $u_x' = u_y'$, поэтому

$u_y' = -\frac{1}{1 + u_0}$.

Задача 2. Найти дифференциал функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - xz + y = 0$, в точках 1) (3,–2,2); 2) (3,–2,–1).

Решение. По формуле для дифференциала функции двух переменных имеем:

$$dz = z_x' dx + z_y' dy. \qquad (11)$$

Найдём, как и в предыдущем случае, производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно. Положим $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$. Заданное уравнение в новых обозначениях можно записать в виде:

$$F(x, y, z) = 0 \text{ или } z^3 - xz + y = 0 \qquad (12)$$

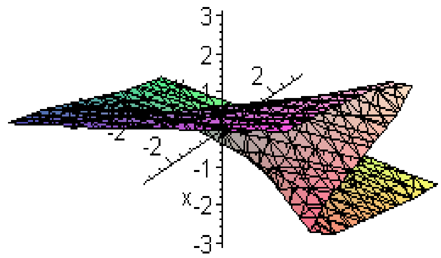

Рис. 2. Поверхность $z^3 - xz + y = 0$

(см. рис. 2). Тогда $F_x'(x, y, z) = -z$, $F_y'(x, y, z) = 1$, $F_z'(x, y, z) = 3z^2 - x$.

1) В точке $M_1(x_0, y_0, z_0) = (3,-2,2)$ получаем $F_x'(3,-2,2) = -2$, $F_y'(3,-2,2) = 1$, $F_z'(3,-2,2) = 9$. В этой точке выполнены условия 1) – 3) теоремы существования и единственности неявной функции $z = z(x, y)$. Следовательно, $z_x' = \frac{z}{3z^2 - x}$, $z_y' = \frac{-1}{3z^2 - x}$. Поэтому, используя формулу (1) для рассматриваемого случая, имеем:

$$dz(3,-2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy = \frac{1}{9}(2dx - dy).$$

Сохраним обозначения пункта 1.

2) В точке $M_2(x_0, y_0, z_0) = (3,-2,-1)$ имеем

$$F_x'(3,-2,-1) = 1,\ F_y'(3,-2,-1) = 1,\ F_z'(3,-2,-1) = 0.$$

Поэтому нарушено условие 3) теоремы существования гладкой неявной функции $z = z(x, y)$. В замечании 1) было отмечено, что обсуждаемая теорема даёт только лишь достаточные, но не необходимые условия существования гладкой неявной функции. Поэтому вопрос существования такой функции в некоторой окрестности точки $M_2\,(3,-2,-1)$ требует дополнительного исследования.

По-прежнему, рассмотрим уравнение

$$z^3 - xz + y = 0.$$

Точка $M_2(3,-2,-1)$ лежит на поверхности, определяемой заданным уравнением. Имеем: $F_z'(x, y, z) = 3z^2 - x$ Поэтому множество нулей частной производной F_z' заполняет цилиндрическую поверхность $x = 3z^2$, причём точка M_2 принадлежит этой цилиндрической поверхности. Следовательно, в точке M_2 не выполнены условия локальной теоремы существования C^1– гладкой неявной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением (11), но в этой точке выполнены условия локальной теоремы существования C^1– гладкой неявной функции $y = y(x, z)$, так как $F_y'(x, y, z) = 1$ в произвольной точке (x, y, z), лежащей на поверхности, определяемой уравнением (12). Поэтому $y_z'(x, z) = 0$ при всех (x, z), лежащих на параболе $x = 3z^2$ в плоскости xOz, и, в частности $y_z'(3,-1) = 0$. Функция $F(x,y,z)$ сохраняет строгую монотонность по z как при всех $x < 3z^2$, так и при всех $x > 3z^2$. Следовательно, на каждом из этих множеств существуют C^1– гладкие неявные функции вида $z = z(x, y)$. В то же время при $x \le 3z^2$ существует функция $z = z(x, y)$, непрерывная в точках параболы $x = 3z^2$ и, в частности, в точке $(3,-1)$. При этом существует $\lim\limits_{y\to -2} z_y'(3, y) = \infty$. Тогда в силу теоремы Дарбу о промежуточном значении частной производной справедливо равенство $z_y'(3,-2) = \infty$. Следовательно, функция $z = z(x, y)$ не дифференцируема в точке $(3,-1)$.

Задача 3. Исследовать вопрос существования функции, заданной неявно уравнением $z \cdot e^z = x \cdot e^x + y \cdot e^y$. Найти du в точке (x, y), если $u = \dfrac{x + z(x, y)}{y + z(x, y)}$.

Решение. 1) Положим $F(x, y, z) = x \cdot e^x + y \cdot e^y - z \cdot e^z$. Заданное уравнение можно записать в виде $F(x, y, z) = 0$ или $x \cdot e^x + y \cdot e^y - z \cdot e^z = 0$.

Тогда $F_x'(x, y, z) = e^x + xe^x$, $F_y'(x, y, z) = e^y + ye^y$, $F_z'(x, y, z) = -(e^z + ze^z)$.

В любой точке (x, y) выполнены условия 1) – 3) теоремы существования и единственности гладкой неявной функции $z = z(x, y)$. Поэтому

$$z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{e^x + x \cdot e^x}{-(e^z + ze^z)} = \frac{e^x(1 + x)}{e^z(1 + z)} = e^{x-z}\,\frac{1 + x}{1 + z},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^y + y\cdot e^y}{-(e^z + ze^z)} = \frac{e^y(1+y)}{e^z(1+z)} = e^{y-z}\,\frac{1+y}{1+z}.$$

2) Форма первого дифференциала имеет вид $du = u'_x dx + u'_y dy$. Чтобы его найти, необходимо выразить u'_x, u'_y. Имеем:

$$u'_x = \frac{(1+z'_x(x,y))\cdot(y+z(x,y)) - (x+z(x,y))\cdot z'_x(x,y)}{(y+z(x,y))^2} = \frac{y + z'_x\cdot y + z - xz'_x}{(y+z)^2}$$

$$u'_x = \frac{(y+z)+(y-x)z'_x}{(y+z)^2},\quad u'_y = \frac{-(x+z)+(y-x)z'_y}{(y+z)^2}$$

Подставив найденные в пункте 1 выражения для z'_x, z'_y, получаем:

$$u'_x = \frac{(y+z)+(y-x)e^{x-z}\dfrac{1+x}{1+z}}{(y+z)^2} = \frac{(1+z)(y+z)+e^{x-z}(y-x)(x+1)}{(y+z)^2(1+z)},$$

$$u'_y = \frac{-(x+z)+(y-x)e^{y-z}\dfrac{1+y}{1+z}}{(y+z)^2} = \frac{-(1+z)(x+z)+e^{y-z}(y-x)(y+1)}{(y+z)^2(1+z)},$$

3) Используя найденные в пункте 2 выражения для частных производных функции $u = u(x, y)$, окончательно получаем:

$$du = \frac{1}{(y+z)^2(1+z)}\Big(((1+z)(y+z)+e^{x-z}(y-x)(x+1))dx + {} \\ + (-(1+z)(x+z)+e^{y-z}(y-x)(y+1))dy\Big).$$

Задача 4. Пусть дифференцируемая функция $z = z(x,y)$ определена уравнением $f(x-y, y-z, z-x) = 0$, где $f(u,v,w) = 0$ – дифференцируемая функция. Найти $dz(x,y)$.

Решение. Запишем формулу для дифференциала $dz(x,y)$. Имеем: $dz(x,y) = z'_x dx + z'_y dy$. Найдём частные производные z'_x и z'_y, если функция z задана неявно уравнением $f(x-y, y-z, z-x) = 0$. Используя теорему существования гладкой неявной функции, получаем $z'_x = -\dfrac{f'_x}{f'_z}$, $z'_y = -\dfrac{f'_y}{f'_z}$.

Положим $u = x-y, v = y-z, w = z-x$. Найдем необходимые производные. Имеем $f'_x = f'_u + f'_w\cdot(-1) = f'_u - f'_w$, $f'_y = f'_u\cdot(-1) + f'_v\cdot(1) = -f'_u + f'_v$, $f'_z = f'_v\cdot(-1) + f'_w\cdot(1) = -f'_v + f'_w$. Тогда

$$z'_x = -\frac{f'_u - f'_w}{-f'_v + f'_w} = \frac{-f'_u + f'_w}{-f'_v + f'_w},\quad z'_y = -\frac{-f'_u + f'_v}{-f'_v + f'_w} = \frac{f'_u - f'_v}{-f'_v + f'_w}.$$

Подставим полученные выражения в формулу дифференциала. Получаем:

$$dz=\frac{1}{f'_w-f'_v}\left(\left(-f'_u+f'_w\right)dx+\left(f'_u-f'_v\right)dy\right).$$

Задача 5. Найти в точке (1;1) дифференциалы для дифференцируемых функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$, заданных неявно, условиями $x=\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\cos\left(\frac{v}{y}\right)$, $y=\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\sin\left(\frac{v}{y}\right)$, $u(1,1)=0$, $v(1,1)=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Укажем два способа решения сформулированной задачи.

1. Имеем: $du(x,y)=u'_x dx+u'_y dy$, $dv(x,y)=v'_x dx+v'_y dy$.

Чтобы применить теорему существования гладкой неявной функции, положим $F_1(x,y,u,v)=-x+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}$, $F_2(x,y,u,v)=-y+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}$. Тогда точка $\left(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4}\right)$ лежит на поверхности, заданной уравнениями

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\ F_2(x,y,u,v)=0.\end{cases}$$

Используем теорему существования гладкой неявной функции. Получаем:

$$\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=-\begin{pmatrix}F'_{1u} & F'_{1v}\\ F'_{2u} & F'_{2v}\end{pmatrix}^{-1}_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\begin{pmatrix}F'_{1x} & F'_{1y}\\ F'_{2x} & F'_{2y}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}.$$

Найдем частные производные введенных выше функций. Имеем:

$F'_{1u}=\frac{\sqrt{2}}{x}e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}$, поэтому $F'_{1u}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^0\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

$F'_{1v}=-\frac{\sqrt{2}}{y}e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}$, поэтому $F'_{1v}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}e^0\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$.

$F'_{2u}=\frac{\sqrt{2}}{x}e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}$, поэтому $F'_{2u}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^0\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

$F'_{2v}=\frac{\sqrt{2}}{y}e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}$, поэтому $F'_{2v}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^0\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

Имеем $\begin{pmatrix}F'_{1u} & F'_{1v}\\ F'_{2u} & F'_{2v}\end{pmatrix}_{(1,1,0,\frac{\pi}{4})}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Полученная матрица обратима, т.к. $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Тогда $\begin{pmatrix}F'_{1u} & F'_{1v}\\ F'_{2u} & F'_{2v}\end{pmatrix}^{-1}_{(1,1,0,\frac{\pi}{4})}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Найдем частные производные, необходимые для вычисления значений $du(1{,}1)$, $dv(1{,}1)$. Имеем:

$F'_{1x} = -1+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\left(-\frac{u}{x^2}\right)\cos\frac{v}{y}$, в частности, $F'_{1x}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4}) = -1+\sqrt{2}e^{0}\left(\frac{0}{1}\right)\cos\frac{\pi}{4} = -1$;

$F'_{1y} = -\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\left(\frac{-v}{y^2}\right)$, в частности, $F'_{1y}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{0}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

$F'_{2x} = \sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\left(-\frac{u}{x^2}\right)\sin\frac{v}{y}$, в частности, $F'_{2x}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{0}\left(\frac{0}{1}\right)\sin\frac{\pi}{4} = 0$;

$F'_{2y} = -1+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\left(\frac{-v}{y^2}\right)$, в частности,

$$F'_{2y}(1{,}1{,}0,\frac{\pi}{4}) = -1+\sqrt{2}e^{0}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{4} = -1-\frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{pmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\pi}{4} \\ 0 & -1-\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & \frac{\pi}{4} \\ 0 & -\frac{\pi}{4}-1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+0 & \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+0 & -\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$du = \frac{dx+dy}{2},\; dv = -\frac{dx}{2}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)dy.$$

Приведем другой способ решения этой задачи.

2. Дифференцируя обе части исходной системы, получаем

$$dx = \sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\,\frac{xdu-udx}{x^2}\cos\frac{v}{y}+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}(-\sin\frac{v}{y})\,\frac{ydv-vdy}{y^2},$$

$$dy = \sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}\,\frac{xdu-udx}{x^2}\sin\frac{v}{y}+\sqrt{2}e^{\frac{u}{x}}(\cos\frac{v}{y})\,\frac{ydv-vdy}{y^2}.$$

Далее подставим $x=1, y=1, u=0, v=\frac{\pi}{4}$, получим

$$dx = \sqrt{2}e^{0}\,\frac{du}{1}\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}e^{0}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{dv-\frac{\pi}{4}dy}{1},$$

$$dy = \sqrt{2}e^{0}\,\frac{du}{1}\sin\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}e^{0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{dv-\frac{\pi}{4}dy}{1},$$

$$\begin{cases} dx = du - dv + \dfrac{\pi}{4}dy \\ dy = du + dv - \dfrac{\pi}{4}dy \end{cases}.$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$du = \frac{1}{2}(dx + dy).$$

Если же вычесть из второго уравнения первое, будем иметь $2dv - \frac{\pi}{2}dy = dy - dx$. Отсюда находим

$$dv = -\frac{1}{2}dx + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)dy.$$

Задача 6. Найти $y'(x)$ при $x = 0$, $y = 0$, если $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.

Решение. Положим $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^3$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \qquad (13)$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (13) в плоскости *xOy,* представляют собой трёхлепестковую розу. Для того чтобы легче было представить эту кривую, используем полярную систему координат, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$r^4 = 3r^3\cos^2\varphi\sin\varphi - r^3\sin^3\varphi + 3\sin^3\varphi - 3\sin^3\varphi.$$

Преобразуя полученное равенство, имеем $r = \sin 3\varphi$. Т.к. $\sin 3\varphi \geq 0$, то $\varphi \in \left[\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right]$.

Следовательно, при $k = 0$ выполнено $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; при $k = 1$ выполнено $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$; а при $k = 2$ верно $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. Кривая приведена на рис. 3.

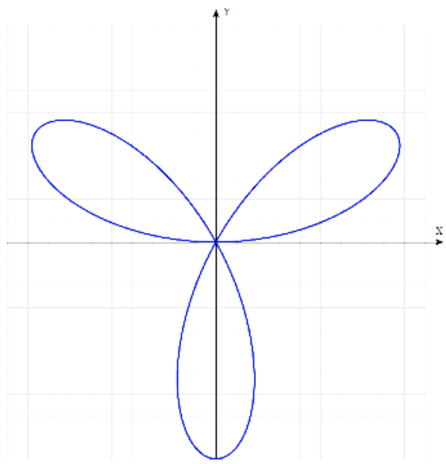

Рис. 3. Трёхлепестковая роза

Точка (0,0) особая, т.к. частные производные $F'_x = 4x(x^2 + y^2) - 6xy$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2) - 3x^2 - 3y^2$ обращаются в ноль в точке (0,0).

Выделим шесть участков монотонности построенной трёхлепестковой розы:

1) $y = y_1(x)$, соответствующий $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$,

2) $y = y_2(x)$, соответствующий $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$,

3) $y = y_3(x)$, соответствующий $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$,

4) $y = y_4(x)$, соответствующий $\varphi \in \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$,

5) $y = y_5(x)$, соответствующий $\varphi \in \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$,

6) $y = y_6(x)$, соответствующий $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Зададим трёхлепестковую розу параметрически уравнениями

$$x = \sin 3\varphi \cos\varphi, \quad y = \sin 3\varphi \sin\varphi.$$

Используя формулу для производной параметрически заданной кривой, имеем

$$y'(x) = \frac{3\cos 3\varphi \sin\varphi + \sin 3\varphi \cos\varphi}{3\cos 3\varphi \cos\varphi - \sin 3\varphi \sin\varphi},$$

где $x = \sin 3\varphi \cos\varphi, \quad y = \sin 3\varphi \sin\varphi$. Тогда

1) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, $y_1'(0) = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0} = 0$, при $\varphi = 0$;

2) $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $y_1'(0) = \dfrac{3 \cdot (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$, при $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

3) $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$, $y_1'(0) = \dfrac{3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$, при $\varphi = \frac{2\pi}{3}$;

4) $\frac{5\pi}{6} \le \varphi \le \pi$, $y_1'(0) = \frac{3 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{3 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0} = 0$, при $\varphi = \pi$;

5) $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $y_1'(0) = \dfrac{3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{3}$, при $\varphi = \frac{4\pi}{3}$;

6) $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$, $y_1'(0) = \dfrac{3 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot (-1)\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\sqrt{3}$, при $\varphi = \frac{5\pi}{3}$.

Таким образом, заданная кривая в точке $(0,0)$ имеет три различных касательных.

Эту задачу можно решить также, применив параметризацию $y = xt$. Имеем: $\left(x^2 + x^2t^2\right)^2 = 3x^2xt - x^3t^3$. Получаем отсюда: $x = \dfrac{3t - t^3}{\left(1+t^2\right)^2}$, $y = \dfrac{3t^2 - t^4}{\left(1+t^2\right)^2}$.

Найдем производную $y'(x)$ по формулам дифференцирования параметрически заданной функции. Имеем: $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{(1+t^2)(6t-4t^3) - 4t(3t-t^3)}{(1+t^2)(3-3t^2) - 4t(3t-t^3)}$.

Задавая $x = 0$, $y = 0$ и решая систему $\begin{cases} 3t - t^3 = 0 \\ 3t^2 - t^4 = 0 \end{cases}$, получим $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

Подставляя эти значения в выражение для производной, находим:

1) $y_1'(0) = 0$ при $t_1 = 0$;

2) $y_2'(0) = \dfrac{4\left(6\sqrt{3} - 12\sqrt{3}\right) - 4\sqrt{3}\cdot 0}{4(-6) - 4\sqrt{3}\cdot 0} = \sqrt{3}$ при $t_2 = \sqrt{3}$;

3) $y_3'(0) = \dfrac{4\left(-6\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) + 4\sqrt{3}\cdot 0}{4(-6) + 4\sqrt{3}\cdot 0} = -\sqrt{3}$ при $t_3 = -\sqrt{3}$.

Это означает, что в точке (0,0) производная имеет три различных значения, т.е. в точке (0,0) существуют три различных касательных к заданной кривой.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти в указанных точках частные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением:

а) $e^z - xyz - 2 = 0$, при (1,0);

б) $\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 = 0$, при (5,4).

2. Найти в указанной точке дифференциал функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$, а) (1,1,1), б) (1,1,–2).

3. Доказать, что если уравнением $yf(z/y) = x^2 + y^2 + z^2$, где $f(u)$ – дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x, y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

4. Найти $dz(1{,}1)$ для функции $z=2u+v$, если $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ – дифференцируемые функции, заданные неявно уравнениями

$$u+\ln v=x,\ v-\ln u=y.$$

5. Пусть системой уравнений

$$\begin{cases}(u-f(v))^2=x^2\left(y^2-v^2\right)\\ (u-f(v))\cdot f(v)=x^2v,\end{cases}$$

где $f(v)$ – дважды дифференцируемая функция, определяется функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Доказать, что $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot y$.

6. Пусть $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ – функции, определяемые уравнением $F(x,y,z,)=0$. Доказать, что $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

7. Найти $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, если система $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ определяет функции $x=x(z)$ и $y=y(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
2. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
3. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. СПб.: Кристалл, 1994. 496 с.

Татьяна Евгеньевна **Бибишкина**
Людмила Сергеевна **Ефремова**

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛАДКОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. ПРИМЕРЫ. ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.