МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

А.Т. Козинова
Н.Н. Ошарина

МАТЕМАТИКА
Линейная алгебра.
Аналитическая геометрия.
Линейное программирование

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки/ специальности: 43.03.02 «Туризм», 43.03.03 «Гостиничное дело», 08.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2019

УДК 512.6(07)
ББК 22.1я7
К59

К 59 Козинова А.Т., Ошарина Н.Н. МАТЕМАТИКА. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Линейное программирование: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 128с.

Рецензенты**:** к.ф.-м.н., доцент **С.А. Лапинова**
к.ф.-м.н., доцент **Е.В. Губина**

Учебное пособие предназначено для методической поддержки лекционных и практических занятий по дисциплине «Математика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки/ специальности: 43.03.02 «Туризм», 43.03.03 «Гостиничное дело», 08.05.01 «Экономическая безопасность».

В данном издании представлены следующие разделы дисциплины «Математика»: векторная алгебра, матрицы и определители, системы линейных алгебраических уравнений, многочлены и комплексные числа, элементы аналитической геометрии, линейное программирование. По всем темам предлагаются примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля и подготовки к аттестации.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 512.6(07)
ББК 22.1я7

Введение

Дисциплина «Математика» создает одну из фундаментальных основ экономического образования. Наряду с другими дисциплинами «Математика» включает важнейшие понятия и методы, которые наиболее часто востребованы в профессиональной деятельности, а также являются элементами общей культуры. Важнейшей целью изучения дисциплины «Математика» является формирование навыков применения математических понятий для решения теоретических и прикладных задач в разных областях. В данном учебном пособии приведены многочисленные примеры использования математических методов в экономике.

Учебное пособие включает следующие разделы: векторы и линейные пространства (глава 1), матрицы и определители (глава 2), системы линейных алгебраических уравнений (глава 3), многочлены и комплексные числа (глава 4), аналитическая геометрия (глава 5) и линейное программирование (глава 6). Результаты освоения любой темы дисциплины зависят от хороших знаний по другим темам, представленным в учебном пособии, как ранее, так и позднее. Например, для отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы (глава 3), нужно уметь анализировать многочлены и находить корни алгебраических уравнений (глава 4), а для анализа многочленов, их представления в виде суммы многочлена и конечной суммы элементарных дробей (глава 4), нужно уметь решать системы линейных уравнений (глава 3).

По всем темам в учебном пособии даны основные понятия, представлены важнейшие теоретические положения, приведены примеры типовых задач и показаны методы их решения, сформулированы задания для самостоятельной работы и вопросы для подготовки к аттестации.

Студентам следует учесть, что результаты изучения любой вузовской дисциплины зависят не только от умения работать с новыми понятиями и методами, но и от хороших знаний из программы среднего (полного) общего образования. Эти знания можно восполнить, используя учебно-справочную литературу, указанную и в данном учебном пособии.

Глава 1. Векторы и линейные пространства

1.1. Системы координат

Прямая линия с выбранным на ней положительным направлением, началом отсчёта O и единицей масштаба называется ***числовой (координатной осью)***. Точка M этой прямой характеризуется определенным числом – координатой x, т.е. $M(x)$.

Расстояние s между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на оси: $s = |x_2 - x_1|$

Координата точки $M(x)$, делящий отрезок M_1M_2 в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяется по формуле:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

Пример 1. Отрезок AB двумя точками C и D разделён на три части в отношении $1:2:2$. Определим координаты точек деления и длину отрезка CD, если $A(-6)$, $B(4)$.

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = 1:4 = 0.25$, тогда:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 0.25 \cdot 4}{1 + 0.25} = -4, \text{ т.е. } C(-4).$$

Точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda = 3:2 = 1.5$, тогда:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 1.5 \cdot 4}{1 + 1.5} = 0, \text{ т.е. } D(0).$$

Длина отрезка CD: $s = |0 - (-4)| = 4$.

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало отсчета O и одинаковую единицу масштаба образуют ***прямоугольную декартову систему координат на плоскости*** Oxy**.** Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy - осью ординат, точка O - началом координат. Любой точке M этой плоскости соответствуют пара чисел – абсцисса x и ордината y, называемых ее координатами, т.е. $M(x, y)$.

Расстояние s между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в заданном отношении λ определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Пример 2. Даны вершины треугольника: $A(-2,1)$, $B(-1,-4)$ и $C(-11,0)$. Найдем длину медианы, проведённой из вершины A.

Координаты точки основания медианы M, проведенной из вершины A (середина отрезка BC):

$$x = \frac{(-1)+(-11)}{2} = -6, \quad y = \frac{-4+0}{2} = -2, \text{ т.е. } M(-6,-2).$$

Вычислим длину медианы AM:

$$s = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox, Oy и Oz с общим началом координат O и одинаковой единицей масштаба образуют ***прямоугольную декартову систему координат в пространстве*** $Oxyz$**,** где ось Oz называется осью аппликат. Любая точка пространства M характеризуется тремя координатами − абсциссой x, ординатой y и аппликатой z, т.е. $M(x,y,z)$

Расстояние s между точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$s = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Координаты точки $M(x,y,z)$, делящей отрезок между точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ в заданном отношении λ, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Пример 3. Найдем длину диагоналей параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$, $C(-3,3,-3)$.

Длина диагонали AC равна $s = \sqrt{(-3-2)^2 + (3-1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{65}$

Точка пересечения диагоналей $M(x,y)$ делит их пополам. Тогда координаты точки M, середины отрезка AC, равны:

$$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad z = \frac{-3+3}{2} = 0, \text{ т.е. } M = \left(-\frac{1}{2},2,0\right).$$

Определим длину отрезка BM $s = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-5\right)^2 + (2-2)^2 + (0-(-1))^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, длина диагонали $BD = 2BM = 5\sqrt{5}$.

Полярная система координат состоит из некоторой точки O, называемой полюсом, и исходящего из него луча, называемого полярной осью. Любая точка $M(\rho,\varphi)$ плоскости характеризуется полярными координатами: ρ

– полярный радиус, φ – полярный угол, образованный отрезком OM с полярной осью. Угол $0 \le \varphi < 2\pi$ считается положительным при отсчёте от полярной оси против часовой стрелки.

Если начало декартовой системы координат совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и её полярные координаты ρ и φ связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \frac{y}{x} = tg\varphi \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{y}{x}$$

Пример 4. Точка задана полярными координатами $M\left(8, \frac{\pi}{6}\right)$. Найдем соответствующие координаты точки в декартовой системе координат.

Координаты точки M в декартовой системе координат равны:

$x = 8\,cos\,\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$, $y = 8\,\sin\frac{\pi}{6} = 4$, т.е. $M\left(4\sqrt{3}, 4\right)$.

1.2. Двумерные и трехмерные векторы. Действия над векторами

Вектором называется направленный отрезок AB с начальной точкой A и конечной точкой B. Векторы могут обозначаться либо с указанием его начала и конца $\overrightarrow{AB}$, либо одной буквой $\vec{a}$. ***Длиной*** (***модулем*** или ***нормой***) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора называется число, равное длине отрезка AB. Вектор $\vec{0}$, начало которого совпадает с концом, называют нулевым вектором.

Векторы, лежащие на параллельных прямых линиях или на одной прямой, называются ***коллинеарными***. Два вектора равны, если они коллинеарные и имеют одинаковые длины. Векторы, лежащие на параллельных плоскостях или в одной плоскости, называются ***компланарными.***

Координатами (x, y) или (x, y, z) вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат соответственно на плоскости и в пространстве называются координаты его конечной точки, если начало вектора совпадает с началом координат: $\vec{a} = (x, y)$ или $\vec{a} = (x, y, z)$. Вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ − единичные векторы (орты), совпадающие с направлением осей соответственно Ox, Oy, Oz; $\left|\vec{i}\right| = 1, \left|\vec{j}\right| = 1, \left|\vec{k}\right| = 1$. Равенство называется разложением вектора по координатным осям.

Длина вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ равна $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющими косинусами вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ называются косинусы углов α, β, γ, образуемых вектором $\vec{a}$ с осями координат Ox, Oy, Oz:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причём $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Если вектор задан координатами начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$, то в координатной форме для вектора $\vec{AB}$ справедливы соотношения:

$$\vec{AB} = ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1))$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Проекция $пр_x \vec{a}$ ***вектора*** $\vec{a}$ на ось Ox определяется формулой:

$пр_x \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ − угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси Ox.

Проекция суммы векторов на ось, равна сумме проекций этих векторов на ось:

$$пр_x(\vec{a} + \vec{в}) = пр_x \vec{a} + пр_x \vec{b}$$

Линейные операции над векторами:

1. ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** λ, называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, имеющий длину $\left|\vec{b}\right| = |\lambda|\left|\vec{a}\right|$ и направленный одинаково с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

2. ***Суммой векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец − с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).

Свойства линейных операций:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
3. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
4. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda\mu)\vec{a}$
5. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Вектор $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ называется ***обратным вектором*** к вектору $\vec{a}$. Справедливы следующие равенства:

1. $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$
2. $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + \left(-\vec{a}\right)$

Пример 5. Найдем длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (0,-2,1)$ и $\vec{b} = (2,1,0)$.

Обозначим векторы, соответствующие диагоналям параллелограмма, $\vec{d_1}$ и $\vec{d_2}$. Диагонали параллелограмма равны:

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} = (0,-2,1) + (2,1,0) = (2,-1,1)$$

$$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} = (0,-2,1) - (2,1,0) = (-2,-3,1)$$

Тогда длины диагоналей:

$$\left|\vec{d_1}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},\ \left|\vec{d_2}\right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

Пример 6. Определим длину и направление вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, если заданы его начало $M_1=(4,2,6)$ и конец $M_2=(1,4,0)$.

Координаты вектора равны $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,2,-6)$.
Определим длину вектора и его направляющие косинусы:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{9+4+36}=7, \qquad \cos\alpha=-\frac{3}{7}, \cos\beta=\frac{2}{7}, \quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}.$$

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\,\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

где $0\le\varphi\le\pi$ − угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы заданны своими координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $\vec{a}\,\vec{b}=0$, т.е. $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, т.е. $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=\lambda$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$
2. $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)$
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$

Пример 7. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ − единичные векторы, угол между которыми равен 120^0. Найдем угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a}\,\vec{b}=\left(2\vec{m}+4\vec{n}\right)\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=2\vec{m}\,\vec{m}+6\vec{m}\,\vec{n}+4\vec{n}\,\vec{n}=2+6\cos 120^{0}+4=3$$

$$\left|\vec{a}\right|^{2}=\left(2\vec{m}+4\vec{n}\right)^{2}=4\vec{m}\,\vec{m}+16\vec{m}\,\vec{n}+16\vec{n}\,\vec{n}=4+16\cos 120^{0}+16=12$$

$$\left|\vec{b}\right|^{2}=\left(\vec{m}+\vec{n}\right)^{2}=\vec{m}\,\vec{m}+2\vec{m}\,\vec{n}+\vec{n}\,\vec{n}=1+2\cos 120^{0}+1=1$$

Вычислим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=30^{o}$$

Пример 8. Даны радиус вектора трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\vec{r}_A=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{r}_B=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{r}_C=7\vec{i}+9\vec{j}+11\vec{k}$. Определим радиус вектор четвёртой вершины.

Пусть $\vec{r}_D=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Векторы, соответствующие сторонам параллелограмма, равны:

$$\vec{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\vec{BC}=\vec{r}_C-\vec{r}_B=5\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\vec{DC}=\vec{r}_C-\vec{r}_D=(7-x)\vec{i}+(9-y)\vec{j}+(11-z)\vec{k}$$

$$\vec{AD}=\vec{r}_D-\vec{r}_A=(x-1)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z-1)\vec{k}$$

Так как векторы $\vec{AB}$, $\vec{DC}$ и $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ коллинеарные, то соответственно

$$\frac{7-x}{1}=\frac{9-y}{2}=\frac{11-z}{4},\qquad \frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-1}{6}$$

Решая полученную систему:

$$\begin{cases}\dfrac{7-x}{1}=\dfrac{9-y}{2}=\dfrac{11-z}{4}\\[2mm]\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-1}{6}\end{cases}$$

, получим $x=6$, $y=7$ и $z=7$.

Тогда $\vec{r}_D=6\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}$.

Пример 9. Найдем проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=5\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$.

Введем обозначения:

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}=7\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k},$$

$$\vec{g}=\vec{b}+\vec{c}=6\vec{i}+2\vec{j}-9\vec{k}$$

Искомая проекция вектора:

$$np_{\vec{g}}\vec{d}=\left|\vec{d}\right|\cdot\cos\varphi=\frac{\vec{d}\,\vec{g}}{\left|\vec{g}\right|}=\frac{7\cdot6+(-5)\cdot2+3\cdot(-9)}{\sqrt{36+4+81}}=\frac{5}{11}$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, модуль которого равен произведению их модулей на синус угла между ними, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный так, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку:

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi,$$ где $0\le\varphi\le\pi$ − угол между векторами.

Примечание. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, если кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ в сторону вектора $\vec{b}$ виден из точек $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки, и левую тройку, если по часовой стрелке.

Выражение векторного произведения $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ через координаты сомножителей:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ − либо нулевые, либо коллинеарные векторы
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

3. $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$

4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Пример 10. Даны векторы $\vec{a}=(-2,3,0)$, $\vec{b}=(1,-4,-1)$. Найдем $\vec{a}\times\vec{b}$ и $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -4 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$$

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\vec{b}=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-6\vec{i}-4\vec{j}+10\vec{k}$$

Пример 11. Вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=14\vec{i}-42\vec{j}-21\vec{k}$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2}=49$$

Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, называется выражение вида $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

Если векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ заданы своими координатами, то их смешанное произведение определяется формулой:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, поэтому смешанное произведение обозначается $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.
2. Перестановка двух любых векторов в смешанном произведении меняет знак $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$

Примечание. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$V = \pm\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$

Объём пирамиды построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$V = \pm\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}{6}$

Примечание. В формулах расчета объемов параллелепипеда и пирамиды используется знак плюс при правой тройке векторов, минус − при левой тройке.

Пример 12. Найдем объем параллелепипеда с вершинами $A(1,0,1)$, $B(2,0,5)$, $C(1,-2,3)$ и $D(3,-4,3)$.

Определим векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$, исходящие из вершины A и совпадающие с рёбрами параллелепипеда:

$\vec{AB} = (1,0,4)$, $\vec{AC} = (0,-2,2)$, $\vec{AD} = (2,-4,2)$

Найдём смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-4+8) + 4\cdot 4 = 20$$

Объем параллелепипеда равен $V = \vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = 20$.

Пример 13. Установим, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-11)$.

Пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарные, так как их соответствующие координаты не пропорциональны. Найдём смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -11\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=2(11-27)-3(-11-3)-1(9+1)=0$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

1.3. Обобщенный n - мерный вектор

n - ***мерным вектором*** называется упорядоченный набор из n чисел, представленный в виде $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где x_i − i - тая координата вектора. Два n - мерных вектора $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ равны $X=Y$, когда равны их соответствующие координаты − $x_i=y_i$, $i=\overline{1,n}$.

Длиной (нормой) n ***- мерного вектора*** X называется число

$$|X|=\sqrt{XX}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2}\ .$$

Линейные операции над векторами:

1. ***Произведением вектора*** $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ***на действительное число*** λ называется вектор $U=\lambda X$, координаты которого u_i равны произведению λ на соответствующие координаты вектора - $u_i=\lambda x_i$, $i=\overline{1,n}$, т.е. $U=\lambda X=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$;
2. ***Суммой двух векторов*** X и Y одинаковой размерности n называется вектор $Z=X+Y$, координаты которого z_i равны суммам соответствующих координат этих векторов - $z_i=x_i+y_i$, $i=\overline{1,n}$, т.е. $Z=X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$.

Свойства линейных операций над векторами:

1. $X+Y=Y+X$
2. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$
3. $\alpha(\beta X)=\alpha\beta X$
4. $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$

5. $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$
6. Существует нулевой вектор $O=(0,0,...,0)$ такой, что $X+O=X$ для любого вектора X
7. Для любого вектора X существует противоположный вектор $(-X)$, причем $X+(-X)=O$.

Скалярным произведением двух векторов $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат:

$$XY=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Свойства скалярного произведения:

1. $XY=YX$
2. $\alpha(XY)=(\alpha X)Y=X(\alpha Y)$
3. $(X+Y)Z=XZ+YZ$
4. $XX\geq 0$ для любого вектора X, причем $XX=0$ тогда, когда $X=O$.

Угол между двумя ненулевыми n***- мерными векторами*** X и Y определяется соотношением

$$\cos\varphi=\frac{XY}{|X||Y|}, \text{ где } 0\leq\varphi\leq\pi.$$

Два ненулевых n- мерных вектора называются ***коллинеарными***, если угол между ними равен 0 или π, и ***ортогональными,*** если угол между ними равен $\pi/2$.

Для ненулевых коллинеарных векторов $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ справедливо соотношение $Y=\lambda X$ или $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=...=\dfrac{x_n}{y_n}=\lambda$.
Для двух ненулевых ортогональных векторов X и Y справедливо соотношение $XY=0$ или $x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n=0$.

Пример 14. Набор товаров состоит из четырех видов продукции в количествах 40,20,100 и 70 единиц. Цена единицы товара равна соответственно 7,3,8 и 5 денежных единиц. Определим стоимость набора товаров и ее изменение при изменении цены соответственно на 2,-1,4 и (-2) денежные единицы.

Введем вектор набора товаров $X=(40,20,100,70)$, вектор цен товаров в наборе $P=(7,3,8,5)$ и соответствующий вектор изменения цен $\Delta P=(2,-1,4,-2)$.

Стоимость набора товаров $PX = 7 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 70 = 1490$. Вектор новых цен $P^n = P + \Delta P$. Изменение стоимости набора товаров равно $P^n X - PX = (P + \Delta P)X - PX = \Delta PX = 2 \cdot 40 + (-1) \cdot 20 + 4 \cdot 100 + (-2) \cdot 70 = 320$.

Пример 15. Среди векторов $A = (-1{,}3{,}5{,}-4)$, $B = (4{,}2{,}2{,}3)$ и $C = (2{,}-6{,}-10{,}8)$ найдем коллинеарные и ортогональные векторы.

Найдем скалярное произведение векторов:

$$AB = (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 = 0$$

$$AC = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-6) + 5 \cdot (-10) + (-4) \cdot 8 = -102 \neq 0$$

$$BC = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) + 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 8 = 0$$

Следовательно, пары векторов A, B и B, C ортогональны.

Вектора A и C коллинеарные, т.к.

$$\frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{5}{-10} = \frac{-4}{8} = \lambda = -\frac{1}{2}.$$

1.4. Линейная зависимость и независимость векторов

Вектор $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), A_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

m – мерный вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ***разлагается по векторам*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются ***коэффициентами разложения вектора*** B по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Чтобы разложить вектор B по векторам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, необходимо найти коэффициенты разложения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для этого требуется решить систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную данному соотношению (см. главу 3). Разложения вектора $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$ и $B = l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_n A_n$ считаются отличными, если различна хотя бы одна пара соответствующих коэффициентов разложения, т.е. существует такой номер i, для которого $\lambda_i \neq l_i$.

Справедливы следующие утверждения о разложении векторов:

1. Нулевой вектор O разлагается по любой системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$
2. Если вектор B разлагается по части системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то он разлагается и по всей системе
3. Если вектор A разлагается по системе вектор $B_1, B_2, \ldots, B_m$, а каждый вектор этой системы разлагается по системе векторов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то вектор A разлагается по системе векторов $C_1, C_2, \ldots, C_n$

4. Каждый n - мерный вектор $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ разлагается по диагональной системе векторов следующим образом:
   $B=b_1E_1+b_2E_2+...+b_nE_n$, где
   $E_1=(1,0,0,...,0)$, $E_2=(0,1,0,...,0)$, …, $E_n=(0,0,0,...,1)$.

Пример 16. Определим, являются ли вектор $B=(1,6)$ линейно комбинацией векторов $A_1=(1,2)$ и $A_2=(0,2)$.

$B=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, т.е. $(1,6)=\lambda_1(1,2)+\lambda_2(0,2)$.

Решая систему линейных уравнений:

$\begin{cases}\lambda_1 = 1\\ 2\lambda_1+2\lambda_2=6\end{cases}$, получим $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Следовательно $B=A_1+2A_2$.

Векторы $A_1,A_2,...,A_n$ называются ***линейно зависимыми,*** если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, не равные одновременно нулю, при которых выполняется равенство:

$\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+...+\lambda_nA_n=O$

Векторы $A_1,A_2,...,A_n$ называются ***линейно независимыми,*** если равенство справедливо лишь при условии $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

Чтобы определить являются векторы $A_1,A_2,...,A_n$ линейно зависимыми или независимыми, необходимо проанализировать решение однородной системы линейных алгебраических уравнений, эквивалентной данному соотношению (см. главу 3).

Для линейно зависимых и линейно независимых векторов справедливы следующие утверждения:

1. Система векторов, состоящая из одного вектора $A\neq O$, линейно независима.
2. Диагональная система векторов $E_1=(1,0,0,...,0)$, $E_2=(0,1,0,...,0)$, …, $E_n=(0,0,0,...,1)$ линейно независима.
3. Система векторов $A_1,A_2,...,A_n$ линейно зависима, если хотя бы один из векторов системы разлагается по остальным векторам этой системы.

Геометрическая интерпретация линейной зависимости двухмерных и трехмерных векторов:

1. Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарные.
2. Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Пример 17. Определим, являются ли векторы $A_1=(1,0,-2)$ и $A_2=(2,-1,0)$ линейно зависимыми или линейно независимыми.

Рассмотрим соотношение $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2=O$, т.е.:

$$\lambda_1(1,0,-2)+\lambda_2(2,-1,0)=(0,0,0)$$

Решая систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \quad -\lambda_2=0,\\ -2\lambda_1 \quad =0\end{cases} \qquad \text{получим } \lambda_1=0, \lambda_2=0.$$

Следовательно, векторы A_1 и A_1 линейно независимы.

Пример 18. Векторы A,B,C линейно независимы. Выясним, будут ли линейно независимыми векторы $A,\ A+B,\ A+C$.

Чтобы определить линейную независимость векторов $A,\ A+B,\ A+C$, рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 A+\lambda_2(A+B)+\lambda_3(A+C)=O$$

Преобразуем его $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)A+\lambda_2 B+\lambda_3 C=O$.

В силу линейной независимости векторов A,B,C, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \quad \lambda_2 \quad =0\\ \qquad \lambda_3=0\end{cases}$$

В результате получим $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, векторы: $A,\ A+B,\ A+C$ линейно независимы.

1.5. Линейное n - мерное пространство

Векторным или линейным пространством над полем действительных (комплексных) чисел называется непустое множество V элементов любой природы, в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на действительные (комплексные) числа, удовлетворяющие определенным свойствам. Элементы векторного пространства называются ***векторами***.

Базисом векторного пространства называется совокупность линейно независимых векторов пространства V, по которым разлагается любой вектор векторного пространства. Векторное пространство называется конечномерным, если оно имеет конечный базис. Векторное пространство является бесконечномерным, если в нем для любого натурального n существует n линейно независимых векторов. Все базисы конечномерного векторного пространства V состоят из одного и того же числа векторов.

Размерностью векторного пространства называется максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов (число векторов в базисе пространства) и обозначается $\dim V$.

Евклидовым пространством называется конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел, в котором задано скалярное произведение, имеющее все необходимые свойства.

Пример. Каким должно быть число x, чтобы множество, состоящее из одного числа, являлось векторным пространством.

Число должно быть равно нулю $x=0$, т.к. только в этом случае в рассматриваемом множестве будут определены операции сложения и умножения на действительное число.

Множество n- мерных векторов с действительными компонентами образуют ***векторное или линейное пространство***, и обозначается R^n. Любая совокупность n линейно независимых векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в пространстве R^n образуют его ***базис***. Одним из базисов является диагональная система векторов:

$$E_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$
$$E_2 = (0,1,0,\ldots,0)$$
$$\ldots$$
$$E_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

Любой другой базис пространства R^n содержит n векторов. Каждый вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пространства R^n можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса

$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$, где

коэффициенты разложения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются ***координатами вектора*** *B* в базисе $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$\dim R^n = n$ – ***размерность пространства*** $\boldsymbol{R^n}$.

Пространство R^n является n- ***мерным линейным пространством.*** Линейное пространство R^n образует ***евклидово пространство***, так как в нем задано скалярное произведение векторов с соответствующими свойствами.

Векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n- мерного евклидова пространства образуют ***ортогональный*** базис, если эти векторы попарно ортогональны, т.е. $A_i A_j = 0$, и ***ортонормированный базис***, если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е.:

$A_i A_j = 0$ при $i \neq j$ и $|A_i| = 1$ при $i = \overline{1,n}$.

В n- мерном линейном пространстве R^n существует ортонормированный базис. Примером ортонормированного базиса служит диагональная система векторов: $E_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $E_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, …, $E_n = (0,0,0,\ldots,1)$.

Пример 19. Выясним, образуют ли базис в пространстве R^4 векторы $A_1=(1,1,1,1)$, $A_2=(1,0,1,0)$ и $A_3=(0,-1,0,1)$. $A_4=(1,0,0,1)$. Чтобы определить линейную независимость векторов, рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3+\lambda_4 A_4=O$$

Оно эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 \qquad +\lambda_4=0\\ \lambda_1 \qquad -\lambda_3 \qquad =0\\ \lambda_1+\lambda_2 \qquad\qquad =0\\ \lambda_1+ \qquad \lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}$$

Система имеет единственное решение

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.$$

Векторы A_1,A_2,A_3,A_4 линейно независимы и, следовательно, образуют базис в пространстве R^4.

Пример 20. Определим, какие из векторов $A_1=(2,-1)$, $A_2=(-3,-1)$ и $A_3=(4,-2)$ образуют базис в пространстве R^2. Разложим векторы, не входящие в базис, по векторам базиса.

Определим, какие пары векторов являются линейно независимыми.
Рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2=O, \quad \lambda_1(2,-1)+\lambda_2(-3,-1)=(0,0)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}2\lambda_1-3\lambda_2=0\\ -\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}$$

Она имеет только одно решение $\lambda_1=\lambda_2=0$. Векторы A_1 и A_2 линейно независимы.
Рассмотрим соотношение

$$l_1 A_1+l_2 A_3=O, \quad l_1(2,-1)+l_2(4,-2)=(0,0)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}2l_1+4l_2=0\\ -l_1-2l_2=0\end{cases}$$

Она имеет бесчисленное множество решений $(l_1=-2l_2\neq 0)$. Векторы A_1 и A_3 линейно зависимы.
Рассмотрим соотношение

$$k_1 A_2+k_2 A_3=O, \quad k_1(-3,-1)+k_2(4,-2)=(0,0)$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}-3k_1+4k_2=0\\ -k_1-2k_2=0\end{cases}$$

Она имеет только одно решение $k_1 = k_2 = 0$. Векторы A_2 и A_3 линейно независимы.

Пары векторов A_1, A_2 и A_2, A_3 образуют базисы в пространстве R^2.

Разложим A_3 по базису A_1, A_2: $\quad A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$

$$(4,-2) = \lambda_1(2,-1) + \lambda_2(-3,-1)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 4 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Она имеет решение $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$. Тогда $A_3 = 2A_1 + 0 \cdot A_2 = 2A_1$.

Разложим A_1 по базису A_2, A_3: $\quad A_1 = k_1 A_2 + k_2 A_3$,

$$(2,-1) = k_1(-3,-1) + k_2(4,-2).$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} -3k_1 + 4k_2 = 2 \\ -k_1 - 2k_2 = -1 \end{cases}$$

Она имеет решение $k_1 = 0$ и $k_2 = \dfrac{1}{2}$. Тогда $A_1 = 0 \cdot A_2 + \dfrac{1}{2}A_3 = \dfrac{1}{2}A_3$.

Пример 21. Векторы A_1, A_2 и A_3 образуют ортонормированный базис. Найдем угол между векторами $X = 3A_1 - A_3$ и $Y = 4A_1 + A_2 - 2A_3$.

$$\cos\varphi = \frac{XY}{|X||Y|} = \frac{(3A_1 - A_3)(4A_1 + A_2 - 2A_3)}{\sqrt{(3A_1 - A_3)^2}\,\sqrt{(4A_1 + A_2 - 2A_3)^2}} = \frac{3 \cdot 4 + (-1)(-2)}{\sqrt{9+1}\sqrt{16+1+4}} = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

$$\varphi = \arccos\sqrt{\frac{14}{15}}$$

1.6. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Известны координаты точек концов отрезка AB. Найти длину этого отрезка и координаты точки M, делящей этот отрезок в отношении $l:k$.

1. $A(-3,-5)$, $B(-8,6)$, $l = 2$, $k = 3$

2. $A(-7,28)$, $B(14,7)$, $l = 4$, $k = 3$

3. $A(-2,5)$, $B(4,-16)$, $l = 2$, $k = 1$

4. $A(1,-4)$, $B(5,-4)$, $l = 4$, $k = 5$

Задача 2. Найти в каком соотношении точка M делит отрезок от начала координат до точки $C(x_C, y_C, z_C)$, если она одинаково удалена от точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$.

1. $A(3,1,4)$, $B(-4,5,3)$, $C(0,6,0)$

2. $A(2,5,-7)$, $B(3,-7,-5)$, $C(10,0,0)$

3. $A(-3,3,5)$, $B(-1,2,4)$, $C(0,0,33)$

4. $A(6,9,4)$, $B(-8,4,-3)$, $C(0,8,0)$

Задача 3. Заданы координаты вершин треугольника $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$. Найти длины сторон треугольника, точку пересечения его медиан, основания медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.

1. $A(-6,-4)$, $B(3,-7)$, $C(-3,2)$

2. $A(2,5)$, $B(-3,4)$, $C(-4,-2)$

3. $A(-3,2)$, $B(-2,-5)$, $C(6,-1)$

4. $A(3,4)$, $B(2,-1)$, $C(1,-7)$

Задача 4. Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Найти его четвертую вершину $D(x_D, y_D, z_D)$.

1. $A(3,4,7)$, $B(-5,3,-2)$, $C(1,2,-3)$

2. $A(-1,-2,3)$, $B(-4,1,2)$, $C(5,2,7)$

3. $A(3,-4,2)$, $B(-5,2,-3)$, $C(-1,7,-2)$

4. $A(-5,2,4)$, $B(-3,-4,2)$, $C(6,-3,-3)$

Задача 5. Определить расстояние между точками $A(\rho_A,\varphi_A)$ и $B(\rho_B,\varphi_B)$, заданными полярными координатами.

1. $A\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3,\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $A\left(5,\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$
3. $A\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(8,\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $A\left(7,\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(5,\frac{2\pi}{3}\right)$

Задача 6. Заданы координаты точек $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$. Определить длину и направление вектора $\overrightarrow{AB}$ в декартовой системе координат.

1. $A(4,-2,6)$, $B(1,4,0)$
2. $A(2,2,0)$, $B(0,-2,5)$
3. $A(1,2,3)$, $B(3,-4,-2)$
4. $A(-3,5,3)$, $B(4,3,-4)$

Задача 7. Найти проекцию вектора $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если заданы точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$ и $D(x_D,y_D,z_D)$.

1. $A(3,3,-2)$, $B(0,-3,-4)$, $C(0,-3,0)$, $D(0,2,-4)$
2. $A(4,2,-3)$, $B(-5,6,-4)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,1,2)$
3. $A(-4,-3,5)$, $B(2,-5,6)$, $C(-2,3,-5)$, $D(3,-1,-2)$
4. $A(-5,-3,-2)$, $B(3,-4,-5)$, $C(4,2,3)$, $D(2,3,-4)$

Задача 8. Определить длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на которых построен параллелограмм с диагоналями $\vec{c}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}$ и $\vec{d}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}$.

1. $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{d}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$
2. $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$
3. $\vec{c}=-4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{d}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$
4. $\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{d}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

Задача 9. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

2. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

3. $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

4. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$

Задача 10. Даны два единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, угол между которыми равен 120^0. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$.

1. $\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$
2. $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + \vec{n}$
3. $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$
4. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$

Задача 11. Даны радиус векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$, $\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$, $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$. Определить радиус вектор четвёртой вершины $\vec{r}_D$.

1. $\vec{r}_A = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r}_B = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{r}_C = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

2. $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_B = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_C = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$

3. $\vec{r}_A = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_B = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_C = \vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$

4. $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r}_B = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r}_C = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

Задача 12. Определить вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$.

1. $\vec{a} = (2,3,5)$, $\vec{b} = (1,2,-1)$
2. $\vec{a} = (2,3,1)$, $\vec{b} = (-1,2,-1)$
3. $\vec{a} = (8,-2,3)$, $\vec{b} = (-1,-4,-5)$
4. $\vec{a} = (3,7,-3)$, $\vec{b} = (5,-1,2)$

Задача 13. Вычислить значения площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$ и $\vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}$.

1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
2. $\vec{a} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} - \vec{k}$
3. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$
4. $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

Задача 14. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол φ. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$ и $\vec{g} = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$, если известны значения $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.

1. $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{g} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\varphi = 30^0$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$
2. $\vec{p} = 5\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{g} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\varphi = 60^0$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$
3. $\vec{p} = -2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b}$, $\varphi = 120^0$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$
4. $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{g} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\varphi = 45^0$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$

Задача 15. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

1. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

2. $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

3. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

4. $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$

Задача 16. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами A, B, C, D.

1. $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$

2. $A(6,3,6)$, $B(2,8,3)$, $C(1,6,1)$, $D(8,4,1)$

3. $A(3,5,-1)$, $B(5,3,-4)$, $C(7,5,5)$, $D(-4,-2,6)$

4. $A(3,4,3)$, $B(3,6,2)$, $C(0,4,4)$, $D(4,8,2)$

Задача 17. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

1. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$,

2. $\vec{a} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

3. $\vec{a} = \vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 10\vec{k}$

4. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

Задача 18. Выяснить являются линейно зависимыми или линейно независимыми векторы $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ и $A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$.

1. $A_1 = (-7{,}5{,}19)$, $A_2 = (-5{,}7{,}-7)$, $A_3 = (-8{,}7{,}14)$

2. $A_1 = (1{,}4{,}6)$, $A_2 = (1{,}-1{,}1)$, $A_3 = (1{,}1{,}3)$

3. $A_1 = (1{,}8{,}1)$, $A_2 = (-2{,}3{,}3)$, $A_3 = (4{,}-11{,}9)$

4. $A_1 = (2{,}-3{,}1)$, $A_2 = (3{,}-1{,}5)$, $A_3 = (1{,}-4{,}3)$

Задача 19. Даны четыре вектора $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы A_1, A_2, A_3 образуют базис, и найти координаты вектора B в этом базисе.

1. $A_1 = (4{,}5{,}2)$, $A_2 = (3{,}01)$, $A_3 = (-1{,}4{,}2)$, $B = (5{,}7{,}8)$

2. $A_1 = (-2{,}3{,}5)$, $A_2 = (1{,}-3{,}4)$, $A_3 = (7{,}8{,}-1)$, $B = (1{,}20{,}1)$

3. $A_1 = (3{,}-5{,}2)$, $A_2 = (4{,}5{,}1)$, $A_3 = (-3{,}0{,}-4)$, $B = (-4{,}5{,}-16)$

4. $A_1 = (4{,}3{,}-1)$, $A_2 = (5{,}0{,}4)$, $A_3 = (2{,}1{,}2)$, $B = (0{,}12{,}-6)$

Задача 20. Заданы векторы $\vec{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{a_3} = (x_3, y_3, z_3)$. Выяснить является ли вектор $\vec{b} = (x, y, z)$ линейной комбинацией векторов $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$.

1. $\vec{a_1} = (-2{,}0{,}1)$, $\vec{a_2} = (1{,}-1{,}0)$, $\vec{a_3} = (0{,}1{,}2)$, $\vec{b} = (2{,}3{,}4)$

2. $\vec{a_1} = (1{,}2{,}1)$, $\vec{a_2} = (1{,}3{,}5)$, $\vec{a_3} = (0{,}-3{,}7)$, $\vec{b} = (3{,}2{,}52)$

3. $\vec{a_1} = (1{,}3{,}5)$, $\vec{a_2} = (0{,}2{,}0)$, $\vec{a_3} = (5{,}7{,}9)$, $\vec{b} = (0{,}4{,}16)$

4. $\vec{a_1} = (2{,}1{,}0)$, $\vec{a_2} = (1{,}-1{,}2)$, $\vec{a_3} = (2{,}2{,}-1)$, $\vec{b} = (3{,}7{,}-7)$

Глава 2. Матрицы и определители

2.1. Понятие матрицы. Действия над матрицами

Матрица – упорядоченная система информации, представленная в виде таблицы чисел, состоящей из m – строк, n – столбцов. Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (иногда с индексами). Таблица чисел записывается в круглых скобках:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

a_{ij} – элемент матрицы,

$i=\overline{1,m}$ – номер строки,

$j=\overline{1,n}$ – номер столбца.

Примечание. Иногда для удобства под буквой, обозначающей матрицу, указывают ее размеры $\underset{m\times n}{A}$.

Виды матриц:

- нулевая матрица, содержащая только нули;
- прямоугольная матрица, имеющая неравное число строк и столбцов;
- матрица-строка, имеющая одну строку чисел;
- матрица-столбец, имеющая один столбец чисел;
- квадратная матрица, имеющая равное число строк и столбцов;
- диагональная матрица, а именно квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали (с одинаковыми индексами);
- треугольная матрица, имеющая только нулевые элементы ниже (выше) главной диагонали;
- единичная матрица $\underset{n\times n}{E}$, а именно диагональная матрица, имеющая единицы на главной диагонали и нули ниже (выше) ее.

Операции над матрицами

1. ***Транспонирование матрицы***

   Элементы любой строки исходной матрицы в транспонированной матрице A^T находятся в столбце с таким же номером, в том же порядке: $a_{ij}^T = a_{ji},\ \forall i, j$.

Пример 1.

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix},\ \underset{2\times3}{A^T}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

2. ***Умножение матрицы на число***

Для расчета элементов матрицы $B=\alpha\cdot A,\ \alpha\in R$ используют правило: $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij},\ \forall i,j$

Пример 2.

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix},\ \underset{3\times2}{B}=5\cdot\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}5&20\\10&25\\15&30\end{pmatrix}$$

3. ***Сложение матриц одинаковых размеров***

Для расчета элементов матрицы $\underset{m\times n}{C}=\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}$ используют правило:

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall i,j$

Пример 3.

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix},\ \underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}-1&4\\2&-5\\-3&6\end{pmatrix},\ \underset{3\times2}{C}=\underset{3\times2}{A}+\underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}0&8\\4&0\\0&12\end{pmatrix}$$

4. ***Умножение матриц***

Для расчета элементов матрицы $\underset{m\times k}{D}=\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}$ используют правило:

$$d_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{sj},\ \forall i,j$$

Примечание. Число столбцов левой матрицы должно совпадать с числом строк правой матрицы.

Пример 4.

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix},\ \underset{2\times3}{B}=\begin{pmatrix}7&8&9\\6&5&4\end{pmatrix},\ \underset{3\times3}{D}=\underset{3\times2}{A}\times\underset{2\times3}{B}=\begin{pmatrix}31&28&25\\44&41&38\\57&54&51\end{pmatrix}$$

$d_{11}=1\times 7+4\times 6=31,\ d_{12}=1\times 8+4\times 5=28,\ d_{13}=1\times 9+4\times 4=25$
$d_{21}=2\times 7+5\times 6=44,\ d_{22}=2\times 8+5\times 5=41,\ d_{23}=2\times 9+5\times 4=38$
$d_{31}=3\times 7+6\times 6=57,\ d_{32}=3\times 8+6\times 5=54,\ d_{33}=3\times 9+6\times 4=51$

5. *Умножение матрицы на вектор*

Произведением матрицы $\underset{m\times n}{A}$ на вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ называется вектор $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$, который равен линейной комбинации столбцов матрицы $\left(A_j\ ,\ j=\overline{1,n}\right)$ с коэффициентами, являющимися координатами вектора $\left(x_j\ ,\ j=\overline{1,n}\right)$.

$\underset{m\times n}{A}\cdot X=A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+...+A_n\cdot x_n=Y$, где

$y_i=a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+...+a_{in}\cdot x_n\ ,\ i=\overline{1,m}$

Пример 5.

$$\underset{3\times 2}{A}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}\cdot(7,8)=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\cdot 7+\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\cdot 8=\begin{pmatrix}39\\ 54\\ 69\end{pmatrix}=Y\quad\Rightarrow\quad Y=(39,54,69)$$

Основные свойства операций над матрицами:

1. $\alpha\cdot\underset{m\times n}{A}=\underset{m\times n}{A}\cdot\alpha$, где $\alpha\in R$.
2. $\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\underset{m\times n}{B}+\underset{m\times n}{A}$
3. $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}\neq\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{m\times n}{A}$
4. $\left(\alpha\cdot\underset{m\times n}{A}\right)^T=\alpha\cdot\underset{n\times m}{A^T}$, где $\alpha\in R$.
5. $\left(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}\right)^T=\underset{n\times m}{A^T}+\underset{n\times m}{B^T}$
6. $\left(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}\right)^T=\underset{k\times n}{B^T}\cdot\underset{n\times m}{A^T}$
7. $\alpha\cdot\left(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}\right)=\alpha\cdot\underset{m\times n}{A}+\alpha\cdot\underset{m\times n}{B}$, где $\alpha\in R$.
8. $\left(\alpha\cdot\underset{m\times n}{A}\right)\cdot\underset{n\times k}{B}=\alpha\cdot\left(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}\right)=\underset{m\times n}{A}\cdot\left(\alpha\cdot\underset{n\times k}{B}\right)$, где $\alpha\in R$.

9. $\underset{m\times n}{A}+\left(\underset{m\times n}{B}+\underset{m\times n}{C}\right)=\left(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}\right)+\underset{m\times n}{C}$

10. $\underset{m\times n}{A}\cdot\left(\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times l}{C}\right)=\left(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}\right)\cdot\underset{k\times l}{C}$

11. $\underset{m\times n}{A}\cdot\left(\underset{n\times k}{B}+\underset{n\times k}{C}\right)=\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}+\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{C}$

12. $\left(\underset{k\times m}{B}+\underset{k\times m}{C}\right)\cdot\underset{m\times n}{A}=\underset{k\times m}{B}\cdot\underset{m\times n}{A}+\underset{k\times m}{C}\cdot\underset{m\times n}{A}$

13. $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{E}=\underset{m\times m}{E}\cdot\underset{m\times n}{A}=\underset{m\times n}{A}$

14. $\underset{m\times n}{A}\cdot(X+Y)=\underset{m\times n}{A}\cdot X+\underset{m\times n}{A}\cdot Y$, где
$X=(x_1,x_2,...,x_n), Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ – векторы.

15. $\underset{m\times n}{A}\cdot(\alpha\cdot X)=\alpha\cdot\left(\underset{m\times n}{A}\cdot X\right)$, где $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ – вектор.

2.2. Понятие и вычисление определителя квадратной матрицы. Свойства определителей

Определитель матрицы – число, существующее только для квадратной матрицы, вычисляемое по определенному правилу с помощью элементов данной матрицы. Определитель обозначается той же заглавной буквой (иногда с индексом), что и матрица, включенной в две вертикальные черты. Таблица чисел также включается в две вертикальные черты:

$$\left|\underset{n\times n}{A}\right|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Правила расчета определителей

1. Определитель первого порядка для матрицы, состоящей из одной строки и одного столбца:
$$\left|\underset{1\times 1}{A}\right|=|a_{11}|=a_{11}$$
2. Определитель второго порядка для матрицы, состоящей из двух строк и двух столбцов:
$$\left|\underset{2\times 2}{A}\right|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

3. Определитель матрицы, состоящей из большого количества строк и столбцов, может быть вычислен с помощью ***теоремы Лапласа***:

$$\left|\underset{n\times n}{A}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij},\ \forall i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij},\ \forall j \end{cases}, \text{ где}$$

A_{ij} − алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{ij}.

Примечание. Алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{ij} вычисляется следующим образом:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где

M_{ij} – определитель матрицы, получаемой из исходной матрицы удалением элементов *i*-той строки и *j*-ого столбца.

Пример 6.

$$\left|\underset{3\times 3}{A}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} =$$

$$= 4\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 + 5\cdot(-12) + 6\cdot 6 = 0$$

Примечание. При расчете определителя матрицы желательно использовать свойства определителей и их следствия:

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.
2. Если матрица содержит две одинаковых строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
3. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
4. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
5. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца) матрицы, предварительно умноженные на одно и то же число.
6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов).
7. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

8. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы знак определителя меняется.
9. Определитель диагональной матрицы (квадратной матрицы, имеющей ненулевые элементы только на главной диагонали) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали матрицы.
10. Определитель треугольной матрицы (квадратной матрицы, имеющей ненулевые элементы только ниже (выше) главной диагонали) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали матрицы.
11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Пример 7. Вычислим определитель матрицы, используя свойства определителей и их следствия:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 10 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

К первому столбцу матрицы прибавим сумму второго, третьего и четвертого столбцов матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 22 & 4 & 7 & 10 \\ 22 & 1 & 4 & 7 \\ 22 & 10 & 1 & 4 \\ 22 & 7 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Первую строку матрицы, умноженную на (-1):
- прибавим ко второй строке,
- прибавим к третьей строке,
- прибавим к четвертой строке матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 22 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Вторую строку матрицы:
- умножим на 2 и прибавим к третьей строке;
- прибавим к четвертой строке матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 22 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 22 \cdot (-3) \cdot (-12) \cdot (-12) = -9504$$

Используя свойства определителей, получили треугольную матрицу. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали матрицы.

2.3. Обратная матрица

Обратная матрица существует только для квадратных неособенных матриц, а именно, таких у которых определитель не равен нулю. Обратная матрица к матрице $\underset{n\times n}{A}$ обозначается $\underset{n\times n}{A^{-1}}$.

По определению: $\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{A^{-1}} = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{E}$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Вычисляется определитель матрицы, он должен быть не равен нулю.
2. Вычисляется присоединенная матрица.

$$\underset{n\times n}{\overline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Вычисляется обратная матрица.

$$\underset{n\times n}{A^{-1}} = \frac{1}{\left|\underset{n\times n}{A}\right|} \underset{n\times n}{\overline{A}}$$

Пример 8.

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы.

$$\left|\underset{3\times 3}{A}\right| = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

2. Вычислим присоединенную матрицу.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\underset{3\times 3}{\overline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Вычислим обратную матрицу.

$$\underset{3\times 3}{A^{-1}} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

2.4. Ранг матрицы

Ранг матрицы **–** наивысший порядок ее миноров отличных от нуля. Ранг матрицы совпадает с максимальным количеством независимых строк (столбцов) матрицы.

Примечание. Минор k-того порядка – определитель матрицы элементов, стоящих на пересечении k строк и k столбцов исходной матрицы.

Вычисление ранга матрицы по определению требует вычисления большого количества определителей. Рекомендуется вычислять ранг с помощью элементарных преобразований матрицы, не меняющих ранга матрицы:

- перестановка строк (столбцов);
- умножение всех элементов строки (столбца) на одно число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно число;
- исключение строк (столбцов), состоящих из нулей.

Пример 9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Первую строку элементов:
- умножим на 3 и прибавим ко второй строке,
- умножим на (-2) и прибавим к третьей строке,
- умножим на 2 и прибавим к четвертой строке.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 4 & 10 \\ 0 & -15 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вторую строку элементов:
- умножим на (5/6) и прибавим к третьей строке,
- умножим на (-0,5) и прибавим к четвертой строке.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 2/6 & 56/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим миноры матрицы, окаймляющие друг друга, всех возможных порядков.

$$|1|=1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}=18\neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 2/6 \end{vmatrix}=6\neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 18 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 2/6 & 56/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Ранг матрицы **(**наивысший порядок миноров отличных от нуля) **–** равен трем.

2.5. Решение матричных уравнений

1. $\underset{n\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{X}=\underset{n\times k}{B}, \; \left|\underset{n\times n}{A}\right|\neq 0 \Rightarrow \underset{n\times k}{X}=\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{B}$

Обоснование:

$$\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\left(\underset{n\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{X}\right)=\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{B} \Rightarrow \left(\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\underset{n\times n}{A}\right)\cdot\underset{n\times k}{X}=\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{B}$$

$$\underset{n\times n}{E}\cdot\underset{n\times k}{X}=\underset{n\times n}{A^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{B}$$

Пример 10.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-10\neq 0$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $\underset{m\times n}{X}\cdot\underset{n\times n}{A}=\underset{m\times n}{B}, \; \left|\underset{n\times n}{A}\right|\neq 0 \Rightarrow \underset{m\times n}{X}=\underset{m\times n}{B}\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}}$

Обоснование:

$$\left(\underset{m\times n}{X}\cdot\underset{n\times n}{A}\right)\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}}=\underset{m\times n}{B}\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}} \Rightarrow \underset{m\times n}{X}\cdot\left(\underset{n\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}}\right)=\underset{m\times n}{B}\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}}$$

$$\underset{m\times n}{X}\cdot\underset{n\times n}{E}=\underset{m\times n}{B}\cdot\underset{n\times n}{A^{-1}}$$

Пример 11.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} -2.1 & 1.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

2.6. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева (США, 1936 г.)

Цель моделирования – ответ на вопрос: « Каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы имел место баланс спроса и предложения продукции этих отраслей?», т.е. выполнялись равенства:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \ \forall i = \overline{1,n}, \text{ где}$$

x_i – совокупный продукт i-той отрасли;

x_{ij} – продукт i-той отрасли, потребляемый j-той отраслей на внутриотраслевом рынке;

y_i – конечный продукт i-той отрасли, потребляемый гражданами и государством вне отраслей.

Баланс спроса и предложения продукции отраслей может быть записан в матричной форме:

$$\underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} + \underset{n\times 1}{Y}, \text{ где}$$

$$\underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица совокупных продуктов отраслей;

$$\underset{n\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ – матрица конечных продуктов отраслей;

$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – коэффициент прямых материальных затрат продукции i-той отрасли, идущей на одну условную единицу продукции j-той отрасли;

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат продукции.

Решим матричное балансовое уравнение:

$$\underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} + \underset{n\times 1}{Y}, \Rightarrow X - A\cdot X = Y \Rightarrow \left(\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times n}{A}\right)\cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{Y},$$

Если

$$\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{D}, \ \left|\underset{n\times n}{D}\right| \neq 0 \Rightarrow \underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times n}{D^{-1}} \cdot \underset{n\times 1}{Y},$$

то баланс возможен при единственном варианте матрицы совокупных продуктов отраслей.

Пример 12. Решим матричное балансовое уравнение $X = A\cdot X + Y$, найдем валовой продукт, зная конечный спрос и матрицу коэффициентов прямых материальных затрат продукции:

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$D = E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$|D| = 0.9\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} + 0.1\begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} - 0.1\begin{vmatrix} -0.1 & 0.9 \\ -0.2 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.6 \neq 0$$

Следовательно, баланс возможен при единственном варианте матрицы совокупных продуктов отраслей:

$$X = D^{-1}Y = \left(\frac{1}{|D|}\overline{D}\right)\cdot Y = \frac{1}{|D|}\left(\overline{D}\cdot Y\right)$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.7,\ D_{12} = -\begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.1,\ D_{13} = \begin{vmatrix} -0.1 & 0.9 \\ -0.2 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.2$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.1,\ D_{22} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.7,\ D_{23} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.9 & -0.1 \end{vmatrix} = 0.1,\ D_{32} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{vmatrix} = 0.1,\ D_{33} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.8$$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\overline{D}\cdot Y = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.7\cdot 10 + 0.1\cdot 20 + 0.1\cdot 30) \\ (0.1\cdot 10 + 0.7\cdot 20 + 0.1\cdot 30) \\ (0.2\cdot 10 + 0.2\cdot 20 + 0.8\cdot 30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Итак, матрица совокупных продуктов отраслей составит:

$$X = \frac{1}{0.6}\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

2.7. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Выполнить операции над матрицами, найти матрицу C.

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $\qquad C=A\cdot B^T\cdot B\cdot A^T$

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$; $\qquad C=A\cdot B\cdot A^T-3E$

3. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 5\\ -6 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 7\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$; $\qquad C=B\cdot A^T\cdot A-E$

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $\qquad C=(A\cdot B-E)^T$

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$; $\qquad C=\left(B^T\cdot A^T+E\right)^T$

6. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$; $\qquad C=\left(A^T\cdot B^T+2E\right)^T$

7. $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -6\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix}$; $\qquad C=(B\cdot A\cdot B-3B)^T$

8. $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\\ 7 & -2\end{pmatrix}$; $\qquad C=(A\cdot B\cdot A-5A)^T$

Задача 2. Вычислить определитель матрицы.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

2. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

3. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

4. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

5. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$

7. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -5 & -4 \\ 9 & -9 & -9 & -4 \end{vmatrix}$

8. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

9. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

10. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

11. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

12. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

13. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Задача 3. Вычислить обратную матрицу, если она существует.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}6 & -8\\ -7 & 9\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 7 & 2\\ 1 & 3 & 0 & 5\\ 0 & -5 & 1 & 1\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 7\\ -1 & 3 & 5 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 1\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 4\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 5\\ -1 & 5 & 3 & 7\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6 & 7\\ 2 & -5 & 2 & 7\\ -1 & 5 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 7\end{pmatrix}$

Задача 4. Решить матричное уравнение.

1. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

3. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

7. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 5. Вычислить ранг матрицы.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 6 & 3 \\ -1 & -14 & 3 & 5 \\ -1 & -12 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 7 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & 20 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 6 & 3 \\ -1 & -14 & 3 & 5 \\ -1 & -12 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Задача 6. Решить матричное балансовое уравнение $X = A\cdot X + Y$, найти валовой продукт (X), зная матрицу коэффициентов прямых материальных затрат (A) и конечный спрос продукции (Y) в экономической системе, состоящей из трех отраслей.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.05 \\ 0.3 & 0.6 & 0.15 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 55 \\ 20 \\ 80 \end{pmatrix}$

Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Основные понятия. Матричная форма представления системы линейных алгебраических уравнений

Общий вид системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ где}$$

x_j, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – неизвестные переменные,

$a_{ij} \in R$, $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ – коэффициент при неизвестной x_j в i-том уравнении,

b_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – правые части уравнений.

Матричная форма представления системы линейных уравнений

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}, \text{ где}$$

$$\underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица неизвестных,

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов при неизвестных,

$$\underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица правых частей,

$$\left(\underset{m\times n}{A} \middle| \underset{m\times 1}{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Решение системы линейных уравнений – набор чисел, при подстановке которых вместо неизвестных уравнения превращаются в равенства.

Система уравнений называется несовместной, если не имеет решений.

Система уравнений называется совместной, если имеет решения.

Совместная система уравнений называется определенной, если имеет единственное решение.

Совместная система уравнений называется неопределенной, если имеет неединственное решение, причем в этом случае у системы имеется бесчисленное множество решений.

3.2. Разрешимость систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера − Капелли

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений совместна и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утверждения:

– совместная система является определенной, если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных;
– совместная система является неопределенной, если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных.

Пример 1. Установим несовместность системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{X} = \underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times3}{A} \middle| \underset{3\times1}{B} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Первый шаг.

Из первой строки расширенной матрицы вычтем третью.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Второй шаг.

Из первой строки расширенной матрицы вычтем вторую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум и не совпадает с рангом расширенной матрицы системы, равным трем. Система несовместна.

Пример 2. Установим совместность и определенность системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{X} = \underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times3}{A} \middle| \underset{3\times1}{B} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Первый шаг.
Из первой строки расширенной матрицы вычтем третью.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Второй шаг.
К первой строке расширенной матрицы прибавим вторую, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен трем и совпадает с рангом расширенной матрицы системы. Система совместная и определенная.

Пример 3. Установим совместность и неопределенность системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{X} = \underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times3}{A} \middle| \underset{3\times1}{B} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -1 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Первый шаг.
Из первой строки расширенной матрицы вычтем третью.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Второй шаг.
Из первой строки расширенной матрицы вычтем вторую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум, совпадает с рангом расширенной матрицы системы и меньше числа неизвестных. Система совместная и неопределенная.

3.3. Формулы Крамера решения определенных систем линейных алгебраических уравнений

Пусть число неизвестных совпадает с числом уравнений $(m = n)$, причем матрица коэффициентов при неизвестных неособенная $\left(\left| \underset{n\times n}{A} \right| \neq 0 \right)$. В этом случае система линейных уравнений является совместной и определенной, а единственное решение можно найти, используя ***формулы Крамера:***

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{B}, \quad \left| \underset{n\times n}{A} \right| \neq 0 \Rightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \; j = \overline{1,n}$$

где матрица A_j может быть получена из матрицы A заменой элементов j–того столбца правыми частями уравнений.

Пример 4. Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{X} = \underset{3\times 1}{B}, \text{ где}$$

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left| \underset{3\times 3}{A} \right| = -10 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{|A|}|A_1| = \frac{1}{-10}\begin{vmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -0.1\begin{vmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -0.1(-30) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}|A_2| = \frac{1}{-10}\begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -0.1\begin{vmatrix} 9 & 9 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -0.1\,(-20) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}|A_3| = \frac{1}{-10}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -0.1\begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 15 \end{vmatrix} = -0.1(50) = -5$$

3.4. Решение определенных систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

Пусть число неизвестных совпадает с числом уравнений $(m = n)$, причем матрица коэффициентов при неизвестных неособенная $\left(\left|\underset{n\times n}{A}\right| \neq 0\right)$. В этом случае система линейных уравнений является совместной и определенной, а единственной решение можно найти, используя обратную матрицу:

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{B}, \quad \left|\underset{n\times n}{A}\right| \neq 0 \Rightarrow \underset{n\times k}{X} = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times 1}{B}$$

Пример 5. Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{X} = \underset{3\times 1}{B}, \text{ где}$$

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left|\underset{3\times 3}{A}\right| = -10 \neq 0$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3.5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Любая система линейных уравнений может быть решена методом Гаусса. Метод Гаусса состоит из нескольких шагов. На каждом шаге выполняются эквивалентные преобразования, в результате которых выбранная неизвестная (ранее не выбиравшаяся) остается только в одном выбранном уравнении (ранее не выбиравшимся). Эквивалентные преобразования приводят к равносильным системам уравнений.

К эквивалентным преобразованиям относятся:

- перестановка уравнений;
- умножение уравнения на число, отличное от нуля;
- прибавление к произвольному уравнению других уравнений системы, умноженных на некоторые числа.

Метод Гаусса позволяет:

1. ***Установить определенность системы линейных уравнений.*** В этом случае ранг матрицы коэффициентов при неизвестных совпадает с рангом расширенной матрицы и числом неизвестных. Если после выполнения всех шагов метода матрица коэффициентов становится единичной, то матрица правых частей представляет собой решение системы.
2. ***Установить несовместность системы линейных уравнений.*** В этом случае ранг матрицы коэффициентов при неизвестных не совпадает с рангом расширенной матрицы. После выполнения ряда шагов появляется уравнение вида $\sum_{j=1}^{n} 0 x_j = b_s,\ b_s \neq 0$.
3. ***Установить неопределенность системы линейных уравнений.*** В этом случае ранг матрицы коэффициентов (r) при неизвестных совпадает с рангом расширенной матрицы и меньше числа неизвестных. После выполнения всех шагов и, возможно, исключения уравнений вида $\sum_{j=1}^{n} 0 x_j = 0$ число оставшихся уравнений становится менее числа неизвестных.

В бесконечном множестве решений неопределенных систем линейных уравнений выделяют совокупность базисных решений, число которых ограниченно и не превышает C_n^r, где n – число неизвестных, r – число оставшихся после преобразований метода Гаусса линейно независимых уравнений (это число равно рангам матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы уравнений).

Для отыскания базисного решения все неизвестные делят на две группы: r − основных переменных, $(n-r)$ − неосновных переменных. В группу основных переменных могут быть включены неизвестные, матрица коэффициентов при которых неособенная. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса удобно выполнять с помощью преобразований расширенной матрицы коэффициентов системы.

Примечание. Очевидно то, что применяя метод Гаусса, можно одновременно решать несколько систем линейных уравнений, отличающихся только правыми частями уравнений. Как следствие можно предложить данный метод для получения обратной матрицы.

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{X} = \underset{n\times n}{E}\,,\quad \left|\underset{n\times n}{A}\right| \neq 0 \Rightarrow \underset{n\times n}{X} = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times n}{E} = \underset{n\times n}{A^{-1}}$$

Примечание. Неопределенные системы линейных уравнений нашли применение в линейном программировании.

Пример 6. Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{X} = \underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times3}{A}\middle|\underset{3\times1}{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & [-1] & 8 \end{array}\right)$$

Первый шаг. Вычитаем третью строку расширенной матрицы из первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 0 & 1 \\ [1] & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

Второй шаг. К первой строке прибавим вторую, умноженную на (-3). К третьей строке прибавим вторую.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & [-10] & 0 & -20 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 15 \end{array}\right)$$

Третий шаг. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на 0.2. К третьей строке прибавим первую, умноженную на 0.5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & 0 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Первую строку умножим на (-0,1). Третью строку умножим на (-1). Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) = (E|X), \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Система уравнений совместная и определенная.

Пример 7. Найдем обратную матрицу для матрицы:

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A\,|\,E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & [-1] & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Первый шаг.
Вычитаем третью строку из первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ [1] & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Второй шаг.
К первой строке прибавим вторую, умноженную на (-3). К третьей строке прибавим вторую.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & [-10] & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Третий шаг.
Ко второй строке прибавим первую, умноженную на 0,2. К третьей строке прибавим первую, умноженную на 0.5.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & [-10] & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Первую строку умножим на (-0,1). Третью строку умножим на (-1). Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{array}\right), \qquad \underset{3\times3}{A^{-1}}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Пример 8. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=7 \\ x_2+x_4=2 \\ x_1-x_2+3x_3-3x_4=2 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times4}{A}\cdot\underset{4\times1}{X}=\underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times4}{A}\,\middle|\,\underset{3\times1}{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Первый шаг.
Вычитаем первую строку из третьей.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Второй шаг.
К первой строке прибавим вторую. К третьей строке прибавим вторую, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & [-1] & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Третий шаг.
К первой строке прибавим третью, умноженную на 3. Ко второй строке прибавим третью.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Третью строку умножим на (-1) и поменяем местами со второй строкой.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен трем и совпадает с рангом расширенной матрицы системы.

Согласно теореме Кронекера - Капелли система уравнений − совместная и неопределенная. Имеется два базисных решения:

$$X_I^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X_{II}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_3 = c$, тогда бесчисленное множество решений системы уравнений принимает вид: $X^T = \begin{pmatrix} (6-3c) & 1 & c & 1 \end{pmatrix},\ \forall c \in R.$

Следует отметить, что решением системы уравнений будет и следующая линейная комбинация базисных решений:

$$X = \lambda \cdot X_I + (1-\lambda) \cdot X_{II} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\lambda \\ 1 \\ 2-2\lambda \\ 1 \end{pmatrix},\ \forall \lambda \in R,\ 0 \le \lambda \le 1$$

Докажем это:

$$AX = A(\lambda \cdot X_I + (1-\lambda) \cdot X_{II}) = \lambda \cdot A \cdot X_I + (1-\lambda) \cdot A \cdot X_{II} = \lambda \cdot B + (1-\lambda) \cdot B = B$$

3.6. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений

Общий вид однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены этой системы равны нулю. Однородная система линейных уравнений совместна, т.к. ранг матрицы коэффициентов (r) при неизвестных всегда совпадает с рангом расширенной матрицы. Пусть ранг матрицы коэффициентов (r) меньше числа неизвестных(n). Тогда однородная система линейных уравнений является неопределенной и обладает следующими свойствами:

1. Если X_I и X_{II} решения однородной системы, то $X = X_I + X_{II}$ является решением системы.
2. Если X_I решение однородной системы, то $X = \lambda X_I$ (λ — число) является решением системы.
3. Любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

Совокупность линейно независимых решений $F_1, F_2, ..., F_{(n-r)}$ ***однородной системы уравнений называют фундаментальной системой решений, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией этих решений.***

Для отыскания фундаментальной системы решений достаточно определить одну группу из r основных переменных и рассмотреть $(n-r)$ таких наборов значений для неосновных переменных, в которых только одной неизвестной придается значение 1, а всем другим — значение 0.

Примечание. Общее решение неоднородной неопределенной системы линейных уравнений можно определить как сумму общего решения соответствующей однородной системы линейных уравнений и частного решения неоднородной системы линейных уравнений.

Пример 9. Определим фундаментальную систему решений для однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{X} = \underset{3\times1}{B}$$

$$\left(\underset{3\times 4}{A}\,\middle|\,\underset{3\times 1}{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Первый шаг.
Вычитаем первую строку из третьей строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Второй шаг.
К третьей строке прибавим вторую. Вторую строку умножим на 0.5 и прибавим к первой строке.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 3.5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум и совпадает с рангом расширенной матрицы системы.

В группу основных можно включить переменные x_1 и x_4. Рассмотрим два набора значений неосновных переменных:

1. $x_2 = 1$, $x_3 = 0$
2. $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Определим соответствующие фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 1 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \; F_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем общее решение однородной системы линейных уравнений, как линейную комбинацию фундаментальных решений:

$$X = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -3.5 \\ 1 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример 10. Решим неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 14 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Первый шаг.

Умножим первую строку на (-3) и прибавим ко второй строке. Умножим первую строку на (-2) и прибавим к третьей строке.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & [-1] & -11 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Второй шаг.

Вторую строку умножим на 2 и прибавим к первой строке. Вычтем вторую строку из третьей строки. Умножим вторую строку на (-1).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} [1] & 0 & -18 & 11 & -2 \\ 0 & [1] & 11 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум, совпадает с рангом расширенной матрицы системы и меньше числа неизвестных

Система уравнений совместная и неопределенная. Частное решение (K) найдем, принимая: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

$$K^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующая однородная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \quad -18x_3 + 11x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 11x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

В группу основных можно включить переменные x_1 и x_2. Рассмотрим два набора значений неосновных переменных:

1. $x_3 = 1$, $x_4 = 0$
2. $x_3 = 0$, $x_4 = 1$

Определим соответствующие фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы линейных уравнений: $X = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений принимает вид:

$$X = K + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.7. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Число λ называется ***собственным значением*** квадратной матрицы $\underset{n\times n}{A}$ (или ***характеристическим числом***), если можно подобрать такой ненулевой вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, что выполняется равенство: $\underset{n\times n}{A}\ X=\lambda X$

Ненулевой вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***собственным вектором*** квадратной матрицы $\underset{n\times n}{A}$, если можно найти такое число $\lambda\neq 0$, что выполняется равенство: $\underset{n\times n}{A}\ X=\lambda X$

Используя вместо вектора матрицу - столбец, данное равенство можно записать в матричной форме: $\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{X}=\lambda \underset{n\times 1}{X}$

Выполним преобразования данного матричного равенства.

$$\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{X}-\lambda\ \underset{n\times n}{E}\ \underset{n\times 1}{X}=0$$

$$\left(\underset{n\times n}{A}-\lambda\ \underset{n\times n}{E}\right)\cdot \underset{n\times 1}{X}=0$$

$$\underset{n\times 1}{X}\neq \underset{n\times 1}{0}\quad\Rightarrow\quad \left|\underset{n\times n}{A}-\lambda\ \underset{n\times n}{E}\right|=0$$

Таким образом, чтобы найти собственные значения матрицы $\underset{n\times n}{A}$, нужно решить характеристическое уравнение:

$$\left|\underset{n\times n}{A}-\lambda\ \underset{n\times n}{E}\right|=k_n\lambda^n+k_{n-1}\lambda^{n-1}+....+k_1\lambda+k_0=0$$

Подставив собственное значение λ_i в матричное уравнение можно получить множество всех собственных векторов, соответствующих этому собственному значению матрицы. Отыскание всех собственных векторов сводится к решению однородных систем линейных уравнений:

$$\left(\underset{n\times n}{A}-\lambda_i\ \underset{n\times n}{E}\right)\cdot \underset{n\times 1}{X}=0$$

Пример 11. Получим собственные значения матрицы $\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$**.**

$$\left|\underset{2\times 2}{A}-\lambda\ \underset{2\times 2}{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-8=\lambda^2-4\lambda-5=0$$

Собственные значения матрицы: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=5$.

Определим собственные векторы матрицы.

$$\left(\underset{2\times 2}{A}-\lambda_i\ \underset{2\times 2}{E}\right)\cdot \underset{2\times 1}{X}=0.$$

$$\begin{cases}(1-\lambda_1)x_1+2x_2=0\\4x_1+(3-\lambda_1)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\4x_1+4x_2=0\end{cases}\Rightarrow\ x_2=-x_1$$

Система уравнений имеет одно фундаментальное решение: $X_I=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Произвольный собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-1$ имеет вид: $X_I=c_1(1,-1)=(c_1,-c_1)$

$$\begin{cases}(1-\lambda_2)x_1+2x_2=0\\4x_1+(3-\lambda_2)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\4x_1-2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\ x_2=2x_1$$

Система уравнений имеет одно фундаментальное решение: $X_{II}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Произвольный собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda_2=5$ имеет вид: $X_{II}=c_2(1,2)=(c_2,2c_2)$

3.8. Линейная модель международной торговли

Цель моделирования – ответ на вопрос: «Каким должно быть соотношение национальных доходов стран, чтобы имел место баланс торговли между ними?». Считается, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран**.**

Линейная модель торгового обмена имеет вид:

$\underset{n\times n}{A}\ X=X$, где

n – количество стран $(S_1,S_2,...,S_n)$, участвующих в торговле;

$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ – вектор национальных доходов стран;

x_i – национальный доход страны S_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$;

$$\underset{n\times n}{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$ – структурная матрица торговли;

a_{ij} – доля национального дохода, которую страна S_j тратит на закупку товаров у страны S_i $\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}\right)$;

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=1$ – так как национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран.

Пример 12. Структурная матрица торговли трех стран (S_1, S_2, S_3) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Найдем соотношение национальных доходов стран, при котором будет иметь место баланс торговли между ними: $\underset{3\times3}{A}\ X = X$

Для этого определим собственный вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$, решая линейную однородную систему уравнений:

$$\left(\underset{3\times3}{A} - \underset{3\times3}{E}\right) \cdot \underset{3\times1}{X} = \underset{3\times1}{0} \qquad \begin{cases} -0.8x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = 0 \\ 0.3x_1 - 0.5x_2 + 0.2x_3 = 0 \\ 0.5x_1 + 0.2x_2 - 0.7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.8 & 0.3 & [0.5] & 0 \\ 0.3 & -0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & -0.7 & 0 \end{array}\right)$$

Первый шаг.
Умножим первую строку на (-0.4) и прибавим ко второй строке. Умножим первую строку на 1.4 и прибавим к третьей строке. Умножим первую строку на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.6 & 0.6 & 1 & 0 \\ [0.62] & -0.62 & 0 & 0 \\ -0.62 & 0.62 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Второй шаг.
К третьей строке прибавим вторую. Вторую строку умножим на (1.6/0.62) и прибавим к первой строке.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум, совпадает с рангом расширенной матрицы системы и меньше числа неизвестных Система уравнений совместная и неопределенная.

В группу основных можно включить две переменных (x_1, x_3) Однородная система уравнений имеет одно фундаментальное решение. Пусть $x_2 = 1$, тогда фундаментальное решение однородной системы уравнений принимает вид:

$$X^T = (1 \quad 1 \quad 1)$$

Произвольный собственный вектор матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$ имеет вид: $X = c(1,1,1) = (c, c, c)$

Полученное решение означает, что баланс торговли трех стран достигается при соотношении национальных доходов стран 1:1:1.

3.9. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Если матрица коэффициентов при неизвестных неособенная, решить систему уравнений двумя способами, используя формулы Крамера и обратную матрицу.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_3 = 18 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 31 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 14 \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 35 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

Задача 2. Установить совместность (или несовместность) системы уравнений. Если система совместна, найти базисные решения.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

Задача 3. Найти фундаментальную систему решений для однородной системы линейных уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Задача 4. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, используя частное решение неоднородной системы и фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы линейных уравнений.

1. $\begin{cases} x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_4 = 18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 30 \\ x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 24 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 18 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

Задача 5. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $\underset{3\times3}{A}$. Найти соотношение национальных доходов стран, при котором может иметь место баланс торговли между ними.

1. $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.3\\ 0.3 & 0.6 & 0.05\\ 0.6 & 0.1 & 0.65\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.6 & 0.6\\ 0.2 & 0.1 & 0.3\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.05 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.4\\ 0.5 & 0.65 & 0.4\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.5 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.1 & 0.1 & 0.5\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3 & 0.2\\ 0.3 & 0.1 & 0.3\\ 0.4 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.4 & 0.7\\ 0.2 & 0.1 & 0.15\\ 0.4 & 0.5 & 0.15\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0.2\\ 0.4 & 0.6 & 0.4\\ 0.6 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.15 & 0.2\\ 0.5 & 0.3 & 0.6\\ 0.1 & 0.55 & 0.2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.2 & 0.4\\ 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.6 & 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}0.25 & 0.75 & 0.5\\ 0.3 & 0.25 & 0.1\\ 0.45 & 0 & 0.4\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.125\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0.375\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.75\\ 0.5 & 0.5 & 0.25\\ 0 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0.25\\ 0 & 0.5 & 0.75\\ 0.5 & 0 & 0\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.1\\ 0 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.5 & 0.6\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.75 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}0.7 & 0 & 0.75\\ 0.3 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$

Глава 4. Многочлены и комплексные числа

4.1. Комплексные числа

Комплексным (мнимым) числом называется выражение $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, i - ***мнимая единица.*** Числа x и y называются соответственно ***действительной частью и мнимой частью комплексного числа*** z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Мнимая единица i удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны $z_1 = z_2$, если равны их действительные и мнимые части $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются ***сопряженными.***

Арифметические операции над комплексными числами

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$

1. ***Сложение (вычитание)*** комплексных чисел
   $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$
2. ***Умножение*** комплексных чисел
   $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
3. ***Деление*** комплексных чисел
   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$$

Примечание. Все арифметические операции над комплексными числами определяются по правилам соответственно сложения, умножения и деления многочленов.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 5i$ и $z_2 = -3 + i$. Найдем комплексные числа а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 z_2$ и г) $\frac{z_1}{z_2}$.

а) $z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 + i) = 1 - 4i$

б) $z_1 - z_2 = (4 - 5i) - (-3 + i) = 7 - 6i$

в) $z_1 z_2 = (4 - 5i)(-3 + i) = -7 + 19i$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 5i}{-3 + i} = \frac{(4 - 5i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{-17 + 11i}{9 + 1} = -1{,}7 + 1{,}1i$

Тригонометрическая форма комплексного числа

В декартовой системе координат комплексное число изображается точкой $M(x,y)$. Оси Ox и Oy называются соответственно ***мнимой и действительной осями***, координатная плоскость – ***комплексной***. Абсцисса x и ордината y каждой точки изображают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа z. Полярные координаты точки M определяются положением радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ - его длиной $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$ и углом φ осью Ox и называются ***модулем*** $r = |z|$ и ***аргументом*** $\varphi = Arg\ z$ ***комплексного числа*** z (рис. 1).

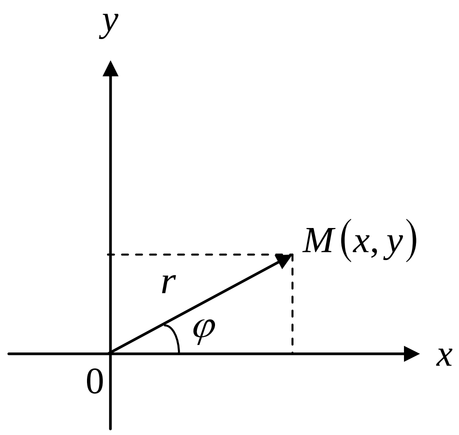

Рис.1

Справедливы соотношения:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Из значений аргумента комплексного числа $Arg\ z$ выделяют главное значение аргумента $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$. Связь между декартовыми и полярными координатами точки M комплексной плоскости $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ определяет ***тригонометрическую форму комплексного числа*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Пример 2. Найдем тригонометрическую форму комплексных чисел: а) $z = 3$, б) $z = 7i$, в) $z = 1 + \sqrt{3}i$, г) $z = 1 - i$.

а) Комплексное число $z = 3$ имеет $\mathrm{Re}\,z = x = 3$ и $\mathrm{Im}\,z = y = 0$.

Отсюда $r = |z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$, $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, $\arg z = \varphi = 0$.

$z = 3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

б) $r = |z| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, $\varphi = \arg z = \dfrac{\pi}{2}$

$$z = 7 = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

в) $r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \arg z = \dfrac{\pi}{3}$

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

г) $r=|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi=\arg z=-\frac{\pi}{4}$;

$$z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме

1. ***Умножение*** комплексных чисел

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

2. ***Деление*** комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

3. ***Возведение в степень*** комплексного числа (формула Муавра)

$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, где n - целое число

4. ***Извлечение корня*** из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=\overline{0,n-1}$; n - натуральное число.

Пример 3. Выполним арифметические операции над комплексными числами $z_1=1+\sqrt{3}i$ и $z_2=1-i$ в тригонометрической форме: а) z_1z_2, б) $\frac{z_1}{z_2}$, в) z_1^9, г) $\sqrt[3]{z_2^2}$.

Используем полученные в предыдущем примере тригонометрические представления комплексных чисел

$$z_1=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

а) $z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

б) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

в) $z_1^9=2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3}+i\sin\frac{9\pi}{3}\right)=512(\cos\pi+i\sin\pi)=-512$

г) $z=\sqrt[3]{z_2{}^2}$, где $z_2{}^2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$z=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\text{ где } k=0,1,2$$

$$(z)_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$(z)_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,i$$

$$(z)_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

Показательная форма комплексного числа

Формула Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ определяет ***показательную форму комплексного числа*** $z=r\,e^{i\varphi}$.

Пример 4. Запишем в показательной форме комплексные числа $z_1=1+\sqrt{3}i$ и $z_2=1-i$.

Используем полученные ранее тригонометрические представления чисел

$$z_1=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\text{ и } z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Используя значения модуля и аргумента комплексных чисел, находим

$$z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}\text{ и } z_2=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

4.2. Многочлены и алгебраические уравнения. Основные понятия

Многочлен относительно $x_1,x_2,...,x_n$ и ***целая рациональная функция*** $y=F(x_1,x_2,...,x_n)$ есть суммы конечного числа членов вида $a\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, где каждое $k_j\,(j=\overline{1,n})$ – неотрицательное целое число. Наибольшее значение суммы степеней $k_1+k_2+...+k_n$ членов многочлена называется степенью многочлена.

Многочлен относительно $x_1,x_2,...,x_n$ называется ***однородным***, если все его члены имеют одну и ту же степень.

Многочлен относительно $x_1,x_2,...,x_n$ называется ***симметрическим***, если для любого множества значений $x_1,x_2,...,x_n$ значение многочлена не изменяется при какой угодно перестановке $x_1,x_2,...,x_n$.

Каждый симметрический многочлен относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ может быть единственным образом записан как многочлен относительно элементарных симметрических функций $u_1, u_2, ..., u_n$, определяемых следующим образом:

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ , } u_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n \text{ ,}$$

$$u_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n \text{ ,..., } u_n = x_1x_2...x_n \text{ ,}$$

где u_k $\left(k = \overline{2, n-1}\right)$ – есть сумма всех различных произведений, каждое из которых содержит k сомножителей x_j с несовпадающими индексами.

Каждый симметрический многочлен относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ может быть выражен как многочлен относительно конечного числа симметрических функций $v_1, v_2, ..., v_n$, определяемых следующим образом:

$$v_0 = n,\ v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ v_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ ...,\ v_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k,\ ...$$

Многочлен степени n ***относительно*** x (***целая рациональная функция степени n*** с одной переменной) имеет вид:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

Алгебраическое уравнение степени n с неизвестной x имеет вид:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

Решить уравнение с неизвестной x – значит ***найти все значения*** x (***нули*** функции $y = F(x)$, ***корни*** уравнения), удовлетворяющие этому уравнению. Значение $x = x_i$ есть ***корень кратности*** (***порядка***) m (***кратный корень***, если $m > 1$) алгебраического уравнения (***нуль*** функции $y = F(x)$ ***порядка*** m), если $F(x) = f(x)(x - x_i)^m$, где $f(x)$ – многочлен, причем $f(x_i) \neq 0$. Алгебраическое уравнение степени n имеет n корней, если корень кратности m считать m раз.

Общие формулы, выражающие корни алгебраических уравнений, через их коэффициенты и содержащие конечное число сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня, существуют ***для уравнений первой, второй, третей и четвертой степени***.

Решение линейных уравнений $\qquad ax - b = 0 \quad (a \neq 0) \ \Rightarrow \ x = \dfrac{b}{a}$.

Пример 5. Решим линейное уравнение

$$(1+3i)x - (5-i) = 0 \qquad \left(i^2 = -1\right)$$

$$x = \frac{5-i}{1+3i} = \frac{(5-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-16i}{10} = 0{,}2 - 1{,}6i$$

Решение квадратных уравнений

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (a \neq 0), \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример 6. Решим квадратное уравнение

$$3x^2 + i x + 2 = 0 \qquad \left(i^2 = -1\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-i \pm 5i}{6}$$

$$x_1 = -i, \; x_2 = \frac{2}{3} i$$

Решение кубичных уравнений методом Кардано

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Кубичное уравнение преобразуют в «неполное», которое решают, используя формулы корней. Затем определяют корни первоначального кубичного уравнения. Преобразование кубичных уравнений в «неполные» кубичные уравнения выполняется с помощью замены переменной.

$$x = t - \frac{a}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \left(t - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(t - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$t^3 + (-a + a)t^2 + \left(\frac{a^2}{3} - 2\frac{a^2}{3} + b\right)t + \left(-\left(\frac{a}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad t^3 + pt + q = 0$$

Примечание. Если свободный член «неполного» уравнения равен нулю, то корни уравнения легко определяются.

$$t^3 + pt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t\left(t^2 + p\right) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_{2,3} = \pm\sqrt{p}$$

Решение «неполных» кубичных уравнений

$$t^3 + pt + q = 0$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$$

$$t_1 = A + B, \quad t_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$$

Пример 7. Решим кубичное уравнение

$$x^3+3x^2-6x-8=0 \qquad (a=3,\ b=-6,\ c=-8)$$

$$x=t-\frac{a}{3}=t-1 \qquad \Rightarrow \qquad (t-1)^3+3(t-1)^2-6(t-1)-8=0$$

$$t^3+(-3+3)t^2+(3-6-6)t+(-1+3+6-8)=0$$

$$t^3-9t=0 \qquad (p=-9,\ q=0)$$

$$t(t-3)(t+3)=0, \quad t_1=-3, \quad t_2=0, \quad t_3=3$$

$$x_1=-4, \quad x_2=-1, \quad x_3=2$$

Пример 8. Решим кубичное уравнение

$$x^3+3x^2+9x+5=0 \qquad (a=3,\ b=9,\ c=5)$$

$$x=t-\frac{a}{3}=t-1 \qquad \Rightarrow \qquad (t-1)^3+3(t-1)^2+9(t-1)+5=0$$

$$t^3+(-3+3)t^2+(3-6+9)t+(-1+3-9+5)=0$$

$$t^3+6t-2=0 \qquad (p=6,\ q=-2)$$

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}, \quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}$$

$$Q=9, \quad A=\sqrt[3]{4}, \quad B=-\sqrt[3]{2}$$

$$t_1=A+B, \quad t_{2,3}=-\frac{A+B}{2}\pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$$

$$t_1=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}, \quad t_{2,3}=-\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\sqrt{3}$$

$$x_1=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-1, \quad x_{2,3}=-\frac{2+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}\sqrt{3}$$

Решение уравнений четвертой степени методом Ферари

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Рассматривается соответствующее кубичное уравнение:

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t-a^2d+4bd-c^2=0$$

Если $t=t_1$ – произвольный корень этого уравнения, тогда четыре корня первоначального уравнения четвертой степени находятся как корни двух квадратных уравнений

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{t_1}{2}=\mu\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b+t_1\right)x^2+\left(\frac{a}{2}t_1-c\right)x+\frac{t_1^2}{4}-d}$$

Примечание. Подкоренное выражение в правой части квадратных уравнений является полным квадратом.

Пример 9. Решим уравнение четвертой степени

$$x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0 \qquad (a=5,\, b=5,\, c=-5,\, d=-6)$$

$$t^3-5t^2-t+5=0 \;\Rightarrow\; t_1=5$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=\mu\sqrt{\left(\frac{25}{4}-5+5\right)x^2+\left(\frac{5}{2}5+5\right)x+\left(\frac{25}{4}+6\right)}$$

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=\mu\sqrt{\left(\frac{5x+7}{2}\right)^2} \;\Rightarrow\; x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=\mu\frac{5x+7}{2}$$

$$x^2+5x+6=0 \;\; \text{Y} \;\; x^2=1$$

$$x_1=-3,\, x_2=-2,\, x_{3,4}=\mu 1$$

4.3. Разложение многочленов на множители. Деление многочленов. Элементарные дроби

Разложение многочленов на множители

Если многочлен $F(x)$ может быть представлен в виде произведения многочленов $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)$, то эти многочлены называются ***множителями*** (***делителями***) многочлена $F(x)$. Каждый многочлен степени n относительно x может быть единственным способом представлен в виде произведения постоянной и n линейных множителей $(x-x_i)$, где x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – корни многочлена, а именно

$$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i), \quad (a_0\neq 0),$$

где корню x_i кратности m_i соответствует m_i множителей $(x-x_i)$.

Деление многочленов

Частное от деления многочлена $F(x)$ степени n на многочлен $G(x)$ степени m (в случае, когда $n\geq m$) может быть представлено в виде

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=$$

$$=\left(c_0x^{n-m}+c_1x^{n-m-1}+\ldots+c_{n-m-1}x+c_{n-m}\right)+\frac{Q(x)}{G(x)},$$

где ***остаток*** $Q(x)$ есть многочлен степени, меньшей, чем m.

Примечания.

1. Коэффициенты c_k $\left(k=\overline{0,n-m}\right)$ и $Q(x)$ определяются однозначно.
2. Остаток $Q(x)$ отсутствует в том и только в том случае, когда $G(x)$ является делителем многочлена $F(x)$.
3. Если многочлен $V(x)$ является ***общим делителем*** (***множителем***) многочленов $F(x)$ и $G(x)$, то его корни являются общими корнями этих многочленов.
4. Отношение $\dfrac{F(x)}{G(x)}$, как и числовую дробь можно сократить на любой общий множитель числителя и знаменателя.
5. Согласно ***теореме Безу***
$F(x)=(x-c)Q(x)+F(c)$.

Многочлены

$$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$$G(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

имеют хотя бы один общий корень (и, таким образом, общий делитель ненулевой степени) в том и только в том случае, если ***результант многочленов*** $R(F,G)$ ***равен нулю***. Результант многочленов – определитель $(n+m)$ порядка

$$R(F,G)=\begin{vmatrix} a_0a_1{\ldots}a_{n-1}a_n \\ \quad a_0a_1{\ldots}a_{n-1}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_0a_1{\ldots}a_{n-1}a_n \\ b_0b_1{\ldots}b_{m-1}b_m\ldots\ldots \\ \ldots b_0b_1{\ldots}b_{m-1}b_m\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_0b_1{\ldots}b_{m-1}b_m \end{vmatrix},$$

где на свободных местах стоят нули; коэффициенты $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ занимают m строк, а коэффициенты $b_0,b_1,\ldots,b_{m-1},b_m$ занимают n строк.

Пример 10. Установим наличие общих корней у многочленов

$$F(x)=x^3-x^2+x-1$$

$$G(x)=x^3+x^2+x+1$$

Вычислим результант данных многочленов. Многочлены $F(x)$ и $G(x)$ имеют хотя бы один общий корень, так как $R(F,G)=0$.

$R(F, G) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 11. Установим отсутствие общих корней у многочленов

$F(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

$G(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Вычислим результант данных многочленов. У многочленов нет общих корней, так как $R(F, G) \neq 0$.

$R(F, G) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 28 \\ -1 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 180 \neq 0$$

Элементарные дроби

Отношение $\dfrac{Q(x)}{G(x)}$ многочлена $Q(x)$ степени k и многочлена $G(x)$ степени m без общих корней может быть представлено в виде суммы m элементарных дробей, соответствующих корням x_i (кратности m_i) многочлена $G(x)$

$$\frac{Q(x)}{G(x)} = \sum_i \sum_{j=1}^{m_i} \frac{d_{ij}}{(x - x_i)^j}$$

Примечание. Коэффициенты d_{ij} элементарных дробей можно найти, умножая обе части данного равенства на многочлен $G(x)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства.

Каждая рациональная функция $\frac{F(x)}{G(x)}$, частное от деления многочлена $F(x)$ степени *n* на многочлен $G(x)$ степени *m*, может быть представлена в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей.

Пример 12. $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Получим представление рациональной функции в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) + \left(-2x^2 + 3x - 5\right)}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \frac{-2x^2 + 3x - 5}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Ранее, в одном из примеров, было показано, что у многочленов $F(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ и $G(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ нет общих корней, так как $R(F, G) \neq 0$. Очевидно, что и у многочленов $Q(x) = -2x^2 + 3x - 5$ и $G(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ также не будет общих корней.

$$G(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = \left(x^2 + 1\right)(x+1)$$

$$G(x) = (x - i)(x + i)(x + 1)$$

$$\frac{Q(x)}{G(x)} = \frac{-2x^2 + 3x - 5}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{d_1}{x - i} + \frac{d_2}{x + i} + \frac{d_3}{x + 1}$$

$$-2x^2 + 3x - 5 = d_1(x + i)(x + 1) + d_2(x - i)(x + 1) + d_3(x - i)(x + i)$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = -2 \\ d_1(1 + i) + d_2(1 - i) = 3 \\ d_1 i - d_2 i + d_3 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = -d_3 - 2 \\ (d_1 + d_2) + (d_1 - d_2)i = 3 \Rightarrow -2d_3 = 10 \\ (d_1 - d_2)i = -d_3 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 3 \\ (d_1 - d_2)i = 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2 = 1.5,\ d_3 = -5$$

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \frac{Q(x)}{G(x)} =$$

$$= 1 + \frac{1.5}{x - i} + \frac{1.5}{x + i} + \frac{-5}{x + 1} = 1 + \frac{3x}{x^2 + 1} - \frac{5}{x + 1}$$

4.4. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найти комплексные числа а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 z_2$ и г) z_1 / z_2

1. $z_1 = 15 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$
2. $z_1 = 3 + 7i$, $z_2 = -6 + 8i$
3. $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = 7 + i$
4. $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -5 - 10i$

Задача 2. Найти комплексные числа а) $z_1 z_2$, б) z_1 / z_2, в) z_1^n и г) $\sqrt[m]{z_2}$, используя тригонометрическую форму комплексных чисел z_1 и z_2

1. $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$, $n = 6$, $m = 3$
2. $z_1 = 1/2 - \left(\sqrt{3}/2\right)i$, $z_2 = -1$, $n = 20$, $m = 4$
3. $z_1 = -1 - \sqrt{3}$, $z_2 = 9i$, $n = 9$, $m = 2$
4. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -8 + 8\sqrt{3}i$, $n = 4$, $m = 4$

Задача 3. Найти комплексные числа

1. $z = \dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^{50}}{(1 + i)^{100}}$
2. $z = \left(1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^6$
3. $z = \left(i + \sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^6$
4. $z = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}\left(2 + \sqrt{3}\right)^{12}$

Задача 4. Решить уравнения

1. $x^2 + 25 = 0$
2. $x^2 - 6x + 18 = 0$
3. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
5. $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0$
6. $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$
7. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
8. $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$
9. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$
10. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$

Задача 5. Установить наличие (отсутствие) общих корней у многочленов

1. $F(x)=x^3-2x^2+x-2$, $G(x)=x^3+3x^2+7x-5$

2. $F(x)=x^3-2x^2+x-2$, $G(x)=x^4+2x^3+6x^2+2x+5$

3. $F(x)=x^3+3x^2+7x-5$, $G(x)=x^3+2x^2-x-2$

4. $F(x)=x^3+2x^2-x-2$, $G(x)=x^4+2x^3+6x^2+2x+5$

5. $F(x)=x^3-2x^2+x-2$, $G(x)=x^3+x^2+3x-5$

6. $F(x)=x^3-2x^2+x-2$, $G(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

7. $F(x)=x^3+x^2+3x-5$, $G(x)=x^3+2x^2-x-2$

8. $F(x)=x^3+2x^2-x-2$, $G(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

9. $F(x)=x^3-2x^2+x-2$, $G(x)=x^3+2x^2-x-2$

10. $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$, $G(x)=x^4+2x^3+6x^2+2x+5$

Задача 6. Представить рациональную функцию в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей

1. $f(x)=\dfrac{x^2+25}{x^2-6x+18}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+18}{x^2+25}$

3. $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+2x^2-x-2}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$

5. $f(x)=\dfrac{x^2+25}{x^3+3x^2+7x+5}$

6. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x-5}{x^2-6x+18}$

7. $f(x)=\dfrac{x^3+4x}{x^4+3x^2-4}$

8. $f(x)=\dfrac{x^4-10x^2+169}{x^3+9x}$

9. $f(x)=\dfrac{x^2+16}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}$

10. $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+2x+5}{x^2+36}$

Глава 5. Элементы аналитической геометрии

5.1. Уравнение прямой линии на плоскости. Полуплоскости

Уравнение $ax+by+c=0$ называется ***общим уравнением прямой***. Вектор $\vec{n}=(a,b)$ называется ***нормальным вектором прямой***.

Уравнение прямой l на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(a,b)$, имеет вид $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

Уравнение прямой l на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и параллельной вектору $\vec{q}=(m,n)$, имеет вид: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Уравнение называется ***каноническим уравнением прямой,*** вектор $\vec{q}=(m,n)$ – ***направляющим вектором прямой***. Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \end{cases}$$

называется ***параметрическим уравнением прямой*** на плоскости, t – параметром.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, записывается в виде $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=tg\beta$ имеет вид $y=kx+b_0$, здесь b_0 - ордината точки пересечения прямой с осью Oy, β - угол наклона прямой с положительным направлением оси Ox.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ ***в заданном направлении,*** имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$. Если k - произвольное число, уравнение определяет ***пучок прямых линий***, проходящих через точку M_0, кроме прямой параллельной оси Oy.

Пример 1. Составим общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(1,-2\sqrt{3}\right)$ и образующей с осью Ox угол 60^0.

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом $k=tg60^0=\sqrt{3}$ и проходящей через точку $M_0\left(1,-2\sqrt{3}\right)$ имеет вид $y+2\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$. Отсюда $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$. Общее уравнение прямой имеет вид $\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0$.

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a_0}+\frac{y}{b_0}=1$, где a_0 и b_0 соответственно отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy.

Пример 2. Составим общее уравнение прямой линии, проходящей через точку $A(-1,2)$, если эта прямая отсекает от положительной полуоси Ox отрезок в полтора раза больше, чем от положительной полуоси Oy.

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{1{,}5b_0}+\frac{y}{b_0}=1$, так как $a_0=1{,}5b_0$.

Точка $A(-1,2)$ принадлежит прямой. Отсюда $\frac{-1}{1{,}5b_0}+\frac{2}{b_0}=1$, $b_0=\frac{4}{3}$. Тогда общее уравнения прямой имеет вид $2x+3y-4=0$.

Точка пересечения двух непараллельных прямых l_1 и l_2 на плоскости определяется в результате решения системы линейных алгебраических уравнений, которые задают данные прямые. Например,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми l_1 и l_2 определяется по формулам

$$\cos\varphi=\pm\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\pm\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2}{\left|\vec{q}_1\right|\cdot\left|\vec{q}_2\right|}=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$$

$$tg\varphi=\pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

Здесь $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$, $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$ - нормальные векторы, $\vec{q}_1=(m_1,n_1)$, $\vec{q}_2=(m_2,n_2)$ - направляющие векторы и k_1, k_2- угловые коэффициенты прямых линий на плоскости.

Необходимые и достаточные ***условия параллельности двух прямых***

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}; \qquad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}; \qquad k_1=k_2.$$

Необходимые и достаточные ***условия перпендикулярности двух прямых*** $a_1a_2+b_1b_2=0$; $m_1m_2+n_1n_2=0$; $k_1k_2=-1$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ ***до прямой линии*** $ax+by+c=0$ на плоскости определяется по формуле $s=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Пример 3. Найдем расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$, делящей отрезок между точками $A(-2,2)$ и $B(3,2)$ в отношении $\lambda=3:2$, до прямой линии l: $3x-4y-5=0$.

Найдем координаты точки M_0: $x_0=\dfrac{-2+(3/2)3}{1+3/2}=1$, $y_0=\dfrac{2+(3/2)2}{1+3/2}=2$, т.е. $M_0(1,2)$. Расстояние от точки $M_0(1,2)$ до данной прямой линии l: $3x-4y-5=0$ равно $s=\dfrac{|3\cdot1-4\cdot2-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.

Каждая прямая линия l разбивает плоскость на два множества, называемых ***полуплоскостями***. Если прямая задана уравнением $ax+by+c=0$, то точки одной полуплоскости являются решением неравенства $ax+by+c>0$, а точки другой полуплоскости решением неравенства $ax+by+c<0$.

5.2. Уравнение плоскости. Полупространства

Уравнение плоскости α, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(a,b,c)$ и проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, имеет вид $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Уравнение $ax+by+cz+d=0$ называется ***общим уравнением плоскости***. Вектор $\vec{n}=(a,b,c)$ называется ***нормальным вектором плоскости***.

Пример 4. Даны две точки $A(-3,0,1)$ и $B(2,2,-3)$. Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Нормальный вектор искомой плоскости $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(2+3,2-0,-3-1)=(5,2,-4)$. Тогда уравнение плоскости α, проходящей через точку $A(-3,0,1)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}$ имеет вид $5(x+3)+2(y-0)-4(z-1)=0$. Отсюда α: $5x+2y-4z+19=0$.

Пример 5. Составим уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2,-5,1)$.

Уравнение плоскости, проходящей через ось Oz, имеет вид $ax+by=0$. Так как точка $M(2,-5,1)$ принадлежит плоскости, то $2a-5b=0$. Отсюда $a=2{,}5b$. Пусть $b=2$, тогда $a=5$ и искомое уравнения имеет вид $5x+2y=0$.

Угол между двумя плоскостями α_1 и α_2 определяется по формулам:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|} = \pm\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},$$

где $\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$ - нормальные векторы плоскостей.

Необходимые и достаточные ***условия параллельности двух плоскостей***

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Необходимые и достаточные ***условия перпендикулярности двух плоскостей***

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ***до плоскости*** $ax+by+cz+d=0$ в пространстве определяется по формуле

$$s=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Пример 6. Найдем расстояние между двумя параллельными плоскостями $\alpha_1: 12x+4y-6z-10=0$ и $\alpha_2: 6x+2y-3z+16=0$.

Найдем произвольную точку на плоскости α_1. Пусть $x=0$ и $y=0$, тогда $z=-5/3$. Искомое расстояние равно расстоянию от точки $M(0,0,-5/3)$ до плоскости α_2: $s=\dfrac{|6\cdot 0+2\cdot 0-3\cdot(-5/3)+16|}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{49}}=3.$

Каждая плоскость α разбивает пространство на два множества, называемые ***полупространствами***. Если плоскость задана уравнением $ax+by+cz+d=0$, то точки одного полупространства являются решением неравенства $ax+by+cz+d>0$, а точки другого полупространства решением неравенства $ax+by+cz+d<0$.

5.3. Уравнение прямой линии в пространстве

Прямая линия l в пространстве задается двумя пересекающимися плоскостями α_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Тогда ***общее уравнение прямой в пространстве*** имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой линии l, параллельной вектору $\vec{q} = (m, n, p)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и называется ***каноническим,*** а вектор $\vec{q} = (m, n, p)$ – ***направляющим вектором***. Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

называется ***параметрическим уравнением прямой*** в пространстве**,** t – параметром.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ записывается в виде $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Пример 7. Дано общее уравнение прямой линии $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$

Найдем каноническое уравнение и направляющий вектор этой прямой.

<u>*1 способ.*</u> Решая систему уравнений, которая задает данную прямую линию, получим $y = 3 - 5x$ и $z = 6 - 3x$. Отсюда $\dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z-6}{-3} = x$.

Каноническое уравнение прямой имеет вид $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z-6}{-3}$.

Направляющий вектор прямой $\vec{q} = (1, -5, -3)$.

<u>*2 способ.*</u> Чтобы составить каноническое уравнение прямой, необходимо найти две любые точки, принадлежащие этой прямой. Например, точки пересечения этой прямой с плоскостями $x = 0$ и $z = 0$. В этих случаях из общего уравнения прямой получаем две системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y - z + 3 = 0 \\ -y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x - y - 9 = 0 \end{cases}.$$

Их решения и определяют координаты двух точек $M_1(0,3,6)$ и $M_2(2,-7,0)$. Тогда каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-3}{-7-3} = \frac{z-6}{0-6} \text{ или } \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-6}{-3}.$$

Направляющий вектор прямой $\vec{q} = (1,-5,-3)$.

Угол между двумя прямыми линиями l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{q}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{q}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \pm \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{\left|\vec{q}_1\right| \cdot \left|\vec{q}_2\right|} = \pm \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Необходимые и достаточные ***условия параллельности двух прямых***

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Необходимые и достаточные ***условия перпендикулярности двух прямых***

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Пример 8. Найдем угол между прямой линией l_1: $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{0}$ и прямой l_2, проходящей через начало координат и точку $M(5,-3,1)$.

Запишем уравнение прямой l_2, проходящей через две точки – начало координат $O(0,0,0)$ и точку $M(5,-3,1)$:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

Направляющие векторы прямых линий l_1 и l_2 равны $\vec{q}_1 = (0,1,0)$ и $\vec{q}_2 = (5,-3,1)$. Следовательно

$$\cos\varphi = \pm \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{25 + 9 + 1}} = \mu \frac{3}{\sqrt{35}}$$

Таким образом, острый угол между двумя прямыми равен $\varphi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{35}}$.

Угол между прямой $l:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ ***и плоскостью*** $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ определяется формулой

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{q}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{q}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\,a\cdot m+b\cdot n+c\cdot p\,\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где $\vec{q}=(m,n,p)$ - направляющий вектор прямой l, $\vec{n}=(a,b,c)$ - нормальный вектор плоскости α.

Условие параллельности прямой и плоскости

$\vec{q}\,\vec{n}=0$ или $am+bn+cp=0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$\vec{n}=\lambda\,\vec{q}$ или $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}=\lambda$

Пример 9. Составим уравнение плоскости, проходящей через прямую l_1: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ и точку $M(2,1,-1)$. Найдем угол между полученной плоскостью и прямой $l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

Точка $M(2,1,-1)$ лежит на искомой плоскости α. Уравнение плоскости α имеет вид $a(x-2)+b(y-1)+c(z+1)=0$. Найдем координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}=(a,b,c)$. Точка $A(-1,-1,3)$ лежит на прямой l_1, а значит и на плоскости α. Подставляя точку A в уравнение плоскости α, получим уравнение $-3a-2b+4c=0$. Так как прямая линия l_1 лежит в плоскости α, то направляющий вектор $\vec{q}_1=(2,1,2)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Следовательно, $\vec{q}_1\cdot\vec{n}=0$, т.е. $2a+b+2c=0$. Решим алгебраическую систему линейных уравнений

$$\begin{cases}-3a-2b+4c=0\\ 2a+b+2c=0\end{cases}.$$

Получим $a=-8c$ и $b=14c$. Пусть $c=1$, тогда $a=-8$, $b=14$ и $\vec{n}=(a,b,c)=(-8,14,1)$. Искомое уравнение плоскости α имеет вид

$-8x+14y+z+3=0$. Найдем синус угла между плоскостью α: $-8x+14y+z+3=0$ с нормальным вектором $\vec{n}=(a,b,c)=(-8,14,1)$ и прямой l_2 : $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ с направляющим вектором $\vec{q_2}=(m_2,n_2,p_2)=(2,-2,2)$

$$\sin\theta=\frac{|\ a\cdot m_2+b\cdot n_2+c\cdot p_2\ |}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(-8)\cdot 2+14\cdot(-2)+1\cdot 2|}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{64+196+1}}=\frac{7}{\sqrt{87}}$$

Искомый угол равен $\theta=\arcsin\frac{7}{\sqrt{87}}$.

5.4. Прямая и гиперплоскость в n - мерном точечном пространстве. Полупространства в n - мерном точечном пространстве

Произвольный упорядоченный набор из n чисел называется ***n* - *мерной точкой***, а сами числа ***координатами*** этой точки. Обозначение точки с координатами - $M(x_1,x_2,...,x_n)$.

Совокупность всех n– мерных точек называется ***n* - *мерным точечным пространством.*** Точка $O(0,0,...,0)$ называется началом координат. Множество точек пространства, у которых все координаты, кроме i - той, равны нулю, называется координатной осью Ox_i. Совокупность всех точек пространства, у которых i - тая координата равна нулю, называется координатной гиперплоскостью x_i. В n - мерном точечном пространстве имеется n координатных гиперплоскостей $x_1,x_2,...,x_n$.

Уравнение прямой линии l, проходящей через точку $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ и параллельной вектору $Q=(m_1,m_2,...,m_n)$, имеет вид:

$$\frac{x_1-x_1^0}{m_1}=\frac{x_2-x_2^0}{m_2}=...=\frac{x_n-x_n^0}{m_n}$$

и называется ***каноническим уравнением прямой в* n *- мерном точечном пространстве.*** Вектор $Q=(m_1,m_2,...,m_n)$ называется ***направляющим вектором прямой*** l. Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} x_1=m_1t+x_1^0 \\ x_2=m_2t+x_2^0 \\ \quad .... \\ x_n=m_nt+x_n^0 \end{cases}$$

называется ***параметрическим уравнением прямой в* n *- мерном точечном пространстве***.

Уравнение ***гиперплоскости*** α, перпендикулярной вектору $N=(a_1,a_2,...,a_n)$ и проходящей через точку $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$, имеет вид

$$a_1\left(x_1-x_1^0\right)+a_2\left(x_2-x_2^0\right)+...+a_n\left(x_n-x_n^0\right)=0$$

Уравнение $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$ называется ***общим уравнением гиперплоскости в n - мерном точечном пространстве***. Вектор $N=(a_1,a_2,...,a_n)$ называется ***нормальным вектором гиперплоскости.*** Если $b=0$, то гиперплоскость проходит через начало координат $O(0,0,...,0)$.

Расстояние от точки $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ ***до гиперплоскости*** α: $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$ в n - мерном точечном пространстве определяется по формуле

$$s=\frac{\left|a_1x_1^0+a_2x_2^0+...+a_nx_n^0+b\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}}$$

Каждая гиперплоскость α разбивает n - мерное точечное пространство на два множества, называемые ***полупространствами***. Если гиперплоскость задана уравнением $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$, то координаты точки одного полупространства являются решением неравенства $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b>0$, а координаты точки другого полупространства – решением неравенства с противоположным знаком $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b<0$.

5.5. Кривые второго порядка

Уравнение второго порядка относительно двух переменных $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ называется ***общим уравнением кривых второго порядка.*** При разных значениях постоянных коэффициентов A,B,C,D,E,F уравнение описывает четыре вида линий на плоскости: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

Окружность – это множество точек линии на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Нормальное уравнение окружности имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

где (x_0,y_0) – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

После раскрытия скобок уравнения, получается ***общее уравнение окружности***

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \text{ где } D=-2x_0,\ E=-2y_0,\ F=x_0^2+y_0^2-R^2$$

Пример 10. Найдем расстояние между центрами двух окружностей $x^2+y^2+6x-8y+16=0$ и $x^2+y^2-10x+4y+13=0$.

Выделим полные квадраты в уравнениях окружностей $x^2+6x+9+y^2-8y+16-9=0$ и $x^2-10x+25+y^2+4y+4-25-4+13=0$. Отсюда получаем $(x+3)^2+(y-4)^2=9$ и $(x-5)^2+(y+2)^2=16$. Следовательно, координаты центров окружностей равны $O_1(-3{,}4)$ и $O_2(5{,}-2)$. Расстояние между центрами окружностей равно $s=\sqrt{(5-(-3))^2+(-2-4)^2}=\sqrt{64+36}=10$.

Эллипс – это множество точек линии на плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

Точки $F_1(c{,}0)$ и $F_2(-c{,}0)$ называются фокусами эллипса, расстояние между ними равно $F_1F_2=2c$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. Расстояния от точки M до фокусов эллипса F_1M и F_2M называются ***фокальными радиусами точки*** и обозначаются r_1 и r_2. Сумма фокальных радиусов – величина постоянная $r_1+r_2=2a$.

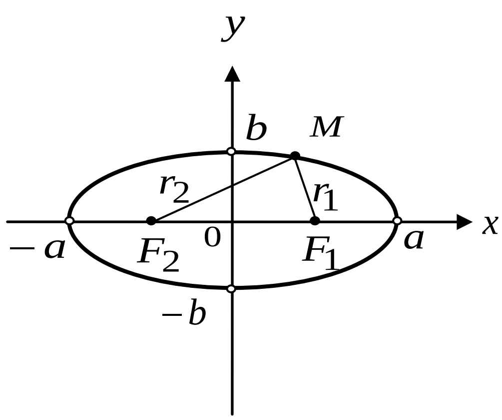

Рис. 1

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$, если $a>b$ и фокусы находятся на оси Ox. Параметры a и b называются ***полуосями эллипса***. Отношение $\dfrac{c}{a}=\varepsilon<1$ называется ***эксцентриситетом*** эллипса. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=a-\varepsilon x,\quad r_2=a+\varepsilon x$.

Пример 11. Запишем каноническое уравнение симметричного относительно осей координат эллипса, если его малая полуось равна 5, а эксцентриситет - $\dfrac{12}{13}$.

Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-25}}{a}=\dfrac{12}{13}$.

Следовательно, $a^2 = 169$. Каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, имеет вид $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ или $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

Гипербола – это множество точек линии на плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.

Точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ называются фокусами гиперболы, расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы. Расстояния от точки M до фокусов гиперболы F_1 и F_2 называются ***фокальными радиусами*** и обозначаются r_1 и r_2.

Модуль разности расстояний фокальных радиусов – величина постоянная $|r_2 - r_1| = 2a$.

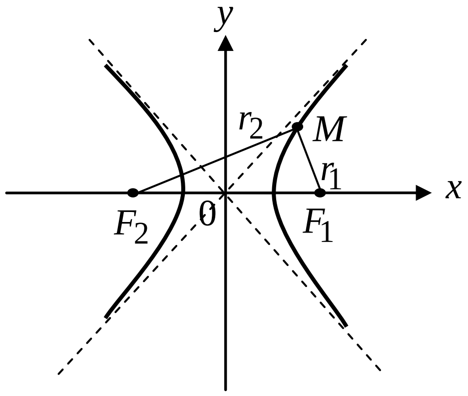

Рис. 2

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Параметры a и b называются соответственно ***действительной и мнимой полуосями гиперболы.*** Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется ***эксцентриситетом*** гиперболы. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – называются ***асимптотами гиперболы***.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются ***сопряженными***.

Пример 12. Запишем каноническое уравнение симметричной относительно оси координат Oy гиперболы с асимптотами $y = \pm 0.75x$, проходящей через точку $M(6,1.5)$. Найдем расстояния между ее вершинами и фокусами.

Уравнение асимптот гиперболы $y = \pm(a/b)x = \pm 0.75x$. Тогда $b = 0.75a$ и уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{4^2 y^2}{3^2 a^2} = 1$. Точка $M(6,1.5)$ принадлежит гиперболе. Следовательно, $\frac{6^2}{a^2} - \frac{4}{a^2} = 1$. Получаем $a = 4\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$. Тогда искомое уравнение гиперболы принимает вид $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$. Расстояния между вершинами и фокусами соответственно равны $s_1 = 2a$ и $s_2 = 2c$. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{32 + 18} = 5\sqrt{2}$. Следовательно, $s_1 = 8\sqrt{2}$ и $s_2 = 10\sqrt{2}$.

Парабола - это множество точек линии на плоскости, которые находятся на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой ***фокусом***, и от данной прямой, называемой ***директрисой*** и не проходящей через фокус.

Точка $F(p/2, 0)$ называется фокусом параболы. Величину p называют ***параметром параболы.***

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Расстояние от точки M до фокуса F, называемое ***фокальным радиусом,*** обозначим r.

Прямая линия $x = -p/2$ называется ***директрисой.*** Расстояние от директрисы до точки M равно d, а от директрисы до фокуса F - p.

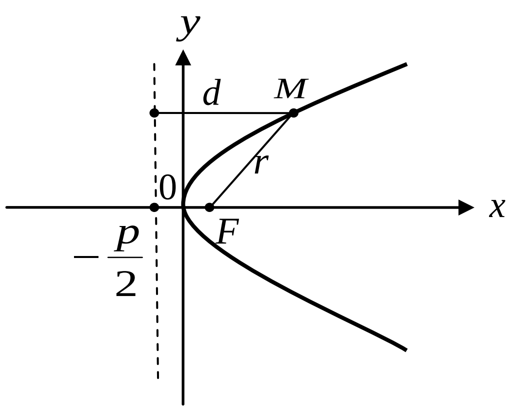

Рис. 3

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и с вершиной в начале координат, имеет вид $y^2 = 2px$. Фокальный радиус равен $r = x + p/2$.

Парабола $x^2 = 2py$ симметрична относительно оси Oy, лежит в верхней полуплоскости, имеет фокус $F(0, p/2)$ и директрису $y = -p/2$. Фокальный радиус равен $r = y + p/2$.

Пример 13. Составим уравнения параболы и ее директрисы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси координат Oy, если она проходит через точку $M(-6,3)$.

Точка $M(-6,3)$ принадлежит параболе $x^2 = 2py$. Отсюда $(-6)^2 = 6p$, $p = 6$. Следовательно, каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и симметричной относительно оси Oy имеет вид $x^2 = 12y$, а уравнение директрисы $y = -3$.

5.6. Поверхности второго порядка

Уравнение второго порядка относительно трех переменных $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Mz + N = 0$ называется ***общим уравнением поверхностей второго порядка.*** При разных значениях постоянных коэффициентов $A, B, C, D, E, F, G, H, M, N$ уравнение описывает четыре вида поверхностей в пространстве: сферу, эллипсоид, гиперболоид и параболоид.

Сфера - это множество точек в пространстве, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы. Сфера – замкнутая центральная поверхность второго порядка.

Нормальное уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты центра сферы, R – радиус сферы.

После раскрытия скобок, получается ***общее уравнение сферы***

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Mz + N = 0,$$

где $G = -2x_0$, $H = -2y_0$, $M = -2z_0$, $N = x_0^2 + y_0^2 + z^2 - R^2$.

Пример 14. Составим уравнение сферы с центром в точке $O(2,-3,1)$ и проходящей через точку $M(8,-5,-2)$.

Точка $M(8,-5,-2)$ принадлежит сфере $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = R^2$. Отсюда $(8-2)^2 + (-5+3)^2 + (-2-1)^2 = R^2$, $R^2 = 49$. Нормальное уравнение сферы имеет вид $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 49$.

Пример 15. Составим уравнение сферы с центром в точке $O(5,-2,4)$ и радиусом, равным 3. Найдем координаты центра и радиус сферы $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 8y + 28z - 38 = 0$.

Подставим координаты центра сферы и значение радиуса в нормальное уравнение $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9$.

Сократив общий множитель и сгруппировав члены, содержащие переменные x, y и z, дополним каждую группу до полного квадрата суммы или разности

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 + 14z + 49 - 49 - 19 = 0,$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+7)^2 = 81.$$

Откуда получаем координаты центра сферы $O(-3,2,-7)$ и радиус $R = 9$.

Эллипсоид – замкнутая центральная поверхность второго порядка. В декартовой системе координат $Oxyz$ с началом в центре симметрии эллипсоида, оси координат которой совпадают с осями симметрии эллипсоида, уравнение эллипсоида имеет ***канонический вид***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a,b,c - полуоси эллипсоида. ***Объем эллипсоида*** равен $V=\frac{4}{3}abc$.

Если $a\neq b\neq c$, эллипсоид называется ***трехосным***. Если $a=b>c$, то имеем сжатый (сплющенный) эллипсоид вращения, получающийся при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг его малой полуоси. Если $a>b=c$, имеем вытянутый эллипсоид вращения, получаемый вращением того же эллипса вокруг большой полуоси. Если $a=b=c$, то эллипсоид является сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$. Сечением эллипсоида любой плоскостью является эллипс.

Гиперболоид – незамкнутая центральная поверхность второго порядка. Существует два вида гиперболоида – однополостный и двуполостный. В декартовой системе координат $Oxyz$ с началом в центре симметрии гиперболоида, оси координат которого совпадают с осями симметрии гиперболоида, уравнения гиперболоида принимают канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (***однополосный гиперболоид***),

где a,b - действительные полуоси, c - мнимая полуось;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ (***двуполостный гиперболоид***),

где a,b - мнимые полуоси, c - действительная полуось.

Гиперболоид неограниченно приближается к поверхности, называемой ***асимптотическим конусом***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Сечениями гиперболоида плоскостями, параллельными оси z, являются гиперболы, а параллельно осям x и y - эллипсы.

Параболоид – незамкнутая поверхность второго порядка, не имеющая центра симметрии. Существуют два вида параболоида – эллиптический параболоид и гиперболический параболоид. В декартовой системе координат $Oxyz$ с началом в вершине параболоида, ось Oz которой совпадают с осью симметрии параболоида, уравнения параболоида принимают канонический вид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (\textit{\textbf{эллиптический параболоид}})$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (\textit{\textbf{гиперболический параболоид}}),$$

где $p>0,\ q>0$.

Сечения эллиптического параболоида параллельно плоскости Oxy – эллипсы, параллельно оси Oz – параболы. Если $p=q$, то эллиптический параболоид называется ***параболоидом вращения***, получаемый вращением параболы $x^2=2pz$ вокруг своей оси симметрии. Сечения гиперболического параболоида плоскостями Oxz и Oyz параболы $x^2=2pz$ и $y^2=-2qz$, параллельно плоскости Oxy - гиперболы (две пересекающихся прямых, если $z=0$).

Пример 16. Определим тип поверхностей второго порядка: 1) $5x^2+y^2-50z=0$, 2) $4x^2+16y^2-z^2-16=0$, 3) $x^2-3y^2-18z=0$, 4) $x^2+4y^2-16z^2+16=0$, 5) $36x^2+9y^2+4z^2-36=0$.

Приводя уравнения к каноническому виду, получим:

1) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{25}=2z$ – эллиптический параболоид,

2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{16}=1$ – однополосный гиперболоид,

3) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=2z$ – гиперболический параболоид,

4) $x^2+\dfrac{y^2}{4}-z^2=-1$ – двуполостный гиперболоид,

5) $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ – эллипсоид.

5.7. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Написать общее уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью S кв. ед.

1. $M_0(6,2),\ S=3$
2. $M_0(10,-6),\ S=15$
3. $M_0(-4,12),\ S=2$
4. $M_0(-5,-6),\ S=2.5$

Задача 2. Составить общие уравнения прямых линий l_1 и l_2, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно и перпендикулярно прямой линии $l: \ ax + by + c = 0$.

1. $M_0(3,1)$, $l: \ 3x - y + 4 = 0$
2. $M_0(2,-3)$, $l: \ x - y + 5 = 0$
3. $M_0(4,0)$, $l: \ 2x + 6y - 12 = 0$
4. $M_0(-1,3)$, $l: \ 2x + 5y - 1 = 0$

Задача 2. Составить общие уравнения прямых линий, проходящих через точку пересечения прямых $l_1: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $l_2: \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой линии $l: \ ax + by + c = 0$.

1. $l_1: \ 2x - y + 6 = 0$, $l_2: \ x + y - 3 = 0$, $l: \ 3x - y + 4 = 0$
2. $l_1: \ x - y + 7 = 0$, $l_2: \ 2x + 3y + 4 = 0$, $l: \ 6x + 3y - 2 = 0$
3. $l_1: \ 4x + 3y + 7 = 0$, $l_2: 5x + 2y + 7 = 0$, $l: -x + y + 8 = 0$
4. $l_1: \ 3x + 5y + 15 = 0$, $l_2: \ 2x + y + 3 = 0$, $l: \ 2x - 6y - 1 = 0$

Задача 3. Заданы координаты вершин треугольника $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$. Найти длину высоты треугольника AD и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на сторону AB.

1. $A(-6,-4)$, $B(3,-7)$, $C(-3,2)$;
2. $A(-3,2)$, $B(-2,-5)$, $C(6,-1)$;
3. $A(2,5)$, $B(-3,4)$, $C(-4,-2)$;
4. $A(3,4)$, $B(2,-1)$, $C(1,-7)$;

Задача 4. Определить углы, образованные пересечением плоскостей $\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α_1.

1. $\alpha_1: 3y - z = 0$, $\alpha_2: 2y + z = 0$, $M_0(-2,2,1)$
2. $\alpha_1: x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$, $\alpha_2: x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$, $M_0(4, 2\sqrt{2}, -5)$
3. $\alpha_1: x + 2y + 2z - 3 = 0$, $\alpha_2: 16x + 12y - 15z - 1 = 0$, $M_0(1,3,-1)$
4. $\alpha_1: 6x + 3y - 2z = 0$, $\alpha_2: x + 2y + 6z - 12 = 0$, $M_0(-3,5,10)$

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ а) перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a, b, c)$; б) параллельно нормальному вектору плоскости $\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; в) и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и параллельно оси Ol_1; г) проходящей через ось Ol_2.

1. $M_0(5,3,-1)$ а) $\vec{n}=(-2,-4,1)$; б) $\alpha_1: x+y+z-7=0$;
в) $M_1(6,2,-3)$, $Ol_1=Ox$; г) $Ol_2=Oy$

2. $M_0(1,-2,3)$ а) $\vec{n}=(3,-4,5)$; б) $\alpha_1: 2x+3y-4z+6=0$;
в) $M_1(0,2,5)$, $Ol_1=Oy$; г) $Ol_2=Oz$

3. $M_0(3,2,1)$ а) $\vec{n}=(4,5,-3)$; б) $\alpha_1: -2x+y-z+10=0$;
в) $M_1(1,-1,1)$, $Ol_1=Oz$; г) $Ol_2=Ox$

4. $M_0(-2,4,3)$ а) $\vec{n}=(1,3,2)$; б) $\alpha_1: 5x-2y+2z-9=0$;
в) $M_1(-6,0,4)$, $Ol_1=Oy$; г) $Ol_2=Oy$

Задача 6. Составить уравнение прямой линии l в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ а) по направлению вектора $\vec{q}=(m,n,p)$; б) параллельно прямой l_1; в) и точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$; г) параллельно оси Ol.

1. $M_0(8,4,-5)$ а) $\vec{q}=(-3,7,2)$; б) $l_1: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+3}{1}$;
в) $M_1(3,-2,-3)$; г) $Ol=Ox$

2. $M_0(1,-2,3)$ а) $\vec{q}=(2,0,1)$; б) $l_1: \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$;
в) $M_1(0,2,5)$; г) $Ol=Oz$

3. $M_0(2,3,0)$ а) $\vec{q}=(5,-1,4)$; б) $l_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{1}$;
в) $M_1(-1,1,-2)$; г) $Ol=Oy$

4. $M_0(-1,1,-1)$ а) $\vec{q}=(3,4,-1)$; б) $l_1: \frac{x-4}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-6}{1}$;
в) $M_1(3,-2,4)$; г) $Ol=Ox$

Задача 7. Составить уравнение прямой линии l параллельной прямой l_1 и точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Найти углы, которые прямая линия l_1 составляет с осями координат и прямой l_2.

1. $M_0(0,1,0)$, $l_1: \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$, $l_2: \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$

2. $M_0(2,0,1)$, $l_1: \begin{cases} x-2z+1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$, $l_2: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$

3. $M_0(2,-3,0)$, $l_1:\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$, $l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

4. $M_0(1,4,-1)$, $l_1:\begin{cases} x-y-2=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases}$, $l_2:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-2}{2}$

Задача 8. Найти уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и прямую $l:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$

1. $M_0(1,-5,3)$
$l:\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+3y-z-3=0 \end{cases}$

2. $M_0(3,-3,5)$
$l:\begin{cases} 2x-2y+z-8=0 \\ 2x+4y-z+4=0 \end{cases}$

3. $M_0(0,-6,2)$
$l:\begin{cases} x-4y-z-10=0 \\ 3x+2y-6z+12=0 \end{cases}$

4. $M_0(4,0,3)$
$l:\begin{cases} 3x+y+2z+6=0 \\ x+3y+z+3=0 \end{cases}$

Задача 9. Составить уравнение плоскости α, проходящей через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Определить угол, который прямая линия l составляет с полученной плоскостью α.

1. $M_1(3,4,2)$, $M_2(4,5,2)$, $M_3(7,3,-2)$, $l:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

2. $M_1(2,3,0)$, $M_2(1,2,2)$, $M_3(-1,0,-3)$, $l:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$

3. $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$, $M_3(2,0,2)$, $l:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

4. $M_1(3,4,6)$, $M_2(3,-2,-3)$, $M_3(6,3,2)$, $l:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$

Задача 10. Составить уравнение прямой линии, проходящей через центры двух окружностей. Найти отношение радиусов окружностей.

1. $x^2+y^2-2x-2y-14=0$
$x^2+y^2+50x-4y+25=0$

2. $x^2+y^2-25=0$
$x^2+y^2+2x+4y-31=0$

3. $x^2+y^2+2x-3=0$
$x^2+y^2-8x+6y-11=0$

4. $x^2+y^2+10x-4y+13=0$
$x^2+y^2-8x-4y-29=0$

Задача 11. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Найти его полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет.

1. $M_1(2, \sqrt{3})$, $M_2(0,2)$
2. $M_1(2\sqrt{3}, 1)$, $M_2(\sqrt{15}, -1/2)$
3. $M_1(1, -4\sqrt{2})$, $M_2(-2, 2\sqrt{5})$
4. $M_1(5/2, \sqrt{6}/4)$, $M_2(-2, \sqrt{15}/5)$

Задача 12. Найти для гиперболы действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
3. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{49} = 1$
4. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$

Задача 13. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса. Найти ее основные параметры.

1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
4. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

Задача 14. Составить уравнение параболы, проходящей через точку $M(x, y)$ и начало координат симметрично относительно оси Ol. Найти координаты ее фокусов и уравнение директрисы

1. $M(2, -4)$, $Ol = Ox$
2. $M(-2\sqrt{2}, 2)$, $Ol = Oy$
3. $M(8, -8)$, $Ol = Oy$
4. $M(1, 5)$, $Ol = Ox$

Задача 15. Определить тип поверхности второго порядка и найти уравнение ее сечений плоскостями α_1 и α_2.

1. $x^2 - 3y^2 - 18z = 0$, $\alpha_1 : z - 2 = 0$, $\alpha_{2:} : y = 0$
2. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$, $\alpha_1 : z = 0$, $\alpha_{2:} : x + y = 0$
3. $4x^2 + 16y^2 - z^2 - 16 = 0$, $\alpha_1 : z - 4 = 0$, $\alpha_{2:} : y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 53 = 0$, $\alpha_1 : x - 2 = 0$, $\alpha_{2:} : x - y = 0$
5. $5x^2 + y^2 - 50z = 0$, $\alpha_1 : z - 0.5 = 0$, $\alpha_{2:} : x = 0$
6. $x^2 + 4y^2 - 16z^2 + 16 = 0$, $\alpha_1 : z - 2 = 0$, $\alpha_{2:} : y + 2 = 0$

Глава 6. Линейное программирование

6.1. Постановка задачи линейного программирования

Метод линейного программирования используется для планирования деятельности каких-либо экономических объектов, с учетом реально существующих ограничений, если:

- задача сводится к определению числовых характеристик плана, обеспечивающего эффективную работу объекта с точки зрения выбранного критерия;
- критерий эффективности, а именно, некоторая числовая характеристика линейно зависит от числовых характеристик плана;
- ограничения, связанные с деятельностью экономического объекта, могут быть представлены с помощью линейных неравенств относительно числовых характеристик плана.

Общая постановка ***экономико-математической модели*** (ЭММ) задачи линейного программирования имеет вид:

$\underset{1\times n}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = ?$ – план

$F(X) = \underset{1\times n}{C} \cdot \underset{n\times 1}{X} \to opt \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$ – функция цели, где $c_j \in R,\ j = \overline{1,n}$

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} \le \underset{m\times 1}{B}$ – ограничения, где $a_{ij}, b_i \in R;\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$

$\underset{n\times 1}{X} \ge 0$ – естественные ограничения

Каноническая форма задачи линейного программирования включает дополнительные переменные:

$\underset{1\times m}{X_\partial^T} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+m} \end{pmatrix} \ge 0$

С помощью данных переменных ограничения задачи (в канонической форме) представляются в виде линейных уравнений:

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} + \underset{m\times m}{E} \cdot \underset{m\times 1}{X_\partial} = \underset{m\times 1}{B}$

Задача линейного программирования может:

- не иметь решения;
- иметь единственное решение – оптимальный план;
- иметь бесчисленное множество решений, оптимальных планов.

6.2. Взаимно-двойственные задачи линейного программирования. Теоремы двойственности

Анализ двух взаимно-двойственных задач линейного программирования позволяет ответить на множество вопросов оптимального моделирования деятельности экономического объекта.

Первая задача:

$$\underset{1\times n}{X^T} = \left(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\right) = ?$$

(план)

$$F(X) = \underset{1\times n}{C} \cdot \underset{n\times 1}{X} \to \max$$

(функция цели)

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} \le \underset{m\times 1}{B}$$

(ограничения)

$$\underset{n\times 1}{X} \ge 0$$

(естественные ограничения)

Вторая задача:

$$\underset{1\times m}{Y^T} = \left(y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m\right) = ?$$

(план)

$$Z(Y) = \underset{1\times m}{B^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} \to \min$$

(функция цели)

$$\underset{n\times m}{A^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} \ge \underset{n\times 1}{C^T}$$

(ограничения)

$$\underset{m\times 1}{Y} \ge 0$$

(естественные ограничения)

Каноническая форма взаимно-двойственных задач включает дополнительные неотрицательные переменные $\left(\underset{m\times 1}{X_\partial},\ \underset{n\times 1}{Y_\partial}\right)$.

Первая задача:

$$\underset{n\times 1}{X} = ? \quad \underset{m\times 1}{X_\partial} = ?$$

$$F(X) = \underset{1\times n}{C} \cdot \underset{n\times 1}{X} \to \max$$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} + \underset{m\times m}{E} \cdot \underset{m\times 1}{X_\partial} = \underset{m\times 1}{B}$$

$$\underset{n\times 1}{X} \ge 0, \quad \underset{m\times 1}{X_\partial} \ge 0$$

Вторая задача:

$$\underset{m\times 1}{Y} = ? \quad \underset{n\times 1}{Y_\partial} = ?$$

$$Z(Y) = \underset{1\times m}{B^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} \to \min$$

$$\underset{n\times m}{A^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} - \underset{n\times n}{E} \cdot \underset{n\times 1}{Y_\partial} = \underset{n\times 1}{C^T}$$

$$\underset{m\times 1}{Y} \ge 0, \quad \underset{n\times 1}{Y_\partial} \ge 0$$

Для анализа взаимно-двойственных задач полезны теоремы двойственности, сформулированные далее.

Теорема 1. Взаимно-двойственные задачи линейного программирования, одновременно, либо не имеют решения, либо имеют, причем: $\max F = \min Z$.

Теорема 2. Решения взаимно-двойственных задач линейного программирования X^o, Y^o тогда и только тогда будут оптимальными, когда выполняются следующие условия:

$$x_j^o \cdot \left(\sum_i a_{ij} \cdot y_i^o - c_j \right) = 0,\ \forall j = \overline{1,n}; \qquad y_i^o \cdot \left(\sum_j a_{ij} \cdot x_j^o - b_i \right) = 0,\ \forall i = \overline{1,m}$$

Примечание. Между переменными взаимно-двойственных задач существует взаимно-однозначное соответствие:

$X \leftrightarrow Y_\partial$, т.е. $x_j \leftrightarrow y_{m+j}$, $\quad \forall j = \overline{1,n}$

$X_\partial \leftrightarrow Y$, т.е. $x_{n+i} \leftrightarrow y_i$, $\quad \forall i = \overline{1,m}$

Согласно теореме 2:

$$x_j^o \cdot y_{m+j}^o = 0,\ \forall j = \overline{1,n}; \qquad y_i^o \cdot x_{n+i}^o = 0,\ \forall i = \overline{1,m}$$

Теорема 3. Для оптимальных решений взаимно двойственных задач линейного программирования X^o, Y^o при достаточно малых изменениях Δb_i выполняется следующее свойство: $\Delta F\left(X^o\right) \approx y_i^o \cdot \Delta b_i$, $\forall i = \overline{1,m}$.

6.3. Примеры экономических задач, приводящих к моделям задач линейного программирования

Пример 1. Для выпуска двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Обозначения:

a_{ij}, $\forall i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,2}$ – расход i - ого вида ресурсов на производство одной единицы j - ого вида продукции;

b_i, $\forall i = \overline{1,3}$ – запас i - ого вида ресурсов;

c_j, $\forall j = \overline{1,2}$ – прибыль от единицы j - ого вида продукции;

x_j, $\forall j = \overline{1,2}$ – план выпуска j - ого вида продукции;

y_i, $\forall i = \overline{1,3}$ – цена i - ого вида ресурсов;

Известны:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ед.) − нормы расхода ресурсов на производство продукции,

$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$ (д. е.) − прибыль от реализации одной единицы продукции,

$B = \begin{pmatrix} 60 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}$ (ед.) − запасы ресурсов у предприятия.

Составим ***экономико-математическую модель*** задачи определения плана выпуска продукции, обеспечивающего предприятию максимальную прибыль:

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ?$$ – план выпуска продукции

$$F = \underset{1\times2}{C} \cdot \underset{2\times1}{X} = 4x_1 + 6x_2 \to \max$$ – прибыль (функция цели)

$$\underset{3\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{X} \le \underset{3\times1}{B} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22 \\ \qquad 2x_2 \le 7 \end{cases}$$ – ограничения на ресурсы

$$\underset{2\times1}{X} \ge 0$$ – естественные ограничения

Каноническая форма задачи определения плана выпуска продукции, обеспечивающего предприятию максимальную прибыль, включает дополнительные неотрицательные переменные:

$$\underset{1\times3}{X_\partial^T} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \ge 0$$ – остатки ресурсов.

Ограничения задачи могут быть представлены с помощью дополнительных неизвестных в виде линейных уравнений:

$$\underset{3\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{X} + \underset{3\times3}{E} \cdot \underset{3\times1}{X_\partial} = \underset{3\times1}{B} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22 \\ \qquad 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

Составим математическую модель и дадим экономическое толкование двойственной задачи:

$$\underset{1\times3}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = ?$$ – цены ресурсов

$$Z = \underset{1\times3}{B^T} \cdot \underset{3\times1}{Y} = 60y_1 + 22y_2 + 7y_3 \to \min$$

затраты на имеющиеся на предприятии запасы ресурсов

$$\underset{2\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times1}{Y} \ge \underset{2\times1}{C^T} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \qquad\qquad \ge 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 6 \end{cases}$$

ограничения со стороны продавца ресурсов

$$\underset{3\times1}{Y} \ge 0$$ – естественные ограничения

Каноническая форма двойственной задачи, включает дополнительные неотрицательные переменные:

$\underset{1\times 2}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_4 & y_5 \end{pmatrix} \ge 0$ – превышение дохода продавца ресурсов над прибылью предприятия на каждую единицу продукции.

Ограничения задачи могут быть представлены с помощью дополнительных неизвестных в виде линейных уравнений:

$$\underset{2\times 3}{A^T} \cdot \underset{3\times 1}{Y} - \underset{2\times 2}{E} \cdot \underset{2\times 1}{Y_\partial^T} = \underset{2\times 1}{C^T} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \qquad\qquad - y_4 = 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_5 = 6 \end{cases}$$

Экономическое толкование двойственной задачи – определяются цены ресурсов, при которых затраты предприятия на ресурсы будут минимальными, с учетом наличия ограничений со стороны продавца ресурсов, желающего получить от их продажи не меньший доход, чем производитель готовой продукции.

6.4. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

В теории линейного программирования доказано, что оптимальные планы следует искать на границе области допустимого планирования. ***Область допустимого планирования*** – множество планов, для которых выполняются ограничения:

Первая задача:

$$\begin{cases} \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} \le \underset{m\times 1}{B} \\ \underset{n\times 1}{X} \ge 0 \end{cases}$$

Вторая задача:

$$\begin{cases} \underset{n\times m}{A^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} \ge \underset{n\times 1}{C^T} \\ \underset{m\times 1}{Y} \ge 0 \end{cases}$$

Особое место среди допустимых планов занимают базисные, которые находят как допустимые базисные решения систем линейных уравнений, представляющих ограничения задачи линейного программирования в канонической форме:

Первая задача:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} + \underset{m\times m}{E} \cdot \underset{m\times 1}{X_\partial} = \underset{m\times 1}{B}$$

Вторая задача:

$$\underset{n\times m}{A^T} \cdot \underset{m\times 1}{Y} - \underset{n\times n}{E} \cdot \underset{n\times 1}{Y_\partial} = \underset{n\times 1}{C^T}$$

Симплексный метод и его модификации представляют собой рациональный способ перебора базисных решений. Симплексный метод состоит из двух этапов:

– поиск допустимого базисного плана,
– поиск оптимального плана среди допустимых базисных планов.

Метод состоит из шагов. На каждом шаге анализируется один базисный план. Второй этап метода устроен так, что каждый новый рассматриваемый допустимый базисный план не хуже предыдущего с точки зрения соответствующего значения функции цели.

Примечание. Если удается сразу указать допустимый базисный план, то симплексный метод включает только второй этап.

Пример 2. С помощью симплексного метода определим оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий получение предприятием максимальной прибыли при реализации готовой продукции, для задачи:

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = ? \text{ – план}$$

$$F = \underset{1\times 2}{C} \cdot \underset{2\times 1}{X} = 4x_1 + 6x_2 \to \max \text{ – прибыль (функция цели)}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22 \\ 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases} \text{ – ограничения на ресурсы}$$

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \ge 0 \text{ – естественные ограничения}$$

Симплексный метод решения данной задачи представлен с помощью симплекс-таблицы 1. Он состоит только из второго этапа, поскольку на первом шаге легко определяется допустимый базисный план:

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 60 & 22 & 7 \end{pmatrix}$$

Обозначения, применяемые в описании симплексного метода и в таблице:

c_i^o – коэффициенты при основных переменных в формуле функции цели экономико-математической модели задачи;

x^o – основные переменные рассматриваемого базисного плана, в порядке их следования в уравнениях системы ограничений задачи;

a_{ij}, $\forall i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,5}$ – коэффициенты при переменных x_j в системе ограничений задачи;

b_i – правые части системы ограничений задачи;

$\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ – числа, получающиеся в результате деления правых частей системы ограничений на положительные коэффициенты при переменной системы ограничений, переводимой из группы неосновных в группу основных;

F_j – оценочные числа, а именно, коэффициенты (с противоположным знаком) при переменных в формуле функции цели, полученной в результате исключения основных переменных анализируемого базисного плана (для расчета используется формула $F_j = \sum_i c_i^o \cdot a_{ij} - c_j$);

F_b – значение функции цели для анализируемого базисного плана, рассчитывается по формуле $F_b = \sum_i c_i^o \cdot b_i$ и приводится в оценочной строке, в столбце правых частей системы ограничений;

X^T – базисный план, анализируемый на данном шаге.

Таблица 1

c_i^o	c_j	4	6	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	3	12	1	0	0	60	60/3
0	x_4	(2)	2	0	1	0	22	22/2 – *min*
0	x_5	0	2	0	0	1	7	–
оценочная строка	F_j	(-4)	-6	0	0	0	0	$X_I^T = (0 \quad 0 \mid 60 \quad 22 \quad 7)$
0	x_3	0	(9)	1	-1,5	0	27	27/9 – *min*
4	x_1	1	1	0	0,5	0	11	11/1
0	x_5	0	2	0	0	1	7	7/2
оценочная строка	F_j	0	(-2)	0	2	0	44	$X_{II}^T = (11 \quad 0 \mid 27 \quad 0 \quad 7)$
6	x_2	0	1	1/9	-1/6	0	3	
4	x_1	1	0	-1/9	2/3	0	8	
0	x_5	0	0	-2/9	1/3	1	1	
оценочная строка	F_j	0	0	2/9	5/3	0	50	$X_{III}^T = (8 \quad 3 \mid 0 \quad 0 \quad 1)$

На каждом шаге второго этапа симплексного метода для анализа допустимого базисного плана используется критерий оптимальности:

– отсутствие отрицательных оценочных чисел при максимизации функции цели;
– отсутствие положительных оценочных чисел при минимизации функции цели.

Переход к новому допустимому базисному плану на втором этапе симплексного метода.

Выбирается ***одна*** неосновная переменная x_k, которая переводится в группу основных переменных. Выбор переменной определяется с помощью соответствующего числа в оценочной строке F_k. Перевод переменной x_k может привести к увеличению значения функции цели, если $F_k < 0$ и уменьшению, если $F_k > 0$.

Выбирается основная переменная для перевода в неосновные так, чтобы новый базисный план был допустимым. Искомая основная переменная указана во втором столбце $\left(x^o\right)$ и находится в строке таблицы, которой соответствует минимальным число:

$$\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}, \forall i = \overline{1,m},\ a_{ik} > 0\right\}$$

После выбора новой группы основных переменных система ограничений преобразуется так, чтобы каждая основная переменная осталась, только в одном уравнении с единичным коэффициентом. В этом случае правые части системы ограничений становятся равными значениям основных переменных.

Решение предлагаемой задачи $(F \to \max)$ ***получено в результате выполнения трех шагов симплексного метода.***

На первом шаге симплексного метода в качестве основных переменных выбираем дополнительные, а именно, остатки ресурсов $\underset{1\times 3}{X_{\partial}^T} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$. При анализе соответствующего допустимого базисного плана в оценочной строке появляются отрицательные числа $(F_1 = -4,\ F_2 = -6)$, следовательно, этот план $X_I^T = \left(0 \quad 0 \quad | \quad 60 \quad 22 \quad 7\right)$ не является оптимальным.

На втором шаге симплексного метода определим новую группу основных переменных. Переведем неосновную переменную x_1 в группу основных переменных, т.к. это может $(F_1 = -4)$ привести к увеличению функции цели. Основную переменную x_4, находящуюся во втором уравнении, переведем в неосновные, т.к. во второй строке таблицы находится минимальное число:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i1}},\ \forall i = \overline{1,m},\ a_{i1} > 0\right\} = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{22}{2} = 11$$

После того, как выбор новой группы основных переменных состоялся, выполним эквивалентные преобразования системы ограничений, таким образом, чтобы в новую систему ограничений новая основная переменная x_1, также как и две прежние основные переменные, входила только в одно уравнение (второе), причем с коэффициентом − единица. В результате, получим базисный план $X_{II}^T = \left(11 \quad 0 \quad | \quad 27 \quad 0 \quad 7\right)$ с большим значением функции цели $(F = F_b = 44)$. Этот план не может быть назван оптимальным, поскольку в оценочной строке есть отрицательное число $(F_2 = -2)$.

На третьем шаге симплексного метода выполним аналогичные действия:

– выберем новую группу основных переменных $x_2,\ x_1,\ x_5$;
– выполним преобразования системы ограничений;
– определим числа в оценочной строке.

Третий анализируемый базисный план $X_{III}^T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является оптимальным $(F = F_b = 50)$, так как оценочная строка этого базисного плана уже не содержит отрицательных оценочных чисел.

Симплексный метод решения нашей задачи привел к результатам:

$X^o = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ед.) – оптимальный план выпуска продукции,

$X_\partial^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ед.) – остатки ресурсов,

$F^o = \max F = 50$ (д. е.) – максимальная прибыль.

Для выпуска оптимального плана продукции будут потрачены полностью ресурсы первого и второго видов, а остаток третьего вида ресурсов составит 1 ед. Следует отметить то, что оптимальный план выпуска продукции − единственный. Поскольку ресурсы первого и второго вида будут истрачены полностью, то именно эти ресурсы приобретут особое значение для дальнейшей деятельности предприятия.

Пример 3. Используя результаты, полученные в примере 2, и теоремы двойственности найдем решение двойственной задачи, а именно, оптимальные цены ресурсов.

$\underset{1\times 5}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \,|\, y_4 & y_5 \end{pmatrix} = ?$ − план

$Z = 60y_1 + 22y_2 + 7y_3 \to \min$ − функция цели

$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_5 = 6 \end{cases}$ − ограничения

$\underset{1\times 5}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \,|\, y_4 & y_5 \end{pmatrix} \geq 0$ – естественные ограничения

Согласно теореме 1 взаимно-двойственные задачи линейного программирования, одновременно имеют решения, причем:

$\max F = \min Z = 50$.

Согласно теореме 2:

$$x_j^o \cdot y_{3+j}^o = 0,\ j=\overline{1,2}; \qquad x_{2+i}^o \cdot y_i^o = 0,\ i=\overline{1,3}$$

Следовательно, для нашей задачи:

$$y_3^o = y_4^o = y_5^o = 0$$

Учитывая это, решим систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 3y_1^o + 2y_2^o = 4 \\ 12y_1^o + 2y_2^o = 6 \end{cases} \Rightarrow \qquad y_1^o = \frac{2}{9}, \qquad y_2^o = \frac{5}{3}$$

Примечание. Между переменными предложенных взаимно-двойственных задач существует взаимно однозначное соответствие:

$X \leftrightarrow Y_\partial$, т.е. $x_j \leftrightarrow y_{3+j}$, $\forall j=\overline{1,2}$

$X_\partial \leftrightarrow Y$, т.е. $x_{2+i} \leftrightarrow y_i$, $\forall i=\overline{1,3}$

Таблица 2

c_i^o	c_j	4	6	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik}>0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
\	\	\	\	\	\	\	\	
оценочная строка	F_j	0	0	2/9	5/3	0	50	$X_{III}^T = (8\quad 3 \mid 0\quad 0\quad 1)$
		y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	Z^o	

Решение двойственной задачи можно найти, используя схему соответствия переменных взаимно-двойственных задач и оценочную строку симплекс-таблицы (табл. 2) для оптимального базисного плана:

$$y_i^o = |F_{2+i}|,\ \forall i=\overline{1,3}; \qquad y_{3+j}^o = |F_j|,\ \forall j=\overline{1,2}$$

Анализируя оценочную строку таблицы и используя предложенную схему соответствия переменных, получим:

$Y^o = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (д. е.) – оптимальные цены ресурсов,

$Z^o = 60y_1^o + 22y_2^o + 7y_3^o = 60 \cdot \frac{2}{9} + 22 \cdot \frac{5}{3} + 7 \cdot 0 = 50$ (д. е.) – минимальные затраты на ресурсы.

Имеется экономическое толкование того, что $y_3^o = 0$. Ресурс третьего вида не будет потрачен полностью при выпуске оптимального плана продукции на предприятии. Следовательно, данный ресурс не будет востребован, и реальная цена этого ресурса для данного предприятия временно будет нулевой.

Примечание. Задача линейного программирования может иметь неединственное решение. Наличие нуля в оценочной строке, при оценке оптимального базисного плана, в столбце неосновной переменной может говорить о наличии бесконечного множества решений у задачи линейного программирования. ***Альтернативный оптимальный базисный план может быть найден с помощью перевода неосновной переменной с нулевым оценочным числом в группу основных переменных.***

Пример 4. С помощью симплексного метода определим, как изменится решение предыдущей задачи, если прибыль от реализации единицы продукции первого вида увеличится и составит 6 ед.

Новая задача в канонической форме имеет вид:

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = ? \text{ – план}$$

$$F = 6x_1 + 6x_2 \to \max \text{ – прибыль (функция цели)}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22 \\ \qquad 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases} \text{ – ограничения на ресурсы}$$

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ – естественные ограничения}$$

Таблица 3

c_i^o	c_j	6	6	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
6	x_2	0	1	(1/9)	-1/6	0	3	3/(1/9) – *min*
6	x_1	1	0	-1/9	2/3	0	8	–
0	x_5	0	0	-2/9	1/3	1	1	–
оценочная строка	F_j	0	0	(0)	3	0	66	$X_{III}^T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & \vert & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
0	x_3	0	(9)	1	-1,5	0	27	
6	x_1	1	1	0	0,5	0	11	
0	x_5	0	2	0	0	1	7	
оценочная строка	F_j	0	0	0	3	0	66	$X_{IV}^T = \begin{pmatrix} 11 & 0 & \vert & 27 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Решение задачи (табл. 3) начнем с анализа допустимого базисного плана, соответствующего оптимальному плану выпуска продукции, полученному в предыдущей задаче. Допустимый базисный план $X_{III}^T = (8 \quad 3 \mid 0 \quad 0 \quad 1)$ остается оптимальным и в новых условиях, когда прибыль от единицы продукции первого вида составит 6 ед. Наличие нуля в оценочной строке, при оценке оптимального базисного плана, в столбце неосновной переменной x_3 может говорить о наличии бесконечного множества решений у задачи. Переведем переменную x_3 в группу основных переменных вместо переменной x_2. В результате получим альтернативный оптимальный базисный план $X_{IV}^T = (11 \quad 0 \mid 27 \quad 0 \quad 7)$. Таким образом, установлено то, что задача имеет бесконечное множество оптимальных небазисных планов:

$$X^o = \lambda \cdot X_{III} + (1-\lambda) \cdot X_{IV} \ , \forall\ 0 \le \lambda \le 1$$

Максимальный доход предприятия при этом составит:

$F^o = \max F = 66$ (ед.)

Пример 5. Найдем решение задачи линейного программирования:

(каноническая форма задачи)

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ? \qquad\qquad \underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ? \ \ \underset{2\times1}{X_\partial} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ?$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max \qquad\qquad F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ \ \ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \ \ x_1 - x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\underset{2\times1}{X} \ge 0 \qquad\qquad \underset{2\times1}{X} \ge 0 \ \ \underset{2\times1}{X_\partial} \ge 0$$

Симплексный метод решения данной задачи включает только второй этап, поскольку легко указать первый допустимый базисный план $X_I^T = (0 \quad 0 \mid 2 \quad 3)$. План не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности допустимого базисного решения при максимизации функции цели, имеются отрицательные оценочные числа $(F_1,\ F_2)$.

На втором шаге переведем x_1 в группу основных переменных, а x_4 в группу неосновных. Выполним преобразования системы ограничений так, чтобы новая основная переменная осталась только во втором уравнении с единичным коэффициентом. Получим план $X_{II}^T = (3 \quad 0 \mid 5 \quad 0)$. План не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности допустимого базисного плана, имеется отрицательное оценочное число (F_2).

Таблица 4

c_i^o	c_j	1	1	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	-1	1	1	0	2	-
0	x_4	1	-1	0	1	3	3/1 *min*
оценочная строка	F_j	(-1)	-1	0	0	0	$X_I^T = (0 \quad 0 \quad \vert \quad 2 \quad 3)$
0	x_3	0	0	1	1	5	-
1	x_1	1	-1	0	1	3	-
оценочная строка	F_j	0	(-2)	0	1	3	$X_{II}^T = (3 \quad 0 \quad \vert \quad 5 \quad 0)$

На третьем шаге, переводя x_2 в группу основных переменных, не удается отправить в число неосновных любую из переменных $(x_1,\ x_3)$ и получить новое допустимое базисное решение. Согласно одному уравнению системы ограничений $(x_1 - x_2 + x_4 = 3)$ и формуле функции цели $(F = 3 + 2x_2 - x_4)$, переменная x_2 и функция цели могут неограниченно увеличиваться $(x_2 \to +\infty \ \Rightarrow \ F \to +\infty)$, т.е. задача не имеет решения.

6.5. Модифицированный симплексный метод

Модифицированный симплексный метод применяется для решения задач линейного программирования тогда, когда не удается сразу указать допустимое базисное решение системы ограничений.

Модифицированная задача формируется следующим образом:

- система ограничений задачи линейного программирования, представленной в каноническом виде, при необходимости, преобразуется так, чтобы правые части уравнений были неотрицательными числами;
- к левым частям уравнений системы ограничений, включающих основные переменные первоначального базисного плана с отрицательными коэффициентами, прибавляются неотрицательные искусственные переменные (x_k, y_k);
- если в исходной задаче ведется поиск минимума функции цели $(Z(Y) \to \min)$, то модифицированная функция цели принимает вид

$$Z_M = Z(Y) + M\sum_k y_k \to \min,$$

где $\sum_k y_k$ – сумма искусственных переменных, и $M \to +\infty$;

– если в исходной задаче ведется поиск максимума функции цели $(F(X) \to \max)$, то модифицированная функция цели принимает вид $F_M = F(X) - M\sum_k x_k \to \max,$

где $\sum_k x_k$ – сумма искусственных переменных, и $M \to +\infty$.

Решая модифицированную задачу линейного программирования, вначале стремятся перевести все искусственные переменные в число неосновных. Если это удается, то можно утверждать – область допустимого планирования не является пустой. Далее, уже находясь в области допустимого планирования, пытаются найти оптимальный базисный план.

Модифицированная и исходная задачи линейного программирования одновременно либо не имеют решений, либо имеют одинаковые решения.

Пример 6. Решим задачу планирования оптимальных цен ресурсов:

$$\underset{1\times 3}{Y^T} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) = ? \text{ – цены ресурсов}$$

$$Z = \underset{1\times 3}{B^T} \cdot \underset{3\times 1}{Y} = 60y_1 + 22y_2 + 7y_3 \to \min$$

затраты на имеющиеся на предприятии запасы ресурсов

$$\underset{2\times 3}{A^T} \cdot \underset{3\times 1}{Y} \ge \underset{2\times 1}{C^T} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 6 \end{cases}$$

ограничения со стороны продавца ресурсов

$$\underset{3\times 1}{Y} \ge 0 \text{ – естественные ограничения}$$

Каноническая форма задачи имеет вид:

$$\underset{1\times 5}{Y^T} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \mid y_4 \quad y_5) = ? \text{ – план}$$

$$Z_M = 60y_1 + 22y_2 + 7y_3 \to \min \text{ – функция цели}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_5 = 6 \end{cases} \text{ – ограничения}$$

$$\underset{1\times 5}{Y^T} \ge 0 \text{ – естественные ограничения}$$

Можно легко указать базисное решение системы ограничений, включающее два отрицательных элемента: $Y^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -4 \quad -6)$.
Модифицированная задача принимает вид:

$$\underset{1\times 7}{Y^T} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \mid y_4 \quad y_5 \mid y_6 \quad y_7) = ? \text{ -- план}$$

$$Z_M = 60y_1 + 22y_2 + 7y_3 + M(y_6 + y_7) \to \min \text{ -- функция цели}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - y_4 + y_6 = 4 \\ 12y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_5 + y_7 = 6 \end{cases} \text{ -- ограничения}$$

$$\underset{1\times 7}{Y^T} \geq 0 \text{ -- естественные ограничения}$$

Таблица 5

b_i^o	b_j	60	22	7	0	0	M	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}}$, $a_{ik} > 0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
M	y_6	3	2	0	-1	0	1	0	4	4/3
M	y_7	(12)	2	2	0	-1	0	1	6	6/12 − *min*
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	15M -60	4M -22	2M -7	-M	-M	0	0	10M	
M	y_6	0	(3/2)	-1/2	-1	1/4	1		5/2	(5/2)/(3/2) − *min*
60	y_1	1	1/6	1/6	0	-1/12	0		1/2	(1/2)/(1/6)
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	0	3M/2 -12	-M/2 +3	-M	M/4 -5	0		5M/2 +30	
22	y_2	0	1	-1/3	-2/3	1/6			5/3	
60	y_1	1	0	2/9	1/9	-1/9			2/9	
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	0	0	-1	-8	-3			50	

В качестве первого можно рассмотреть допустимый базисный план, в группу основных переменных которого включены искусственные переменные: $Y_I^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 4 \quad 6)$. План не является оптимальным, так как нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения при минимизации функции цели, имеются положительные оценочные числа $(Z_{M_1}, Z_{M_2}, Z_{M_3})$.

На втором шаге переведем y_1 в группу основных переменных, а y_7 в группу неосновных. Поскольку y_7, являясь искусственной переменной, перешла в группу неосновных, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Выполним преобразования системы ограничений так, чтобы новая основная переменная осталась только во втором уравнении с единичным коэффициентом. Получим решение: $Y_{II}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & \frac{5}{2} & - \end{pmatrix}$. Оно не является оптимальным, имеются положительные оценочные числа $\left(Z_{M_2}, Z_{M_5}\right)$.

На третьем шаге переведем y_2 в группу основных переменных, а y_6 в группу неосновных. Поскольку y_6, являясь искусственной переменной, перешла в группу неосновных, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Выполним преобразования системы ограничений так, чтобы новая основная переменная осталась только в первом уравнении с единичным коэффициентом. Получим решение: $Y_{III}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{3} & 0 & | & 0 & 0 & | & - & - \end{pmatrix}$. Оно является оптимальным, выполняется критерий оптимальности допустимого базисного решения задачи при минимизации функции цели, нет положительных оценочных чисел. Решение − единственное, в нем отсутствуют искусственные переменные, и оно совпадает с решением, полученным ранее с помощью теорем двойственности:

$$Y^T = \left(2/9 \quad 5/3 \quad 0\right), \qquad Z^o = 50.$$

Используя теоремы двойственности, найдем решение двойственной задачи планирования оптимального выпуска продукции:

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \left(x_1 \quad x_2 \;|\; x_3 \quad x_4 \quad x_5\right) = ? \text{ – план}$$

$$F = 4x_1 + 6x_2 \to \max \text{ – прибыль (функция цели)}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22 \\ 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases} \text{ – ограничения на ресурсы}$$

$$\underset{1\times 5}{X^T} = \left(x_1 \quad x_2 \;|\; x_3 \quad x_4 \quad x_5\right) \ge 0 \text{ – естественные ограничения}$$

Между переменными предложенных взаимно-двойственных задач существует взаимно однозначное соответствие:

$$Y \leftrightarrow X_\partial, \qquad Y_\partial \leftrightarrow X$$

Согласно схеме соответствия переменных получим:

$$x_j^o = \left|Z_{M_{3+j}}\right|, \forall j = \overline{1,2}; \quad x_{2+i}^o = \left|Z_{M_i}\right|, \forall i = \overline{1,3}.$$

Таблица 6

b_i^o	b_j	60	22	7	0	0	M	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}},\ a_{ik}>0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	0	0	-1	-8	-3			50	
		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2			F^o	

Используя теоремы двойственности, определим оптимальный выпуск продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль (табл. 6).

$X^o = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ед.) – оптимальный план выпуска продукции,

$X_\partial^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ед.) – остатки ресурсов,

$F^o = \max F = \min Z = Z^o = 50$ (ед.) – максимальная прибыль.

Полученное с помощью теорем двойственности решение совпадает с решением задачи, полученным ранее симплексным методом.

Пример 7. Решим модифицированным симплексным методом задачу:

(каноническая форма задачи)

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ? \qquad\qquad \underset{1\times4}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = ?$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max \qquad\qquad F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge 3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \quad = 2 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge 0 \qquad\qquad \underset{1\times4}{X^T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \ge 0$$

Легко указать базисное решение системы ограничений:

$X^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Составим модифицированную задачу.

$$\underset{1\times 6}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \quad | \; x_3 \quad x_4 \quad | \; x_5 \quad x_6) = ?$$

$$F = x_1 + x_2 - M(x_5 + x_6) \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 2 \\ \quad x_1 - x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$\underset{1\times 6}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \quad | \; x_3 \quad x_4 \quad | \; x_5 \quad x_6) \geq 0$$

Таблица 7

c_i^o	c_j	1	1	0	0	-M	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
-M	x_5	-1	1	-1	0	1	0	2	–
-M	x_6	(1)	-1	0	-1	0	1	3	$3/1 - min$
оценочная строка	$F_{M\,j}$	(-1)	-1	M	M	0	0	-5M	
-M	x_5	0	0	-1	-1	1		5	–
1	x_1	1	-1	0	-1	0		3	–
оценочная строка	$F_{M\,j}$	0	(-2)	M	M -1	0		-5M +3	

В группу основных переменных первого допустимого базисного решения включены искусственные переменные: $X_I^T = (0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3)$. Решение не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения при максимизации функции цели, имеются отрицательные оценочные числа (F_{M_1}, F_{M_2}).

На втором шаге переведем x_1 в группу основных переменных, а x_6 в группу неосновных. Поскольку x_6, являясь искусственной переменной, перешла в группу неосновных, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Полученное допустимое базисное решение $X_{II}^T = (3 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 5 \quad -)$ не является оптимальным, имеется отрицательное оценочное число (F_{M_2}).

На третьем шаге, переводя x_2 в группу основных переменных, не удается отправить в число неосновных любую из переменных (x_1, x_5), и получить допустимое базисное решение. Благодаря наличию в системе ограничений одного уравнения $(-x_3 - x_4 + x_5 = 5)$, включающего искусственную переменную $(x_5 \geq 5)$, можно утверждать, что область допустимого планирования пуста и предложенная задача не имеет решения.

Пример 8. Решим модифицированным симплексным методом задачу:

(каноническая форма задачи)

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ? \qquad \underset{1\times4}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \mid x_3 \quad x_4) = ?$$

$$F = 2x_1 - x_2 \to \max \qquad F = 2x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\underset{2\times1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \underset{1\times4}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \mid x_3 \quad x_4) \geq 0$$

Легко указать базисное решение системы ограничений:

$$X^T = (0 \quad 0 \mid 3 \quad -6).$$

Модифицированная задача принимает вид:

$$\underset{1\times5}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \mid x_3 \quad x_4 \mid x_5) = ?$$

$$F = 2x_1 - x_2 - M\,x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

$$\underset{1\times5}{X^T} = (x_1 \quad x_2 \mid x_3 \quad x_4 \mid x_5) \geq 0$$

В качестве первого можно рассмотреть допустимое базисное решение, в котором в составе основных переменных имеется искусственная переменная: $X_I^T = (0 \quad 0 \mid 3 \quad 0 \mid 6)$. Оно не является оптимальным, так как нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения при максимизации функции цели, имеются отрицательные оценочные числа (F_{M_1}, F_{M_2}).

На втором шаге переведем x_1 в группу основных переменных, а x_5 в группу неосновных. Поскольку x_5, являясь искусственной переменной, попала в группу неосновных, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Получим допустимое базисное решение: $X_I^T = (6 \quad 0 \mid 15 \quad 0 \mid -)$. Оно не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения, имеется отрицательное оценочное число (F_{M_4}).

Таблица 8

c_i^o	c_j	2	-1	0	0	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik}>0$
	x^o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0 -M	x_3 x_5	-2 (1)	1 2	1 0	0 -1	0 1	3 6	– 6/1 $-min$
оценочная строка	$F_{M\,j}$	-M -2	-2M +1	0	M	0	-6M	
0 2	x_3 x_1	0 1	5 2	1 0	-2 -1		15 6	
оценочная строка	$F_{M\,j}$	0	5	0	-2		12	

На третьем шаге, переводя x_4 в группу основных переменных, не удается отправить в число неосновных любую из переменных (x_1, x_3) и получить допустимое базисное решение. Система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 15 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 6 \end{cases}$$

Согласно данной системе уравнений, переменная x_4 может неограниченно увеличиваться одновременно с переменными x_1 и x_3, при этом функция цели $(F = 12 - 5x_2 + 2x_4)$ также будет неограниченно увеличиваться $(F \to +\infty)$, т.е. задача не имеет решения.

Пример 9. Решим модифицированным симплексным методом задачу:

(каноническая форма задачи)

$$\underset{2\times1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = ? \qquad\qquad \underset{1\times4}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & | & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = ?$$

$$Z = y_1 - y_2 \to \min \qquad\qquad Z = y_1 - y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 - \ y_2 \ge -3 \\ \ y_1 + 2y_2 \ge 6 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \qquad = 3 \\ \ y_1 + 2y_2 \qquad - y_4 = 6 \end{cases}$$

$$\underset{2\times1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ge 0 \qquad\qquad \underset{1\times4}{Y^T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & | & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \ge 0$$

Легко указать базисное решение системы ограничений:

$$Y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Составим модифицированную задачу.

$$\underset{1\times 5}{Y^T} = \left(y_1 \quad y_2 \quad | \; y_3 \quad y_4 \quad | \; y_5\right) = ?$$

$$Z = y_1 - y_2 + M\,y_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 + y_5 = 6 \end{cases}$$

$$\underset{1\times 5}{Y^T} = \left(y_1 \quad y_2 \quad | \; y_3 \quad y_4 \quad | \; y_5\right) \geq 0$$

В качестве первого можно рассмотреть допустимое базисное решение, в котором в группу основных переменных входит искусственная переменная: $Y_I^T = (0 \quad 0 \quad | \quad 3 \quad 0 \quad | \quad 6)$. Решение не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения при минимизации функции цели, имеются положительные оценочные числа $\left(z_{M_1}, z_{M_2}\right)$.

Таблица 9

b_i^o	b_j	1	-1	0	0	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
0	y_3	-2	1	1	0	0	3	$3/1 - min$
M	y_5	1	(2)	0	-1	1	6	$6/2 - min$
оценочная строка	$z_{M\,j}$	M -1	2M +1	0	-M	0	6M	
0	y_3	-2,5	0	1	(0,5)		0	$0/0{,}5 - min$
-1	y_2	0,5	1	0	-0,5		3	–
оценочная строка	$z_{M\,j}$	-1,5	0	0	0,5		-3	
0	y_4	-5	0	2	1		0	
-1	y_2	-2	1	1	0		3	
оценочная строка	$z_{M\,j}$	1	0	-1	0		-3	

На втором шаге переведем y_2 в группу основных переменных, а y_5 в группу неосновных. Поскольку y_5, являясь искусственной, перешла в группу неосновных, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Второе допустимое базисное решение $Y_{II}^T = (0 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -)$ не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения, имеется положительное оценочное число (Z_{M_4}).

На третьем шаге переведем y_4 в группу основных переменных, а y_3 в группу неосновных. Третье допустимое базисное решение: $Y_{III}^T = (0 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -)$ совпало со вторым. Решение не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения, имеется положительное оценочное число (Z_{M_1}).

На четвертом шаге, переводя y_1 в группу основных переменных, не удается отправить в число неосновных любую из переменных $(y_2,\ y_4)$ и получить новое допустимое базисное решение. Система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} -5y_1 \qquad\quad + 2y_3 + y_4 = 0 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \qquad\quad = 3 \end{cases}$$

Согласно данной системе уравнений, переменная y_1, может неограниченно увеличиваться одновременно с переменными y_2 и y_4, при этом функция цели $(Z = -3 - y_1 + y_3)$ может неограниченно уменьшаться $(Z \to -\infty)$, т.е. задача не имеет решений.

Пример 10. В предыдущем примере поменяем лишь функцию цели на новый вариант $(Z = 2y_1 - y_2)$. Решим модифицированным симплексным методом измененную задачу:

(модифицированная задача)

$$\underset{1\times 2}{Y^T} = (y_1 \quad y_2) = ? \qquad\qquad \underset{1\times 5}{Y^T} = (y_1 \quad y_2 \quad | \; y_3 \quad y_4 \quad | \; y_5) = ?$$

$$Z = 2y_1 - y_2 \to \min \qquad\qquad Z = 2y_1 - y_2 + M\,y_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + \ \ y_2 \le 2 \\ \quad y_1 + 2y_2 \ge 6 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \qquad\qquad\quad = 3 \\ \quad y_1 + 2y_2 \qquad - y_4 + y_5 = 6 \end{cases}$$

$$\underset{1\times 2}{Y^T} = (y_1 \quad y_2) \ge 0 \qquad\qquad \underset{1\times 5}{Y^T} = (y_1 \quad y_2 \quad | \; y_3 \quad y_4 \quad | \; y_5) \ge 0$$

В составе основных переменных первого допустимого базисного решения имеется искусственная переменная: $Y_I^T = (0 \quad 0 \quad | \quad 3 \quad 0 \quad | \quad 6)$. Решение не является оптимальным, нарушен критерий оптимальности анализируемого допустимого базисного решения при минимизации функции цели, имеются положительные оценочные числа (Z_{M_1}, Z_{M_2}). Второе допустимое базисное решение $Y_{II}^T = (0 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -)$ не является оптимальным, имеются положительные оценочные числа$\left(Z_{M_4}\right)$. Третье допустимое базисное решение $Y_{III}^T = (0 \quad 3 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -)$ совпало со вторым. Но критерий оптимальности для третьего допустимого базисного решения выполнен, отсутствуют положительные оценочные числа. Задача может иметь бесчисленное множество оптимальных планов, поскольку в оптимальном базисном решении имеется неосновная переменная y_1 с нулевым оценочным числом $\left(Z_{M_1} = 0\right)$.

Таблица 10

b_i^o	b_j	2	-1	0	0	M	c_i	$\frac{c_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0$
	y^o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
0	y_3	-2	1	1	0	0	3	$3/1 - min$
M	y_5	1	(2)	0	-1	1	6	$6/2 - min$
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	M -2	2M +1	0	-M	0	6M	
0	y_3	-2,5	0	1	(0,5)		0	$0/0{,}5 - min$
-1	y_2	0,5	1	0	-0,5		3	$-$
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	-2,5	0	0	0,5		-3	
0	y_4	-5	0	2	1		0	
-1	y_2	-2	1	1	0		3	
оценочная строка	$Z_{M\,j}$	0	0	-1	0		-3	

Система ограничений задачи на третьем (последнем) шаге модифицированного симплексного метода принимает вид:

$$\begin{cases} -5y_1 \qquad + 2y_3 + y_4 = 0 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \qquad = 3 \end{cases}.$$

Согласно системе ограничений, переменная y_1, может принимать любые значения (в том числе сколь угодно большие) одновременно с переменными y_2 и y_4, но при этом значение функции цели $(Z = -3 + y_3)$ не меняется $(y_3 = 0 \Rightarrow Z = -3)$, т.е. предложенная задача имеет бесчисленное множество решений.

6.6. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Предприятие выпускает два вида продукции, используя три вида ресурсов. Известны A − матрица норм затрат ресурсов, B − запасы ресурсов, C − прибыль на единицу продукции. Требуется: а) составить модель задачи планирования выпуска продукции, обеспечивающего получение максимальной прибыли; найти решение; б) найти оптимальное решение и оптимум двойственной задачи с помощью теорем двойственности.

1. $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&3\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}80\\60\\15\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&2\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}80\\60\\100\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}4&2\\4&6\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}80\\120\\30\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}7&4\\6&7\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}56\\42\\18\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6&4\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}8&4\\2&3\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}160\\60\\45\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&2\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}8&2\\3&3\\1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}80\\60\\40\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&1\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}4&2\\4&6\\0&10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}32\\48\\60\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&8\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}120\\90\\40\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}4&2\\6&9\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}40\\90\\20\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}10&20\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}80\\60\\20\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&1\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\12\\8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}12&18\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8&12\end{pmatrix}$

Задача 2. Предприятие выпускает два вида продукции, используя три вида ресурсов. Известны $A-$матрица норм затрат ресурсов, $B-$запасы ресурсов, $C-$прибыль на единицу продукции. Требуется: а) составить модель задачи планирования оптимальных цен ресурсов, при которых затраты предприятия на ресурсы будут минимальные; найти решение задачи модифицированным симплексным методом; б) найти оптимальное решение и оптимум двойственной задачи с помощью теорем двойственности.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12\\ 12\\ 10\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 8\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 4\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 4\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 12\\ 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 4\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 2\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}12\\ 12\\ 10\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 9\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 2\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 6\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18\\ 12\\ 12\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}9 & 9\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}40\\ 45\\ 20\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}40\\ 30\\ 20\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$

Задача 3. Решить задачу модифицированным симплексным методом. Составить двойственную задачу. Найти решение двойственной задачи с помощью теорем двойственности.

1. $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 \le -2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $Z = -y_1 + 2y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 0 \\ 2y_1 - y_2 \le -2 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. $F = -x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $Z = y_1 + y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1 - 2y_2 \ge 2 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. $F = x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 \le -2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $Z = y_1 - 2y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 0 \\ y_1 - 2y_2 \le -2 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. $F = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $Z = y_1 + y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 0 \\ y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. $F = -x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 \le -2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $Z = 2y_1 - y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 0 \\ 2y_1 - y_2 \le -2 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

11. $F = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le -1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12. $Z = -2y_1 + y_2 \to \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 3 \\ -2y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Заключение

Вопросы для самоконтроля студентов и подготовки к аттестации

1. Числовая (координатная) ось. Расстояние между точками на оси.
2. Координата (на числовой оси) точки деления отрезка на части в заданном отношении.
3. Декартовая система координат на плоскости. Расстояние между точками на плоскости.
4. Координаты (на плоскости) точки деления отрезка на части в заданном отношении.
5. Декартовая система координат в трехмерном пространстве. Расстояние между точками в трехмерном пространстве.
6. Координаты (в трехмерном пространстве) точки деления отрезка на части в заданном отношении.
7. Полярная система координат.
8. Геометрические двухмерные и трехмерные векторы. Основные понятия.
9. Координатный способ представления векторов.
10. Линейные операции над геометрическими векторами и их свойства.
11. Скалярное произведение векторов и его свойства.
12. Примеры приложений скалярного произведения векторов в геометрии.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Примеры приложений векторного произведения векторов в геометрии.
15. Смешанное произведение векторов и его свойства.
16. Примеры приложений смешанного произведения векторов в геометрии.
17. Обобщенный n - мерный вектор.
18. Линейные операции над n - мерными векторами и их свойства.
19. Скалярное произведение n - мерных векторов и его свойства.
20. Линейная комбинация векторов. Разложение вектора по другим векторам.
21. Линейная зависимость и независимость векторов.
22. Линейное векторное пространство, его базис и размерность.
23. Пространство n - мерных векторов и его базис.
24. Евклидово пространство.
25. Понятие матрицы. Виды матриц.
26. Операции над матрицами.
27. Основные свойства операций над матрицами.
28. Понятие и правила вычисления определителя квадратной матрицы.
29. Вычисление определителя квадратной матрицы по теореме Лапласа.
30. Свойства определителей и их следствия.
31. Обратная матрица.
32. Необходимое и достаточное условие существования и единственности обратной матрицы.
33. Ранг матрицы и его вычисление по определению.
34. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы.

35. Решение матричных уравнений вида.
36. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.
37. Система линейных алгебраических уравнений. Основные понятия.
38. Матричная форма системы линейных алгебраических уравнений.
39. Разрешимость систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
40. Метод обратной матрицы для решения определенных систем линейных алгебраических уравнений.
41. Методы решения определенных систем линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
42. Эквивалентные (равносильные) преобразования системы линейных алгебраических уравнений.
43. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
44. Определение обратной матрицы с помощью метода Гаусса.
45. Базисные решения неопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Допустимые базисные решения.
46. Общее решение неопределенной системы линейных алгебраических уравнений.
47. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений.
48. Фундаментальная система решений неопределенной однородной линейной системы алгебраических уравнений.
49. Общее решение однородной неопределенной линейной системы алгебраических уравнений.
50. Общее решение неоднородной неопределенной системы линейных алгебраических уравнений.
51. Собственные значения квадратной матрицы.
52. Собственные векторы квадратной матрицы.
53. Модель обмена в международной торговле.
54. Комплексные числа. Основные понятия.
55. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
56. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма представления комплексных чисел.
57. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
58. Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.
59. Многочлены. Основные понятия.
60. Алгебраические уравнения. Основные понятия.
61. Решение кубичных уравнений методом Кардано.
62. Решение «неполных» кубичных уравнений.
63. Решение уравнений четвертой степени методом Ферари.
64. Разложение многочленов на множители. Деление многочленов.
65. Элементарные дроби.
66. Уравнения прямой линии на плоскости. Полуплоскости.
67. Угол между прямыми линиями на плоскости. Условия параллельности и

перпендикулярности прямых линий.

68. Общее и параметрическое уравнения плоскости. Полупространства.
69. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
70. Общее, каноническое и параметрическое уравнения прямой линии в пространстве.
71. Угол между прямыми линиями в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий в пространстве.
72. Прямая линия и плоскость в пространстве. Угол между ними. Условия параллельности и перпендикулярности прямой линии и плоскости в пространстве.
73. Прямая и гиперплоскость в n- мерном точечном пространстве. Полупространства в n- мерном точечном пространстве.
74. Кривая второго порядка – эллипс, ее свойства и каноническое уравнение.
75. Кривая второго порядка – гипербола, ее свойства и каноническое уравнение.
76. Кривая второго порядка – парабола, ее свойства и каноническое уравнение.
77. Поверхность второго порядка – эллипсоид, ее свойства и каноническое уравнение.
78. Поверхность второго порядка – гиперболоид, ее свойства и каноническое уравнение.
79. Поверхность второго порядка – параболоид, ее свойства и каноническое уравнение.
80. Общая постановка задачи линейного программирования.
81. Каноническая форма задачи линейного программирования.
82. Взаимно-двойственные задачи линейного программирования.
83. Теоремы двойственности.
84. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
85. Графический метод решения задачи линейного программирования.
86. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
87. Модифицированный симплексный метод решения задачи линейного программирования.

Литература

1. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Проспект, МГУ, 2007. – 400 с.
2. Козинова А.Т., Ошарина Н.Н. Линейная алгебра. Часть I: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 69 с.
3. Козинова А.Т., Ошарина Н.Н. Линейная алгебра. Часть II: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 73 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Издательство «Наука», 1977 – 832 с.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник – М.: ДЕЛО, 2002. – 688 с.
6. Красс М.С. Математика в экономике. Базовый курс. Учебник для бакалавров:. - М.: Юрайт, 2013. – 471 с.
7. Кремер Н.Ш., и др. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики: учебно-справочное пособие/ Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. - М.: Юрайт, 2015. – 724 с.
8. Кремер, Н.Ш. и др. Математика для экономистов и менеджеров: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – Сер. Бакалавриат. - М.: КноРус, 2015. – 480 с.
9. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров; ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.И. Юшкевич. – М.: Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.
10. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА–М, 2001. – 656 с.
11. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА–М, 2008. – 575 с.
12. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 383 с.

Оглавление

Антонина Трифоновна Козинова
Надежда Николаевна Ошарина

МАТЕМАТИКА
Линейная алгебра.
Аналитическая геометрия.
Линейное программирование

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.