Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

**А.В. Баландин
Е.М. Макаров
А.Г. Разуваев**

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»

Нижний Новгород
2019

УДК 514.122.2
ББК 22.151.5
Б-20

Б-20 Баландин А.В., Макаров Е.М., Разуваев А.Г. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧАСТЬ 2: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 18 с.

Рецензент:
доцент кафедры прикладной математики ИИТМM к.ф.-м.н. **О.Е. Галкин**

Данное учебно-методическое пособие посвящено следующим вопросам общей теории кривых второго порядка: центры, асимптотические направления и диаметры. Пособие предназначено для студентов первого курса Института информационных технологий, математики и механики, изучающих курс «Аналитическая геометрия».

УДК 514.122.2
ББК 22.151.5

Содержание

Настоящая работа является непосредственным продолжением учебно-методического пособия тех же авторов «Кривые второго порядка. Часть 1». Поэтому здесь используются те же обозначения. Ссылки на формулы и теоремы из предыдущего пособия указываются следующим образом: например, формула (5-I) и теорема (2-I) обозначают, соответственно, формулу (5) и теорему 2.

Для дальнейшего полезно напомнить определение.

Определение 3-I. Кривая второго порядка (КВП) — множество точек плоскости, которое в некотором ортонормированном репере (ОНР) задано уравнением вида

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля, то есть $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

§1. Центр КВП

Определение 1. Центром КВП называется ее центр симметрии.

Наша ближайшая задача — классификация кривых по количеству центров симметрии с помощью ортогональных инвариантов.

Для решения этой задачи будут полезны следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{10}, \\ F_2(x,y) &= a_{12}x + a_{22}y + a_{20}, \\ F_0(x,y) &= a_{10}x + a_{20}y + a_{00}. \end{aligned}$$

Задача 1. Доказать тождество Эйлера:

$$F(x,y) = xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_0(x,y).$$

Теорема 1 (Критерий центра КВП). Точка с координатами (x_0, y_0) является центром КВП тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0) = 0, \\ F_2(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. 1. Пусть КВП в ОНР $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ задана общим уравнением $F(x,y) = 0$ и $C(x_0,y_0)$ — центр КВП. Перейдем к ОНР $R' = \{C, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

и найдем уравнение КВП относительно R'. Координаты точки в реперах R и R' связаны равенствами

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение КВП в R' получим, подставляя выражения (3) в уравнение $F(x,y) = 0$. Имеем $F'(x',y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + a'_{00} = 0$, где a'_{00} — некоторый коэффициент. С учетом обозначений F_1 и F_2 уравнение КВП в R' принимает вид:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2F_1(x_0,y_0)x' + 2F_2(x_0,y_0)y' + a'_{00} = 0. \tag{4}$$

В ОНР R' начало координат совпадает с центром КВП. Таким образом, если точка $M(x',y')$ принадлежит КВП, то центрально-симметричная с ней точка $M_1(-x',-y')$ также принадлежит КВП, то есть также удовлетворяет уравнению (4):

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 - 2F_1(x_0,y_0)x' - 2F_2(x_0,y_0)y' + a'_{00} = 0. \tag{5}$$

Вычитая уравнение (4) из (5), получим равенство

$$F_1(x_0,y_0)x' + F_2(x_0,y_0)y' = 0, \tag{6}$$

которое должно быть выполнено для каждой точки КВП.

Докажем, что оба коэффициента $F_1(x_0,y_0)$ и $F_2(x_0,y_0)$ в равенстве (6) обращаются в нуль. Для этого рассуждаем методом от противного. Пусть по крайней мере один из этих коэффициентов отличен от нуля. Тогда уравнение (6) определяет прямую, которая принадлежит КВП, то есть КВП распадается. Таким образом, для нераспадающейся КВП все доказано.

Пусть теперь КВП распадается. Поскольку каждая точка КВП удовлетворяет уравнению (6), то в этом случае КВП является парой совпавших прямых и имеет уравнение

$$(F_1(x_0,y_0)x' + F_2(x_0,y_0)y')^2 = 0$$

в ОНР R'. Возвращаясь в исходный ОНР R, получим уравнение КВП:

$$\{F_1(x_0,y_0)(x - x_0) + F_2(x_0,y_0)(y - y_0)\}^2 = 0. \tag{7}$$

Таким образом, доказано, что в рассматриваемом случае КВП в исходном ОНР имеет уравнение вида

$$\{A(x - x_0) + B(y - y_0)\}^2 = 0. \tag{8}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} F_1(x,y) = A^2x + ABy - (A^2x_0 + ABy_0), \\ F_2(x,y) = ABx + B^2y - (ABx_0 + B^2y_0). \end{cases}$$

Тем самым доказано, что и в случае распадающейся КВП все центры удовлетворяют условию теоремы.

2. Обратно. Пусть координаты точки $C(x_0, y_0)$ удовлетворяют системе (2). Выполним параллельный перенос системы координат в точку $C(x_0, y_0)$. Тогда $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. В новых координатах уравнение КВП принимает вид: $a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$, где $a'_{10} = F_1(x_0, y_0) = 0$, $a'_{20} = F_2(x_0, y_0) = 0$.

Таким образом уравнение КВП имеет вид $a_{11}(x')^2+2a_{12}x'y'+a_{22}(y')^2+a'_{00} = 0$. Отсюда видно, что вместе с точкой $M_1(x'_1, y'_1)$ точка $M_2(-x'_1, -y'_1)$ также принадлежит КВП, то есть $C(x_0, y_0)$ — центр симметрии. QED

Теорема 2 (Классификация по количеству центров). Для каждой КВП реализуется одна и только одна из следующих возможностей:

1) существует единственный центр $\Leftrightarrow$ $\delta \neq 0$;

2) не существует центров $\Leftrightarrow$ $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$;

3) существует прямая центров $\Leftrightarrow$ $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

Доказательство. 1) Применяя теорему Кронекера-Капелли к системе (2), получим искомое утверждение.

2) Пусть КВП не имеет центров. Тогда в силу предыдущего $\delta = 0$. Покажем, что $\Delta \neq 0$, используя метод от противного. Пусть $\Delta = 0$. Тогда по теореме (10-I) КВП является парой параллельных прямых (различных или совпавших, вещественных или комплексных). Отсюда следует, что эти кривые имеют бесконечно много центров — все они лежат на средней линии, что противоречит условию.

Обратно. Пусть $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$. Из условия $\Delta \neq 0$ следует, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix}$$

линейно независимы, поэтому ранг матрицы $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} = 2$. В то же время из условия $\delta = 0$ получим, что ранг матрицы $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} < 2$. Поэтому система (2) несовместна.

3) Пусть КВП имеет прямую центров. Тогда множество решений системы (2) определяет прямую центров, поэтому по теореме Кронекера-Капелли $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = 1$, $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} = 1$. Таким образом $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

Обратно. Пусть $\delta = 0$, $\Delta = 0$. По теореме (10-I) это означает, что КВП является парой параллельных (вещественных или комплексных) прямых или парой совпавших прямых, которые очевидно имеют прямую центров. QED

Определение 2. КВП называется центральной, если она имеет единственный центр, в противном случае КВП называется нецентральной.

Замечание 1. Из сравнения теорем (7-I), (8-I), (10-I) и теоремы 2 приходим к следующим результатам. Центральные КВП — это в точности КВП первого класса. КВП, не имеющие ни одного центра, — это КВП второго класса и только они, то есть параболы. КВП, имеющие прямую центров, — это КВП третьего класса.

Определение 3. Центры КВП, которые принадлежат КВП, называются особыми точками КВП.

Ответом на вопрос, какие КВП имеют особые точки, служит следующая теорема.

Теорема 3. Если КВП имеют особые точки, то КВП распадается.

Доказательство. В силу теоремы (11-I) достаточно доказать, что из существования особых точек следует, что $\Delta = 0$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — особая точка. Из определения 3 следует, что $F(x_0, y_0) = 0$. В свою очередь по теореме 1 получим, что $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$. Теперь, используя тождество Эйлера (задача 1), приходим к равенству $F(x_0, y_0) - x_0 F_1(x_0, y_0) - y_0 F_2(x_0, y_0) = F_0(x_0, y_0)$. Отсюда следует равенство: $F_0(x_0, y_0) = 0$.

Таким образом, координаты особой точки удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0. \end{cases}$$

Данную систему можно также рассматривать как систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_0, y_0, z_0, считая, что $z_0 = 1$, то есть однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}z = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}z = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение $(x_0, y_0, 1)$. Из теории систем линейных уравнений известно, что необходимым условием существования ненулевого решения является $\Delta = 0$. QED

Задача 2. Найти особые точки всех распадающихся КВП. Какие распадающиеся КВП не имеют особых точек? (Указание. Использовать канонические уравнения кривых.)

§2. Асимптотические направления КВП

Определение 4. Направлением называется множество ненулевых попарно коллинеарных векторов.

Замечание 2. Направление определяется любым своим представителем.

Определение 5. Пусть КВП задана общим уравнением $F(x, y) = 0$ и пусть $\vec{c}(\alpha, \beta)$ — некоторый вектор. Определим число $P(\vec{c})$ с помощью равенства

$$P(\vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2. \tag{9}$$

Ненулевой вектор $\vec{c}(\alpha, \beta)$ называется вектором асимптотического направления КВП, если

$$P(\vec{c}) = 0. \tag{10}$$

Замечание 3. Нетрудно видеть, что при умножении вектора асимптотического направления $\vec{c}$ на произвольное число λ условие $P(\lambda\vec{c}) = 0$ также будет выполнено. Таким образом, действительно, ненулевые векторы, удовлетворяющие условию (10), принадлежат некоторому направлению.

Пример 1. Найдем асимптотические направления гиперболы, заданной каноническим уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Пусть вектор $\vec{c}(\alpha, \beta)$ имеет асимптотическое направление относительно данной гиперболы. Тогда, в соответствии с определением 5, получим уравнение

$P(\overrightarrow{c}) = \alpha^2/a^2 - \beta^2/b^2 = 0$. Отсюда находим, что асимптотические направления определяются векторами $\overrightarrow{c}_1(a,b)$, $\overrightarrow{c}_2(a,-b)$.

Таким образом, для гиперболы, заданной каноническим уравнением, существует в точности два асимптотических направления, которые параллельны ее асимптотам. Отсюда и название — асимптотическое направление.

Пример 2. Найдем асимптотические направления параболы, заданной каноническим уравнением $y^2 - 2px = 0$.

Для данного случая условие (9) асимптотического направления принимает вид $\beta^2 = 0$. Поэтому получаем единственное асимптотическое направление, которое определено вектором $\overrightarrow{c} = (1,0)$. Отметим, что в случае параболы асимптотическое направление параллельно ее оси симметрии.

Теорема 4. (Инвариантность асимптотического направления) Асимптотическое направление не зависит от выбора системы координат.

Доказательство. Пусть $R = (O,B)$, $R' = (O',B')$ — два ОНР и C матрица перехода от B к B'. Обозначим $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_B$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}_{B'}$. Переписывая выражение $P(\overrightarrow{c})$ и используя матрицу Q (см. определение 5-I и лемму 1-I), получим равенство $P(\overrightarrow{c}) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Пусть $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}_B$ — вектор асимптотического направления. Тогда в ОНР $R = (O,B)$ имеем равенство $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0$.

Докажем, что $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}_{B'}$ также является вектором асимптотического направления в ОНР $R' = (O',B')$, то есть $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}^t Q' \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = 0$. Из условия $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$ и равенства $Q' = C^tQC$ (лемма 2-I) находим $0 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}^t (C^tQC) \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}^t Q' \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$. QED

Задача 3. Доказать, что каждая прямая асимптотического направления пересекает КВП не более, чем в одной точке. Сформулировать и доказать обратное утверждение. (Указание. Записать уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$ и найти ее точки пересечения с КВП $F(x,y) = 0$.)

Укажем еще один возможный способ классификации КВП — по количеству асимптотических направлений.

Определение 6. КВП называется кривой эллиптического типа, параболического или гиперболического типа, если, соответственно, $\delta > 0$, $\delta = 0$, $\delta < 0$.

Теорема 5. КВП эллиптического типа не имеют вещественных асимптотических направлений. КВП параболического типа имеют единственное вещественное асимптотическое направление. КВП гиперболического типа имеют 2 различных вещественных асимптотических направления.

Доказательство. Приведем подробное доказательство лишь для КВП эллиптического типа, поскольку в остальных случаях доказательства аналогичны.

Пусть $\delta > 0$ и $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta)$ — вектор асимптотического направления. Возможны следующие случаи.

1) $a_{11} \neq 0$. Заметим, что тогда $\beta \neq 0$. Действительно, в противном случае, подставляя $\beta = 0$ в равенство (10), получим $\alpha = 0$, что невозможно, поскольку $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta) \neq \overrightarrow{0}$.

Теперь поделим обе части равенства (10) на β^2, и, заменяя $\alpha/\beta = k$, получим квадратное уравнени $a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta < 0$. Поэтому в этом случае все доказано.

2) Случай $a_{22} \neq 0$ рассматривается аналогично.

3) Последний случай, когда $a_{11} = a_{22} = 0$ невозможен, так как $\delta = -a_{12}^2 > 0$.

Таким образом, доказано, что для КВП эллиптического типа не существует вещественных асимптотических направлений. QED

§3. Сопряженные диаметры КВП

Теорема 6. Пусть $\overrightarrow{a}(\alpha, \beta)$ — вектор неасимптотического направления КВП. Тогда множество середин хорд параллельных вектору $\overrightarrow{a}$ лежит на прямой

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Для краткости уравнение (11) будем записывать в виде

$$\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0. \tag{12}$$

Пусть прямая l задана уравнениями $x = \alpha t + x_0$ и $y = \beta t + y_0$, $\overrightarrow{a} = (\alpha, \beta)$ — направляющий вектор l и хорда лежит на этой прямой. Кроме того, предположим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ — середина хорды. Найдем точки пересечения КВП и прямой l. Подставляя x и y из параметрических уравнений прямой в общее уравнение КВП: $F(x,y)=0$, придем к квадратному уравнению

$$Pt^2+2Qt+R=0, \tag{13}$$

где использованы следующие обозначения:

$$P=P(\overrightarrow{a})=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2, \tag{14}$$

$$Q=\alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{10})+\beta(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{20}), \tag{15}$$

$$R=F(x_0,y_0). \tag{16}$$

Пусть t_1, t_2 — корни уравнения (13), то есть точки $M_1(x_0+t_1\alpha, y_0+t_1\beta)$, $M_2(x_0+t_2\alpha, y_0+t_2\beta)$ — точки пересечения хорды с КВП, вообще говоря, комплексные. Тогда середина хорды имеет координаты $(x_0+\frac{(t_1+t_2)}{2}\alpha, y_0+\frac{(t_1+t_2)}{2}\beta)$, причем по условию эта точка совпадает с M_0. Поэтому $t_1+t_2=0$. Далее по теореме Виета получим, что $Q=0$. Таким образом, показано, что середина хорды удолетворяет уравнению (11).

Осталось показать, что уравнение (11) определяет прямую, то есть является уравнением первой степени. Рассуждаем методом от противного. Пусть

$$a_{11}\alpha+a_{12}\beta=0, \tag{17}$$

$$a_{12}\alpha+a_{22}\beta=0. \tag{18}$$

Умножая (17) на α, а (18) на β и складывая результаты, получим, что $\overrightarrow{a}(\alpha,\beta)$ — вектор асимптотического направления КВП, что противоречит условию. QED

Задача 4. Доказать, что с учетом комплексных точек пересечения КВП с прямой будет справедливо и обратное утверждение, то есть каждая точка прямой (11) является серединой некоторой хорды, параллельной вектору $\overrightarrow{a}$.

Дальнейшую терминологию можно объяснить аналогией с окружностью.

Определение 7. Если уравнение (11) определяет прямую, то она называется диаметром КВП, сопряженным с направлением $\overrightarrow{a}(\alpha,\beta)$.

Теорема 7. Пусть диаметр d_2 сопряжен с направлением диаметра d_1. Тогда диаметр d_1 сопряжен с направлением диаметра d_2.

Доказательство. Пусть диаметр d_1 сопряжен с направлением $\overrightarrow{p}(p_1, p_2)$, а диаметр d_2 — с направлением $\overrightarrow{q}(q_1, q_2)$. По условию $d_1 \parallel \overrightarrow{q}$. Покажем, что $d_2 \parallel \overrightarrow{p}$.

Уравнения диаметров и их направляющие векторы $\overrightarrow{a}_{d_1}$, $\overrightarrow{a}_{d_2}$ имеют вид:

$$\begin{gathered}
d_1 : p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0, \\
\overrightarrow{a}_{d_1} = (-(p_1a_{12} + p_2a_{22}), (p_1a_{11} + p_2a_{12})); \\
d_2 : q_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + q_2(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0, \\
\overrightarrow{a}_{d_2} = (-(q_1a_{12} + q_2a_{22}), (q_1a_{11} + q_2a_{12})).
\end{gathered}$$

По условию $d_1 \parallel \overrightarrow{q}$, то есть

$$\begin{vmatrix} -(p_1a_{12} + p_2a_{22}) & (p_1a_{11} + p_2a_{12}) \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство совпадает с условием: $d_2 \parallel \overrightarrow{p}$. Действительно,

$$\begin{vmatrix} -(q_1a_{12} + q_2a_{22}) & (q_1a_{11} + q_2a_{12}) \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

QED

Определение 8. Направления, определенные векторами $\overrightarrow{p}(p_1, p_2)$ и $\overrightarrow{q}(q_1, q_2)$ называются сопряженными относительно КВП, если

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0. \tag{19}$$

Два диаметра, имеющие сопряженные направления, также называются сопряженными.

Замечание 4. Фактически в теореме 7 доказана симметричность отношения сопряженности направлений.

Задача 5. Доказать инвариантность условия сопряженности двух направлений, то есть независимость от выбора ОНР. (Указание. Записать условие сопряженности в матричном виде $\overrightarrow{p}^tQ\overrightarrow{q} = 0$ и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.)

При изучении свойств диаметров приходится рассматривать два различных случая: центральные и нецентральные КВП. Для центральных КВП свойства диаметров в определенной степени аналогичны свойствам диаметров окружности.

§4. Свойства диаметров центральных КВП

Теорема 8. Прямая является диаметром центральной КВП тогда и только тогда, когда она проходит через центр.

Доказательство. 1. Пусть прямая является диаметром, то есть имеет уравнение (11) для некоторых значений параметров α, β. Тогда по теореме 1 координаты центра удовлетворяют уравнению (11).

2. Обратно. Пусть $C(x_0, y_0)$ — центр и l — некоторая прямая, проходящая через C. Покажем, что l — диаметр. Пусть

$$l: \; A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{20}$$

Надо доказать, что найдется вектор $\overrightarrow{a}(\alpha, \beta)$ такой, что сопряженный с ним диаметр имеет уравнение (20).

Сначала покажем, что существуют α, β, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = A, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = B. \end{cases}$$

Из условия центральной КВП следует, что $\delta \neq 0$, и поэтому данная система имеет единственное решение при любых A и B.

Теперь осталось проверить, что диаметр, сопряженный с $\overrightarrow{a}(\alpha, \beta)$ совпадает с прямой (20). Для этого достаточно доказать совпадение свободных членов у прямых (11) и (20). Для прямой (20) свободный член имеет вид: $-Ax_0 - By_0 = -\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0) - \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0) = -\alpha(-a_{10}) - \beta(a_{20})$. Последнее равенство следует из условия, что (x_0, y_0) — координаты центра. QED

Для дальнейшего будет полезна следующая техническая лемма.

Лемма 1. Пусть $\overrightarrow{a} = (\alpha, \beta)$ — ненулевой вектор и $\overrightarrow{c} = (-(\alpha a_{12} + \beta a_{22}), (\alpha a_{11} + \beta a_{12}))$. Тогда справедливо тождество

$$P(\overrightarrow{c}) = P(\overrightarrow{a})\delta.$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\begin{aligned} P(\overrightarrow{c}) &= a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2 = \\ &= a_{11}(\alpha a_{12} + \beta a_{22})^2 - 2a_{12}(\alpha a_{12} + \beta a_{22})(\alpha a_{11} + \beta a_{12}) + a_{22}(\alpha a_{11} + \beta a_{12})^2 = \\ &= \alpha^2\delta a_{11} + 2\alpha\beta\delta a_{12} + \beta^2\delta a_{22} = P(\overrightarrow{a})\delta. \quad \text{QED} \end{aligned}$$

Теорема 9. Для центральной КВП диаметр имеет асимптотическое направление тогда и только тогда, когда он сопряжен с этим асимптотическим направлением.

Доказательство. 1. Пусть диаметр d сопряжен с вектором $\overrightarrow{a}(\alpha, \beta)$. Тогда направляющий вектор диаметра d имеет вид: $\overrightarrow{a}_d = (-(\alpha a_{12} + \beta a_{22}), (\alpha a_{11} + \beta a_{12}))$. Поскольку $\overrightarrow{a}_d$ имеет асимптотическое направление, то $P(\overrightarrow{a}_d) = 0$. В то же время по лемме 1 имеем равенства $P(\overrightarrow{a}_d) = P(\overrightarrow{a})\delta$. Поскольку для центральной КВП $\delta \neq 0$, то $P(\overrightarrow{a}) = 0$.

2. Обратно. Пусть $\overrightarrow{a} = (\alpha, \beta)$ — вектор асимптотического направления и d — диаметр, сопряженнй с этим направлением

$$d : \alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0.$$

Тогда $\overrightarrow{a}_d = (-(\alpha a_{12} + \beta a_{22}), (\alpha a_{11} + \beta a_{12}))$ — направляющий вектор диаметра. Проверим, что $\overrightarrow{a}_d \parallel \overrightarrow{a}$. Для этого составим определитель и получим равенство

$$\begin{vmatrix} -(\alpha a_{12} + \beta a_{22}) & (\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = P(\overrightarrow{a}) = 0.$$

Замечание 5. Теорема 9 относится к случаю центральных КВП, имеющих вещественные асимптотические направления, то есть к случаю гиперболы и пары вещественных пересекающихся прямых.

Следствие 1. Если КВП является гиперболой или парой пересекающихся прямых, то в первом случае асимптоты гиперболы, и во втором случае прямые, принадлежащие КВП, имеют следующие уравнения:

$$\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y) = 0, \tag{21}$$

где $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta)$ — вектор асимптотического направления.

Доказательство. В примере 1 доказано, что в канонической системе координат асимптотические направления гиперболы параллельны асимптотам. Из инвариантности асимптотических направлений следует, что так же будет и в любой другой системе координат. Таким образом, приходим к инвариантной (независящей от выбора системы координат) характеризации асимптот как прямых, проходящих через центр и имеющих асимптотичесие направления.

По теореме 9 диаметры, сопряженные с асимптотическими направлениями, имеют те же самые асимптотические направления и, очевидно, проходят через центр, то есть являются асимптотами.

В случае КВП, состоящей из двух вещественных пересекающихся прямых, так же как и для гиперболы в канонической системе координат можно проверить, что асимптотические направления совпадают с направлениями прямых, на которые распадается КВП. Далее, опять применяя теорему 9, получим, что прямые, составляющие КВП, являются диаметрами, сопряженными с асимптотическими направлениями. QED

Покажем, как можно применить полученные результаты при решении задач.

Задача 6. Доказать, что КВП, заданная в ОНР уравнением

$$\gamma : 3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0, \tag{22}$$

является гиперболой и найти ее асимптоты.

Решение. Сначала установим, что γ — гипербола. Вычислим ее ортогональные инварианты. Из уравнения (22) получим равенства $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, то есть γ — кривая гиперболического типа. Тогда γ является или гиперболой, или парой вещественных пересекающихся прямых. Для решения этого вопроса найдем инвариант $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -75$. Следовательно, γ не распадается. Тем самым доказано, что γ — гипербола.

Далее найдем векторы асимптотических направлений кривой. Пусть вектор $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta)$ имеет асимптотическое направление, тогда $3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$. Теперь, обозначая $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, из предыдущего получим квадратное уравнение $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Отсюда находим $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{3}$. Поэтому векторы асимптотических направлений можно записать в виде $\overrightarrow{c}_1 = (1, -1),\ \overrightarrow{c}_2 = (1, 3)$.

Теперь найти уравнения асимптот можно двумя способами.

1-ый способ. Асимптоты найдем как прямые асимптотических направлений, проходящие через центр. Координаты центра получим, решая систему $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0, \end{cases}$ которая для γ принимает вид $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0, \\ x - y + 5 = 0. \end{cases}$ Отсюда, центр гиперболы $C(-9/4, 11/4)$ и асимптоты

$$l_1 :\ 2x + 2y - 1 = 0, \quad l_2 :\ 6x - 2y + 19 = 0. \tag{23}$$

2-ой способ. Асимптоты гиперболы можно найти как диаметры, сопряженные с асимптотическими направлениями. Уравнения диаметра, сопряженного с направлением вектора $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta)$ имеет вид: $\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$. Отсюда для кривой γ будем иметь: $\alpha(3x + y + 4) + \beta(x - y + 5) = 0$. Окончательно, учитывая координаты векторов асимптотических направлений $\overrightarrow{c}_1$, $\overrightarrow{c}_2$, опять получим уравнения (23).

§5. Свойства диаметров нецентральных КВП

Свойства диаметров нецентральных КВП существенно отличаются от их свойств в случае центральных КВП.

Теорема 10. Диаметр нецентральной КВП, сопряженный с любым неасимптотическим направлением, имеет асимптотическое направление.

Доказательство. Сначала заметим, что нецентральные КВП удовлетворяют условию $\delta = 0$, то есть являются КВП параболического типа. Поэтому по теореме 5 они имеют единственное вещественное асимптотическое направление.

Таким образом, для доказательства достаточно проверить, что любой диаметр параллелен асимптотическому направлению. Пусть $\overrightarrow{c}(\alpha, \beta) \neq \overrightarrow{0}$ — вектор неасимптотического направления. Уравнение диаметра, сопряженного с $\overrightarrow{c}$ имеет вид:

$$d_{\overrightarrow{c}} : \alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_{20}) = 0.$$

Подставим координаты направляющего вектора

$$\overrightarrow{a}_d = (c_1, c_2) = (-(\alpha a_{12} + \beta a_{22}), (\alpha a_{11} + \beta a_{12}))$$

этого диаметра в условие асимптотического направления. По лемме 1 имеем равенства $P(\overrightarrow{a}_d) = P(\overrightarrow{c})\delta = 0$, так как $\delta = 0$. QED

Определение 9. Асимптотическое направление КВП параболического типа называется особым.

Теорема 11. Направление $\overrightarrow{a}(\alpha, \beta)$ — особое тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0, \tag{24}$$
$$a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0. \tag{25}$$

Доказательство. 1. Пусть направление $\vec{a}(\alpha, \beta)$ — особое, то есть асимптотическое для параболической КВП. Тогда

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \qquad (26)$$

Далее, перебирая как и при доказательстве теоремы 5 возможные случаи, придем к квадратному уравнению относительно α/β или β/α. Заметим, что дискриминант этого уравнения $D = 0$ в силу равенства $\delta = 0$. Поэтому $\alpha/\beta = -a_{12}/a_{11}$ или $\beta/\alpha = -a_{12}/a_{22}$. Теперь, преобразуя условие $\delta = 0$ к виду $a_{12}/a_{11} = a_{22}/a_{12}$, получим, что (α, β) удовлетворяют системе (24), (25).

2. Обратно. Пусть $\vec{a}(\alpha, \beta)$ удовлетворяет системе (24), (25). Как известно из теории систем линейных уравнений, однородная система (24),(25) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta = 0$, то есть когда КВП параболического типа. Далее, умножая уравнение (24) на α, уравнение (25) на β и складывая полученные равенства, придем к (26). QED

Замечание 6. Другими словами теорема 11 означает, что сопряженный с данным направлением диаметр не существует тогда и только тогда, когда направление особое. Во всех остальных случаях сопряженные диаметры существуют.

Авторы выражают благодарность Н.А. Степанову за многочисленные обсуждения и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. — СПб.: Лань, 2003. — 160 с.

2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. — М.: Просвещение, 1974. — 351 с.

3. Постников М.М. Лекции по геометии. Семестр 1. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979. — 336 с.

4. Степанов Н.А., Жогова Т.Б., Казнина О.В. Геометрия 1. — Н.Новгород: Изд-во НГПУ, 2007. — 299 с.

5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. — 336 с.

Александр Владимирович **Баландин**
Евгений Маратович **Макаров**
Алексей Григорьевич **Разуваев**

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧАСТЬ 2

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный унивеситет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.