МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.А. Голубева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть II

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано
учебно-методической комиссией
Павловского филиала ННГУ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»,
38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2020

УДК 519.2
ББК 22.17
Г-62

Г-62 Голубева Е.А. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. Часть II: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 40 с.

Рецензент: к.т.н. **И.В. Белянин**

В учебно-методическом пособии в краткой форме излагается теоретический материал и даны примеры решения типовых задач по следующим разделам теории вероятностей и математической статистики: «Выборки и их статистическое оценивание», «Проверка статистических гипотез», «Однофакторный дисперсионный анализ». Приведены вопросы для подготовки к экзамену и варианты контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент». Оно поможет сориентироваться при написании контрольной работы, подготовке к практическим занятиям и экзамену.

Ответственный за выпуск:
председатель учебно-методической комиссии
Павловского филиала ННГУ
к.э.н., доцент **Н.А. Ягунова**

УДК 519.2
ББК 22.17

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс теории вероятностей и математической статистики является важной составной частью подготовки бакалавра экономики и бакалавра прикладной информатики. Изучение этой дисциплины закладывает фундамент для понимания экономической статистики и является базовым теоретическим и практическим основанием для всех последующих математических и финансово-экономических дисциплин, использующих теоретико-вероятностные и статистические методы анализа.

Настоящее пособие предназначено для помощи студентам, обучающимся по направлениям подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», 38.03.01 «Экономика», подготовки 38.03.02 «Менеджмент» как очной, так и заочной форм обучения.

В основу структуры пособия положен тематический принцип. Сюда вошёл материал, относящийся к таким разделам дисциплины, как «Выборки и их статистическое оценивание», «Проверка статистических гипотез», «Однофакторный дисперсионный анализ». Наряду с изложением основного теоретического материала по вышеперечисленным темам, в пособии приведены примеры решения типовых задач, вопросы для подготовки к экзамену и варианты контрольной работы.

Математическая статистика занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые явления, на основе результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – это разработка методологии сбора и группировки статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.

Вторая задача состоит в разработке методов анализа полученных статистических данных.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей.

Тема 1. ВЫБОРКИ И ИХ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

1.1. Генеральная и выборочная совокупности

В математической статистике вводят понятия **генеральной и выборочной** совокупностей.

Совокупность **всех** возможных объектов данного вида, над которыми проводят наблюдения, или совокупность всех возможных наблюдений, проводимых в одинаковых условиях над некоторой случайной величиной, называется **генеральной совокупностью**. Генеральная совокупность может иметь конечное или бесконечное число элементов. Например, если измеряется температура воздуха, то генеральная совокупность имеет бесконечное множество значений.

В некоторых случаях неудобно или невозможно получить результаты измерений на всех объектах и поэтому выбирают определённую часть из генеральной совокупности (выборку), которую называют **выборочной совокупностью**.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число её элементов.

Объём генеральной совокупности будем обозначать N. Выборочной - n.

1.2. Дискретный и интервальный вариационные ряды

Пусть из генеральной совокупности извлекается выборка. При этом значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, и т.д. значение x_n - n_k раз. Общий объем выборки можно определить как сумму $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Наблюдаемое значение x_i называется *вариантой*. Число наблюдений n_i варианты x_i называется частотой, а значение отношения частоты к объёму выборки – относительной частотой: $p_i^* = \frac{n_i}{n}$.

Перечень вариант, записанных в возрастающем порядке, и соответствующих им частот (или относительных частот) называется **дискретным вариационным рядом**.

Пример 1: Наблюдаются размеры выигрышей в мгновенной лотерее. В результате наблюдений получены следующие значения выигрышей (руб.):
0; 100; 0; 0; 500; 0; 1000; 0; 100; 0; 100; 500; 100; 0; 0; 100; 0; 100; 0; 0; 0; 0; 500; 0; 500; 0; 0; 100; 100; 100; 500; 1000; 0; 100; 100; 0; 500; 0; 0; 100; 0; 100; 0; 500; 0; 0; 0; 0; 100; 0.

Построим дискретный вариационный ряд рассматриваемой случайной величины X - размера выигрыша для владельца одного билета.

X	0	100	500	1000
n_k	27	14	7	2
$p_k^* = \frac{n_k}{n}$	$\frac{27}{50} = 0{,}54$	$\frac{14}{50} = 0{,}28$	$\frac{7}{50} = 0{,}14$	$\frac{2}{50} = 0{,}04$

Если наблюдаемая случайная величина непрерывна или дискретная случайная величина такова, что число её возможных значений велико, то для построения вариационного ряда используют интервальный ряд распределения. В этом случае весь возможный интервал варьирования разбивают на конечное число частичных интервалов (обычно 5-7) и подсчитывают частоту попадания значений величины в каждый частичный интервал.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная последовательность интервалов варьирования случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Пример 2. Для изучения случайной величины T - времени сдачи экзамена по правилам дорожного движения было записано время в минутах, потребовавшееся для сдачи экзамена 15 экзаменующимся:

3,5 6 14 5,5 13 9,5 11 9 14 17 14,5 6,5 11,5 4 13,5.

Требуется построить интервальный вариационный ряд для непрерывной случайной величины T.

Решение. Для удобства расположим значения в порядке возрастания:

3,5 4 5,5 6 6,5 9 9,5 11 11,5 13 14 14 14,5 13,5 17.

Выберем следующие 5 интервалов группирования: 3-6, 6-9, 9-12, 12-15, 15-18. Подсчитаем частоты попаданий в каждый из выбранных интервалов значений случайной величины (число, совпадающее с верхней границей интервала, относится к следующему интервалу). В сумме их должно быть 15. Все записи будем производить в таблице.

Подсчитаем относительные частоты попадания значений случайной величины в интервалы группирования. В сумме они должны составлять единицу.

T	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_k	3	2	4	5	1
$p_k^* = \frac{n_k}{n}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

1.3. Полигон и гистограмма

Данные таблицы вариационного ряда дискретной случайной величины можно представить графически в виде ломаной линии, связывающей на плоскости точки с координатами (x_i, n_i). Такой график называется *полигоном* или *многоугольником распределения*. Можно также построить полигон относительных частот, где точками являются пары (x_i, p_i^*) (см. рис. 1).

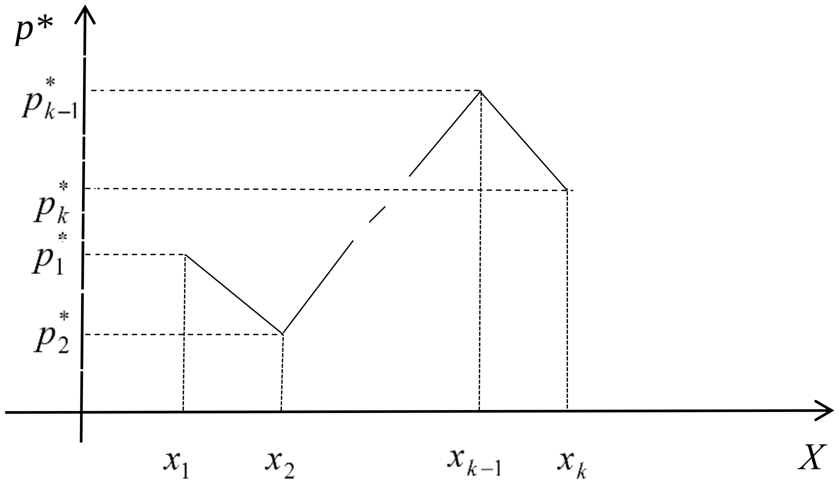

Рисунок 1. Полигон относительных частот

Построим полигон относительных частот для случайной величины X - размера выигрыша для владельца одного билета из примера 1 (см. рис. 2).

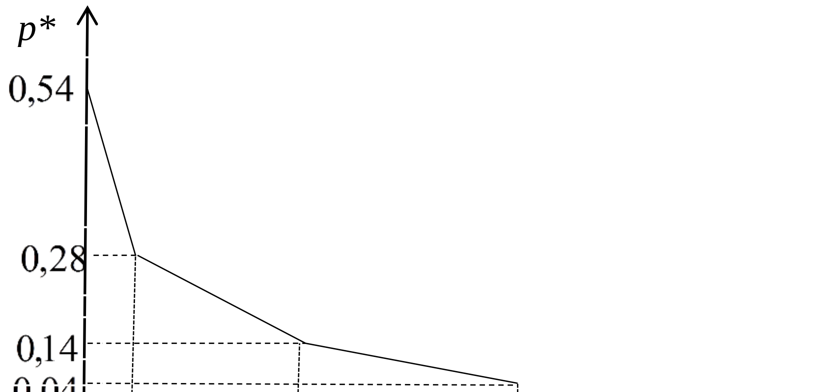

Рисунок 2. Полигон относительных частот случайной величины X

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью гистограммы. *Гистограммой* частот (относительных частот) называется фигура, состоящая из прямоугольников, опирающихся на интервалы группирования, с высотой, равной частоте (относительной частоте) попадания случайной величины в эти интервалы (см. рис. 3).

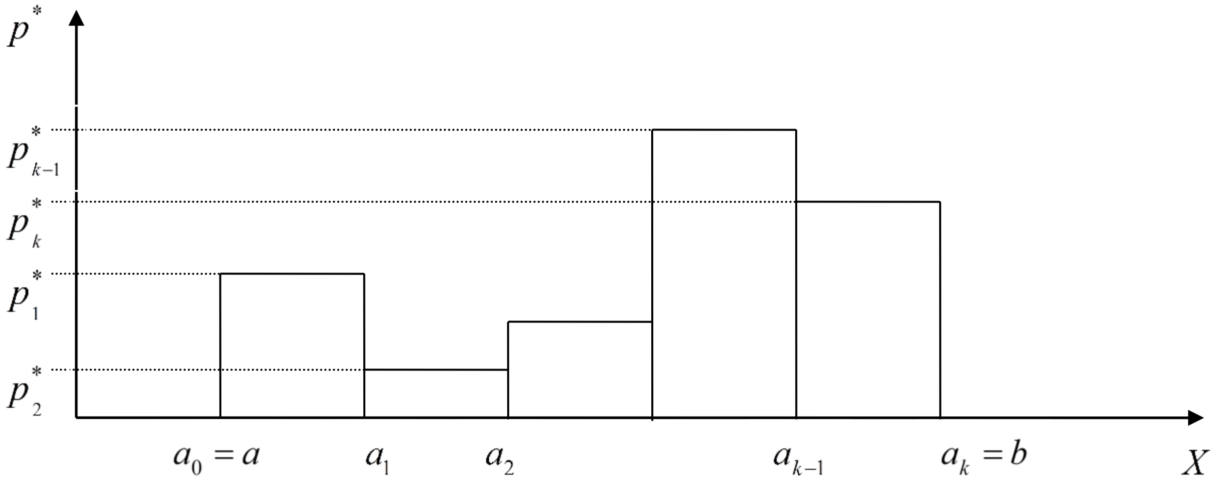

Рисунок 3. Гистограмма относительных частот

На основании таблицы примера 2 построим гистограмму относительных частот попадания значений случайной величины T в интервалы группирования (см. рис. 4).

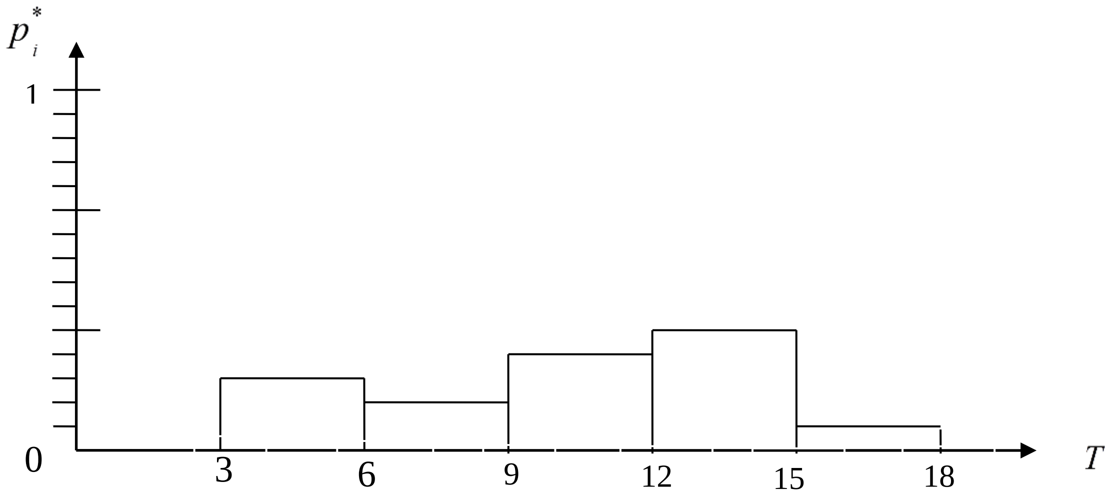

Рисунок 4. Гистограмма относительных частот случайной величины T

Графическое изображение вариационных рядов в виде полигона и гистограммы позволяет получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в совокупности наблюдений.

1.4. Эмпирическая функция распределения

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, задающая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Следовательно, по определению $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x - число выборочных значений, меньших x, а n - объём выборки.

Выборочную функцию распределения можно задать таблично или графически.

Построим выборочную функцию распределения по данным примера 1:

X	0	100	500	1000
n_k	27	14	7	2
$p_k^* = \dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{27}{50} = 0{,}54$	$\dfrac{14}{50} = 0{,}28$	$\dfrac{7}{50} = 0{,}14$	$\dfrac{2}{50} = 0{,}04$

Согласно определению выборочной функции распределения, получаем:

x	$F^*(x)$
$x \le 0$	0
$0 < x \le 100$	$p_1^* = 0{,}54$
$100 < x \le 500$	$p_1^* + p_2^* = 0{,}82$
$500 < x \le 1000$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0{,}96$
$x > 1000$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 1$

График построенной функции распределения будет иметь следующий вид (см. рис. 5):

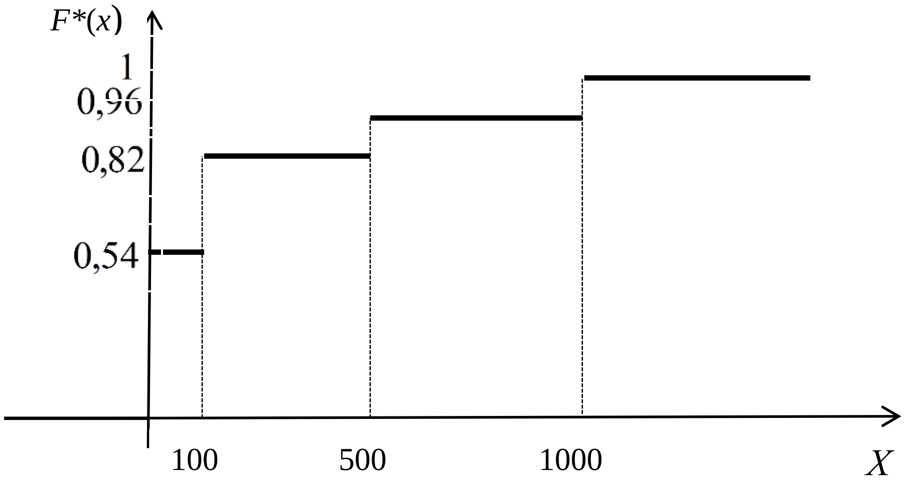

Рисунок 5. Выборочная функция распределения случайной величины X

Если случайная величина непрерывная и её выборочные значения представлены в виде интервального вариационного ряда, то выборочную функцию распределения строят иначе. Построим её для случайной величины из примера 2. Интервальный вариационный ряд этой величины имеет вид

T	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_k	3	2	4	5	1
$p_k^* = \dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{15}$

Таким образом, выборочная функция распределения такова:

t	$F^*(t)$
$t \le 3$	0
$3 < t \le 6$	$p_1^* = \frac{1}{5}$
$6 < t \le 9$	$p_1^* + p_2^* = \frac{5}{15}$
$9 < t \le 12$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* = \frac{9}{15}$
$12 < t \le 15$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = \frac{14}{15}$
$t > 15$	$p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = 1$

Очевидно, что табличные значения не полностью определяют выборочную функцию распределения непрерывной случайной величины, поэтому при графическом изображении такой функции её дополняют, соединив точки графика, соответствующие концам интервала, отрезками прямой (см. рис. 6).

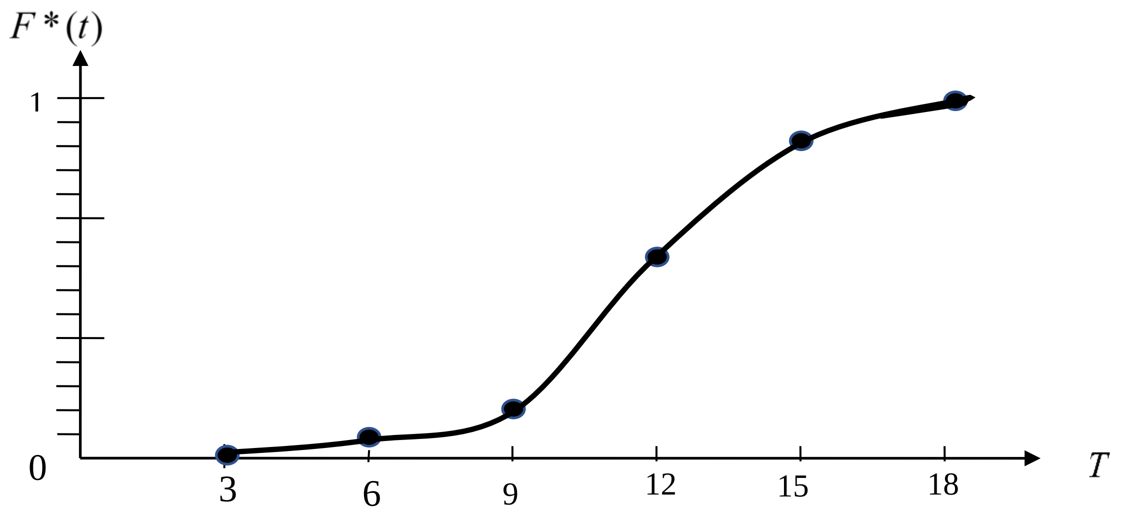

Рисунок 6. Выборочная функция распределения случайной величины T

1.5.Точечные оценки генеральной совокупности

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, то она называется *точечной*. К числу таких оценок относятся выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Выборочная средняя определяется как сумма произведений полученных по выборке значений на соответствующие им относительные частоты:

$$\bar{x}_B = x_1 \cdot p_1^* + x_2 \cdot p_2^* + \ldots + x_k \cdot p_k^*.$$

В случае непрерывной случайной величины:

$$\bar{x}_B = x_1^{cp} \cdot p_1^* + x_2^{cp} \cdot p_2^* + \ldots + x_k^{cp} \cdot p_k^*,$$

где x_i^{cp} - среднее значение на i-том интервале.

Выборочная дисперсия представляет собой выборочную среднюю квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$d_B = \left(x_1 - \bar{x}\right)^2 \cdot p_1^* + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 \cdot p_2^* + \ldots + \left(x_k - \bar{x}\right)^2 \cdot p_k^*,$$

или в случае непрерывной случайной величины:

$$d_B = \left(x_1^{cp} - \bar{x}\right)^2 \cdot p_1^* + \left(x_2^{cp} - \bar{x}\right)^2 \cdot p_2^* + \ldots + \left(x_k^{cp} - \bar{x}\right)^2 \cdot p_k^*.$$

Для расчётов может быть использована также формула:

$$d_B = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_B\right)^2,$$

где $\overline{x^2}$ - выборочная средняя квадратов вариант выборки.

Выборочным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из выборочной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{d_B}\,.$$

Найдём точечные оценки генеральных совокупностей для случайных величин из примеров 1 и 2 (см. стр. 5, 6).

Дискретный вариационный ряд для случайной величины X - размера выигрыша для владельца одного билета из примера 1 имеет вид:

X	0	100	500	1000
n_k	27	14	7	2
$p_k^* = \dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{27}{50} = 0{,}54$	$\dfrac{14}{50} = 0{,}28$	$\dfrac{7}{50} = 0{,}14$	$\dfrac{2}{50} = 0{,}04$

Найдем выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{x} = 100 \cdot 0{,}28 + 500 \cdot 0{,}14 + 1000 \cdot 0{,}04 = 138,$$

$$d_B = 100^2 \cdot 0{,}28 + 500^2 \cdot 0{,}14 + 1000^2 \cdot 0{,}04 - 138^2 = 58756,$$

$$\sigma_B = \sqrt{d_B} = 242{,}4\,.$$

Интервальный вариационный ряд для случайной величины T - времени сдачи экзамена по правилам дорожного движения из примера 2 имеет вид:

T	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_k	3	2	4	5	1
$p_k^* = \dfrac{n_k}{n}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{15}$

Выборочная средняя, выборочная дисперсия и выборочное среднее квадратическое отклонение для случайной величины T соответственно равны:

$$\overline{T} = 4{,}5 \cdot \frac{1}{5} + 7{,}5 \cdot \frac{2}{15} + 10{,}5 \cdot \frac{4}{15} + 13{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 16{,}5 \cdot \frac{1}{15} = 10{,}3,$$

$$d_B = 4{,}5^2 \cdot \frac{1}{5} + 7{,}5^2 \cdot \frac{2}{15} + 10{,}5^2 \cdot \frac{4}{15} + 13{,}5^2 \cdot \frac{1}{3} + 16{,}5^2 \cdot \frac{1}{15} - 10{,}3^2 = 13{,}76,$$

$$\sigma_B = \sqrt{d_B} \approx 3{,}71.$$

Статистическая оценка является случайной величиной и меняется в зависимости от выборки. Если математическое ожидание статистической оценки равно оцениваемому параметру генеральной совокупности, то такая оценка называется *несмещённой*, если не равно – то *смещённой*.

Можно показать, что выборочная средняя представляет собой несмещённую оценку, а выборочная дисперсия является смещённой оценкой.

Для устранения смещённости выборочной дисперсии её умножают на $\dfrac{n}{n-1}$ и получают величину

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_B,$$

которую называют несмещённой или исправленной выборочной дисперсией.

Соответственно, исправленным выборочным средним квадратическим отклонением s называется корень из исправленной выборочной дисперсии.

Для случайных величин X и T из примеров 1 и 2 исправленные выборочные дисперсии и исправленные выборочные средние квадратические отклонения соответственно равны:

$$s^2 = \frac{50}{49} \cdot 58756 = 59955{,}102; \quad s = 244{,}857;$$

$$s^2 = \frac{15}{14} \cdot 13{,}76 = 14{,}74; \quad s = 3{,}839.$$

Тема 2. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

2.1. Статистические гипотезы

Статистические гипотезы – частный случай научных гипотез.

Научная гипотеза формулируется на основании наблюдений над некоторыми фактами с использованием вероятностного умозаключения по аналогии.

Если принятое решение о законе распределения генеральной совокупности или о числовых значениях его параметров проверяется по выборочным данным, то говорят о проверке статистических гипотез. Проверке подвергается гипотеза об отсутствии разности между принятым и найденным по выборке значениями исследуемого параметра. Такую гипотезу называют *нулевой*. Противоположную ей гипотезу называют *альтернативной*.

Схема проверки нулевой гипотезы:

1. Рассматривая выборочные данные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и учитывая конкретные условия задачи, принимают H_0 - нулевую гипотезу и H_1 - альтернативную гипотезу, конкурирующую с H_0, а также уровень значимости α.

2. Так как решение о справедливости гипотезы H_0 принимается на основе выборочных данных, могут возникать ошибки двух родов:

а) гипотеза H_0 отвергается, а на самом деле она верна – это *ошибка первого рода*; вероятность ошибки I рода равна уровню значимости α.

б) гипотеза H_0 принимается, а на самом деле она неверна – это *ошибка второго рода*.

3. Используя выборочные данные, вводят статистический критерий – некоторую функцию K, зависящую от условий решаемой задачи. Эти функции, являясь случайными величинами, подчинены некоторому известному, затабулированному закону распределения.

4. В зависимости от принятого уровня значимости из области допустимых значений функции критерия K выделяют критическую область ω. Она может быть правосторонней, левосторонней и двусторонней (см. рис. 7).

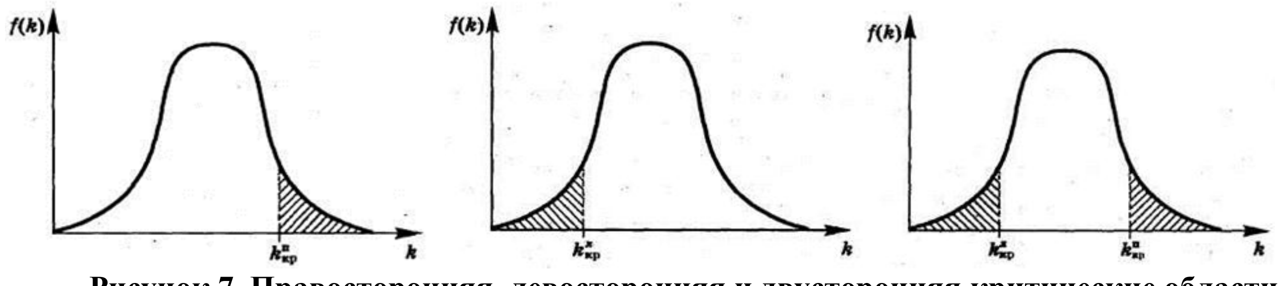

Рисунок 7. Правосторонняя, левосторонняя и двусторонняя критические области

5. По выборочным данным находят числовое значение критерия. Далее руководствуются следующим правилом: если вычисленное по выборке числовое значение критерия не попадает в критическую область, то принимается гипотеза H_0; если вычисленное по выборке значение критерия попадает в критиче-

скую область, то H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. При этом возможно, что H_0 справедлива и, следовательно, совершена ошибка первого рода, вероятность которой равна α.

При проверке статистических гипотез учитываются конкретные условия рассматриваемой задачи.

2.2. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Пусть имеются две нормально распределённые совокупности *X* и *Y*. Из этих генеральных совокупностей извлекают выборки объёмом n_1 и n_2 и находят исправленные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2. При заданном уровне значимости α по данным значениям s_x^2 и s_y^2 проверим нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии равны:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимается отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, то есть случайную величину

$$f = \frac{s_б^2}{s_м^2}.$$

Величина *f* имеет распределение Фишера-Снедекора со степенями свободы $l_1 = n_б - 1$ и $l_2 = n_м - 1$, где $n_б$ – объём выборки для большей исправленной выборочной дисперсии, $n_м$ - объём выборки для меньшей исправленной выборочной дисперсии.

Предположим, что большая дисперсия относится к измерениям *X*, а меньшая – к *Y*. Тогда в качестве конкурирующей гипотезы можно принять

$$H_1 : D(X) > D(Y).$$

В этом случае критическую точку $f_{кр} = f_{кр}(\alpha, l_1, l_2)$ находят по таблице Фишера-Снедекора (см. Приложение 3), а критическую область определяют из условия $p(f > f_{кр}(\alpha, l_1, l_2)) = \alpha$.

В тех случаях, когда конкурирующая гипотеза может быть представлена в виде

$$H_1 : D(X) \neq D(Y),$$

нужно строить двухстороннюю область. При этом можно ограничиться нахождением правосторонней области для уровня значимости $\frac{\alpha}{2}$.

Пример. По двум независимым выборкам объёмом $n_1 = 9$ и $n_2 = 15$ найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 12{,}5$ и $s_y^2 = 7{,}3$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверим нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

Решение. Примем в качестве альтернативной гипотезы

$$H_1 : D(X) > D(Y).$$

Находим

$$f_{набл} = \frac{12{,}5}{7{,}3} = 1{,}71.$$

По таблице Фишера-Снедекора (см. Приложение 3) при $\alpha = 0{,}05$, $l_1 = 9 - 1 = 8$ и $l_2 = 15 - 1 = 14$, находим $f_{набл} = 2{,}7$. Так как $f_{набл} < f_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Пример. По двум независимым выборкам, объёмы которых равны $n_1 = 9$ и $n_2 = 18$, извлечённым из нормальных совокупностей *X* и *Y*, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 1{,}23$ и $s_y^2 = 0{,}41$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверим нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий:

$$H_0 : D(X) = D(Y)$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1 : D(X) \neq D(Y).$$

Решение. Находим $f_{набл} = \dfrac{1{,}23}{0{,}41} = 3.$

Здесь критическая область двусторонняя, поэтому уровень значимости принимаем $\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}05$, число степеней свободы $l_1 = 8$ и $l_2 = 17$. По таблице Фишера-Снедекора (см. Приложение 3) находим критическую точку $f_{кр} = f_{кр}(0{,}05; 8; 17) = 2{,}55$. Так как $f_{набл} > f_{кр}$, нулевую гипотезу отвергаем.

2.3. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности. Критерий Пирсона.

Пусть имеется выборка, объём которой равен *n*, для проверки определённого закона распределения с неизвестными параметрами.

Если рассматривается непрерывное распределение, то интервал возможных значений величины разбивается на *m* непересекающихся интервалов, в каждом из которых фиксируется число попаданий вариант выборки n_1, n_2, …, n_m.

Зная границы каждого интервала и принятый закон распределения, можно найти вероятность попадания случайной величины в этот интервал p_i. После этого из формулы $p_i = \dfrac{n_i^*}{n}$ находится теоретическая частота появления события $n_i^* = p_i \cdot n$.

В качестве критерия выбирается случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*}. \qquad (1)$$

Эта случайная величина при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы.

Число степеней свободы определяется по формуле $k = m - 1 - r$, где m – число интервалов, r – число параметров предполагаемого распределения.

Так, для показательного распределения $k = m - 2$, для нормального распределения $k = m - 3$.

Далее, задавая уровень значимости α и учитывая k, из таблиц распределения χ^2 (см. Приложение 4) находят значение $\chi^2_{кр}$, при котором выполняется условие

$$p\left(\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)\right) = \alpha.$$

Сравнивая вычисленное по формуле (1) значение $\chi^2_{набл}$ со значением $\chi^2_{кр}$, принимают решение о значимости допустимой гипотезы распределения случайной величины.

Пример. По полученным в результате измерений данным проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

В таблице указаны границы частичных интервалов и частоты попадания вариант в каждый интервал (n_i).

Номер интервала	**Границы интервала**		**Частота**
i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15
2	6	8	26
3	8	10	25
4	10	12	30
5	12	14	26
6	14	16	21
7	16	18	24
8	18	20	20
9	20	22	13

Решение.

Все вычисления будем заносить в таблицу. Вычисляем среднее значение интервала: $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$ и находим выборочное среднее: $\overline{x_в^*} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^* = 12{,}63$.

Далее находим выборочную дисперсию по формуле

$$d_в = \overline{\left(x_i^*\right)^2} - \left(\overline{x_в^*}\right)^2 = 181{,}56 - 159{,}52 = 22,$$

откуда $\sigma_в = 4{,}695$.

Для того чтобы вычислить теоретические вероятности попадания случайных величин в интервалы (x_i, x_{i+1}), на основании таблиц функции Лапласа необходимо найти значения $z_i = \frac{x_i - \overline{x_в^*}}{\sigma_в}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x_в^*}}{\sigma_в}$. По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение 5) находим $\Phi(z_i)$ и $\Phi(z_{i+1})$.

Номер интервала	Границы интервала		Частота	Середина ин-тервала	Квадрат	Разности		Границы		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i^* = n \cdot p_i$	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
i	x_i	x_{i+1}	n_i	x_i^*	$(x_i^*)^2$	$x_i - \overline{x_в^*}$	$x_{i+1} - \overline{x_в^*}$	z_i	z_{i+1}							
1	**4**	**6**	**15**	**5**	**25**	**-8,63**	**-6,63**	**-1,84**	**-1,41**	**-0,4671**	**-0,4207**	**0,0464**	**9,28**	**5,72**	**32,7**	**3,53**
2	**6**	**8**	**26**	**7**	**49**	**-6,63**	**-4,63**	**-1,41**	**-0,99**	**-0,4207**	**-0,3389**	**0,0818**	**16,36**	**9,64**	**92,9**	**5,68**
3	**8**	**10**	**25**	**9**	**81**	**-4,63**	**-2,63**	**-0,99**	**-0,56**	**-0,3389**	**-0,2123**	**0,1266**	**25,32**	**-0,32**	**0,1**	**0,00**
4	**10**	**12**	**30**	**11**	**121**	**-2,63**	**-0,63**	**-0,56**	**-0,13**	**-0,2123**	**-0,0517**	**0,1606**	**32,12**	**-2,12**	**4,5**	**0,14**
5	**12**	**14**	**26**	**13**	**169**	**-0,63**	**1,37**	**-0,13**	**0,29**	**-0,0517**	**0,1141**	**0,1658**	**33,16**	**-7,16**	**51,3**	**1,55**
6	**14**	**16**	**21**	**15**	**225**	**1,37**	**3,37**	**0,29**	**0,72**	**0,1141**	**0,2642**	**0,1501**	**30,02**	**-9,02**	**81,4**	**2,71**
7	**16**	**18**	**24**	**17**	**289**	**3,37**	**5,37**	**0,72**	**1,14**	**0,2642**	**0,3729**	**0,1087**	**21,74**	**2,26**	**5,1**	**0,23**
8	**18**	**20**	**20**	**19**	**361**	**5,37**	**7,37**	**1,14**	**1,57**	**0,3729**	**0,4418**	**0,0689**	**13,78**	**6,22**	**38,7**	**2,81**
9	**20**	**22**	**13**	**21**	**441**	**7,37**	**9,37**	**1,57**	**2,00**	**0,4418**	**0,4767**	**0,0349**	**6,98**	**6,02**	**36,2**	**5,19**
Σ			**200**													

По формуле (1) находим $\chi^2_{набл} = 21{,}9$. Число степеней свободы $k = 9 - 3 = 6$. По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и $k = 6$ из таблицы распределения χ^2 (см. Приложение 4) находим $\chi^2_{кр} = 12{,}6$. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, требуется либо изменить вид закона, либо повторить опыты.

2.4. Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием

На практике часто требуется оценить, соответствуют ли действительности рекламные данные о параметрах того или иного товара. В этом случае возникает задача сравнения выборочной средней с анонсируемым значением этого параметра.

Пример. Фирма-поставщик в рекламном буклете утверждает, что средний срок безотказной работы предполагаемого изделия – 2900 ч. Для выборки из 50 изделий средний срок безотказной работы оказался равным 2720 ч при исправленном среднем квадратическом отклонении 700 ч. При 5% -м уровне значимости проверить гипотезу о том, что значение 2900 ч является математическим ожиданием.

Решение. Предположим, что случайная величина срока безотказной работы подчинена нормальному закону распределения. Требуется проверить гипотезу о числовом значении математического ожидания нормально распределённой величины при неизвестной генеральной дисперсии. В этом случае в качестве критерия выбирают функцию

$$T = \frac{\overline{x}_в - a_0}{s / \sqrt{n-1}},$$

где $\overline{x}_в$ - выборочная средняя, a_0- математическое ожидание, s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение. Случайная величина T имеет t-распределение (распределение Стьюдента) с $l = n - 1$ степенями свободы. В данной задаче речь идёт о сравнении выборочной средней 2720 ч с гипотетическим математическим ожиданием $a_0 = 2900$ ч, при этом исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение равно 700 ч.

Требуется найти критическую область для нулевой гипотезы $H_0 : a_0 = 2900$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a_0 < 2900$. Очевидно, что другие альтернативные гипотезы ($a_0 > 2900, a_0 \neq 2900$) нецелесообразны, так как потребитель обычно обеспокоен лишь тем, что срок службы изделия может оказаться меньше гарантируемого поставщиком.

Критическая область левосторонняя. По таблице критических точек t-распределения (см. Приложение 6) при $\alpha = 0{,}05$ и $l = 50 - 1 = 49$ находим $t^л_{кр} = -t^п_{кр} = -1{,}677$. Таким образом, критическая область $\omega = (-\infty, -1{,}677)$. Рассчитаем $t_{факт} = \dfrac{2720 - 2900}{700/\sqrt{50-1}} = \dfrac{-180}{100} = -1{,}8$.

Значение -1,8 попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза должна быть отвергнута. Следовательно, фирма в рекламе завышает срок безотказной работы изделия.

Тема 3. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионным анализом называется статистический метод анализа результатов испытаний, цель которого – оценить влияние одного или нескольких качественных факторов на рассматриваемую величину X.

Схема однофакторного дисперсионного анализа может быть представлена в виде следующей таблицы:

Номер измерения	Уровни фактора			
	Φ_1	Φ_2	…	Φ_p
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2p}
…	…	…	…	…
q	x_{q1}	x_{q2}	…	x_{qp}
Групповая средняя	$\bar{x}_{\Gamma 1}$	$\bar{x}_{\Gamma 2}$	…	$\bar{x}_{\Gamma p}$

Здесь Φ_1, Φ_2, …, Φ_p - уровни фактора *Ф*, влияющего на случайную величину X, x_{ij} - результаты q наблюдений за случайной величиной X ($i = \overline{1;q}$, $j = \overline{1;p}$). В последней строке помещены групповые средние для каждого уровня фактора.

Общую среднюю можно получить как среднее арифметическое групповых средних:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{p} \bar{x}_{\Gamma j}}{p}.$$

На разброс случайной величины X относительно общей средней влияют как изменения уровня рассматриваемого фактора, так и случайные факторы. Для того, чтобы учесть влияние одного фактора, общая выборочная дисперсия разбивается на две части, первая из которых называется *факторной* (s_{ϕ}^2), а вторая – *остаточной* ($s_{ост}^2$).

С целью учёта этих составляющих рассчитывается <u>общая сумма квадратов отклонений вариант от общей средней</u>:

$$R_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}\right)^2 - pq\bar{x}^2$$

и <u>факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней</u>:

$$R_{\phi} = q\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{x}_{\Gamma j} - \bar{x}\right)^2 = q\left[\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{x}_{\Gamma j}\right)^2 - p\bar{x}^2\right],$$

которая и характеризует влияние данного фактора.

Остаточная сумма квадратов отклонений получается, как разность общей и факторной сумм квадратов отклонений:

$$R_{ост} = R_{общ} - R_{ф}.$$

Для определения общей выборочной дисперсии необходимо $R_{общ}$ разделить на число измерений pq:

$$d_{общ} = \frac{R_{общ}}{pq},$$

а для получения несмещённой общей выборочной дисперсии это выражение нужно умножить на $pq/(pq-1)$:

$$s^2_{общ} = \frac{R_{общ}}{pq-1},$$

где $pq-1$ - число степеней свободы несмещённой общей выборочной дисперсии.

Соответственно, для несмещённой факторной выборочной дисперсии имеем:

$$d_{ф} = \frac{R_{ф}}{p},$$

$$s^2_{ф} = d_{ф} \cdot \frac{p}{p-1} = \frac{R_{ф}}{p-1},$$

где $p-1$ - число степеней свободы несмещённой факторной выборочной дисперсии.

Для несмещённой остаточной выборочной дисперсии число степеней свободы будет равно разности

$$pq-1-(p-1) = p(q-1),$$

и выражение несмещённой остаточной выборочной дисперсии примет вид

$$s^2_{ост} = \frac{R_{ост}}{p(q-1)}.$$

С целью оценки влияния фактора на изменения рассматриваемой случайной величины рассчитывается величина

$$f_{набл} = \frac{s^2_{ф}}{s^2_{ост}}.$$

Проверяется гипотеза H_0 о несущественном влиянии фактора *Ф* на случайную величину *X*. Так как отношение выборочных дисперсий $s^2_{ф}$ и $s^2_{ост}$ распределено по закону Фишера-Снедекора, то полученное значение $f_{набл}$ сравнивают с табличным $f_{кр}$, соответствующим выбранному уровню значимости α и степеням свободы $l_1 = p-1,\ l_2 = p(q-1)$ (см. Приложение 3). При попадании $f_{набл}$ в критическую область гипотеза H_0 неверна и фактор оказывает существенное воздействие и его следует учитывать, в противном случае он оказывает незначительное влияние, которым можно пренебречь.

Рассмотрим описанный выше алгоритм однофакторного дисперсионного анализа на конкретном примере.

Пример. Проведены измерения для каждого из трёх уровней некоторого фактора *Ф*.

Номер измерения	Уровни фактора		
	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34

В качестве уровня значимости принимается величина $\alpha = 0{,}05$. Проверим нулевую гипотезу о незначительном влиянии фактора *Ф*.

Решение. Вычислим групповые средние как средние арифметические измерений столбов:

Номер измерения	Уровни фактора		
	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34
Групповая средняя	35	25	27

Общая средняя равна

$$\bar{x} = \frac{35 + 25 + 27}{3} = 29.$$

Далее вычисляем общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений, считая $p = 3$, $q = 4$:

$$R_{общ} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \left(x_{ij}\right)^2 - 3 \cdot 4 \cdot \bar{x}^2 = 428,$$

$$R_{ф} = 4\left[\sum_{j=1}^{3} \left(\bar{x}_{Гj}\right)^2 - 3 \cdot \bar{x}^2\right] = 224,$$

$$R_{ост} = R_{общ} - R_{ф} = 204.$$

Таким образом, несмещённые факторная и остаточная дисперсии равны

$$s_{ф}^2 = \frac{R_{ф}}{p-1} = \frac{224}{2} = 112,$$

$$s_{ост}^2 = \frac{R_{ост}}{p(q-1)} = \frac{204}{3 \cdot 3} = 22{,}67.$$

Находим

$$f_{набл} = \frac{s_{ф}^2}{s_{ост}^2} = 4{,}94.$$

По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (см. Приложение 3) находим $f_{кр}(0{,}05;\,2;\,9) = 4{,}26$. Наблюдаемое значение функции f принадлежит критической области. Следовательно, гипотеза H_0 неверна и фактор оказывает существенное влияние.

Приложение 1. ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

1. Задачи математической статистики.
2. Генеральная и выборочная совокупности. Их объёмы.
3. Дискретный и интервальный вариационные ряды. Примеры.
4. Полигон и гистограмма относительных частот. Примеры.
5. Эмпирическая функция распределения. Примеры.
6. Точечные оценки генеральных совокупностей: выборочная средняя. Примеры.
7. Точечные оценки генеральных совокупностей: выборочная дисперсия. Примеры.
8. Точечные оценки генеральных совокупностей: выборочное среднее квадратическое отклонение. Примеры.
9. Точечные оценки генеральных совокупностей: исправленные выборочная дисперсия и выборочное среднее квадратическое отклонение. Примеры.
10. Статистические гипотезы. Схема проверки статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода.
11. Проверка статистических гипотез: сравнение двух дисперсий.
12. Проверка гипотезы о распределении. Критерий Пирсона.
13. Проверка статистических гипотез: сравнение выборочной средней с математическим ожиданием.
14. Однофакторный дисперсионный анализ.

Приложение 2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

1. Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным (табл. 1), где m_i - частота попадания вариант в промежуток $[x_i, x_{i+1})$.

2. Найти несмещённую выборочную дисперсию на основании данного распределения выборки (табл. 2).

3. Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение a_0 является математическим ожиданием нормально распределённой случайной величины при 5% уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки объёма $n = 10$ получено выборочное среднее $\bar{x}$, а несмещённое среднее квадратическое отклонение равно s (табл. 3).

4. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределённых случайных величин X и Y на основе выборочных данных (табл. 4) при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трёх уровней фактора $\Phi_1 - \Phi_3$ (табл. 5).

Таблица 1. Варианты задания 1

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1	2 – 4	5	16	1	10 – 12	4
	2	4 – 6	8		2	12 – 14	12
	3	6 – 8	16		3	14 – 16	8
	4	8 – 10	12		4	16 – 18	8
	5	10 – 12	9		5	18 – 20	18
2	1	3 – 7	4	17	1	3 – 7	6
	2	7 – 11	6		2	7 – 11	8
	3	11 – 15	9		3	11 – 15	10
	4	15 – 19	10		4	15 – 19	12
	5	19 – 23	11		5	19 – 23	4
3	1	-6 – (-2)	2	18	1	5 – 7	4
	2	-2 – 2	8		2	7 – 9	14
	3	2 – 6	14		3	9 – 11	12
	4	6 – 10	6		4	11 – 13	8
	5	10 – 14	10		5	13 – 15	2

Продолжение табл. 1

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
4	1	4 – 8	5	19	1	11 – 14	3
	2	8 – 12	7		2	14 – 17	8
	3	12 – 16	10		3	17 – 20	14
	4	16 – 20	12		4	20 – 23	15
	5	20 – 24	6		5	23 – 26	10
5	1	7 – 9	5	20	1	2 – 5	6
	2	9 – 11	4		2	5 – 8	24
	3	11 – 13	8		3	8 – 11	13
	4	13 – 15	12		4	11 – 14	1
	5	15 –17	11		5	14 – 17	6
6	1	5 – 8	5	21	1	10 – 14	5
	2	8 – 11	7		2	14 – 18	14
	3	11 – 14	4		3	18 – 22	26
	4	14 – 17	1		4	22 – 26	9
	5	17 –20	3		5	26 – 30	6
7	1	4 – 6	3	22	1	5 – 10	3
	2	6 – 8	9		2	10 – 15	9
	3	8 – 10	7		3	15 – 20	18
	4	10 – 12	22		4	20 – 25	14
	5	12 – 44	9		5	25 – 30	16
8	1	1 – 5	4	23	1	10 – 20	12
	2	5 – 10	5		2	20 – 30	17
	3	10 – 15	9		3	30 – 40	46
	4	15 – 20	10		4	40 – 50	12
	5	20 – 25	2		5	50 – 60	13
9	1	10 – 14	3	24	1	15 – 20	8
	2	14 – 18	16		2	20 – 25	16
	3	18 – 22	8		3	25 – 30	12
	4	22 – 26	7		4	30 – 35	4
	5	26 – 30	6		5	35 – 40	10
10	1	20 – 22	4	25	1	20 – 40	8
	2	22 – 24	6		2	40 – 60	14
	3	24 – 26	10		3	60 – 80	10
	4	26 – 28	4		4	80 – 100	9
	5	28 – 30	6		5	100 – 120	19
11	1	2 – 6	5	26	1	4 – 10	4
	2	6 – 10	3		2	10 – 16	5
	3	10 – 14	18		3	16 – 22	12
	4	14 – 18	9		4	22 – 28	14
	5	18 – 22	5		5	28 – 34	5

Окончание табл. 1

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
12	1	14 – 16	3	27	1	12 – 16	7
	2	16 – 18	12		2	16 – 20	15
	3	18 – 20	10		3	20 – 24	13
	4	20 – 22	15		4	24 – 28	8
	5	22 – 24	10		5	28 – 33	7
13	1	5 – 10	2	28	1	8 – 10	5
	2	10 – 15	14		2	10 – 12	16
	3	15 – 20	11		3	12 – 14	12
	4	20 – 25	9		4	14 – 16	11
	5	25 – 30	4		5	16 – 18	4
14	1	3 – 5	1	29	1	100 – 110	7
	2	5 – 7	6		2	110 – 120	16
	3	7 – 9	14		3	120 – 130	12
	4	9 – 11	7		4	130 – 140	11
	5	11 – 14	2		5	140 – 150	4
15	1	4 – 9	5	30	1	100 – 120	10
	2	9 – 14	9		2	120 – 140	34
	3	14 – 19	13		3	140 – 160	25
	4	19 – 24	6		4	160 – 180	21
	5	24 – 29	7		5	180 – 200	10

Таблица 2. Варианты задания 2

Вариант	Распределение					Вариант	Распределение				
1	x_i	-6	-2	3	6	16	x_i	-3	1	4	8
	n_i	12	14	16	8		n_i	2	3	1	4
2	x_i	-10	-5	-1	4	17	x_i	16	20	22	30
	n_i	25	44	16	15		n_i	14	26	17	3
3	x_i	4	8	16	24	18	x_i	38	42	46	
	n_i	31	14	28	27		n_i	52	36	12	
4	x_i	430	450	500		19	x_i	15	26	31	
	n_i	20	18	12			n_i	426	318	256	
5	x_i	0,01	0,04	0,08	0,14	20	x_i	4	8	10	14
	n_i	19	28	31	22		n_i	12	24	38	26
6	x_i	2	6	8	9	21	x_i	30	32	37	
	n_i	20	13	12	5		n_i	41	28	31	
7	x_i	10	14	16	22	22	x_i	0,1	0,3	0,5	
	n_i	13	24	14	9		n_i	16	21	13	

Окончание табл. 2

Вариант	Распределение					Вариант	Распределение				
8	x_i	3	6	8	14	23	x_i	0,02	0,05	0,08	
	n_i	8	14	10	18		n_i	32	29	39	
9	x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	24	x_i	10	16	26	
	n_i	16	11	10	13		n_i	14	18	18	
10	x_i	3150	3170	3200		25	x_i	-3	-1	5	7
	n_i	14	6	20			n_i	15	11	25	19
11	x_i	-4	-1	2	8	26	x_i	6	9	11	14
	n_i	16	8	14	12		n_i	21	32	23	24
12	x_i	47	50	52	56	27	x_i	246	250	257	
	n_i	24	16	23	17		n_i	24	12	14	
13	x_i	-6	-2	2	5	28	x_i	421	428	432	
	n_i	11	13	14	12		n_i	32	44	24	
14	x_i	14	15	18	20	29	x_i	15	18	23	24
	n_i	15	12	11	12		n_i	13	5	14	8
15	x_i	381	385	389		19	x_i	44	48	52	
	n_i	54	22	24			n_i	29	46	25	

Таблица 3. Варианты задания 3

Вариант	a_0	$\bar{x}$	s	Вариант	a_0	$\bar{x}$	s
1	10	12	1	16	100	96	6
2	20	22	4	17	80	78	4
3	20	18	2	18	80	84	3
4	40	44	3	19	50	48	2
5	58	56	4	20	60	54	2
6	60	64	6	21	90	96	5
7	70	66	8	22	80	86	4
8	70	72	5	23	70	68	5
9	50	48	2	24	70	74	5
10	30	34	4	25	60	62	6
11	50	52	3	26	42	46	3
12	90	88	6	27	60	62	2
13	86	84	5	28	30	34	3
14	80	78	4	29	40	38	4
15	60	66	5	30	84	80	6

Таблица 4. Варианты задания 4

Вариант	X		Y		Вариант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i		x_i	n_i	y_i	m_i
1	142	3	140	5	16	42	15	84	3
	145	1	146	3		45	17	87	2
	146	2	147	22		46	12	92	4
	148	4	151			50	16	96	1
2	37	2	38	4	17	30	4	30	6
	38	1	39	3		32	5	31	4
	40	4	40	2		33	8	32	3
	41	3	41	2		34	1	34	5
	42	6	43	3		36	2	35	2
3	39	4	75	4	18	42	4	44	16
	43	2	80	2		44	8	45	12
	45	3	84	3		48	3	46	11
	47	4	91	4		50	5	51	6
	51	2	94	2		53	10	55	5
4	3,5	1	3,6	3	19	31	7	29	8
	3,7	3	3,7	5		35	3	32	9
	3,9	5	3,8	2		40	4	33	12
	4,0	4	4,4	1		42	2	35	10
	4,1	4	4,2	4		44	4	39	11
5	9	4	9	5	20	61	5	60	4
	10	5	10	6		62	4	63	3
	11	3	11	4		64	6	64	2
	12	2	13	8		67	2	68	6
	14	1	14	3		68	3	70	5
6	6,1	2	5,8	6	21	12	10	14	7
	6,5	3	6,0	4		16	12	15	6
	6,6	1	6,2	5		19	14	20	8
	7,0	4	6,3	2		21	9	21	10
	7,4	2	6,8	3		25	5	24	9
7	20	3	18	6	22	44	5	43	3
	22	4	19	3		45	2	46	3
	23	2	20	4		48	3	48	4
	24	2	22	2		52	4	50	4
	26	4	23	5		54	6	53	6
8	0,2	6	0,4	3	23	16	12	18	3
	0,4	4	0,5	5		18	10	25	1
	0,8	2	0,9	6		21	14	29	4
	1,0	5	1,2	6		24	8	36	6
	1,2	3	1,4	6		25	6	40	6

Окончание табл. 4

Вариант	X		Y		Вариант	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i		x_i	n_i	y_i	m_i
9	31	6	85	1	24	71	4	68	10
	33	2	88	3		73	5	69	14
	34	1	95	4		75	8	70	13
	38	3	97	2		79	10	74	12
	42	2	100	5		80	3	78	11
10	15	1	20	4	25	70	12	16	7
	17	3	22	2		72	10	18	4
	20	2	23	2		73	12	21	8
	21	4	25	3		75	8	25	5
	25	6	26	1		78	8	28	6
11	27	3	28	8	26	10	10	9	5
	29	9	29	9		11	14	10	3
	32	6	30	4		13	12	12	4
	33	2	32	9		14	14	13	8
12	82	2	-10	14	27	6	1	6,5	2
	83	1	-9	18		7	8	7,4	5
	85	3	-6	12		9	7	8,2	3
	90	4	-3	6		10	2	9,1	7
13	51	6	15	7	28	10	7	9	9
	53	5	18	5		11	5	11	12
	55	4	20	8		12	4	12	14
	56	3	23	6		14	6	14	9
	59	2	27	7		16	8	15	6
14	12	2	44	4	29	12,1	1	12,2	4
	15	5	46	5		12,5	2	12,4	8
	18	3	47	8		12,7	4	12,5	3
	19	1	50	6		13,0	1	12,7	2
	23	4	52	7		13,2	2	13,0	8
15	-8	3	10	4	30	23	8	30	7
	-5	2	14	10		25	7	35	8
	-3	4	15	9		26	6	41	2
	1	5	18	7		28	9	46	3
	3	4	21	4					
	4	2	25	6					

Таблица 5. Варианты задания 5

Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	1	24	18	22	16	1	8	18	34
	2	16	14	15		2	12	23	36
	3	12	10	16		3	11	22	32
	4	5	4	12		4	10	20	30
	5	6	16	8		5	14	21	33
2	1	10	14	12	17	1	21	35	69
	2	8	5	9		2	45	30	54
	3	7	14	10		3	18	38	40
	4	18	4	7		4	16	18	12
	5	6	12	8		5	40	34	36
3	1	16	9	14	18	1	12	34	18
	2	10	8	16		2	10	32	21
	3	20	9	12		3	11	30	22
	4	25	7	16		4	10	33	20
	5	24	5	14		5	16	31	28
4	1	34	38	28	19	1	8	15	24
	2	36	30	24		2	16	24	34
	3	26	34	22		3	40	42	18
	4	25	36	20		4	12	25	9
	5	30	38	23		5	32	30	14
5	1	48	40	34	20	1	124	64	34
	2	38	42	38		2	136	54	30
	3	30	37	44		3	120	44	28
	4	40	33	41		4	133	56	33
	5	36	39	45		5	125	59	31
6	1	12	10	20	21	1	17	26	45
	2	16	8	26		2	40	16	12
	3	15	7	28		3	16	17	40
	4	17	5	24		4	36	30	17
	5	14	9	27		5	30	12	44
7	1	44	40	38	22	1	45	36	44
	2	45	36	28		2	44	30	28
	3	48	32	30		3	40	31	15
	4	45	35	32		4	41	38	40
	5	40	30	26		5	39	35	32
8	1	16	18	26	24	1	12	24	20
	2	12	20	15		2	16	20	18
	3	10	22	28		3	14	34	14
	4	11	25	30		4	15	26	20
	5	10	24	26		5	13	28	19

Окончание табл. 5

Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Вариант	Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
9	1	9	4	12	25	1	24	32	30
	2	11	6	18		2	28	42	16
	3	10	5	24		3	40	30	9
	4	12	6	20		4	56	18	16
	5	9	5	23		5	24	24	10
10	1	54	32	16	26	1	108	244	326
	2	50	46	36		2	124	234	304
	3	43	28	30		3	110	254	298
	4	47	37	25		4	126	245	318
	5	36	28	17		5	114	236	312
11	1	28	36	12	27	1	12	22	21
	2	24	34	10		2	14	20	30
	3	26	30	14		3	36	18	12
	4	27	29	18		4	20	9	31
	5	25	31	20		5	53	44	30
12	1	26	34	68	27	1	12	22	21
	2	45	30	46		2	14	20	30
	3	44	46	28		3	36	18	12
	4	27	17	34		4	20	9	31
	5	42	36	30		5	53	44	30
13	1	18	24	36	28	1	34	102	68
	2	28	36	12		2	35	98	60
	3	12	28	22		3	30	106	56
	4	14	40	45		4	33	112	57
	5	32	16	40		5	32	110	55
14	1	47	56	64	29	1	25	45	56
	2	46	55	60		2	64	24	54
	3	45	54	58		3	30	12	16
	4	41	50	62		4	20	47	32
	5	43	52	61		5	46	18	42
15	1	16	28	46	30	1	24	34	45
	2	20	12	43		2	26	30	47
	3	31	40	24		3	25	31	44
	4	56	24	14		4	27	29	42
	5	22	34	6		5	28	32	48

Приложение 3. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА-СНЕДЕКОРА

при уровне значимости α =0,05

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	245,9	248,0	249,04	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,41	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,7	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,62	4,56	4,53	4,5	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3.74	3,7
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,62	2,54	2,50	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,1	1,94	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

Приложение 4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ χ^2

Число степеней свободы	**Уровень значимости α**					
	0,01	**0,05**	**0,1**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,55	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,96	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,8	14,0	12,3	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Приложение 5. ЗНАЧЕНИЯ НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00789	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	48180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49430	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	40807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983

3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997									
5,0	49999									

***Примечание*.** В таблице представлены мантиссы значений функции (0,…).

Приложение 6. t - РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
(значение $t_{кр}$, соответствующее $p(t > t_{кр}) = \alpha$)

Число степеней свободы	Уровень значимости α				
	0,10	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,576
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие / Морозова И.М., Криштапович Е.А. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=542521).

2. Бирюкова Л.Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=370899).

3. Бочаров П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика [Электронный ресурс] / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 296 с. - ISBN 5-9221-0633-3. (доступно в ЭБС «**Знаниум»**, режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=405754)

4. Коган Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва: ИНФРА-М, 2019. - 250 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - www.dx.doi.org/10.12737/textbook_5cde54d3671a96.35212605. - ISBN 978-5-16-106292-0. - Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/971766

5. Сапожников П.Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: Учебное пособие. / Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В. - М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с.: 60х90 1/16. - (Бакалавриат и магистратура) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-906818-47-8. (доступно в ЭБС «**Знаниум**», режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=548242)

6. Соколов Г.А. Основы теории вероятностей: учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - Москва: ИНФРА-М, 2015. - 340 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа https: // www.znanium. com]. - (Высшее образование: Бакалавриат). — www.dx.doi. Org / 10.12737/6649. - ISBN 978-5-16-006728-5 (print); ISBN 978-5-16-101335-9 (online). - Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/405698

7. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию / Шапкин А.С., Шапкин В.А., - 8-е изд. - Москва: Дашков и К, 2017. - 432 с.: ISBN 978-5-394-01943-2 – Текст: электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/430613

8. Хуснутдинов. Р.Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Р.Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 205 с.- М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 205 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**», режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/445667).

Екатерина Александровна **Голубева**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
Часть II

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.