МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.С. Тихов
В.А. Гришин

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано Объединенной методической комиссией Института открытого образования и филиалов университета для студентов филиалов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2018

УДК 519.2
ББК 22.1
Т 46

Т 46 Тихов М.С., Гришин В.А. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ: Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 52 с.

Рецензент: д.э.н., профессор Павленков М. Н.

Учебно-методическое пособие содержит методические указания и теоретические сведения, разъясняющие тему «Геометрические вероятности» и практические задания по этой теме. Решение задач дает возможность полнее и глубже изучить раздел геометрических вероятностей.

Пособие будет полезно при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» студентам, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика».

Ответственный за выпуск:
председатель Объединённой методической комиссии
Института открытого образования и филиалов университета
к.ю.н. А.К. Балдин

УДК 519.2
ББК 22.1

Содержание

1. Введение

Задачи раздела «Геометрические вероятности» курса теории вероятностей являются, пожалуй, самыми трудными задачами курса, поэтому мы разъясним узловые моменты этой темы. В пособии даны также задания по этой теме, приведен список литературы и задачников, где излагается данная тема.

Классическое определение вероятности предполагает задание ***конечного*** числа ***равновозможных*** элементарных исходов, отсюда вероятность по классическому способу всегда будет рациональным числом, а из аксиоматики Колмогорова следует, что вероятность в принципе может быть любым действительным число из единичного отрезка. В книге [1], с.26, приводится пример, когда вероятность равна $\sqrt{3}/4$ и поэтому эта вероятность не может быть получена исходя из классического определения вероятности. Геометрическое определение наоборот предполагает, что число исходов бесконечно. Напомним, как трактуется понятие геометрической вероятности по учебнику [2],с.40. «Пусть имеется, например, на плоскости некоторая область G и в ней содержится другая область g с квадрируемой границей. В область G наудачу бросается точка и спрашивается, чему равна вероятность того, что точка попадет в область g. При этом выражению «точка бросается наудачу в область G» придается следующий смысл: брошенная точка может попасть в любую точку области G, вероятность попасть в какую-либо часть точки области G пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему общий термин мера, m) и не зависит от её расположения и формы. Таким образом, по определению, вероятность попадания в область g при бросании наудачу точки в область G равна

$$p = \frac{m(g)}{m(G)}.\text{»}$$

Иногда, вместо термина *наудачу* говорят *случайно*. Потом, когда будет введено понятие случайного вектора, мы поймем, что имеется равномерное распределение в области. Считается, что понятие геометрической вероятности берет свое начало с работы Бюффона (Buffon)(1707-1788), написанной в 1777 г. в его «Essai d'Arithmetique Morale». Это следующая задача: *на плоскость, разлилованную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a, наудачу бросается игла длиной l, причем игла имеет длину l, большую, чем расстояние a. Найти вероятность того, что она пересечет по крайней мере одну из параллельных линий.*

Одним из примеров, на котором иллюстрируется определение геометрической вероятности, является задача о встрече (см. [2], с.41), но эта задача является частным случаем задачи об определении межточечного расстояния на отрезке, который мы разбираем ниже.

Отметим некоторые моменты в определении геометрической вероятности. Думать, что мы будем случайно бросать точки только в области, не совсем верно. На самом деле, мы будем каждому элементарному исходу $\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)$ ставить во взаимно однозначное соответствие (биекция) точку арифметического пространства R^k (или пространства с мерой). Но тогда область применения такого подхода сильно расширяется. Кроме того, мы можем по-разному выбрать биекцию, и поэтому придти к разным моделям и разным вероятностям в разнообразных задачах. И только практика сможет скачать: хороша наша выбранная модель, или нет.

В качестве примера приведем пример из книги В. Феллера [3] на с.180 (пример с чашкой Петри - см. рисунок ниже), где утверждалось, что если считать, что бактерии распределены равномерно в чашке Петри, то мы придем к распределению Пуассона, который не отвергает критерий согласия хи-квадрат, а, значит, не отвергает и равномерное распределение. Однако в книге [4] изучались межточечные расстояния (мы выведем распределение случайных межточечных расстояний (МР) в круге) и было показано, что если предположить равномерное распределение в круге, то критерии согласия отклоняют теоретическое распределение МР, а это значит, что предположение о равномерном распределении следует отвергнуть.

Рассмотрим сначала простые примеры на геометрическую вероятность.

Пример 1. Два судна в тумане: первое идет вдоль пролива шириной L с постоянной скоростью v_1, а второе курсирует без остановок поперек этого пролива перпендикулярно курсу первого со скоростью v_2. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если курс первого судна случаен от 0 до L, а второй начинает движение из случайной точки.

Решение. Будем считать, что расстояние первого судна от берега равно x, а $y-$расстояние от этого же берега в момент пересечения курсов. В момент времени t после этого положение второго судна стало $y+v_2t$. В системе координат $x_1 0 x_2$ имеет координаты $(0, y+v_2t)$. Первая точка тогда имеет координаты (v_1t, x), считая что в первоначальном положении ее координата была $(0, x)$. Расстояние между этими двумя точками будет равно $s(t)=\sqrt{(v_1t)^2+(y+v_2t-x)^2}$. Момент времени, при котором это расстояние будет минимальным есть $t_0=-\frac{v_2(y-x)}{v_1^2+v_2^2}$. В таком случае,

$s(t_0)=|y-x|\sqrt{\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}}$. Если $s(t_0)<d$, то на первом судне услышат звуковые сигналы. Последнее неравенство равносильно $|y-x|\le d\sqrt{1+\frac{v_2^2}{v_1^2}}$, причем $d\sqrt{1+\frac{v_2^2}{v_1^2}}<L$. В случае выполнения противоположного неравенства на судне наверняка услышат сигнал. Так как $0<x,y<L$, то вероятность равна

$$p=\min(1,1-\left(1-\frac{d}{L}\sqrt{1+\frac{v_2^2}{v_1^2}}\right)^2).$$

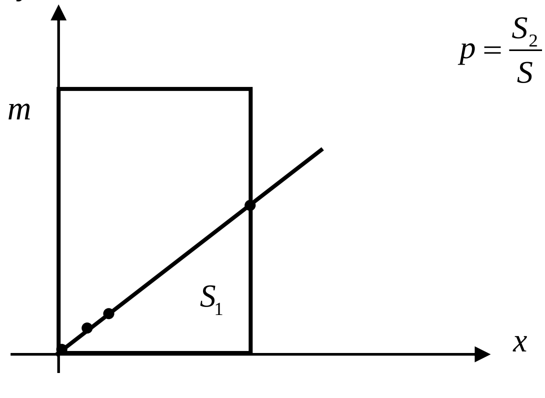
Следующий пример показывает, что иногда вместо классического определения вероятности проще использовать и вычислить геометрические вероятности.

Пример 2. Голосование начинается в 8^{00}. По окончании голосования за кандидата A проголосовали m человек, а за кандидата $B-$ n человек, причем $m>n$, т.е. победил A. На выходе участка корреспондент местной газеты спрашивает всех проголосовавших: за кого они проголосовали и они отвечают честно. В 13^{00} корреспондент производит подсчет и передает информацию в газету. Какова вероятность того, что на этот момент кандидат A набрал больше голосов, чем кандидат B, если число проголосовавших к этому моменту избирателей равновозможно от 0 до m для A, и от 0 до n для B. Расчет произвести для маленьких (взять $m=19, n=8$) и больших значений m и n (например, $n=1000, m=2000$).

Указание. В случае больших m и n воспользоваться методом геометрической вероятности.

Решение. Пусть за A проголосовало x, а за $B-$ y человек. Корреспондент правильно передаст, если $y>x$. Обозначим $S_2=\{(x,y): y>x\}$,

$S=\{(x,y): 0\le x\le m, 0\le y\le n\}$ и $S=S_1\bigcup S_2$. Тогда $|S|=m\cdot n$, а $|S_1|=n^2/2$.



Поэтому

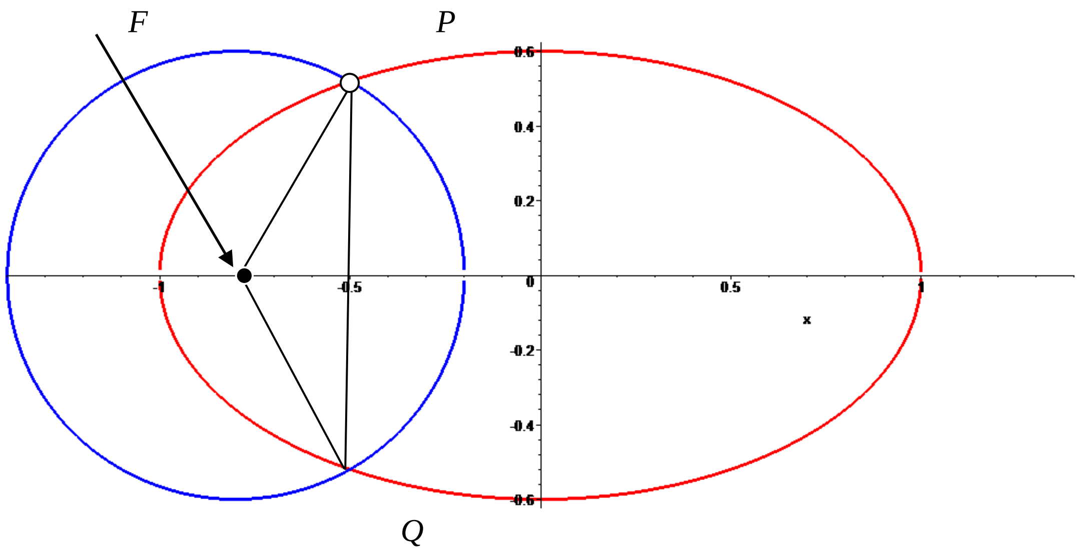
$$p=\frac{S_2}{S}=1-\frac{S_1}{S}=1-\frac{n}{2m}=1-\frac{1000}{4000}=\frac{3}{4}=0,75.$$

0   1 2 n

В случае маленьких значений m и n число точек в S равно $(m+1)(n+1)$, а число точек в S_1 равно $(n+1)+n+(n-1)+...+2+1=(n+2)(n+1)/2$. Поэтому искомая вероятность равна $p=1-\dfrac{n+2}{2(m+1)}=\dfrac{3}{4}=0,75$.

Пример 3. И.Кеплер сначала эмпирически установил, а И.Ньютон исходя из своих законов теоретически обосновал, что все планеты солнечной системы вращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам с Солнцем в одном из фокусов. Он также показал, что планеты движутся не с одинаковой скоростью и что линия, проведенная от Солнца до планеты выметает равные площади в равные промежутки времени. Пусть a и $b-$ это длина большой и малой полуоси эллипса, а $\mu=\dfrac{b}{a}, 0\le\mu\le 1$. Если $\mu=1$, то получаем окружность. В случайный момент времени мы измеряем расстояние от Солнца до планеты. Какова вероятность p того, что это расстояние будет больше b ? Постройте график зависимости p от μ.

Решение. Построим орбиту в декартовых координатах с координатами (x,y). Пусть Солнце находится в левом фокусе F с координатами $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$.



Нарисуем круг с радиусом b с центром в F и найдем точки пересечения P и Q. Тогда $P\left(-a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}},\sqrt{\dfrac{2b^3}{a+b}}\right)$, $Q\left(-a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}},-\sqrt{\dfrac{2b^3}{a+b}}\right)$. Это следует из системы

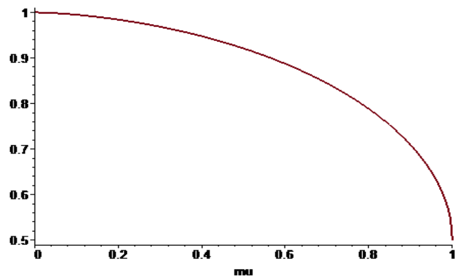
$$\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (x+c)^2+y^2=b^2,\ \text{где } c=\sqrt{a^2-b^2}\right..$$

Найдем площадь, интегрируя верхнюю ветвь эллипса из $x-$ координаты P, удвоив и добавив область PFQ. Тогда

$$S=2\left(\frac{1}{2}(c-a)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\sqrt{\frac{2b^3}{a+b}}+b\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx\right),\quad p=\frac{S}{\pi ab}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2\mu(1-\mu)}+\arcsin\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right),$$

где $x_1=-a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}, x_2=a.$

Если $\mu=0.6$, то эта вероятность равна ≈ 0.89. Если $\mu=1$ (круг), то вероятность из формулы должна быть равна 0.5, т.е. половину времени планета находится на расстоянии $<b$, а половину времени на расстоянии $>b$. Однако если $a=b$, то вероятность того, что расстояние $>b$ равна 0. Почему так получилось?



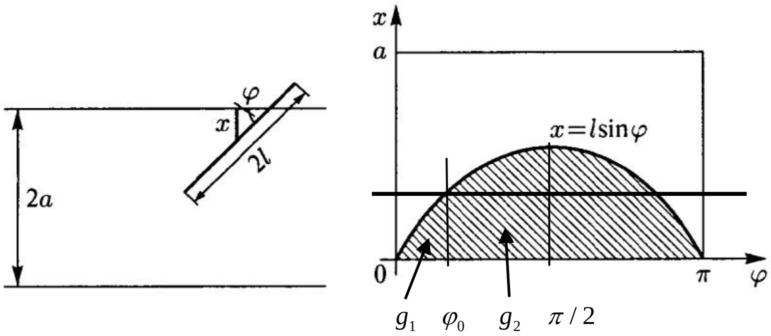
В геометрической вероятности одним из основных результатов является теорема Крофтона, которая позволяет находить вероятности событий для N точек через вероятности для $N-1$ точки.

Следующий пример – это известная задача Бюффона (см. [2], с.44), где игла длины $2l$ бросается на плоскость разлинованную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии друг от друга на расстоянии 2. В [2] она решается для случая, когда $l<1$, здесь мы её решим в общем случае, т.е. и тогда, когда $l>1$.

Пример 4. На плоскость, на которой имеются параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2, наудачу бросается игла длиной $2l$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Примечание. Слово «наудачу» здесь подразумевает: 1) центр иглы наудачу (случайно) выбирается из интервала длины 2; 2) угол φ, составленный иглой и параллельными прямыми, будет выбираться случайно от 0 до π.

Решение. 1) Пусть $l<1$. Тогда ($a=1$)



множество всех исходов будет прямоугольник $G=\{(x;\varphi):0<x<1,0<\varphi<\pi\}$, множество благоприятствующих исходов есть заштрихованная область. Имеем: $m(G)=\pi$,

$$m(g)=\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\gamma=-l\cos\varphi\Big|_0^{\pi}=2l, \text{ поэтому вероятность равна } p=\frac{2l}{\pi}.$$

2) Пусть $l>1$ и жирна горизонтальная линия проведена на уровне 1. Тогда, рассматривая φ от 0 до $\pi/2$, найдем, что $m(G)=\pi$, а $m(g)=2m(g_1)+2m(g_2)$. Здесь $\varphi_0=\arcsin\left(\frac{1}{l}\right)$. Теперь

$$m(g_1)=\int_0^{\varphi_0} l\sin\varphi d\varphi=-l\arcsin\left(\frac{1}{l}\right)\Bigg|_0^{\varphi_0}=l-\sqrt{l^2-1},\ m(g_2)=\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\cdot 1=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{l}\right)=\arccos\left(\frac{1}{l}\right).$$

Значит, вероятность того, что игла хотя бы один раз пересечет прямую равна

$$p=\frac{2}{\pi}\left(l-\sqrt{l^2-1}+\arccos\left(\frac{1}{l}\right)\right).$$

3) Пусть $1<l<2$. Тогда вероятность того, что игла пересечет две прямые, равна

$$p_2=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{l}\right),$$

вероятность того, что игла пересечет только одну прямую, равна

$$p_1 = \frac{2}{\pi}(l - \sqrt{l^2 - 1}),$$

а вероятность, что игла не пересечет ни одной прямой, равна

$$p_0 = 1 - p_1 - p_2.$$

В примере 4 при $l = 1$ показано, что вероятность пересечения прямой равна $p = \frac{2}{\pi}$. Повторяя рассуждения [25], с.83-84, найдем данную константу $2/\pi$ следующим образом.

Бросив иглу N раз и подсчитав число пересечений M, находим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M}{N} = \frac{2}{\pi}$. Объяснение этого состоит в следующем. При $N \to \infty$ число пересечений $M(N) \approx cN$ с постоянной c, означающей вероятность попадания на линию при одном бросании. Заменим иглу длины 1 вдвое более длинной иглой. Тогда число пересечений в среднем также увеличится двое. Действительно, удлиняющая половина иглы тоже имеет длину 1, и она тоже падает случайно. Поэтому она добавит столько же пересечений, сколько доставляла исходная игла длины 1. Нет необходимости, чтобы игла длины 2 была прямой, её можно изогнуть в середине пополам под углом 90°, или под каким-либо другим углом − обе половины дадут в среднем прежнее число пересечений. Отсюда вытекает, что, бросая любую плоскую «кривую иглу» длины l, мы получим при $N \to \infty$ асимптотически cNl точек пересечения. Будем в частности брать окружность диаметра 1. Длина этой окружности равна π. Асимптотически она доставит $cN\pi$ точек пересечения. Но такая окружность при любом бросании имеет две точки пересечения, поэтому $cN\pi = 2N$, т.е. $c = 2/\pi$.

Пример 5. Пусть a, b, c выбираются случайно и независимо из интервала $(0,1)$. Какова вероятность того, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни?

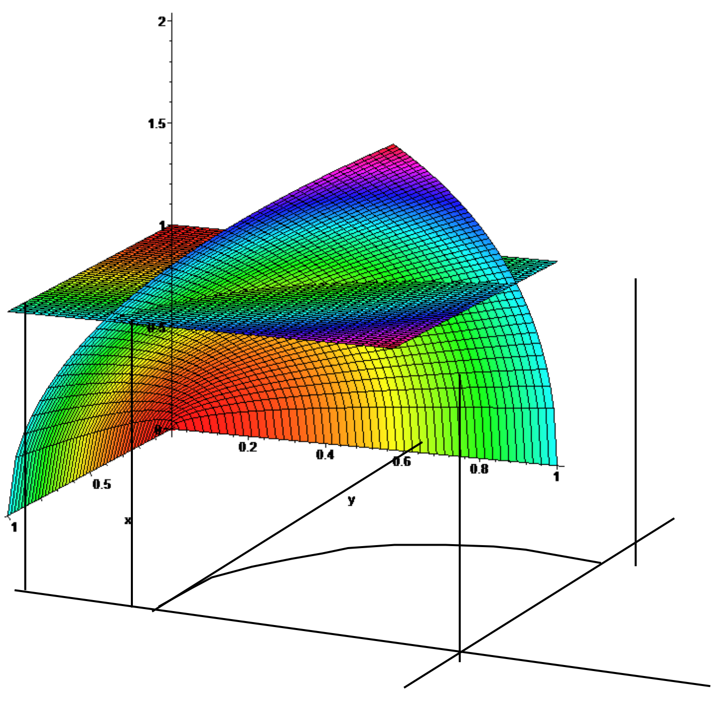


Рис. А. Множества в трехмерном пространстве.

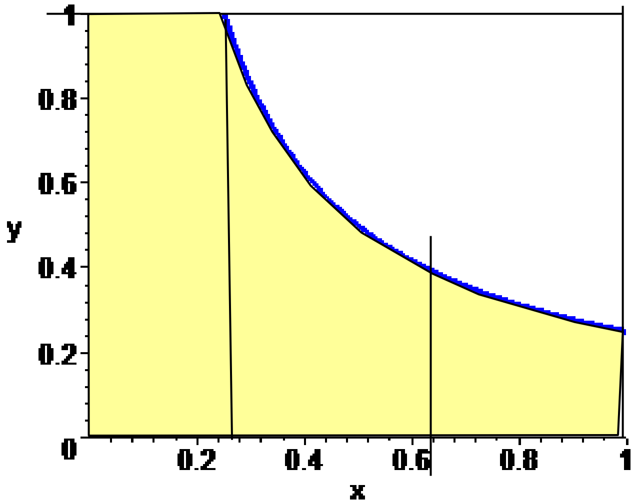


Рис. Б. Множества в двухмерном пространстве.

Решение. Иными словами, речь идет о нахождении вероятности события $(b^2 \ge 4ac)$, равносильное событию $b \ge 2\sqrt{ac}$. Если находить вероятность этого события, то нам надо найти объем множества $g = (b^2 \ge 4ac) \bigcap (0,1)^3$. Далее, если $4ac > 1$, то вероятность искомого события равна 0 (см. рис.), поэтому мы будем рассматривать случай, когда $4ac \le 1$. В этом случае единичный квадрат разбивается на две части: 1) $S_1 = (0 \le x \le 1/4, 0 \le y \le 1)$ и
2) $S_2 = (1/4 < x \le 1, 0 \le y \le 1/(4x))$. Тогда

$$V_1 = \int_0^{1/4} dx \int_0^1 (1 - 2\sqrt{xy})\, dy = \int_0^{1/4} \frac{1}{12x} dx = \frac{\ln 4}{12}, \quad V_2 = \int_0^{1/4} dx \int_0^{1/(4x)} (1 - 2\sqrt{xy})\, dy = \int_0^{1/4} (1 - \frac{4}{3} x^{1/2})\, dx = \frac{5}{36},$$

поскольку $P(b \ge 2\sqrt{xy}) = 1 - 2\sqrt{xy}$ при $2\sqrt{xy} < 1$. Таким образом, $p = \dfrac{5 + \ln 64}{36} \approx 0.2544$.

2. Распределение расстояния в круге.

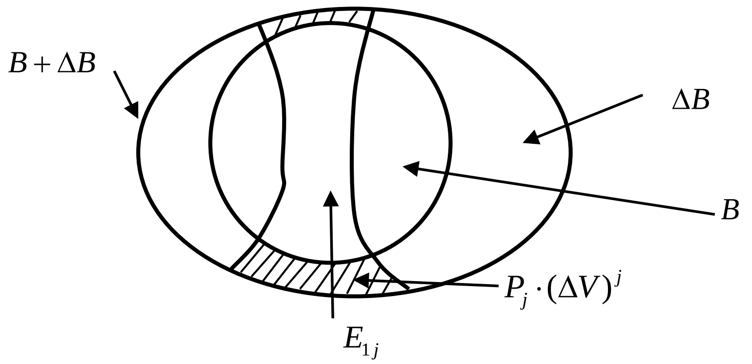
Начнем с теоремы Крофтона, приводящей к дифференциальному уравнению для определения вероятностей, когда рассматриваемых точек фиксированное число. Пусть N точек независимо распределены в области D n-мерного пространства. Мера всего $Nn-$мерного выборочного пространства для совместного распределения равна $[m(D)]^N$. Предположим, что мы хотим вычислить вероятность того, что фигура F, образованная N точками, обладает определенными свойствами, задаваемыми так, что они зависят только от взаимного расположения точек, но не от области D или положения F относительно D. Тогда вероятность того, что фигура F удовлетворяет условию, равна $P = \dfrac{m^*(E)}{[m(D)]^N}$, где $m^*(E)$ есть мера Лебега в $Nn-$мерном выборочном пространстве, а E есть множество точек этого пространства, в которых фигура F обладает требуемым свойством.

Положим $V = m(D)$ и пусть D_1- другая область, содержащая D, для которой $m(D_1) = V + \Delta V$. Пусть соответствующее множество $Nn-$мерного пространства есть $E_1 \supset E$ и положим $m^*(E) = B, m^*(E_1) = B_1 = B + \Delta B.$ Тогда вероятность того, что F обладает требуемым свойством для случайных точек в D_1 равна

$$P_1 = P + \Delta P = \frac{B + \Delta B}{(V + \Delta V)^N}. \qquad (1)$$

Рассмотрим множество E_1. Оно может быть разделено на $N+1$ множеств E_{1j} $(j = 0,1,\ldots,N)$, где E_{1j} есть подмножество E_1, для которого j точек лежат в $D_1 - D$, а $N - j$

точек – в D. Пусть $P_j = P(E_{1j})$– вероятность того, что фигура F, содержащая j точек из $D_1 - D$ и $N-j$ точек – из D, обладает требуемым свойством (т.е. соответствующая ей в $\{D_1\}^N$ точка принадлежит E_{1j}).



Тогда

$$B_1 = B + \Delta B = B + \sum_{j=1}^{N} C_N^j P_j V^{N-j} \cdot (\Delta V)^j \approx P \cdot V^N + N \cdot V^{N-1} \cdot P_1 \cdot \Delta V.$$

Из (1) заключаем, что $(P+\Delta P)(V+\Delta V)^N \approx PV^N + N \cdot V^{N-1} \cdot P_1 \cdot \Delta V.$

Так как

$$P(V+\Delta V)^N = PV^N + N \cdot \Delta V \cdot V^{N-1} \cdot P + \Delta P \cdot V^N + O(\Delta V \cdot \Delta P) \approx PV^N + N \cdot V^{N-1} \cdot P_1 \cdot \Delta V,$$

откуда $\Delta P \cdot V^N \approx N \cdot V^{N-1} \cdot \Delta V \cdot (P_1 - P)$

Пусть теперь $\Delta V \to 0$. Из предыдущего получаем:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{N(P_1 - P)}{V}. \qquad (2)$$

Это и есть формула Крофтона.

Точно так же, если μ есть среднее значение числовой функции Y фигуры F, то

$$\frac{d\mu}{dV} = \frac{N(\mu_1 - \mu)}{V}. \qquad (3)$$

Пример 6. На отрезке AB длины a наудачу бросаются две точки M и K. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет меньше u?

Решение. Поставим начало координат в точку A и пусть x и y – координаты точек M и K соответственно. Условию задачи соответствуют те точки, для которых $|x-y|<u$, т.е. каждому элементарному исходу можно поставить во взаимно-однозначное соответствие точку (x,y) из квадрата $A=[0,a]\times[0,a]$ на плоскости $x0y$. Тогда мера множества A будет равна $m(A)=a^2$, а мера множества $E_u = \{(x,y): |x-y|<u\}$ будет равна $m(E_u) = a^2 - (a-u)^2 = 2au - u^2$ и по определению геометрической вероятности $\mathbf{P}(|X-Y|<u) = \frac{u(2a-u)}{a^2}$.

Используем теперь теорему Крофтона. Обозначим через $F(u,a)$ вероятность события $(X<u)$, где X – это длина отрезка MK. Вероятность попасть в интервал $(u, u+du)$ равна $\frac{du}{a}$, поэтому интегрируя, получаем, что $F_1(u,a) = \frac{u}{a}$. Допуская, что $F(u,a)$ имеет производную по a получаем:

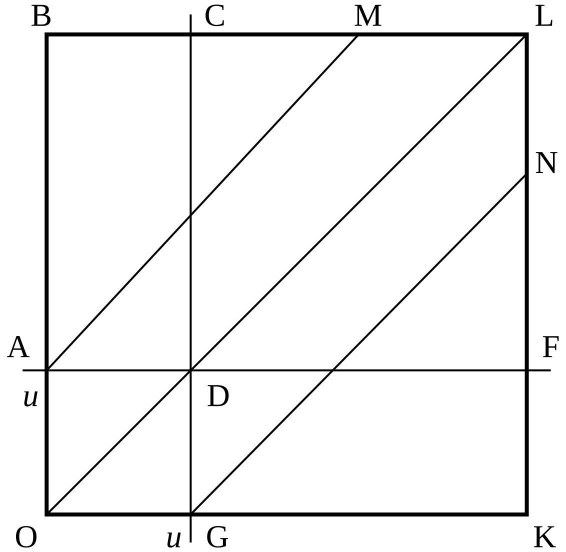
$$\frac{dF(u,a)}{da} = \frac{2(F_1(u,a) - F(u,a))}{a}$$ (поскольку размерность пространства равна 2),

или

$$\frac{dF(u,a)}{da} + \frac{2F(u,a)}{a} = \frac{2u}{a^2} \Rightarrow \frac{d(a^2 F(u,a))}{da} = 2u \Rightarrow a^2 F(u,a) = 2au + c.$$

При $a=u$ должны быть $F(u,u)=1$, поэтому $c=-u^2$, что дает уже известный результат $F(u,a)=(2au-u^2)/a^2$.

Вернемся к первому решению задачи и рассмотрим пару (ξ_1,ξ_2) где ξ_1 – случайный момент прихода первого, ξ_2 – случайный момент прихода второго, и пусть $a=1$. Тогда искомая вероятность есть $\mathbf{P}(|\xi_1-\xi_2|<u)=u(2-u)=1-(1-u)^2, 0\le u\le 1$. Рассмотрим теперь случайную величину $\chi=\min(\xi_1,\xi_2)$. В этом случае $\mathbf{P}(\chi<u)=1-(1-u)^2, 0\le u\le 1$. Можно ли как-то объяснить совпадение результатов, т.е. можно ли заключить, что $(|\xi_1-\xi_2|<u)=(\chi<u)$? По-видимому, это совпадение числовых значений, но не событий. С другой стороны, в теории вероятностей для подсчета числа случаев довольно часто используют прием, когда рассматривают другую задачу и устанавливают взаимно однозначное соответствие. Однако здесь речь идет о бесконечных множествах и такое соответствие может оказаться некорректным. Тем не менее, разобьем множество $(\chi<u)$ в случае $\xi_1<\xi_2$ (здесь $\chi=\xi_1$) на две части: $(\xi_1<u,\xi_2<u)$ и $(\xi_1<u,\xi_2\ge u)$. Ясно, что в первом случае $\xi_2-\xi_1<u$, но во втором случае мы можем только лишь заключить, что $\xi_1<\xi_2$.Сделаем следующее преобразование: $\xi_2'=\xi_2, \xi_1'=\xi_2-u+\xi_1,$ которое переводит прямоугольник $ABCD$ в параллелограмм $AMLD$ (см. рисунок). Обратное преобразование переводит $AMLD$ в $ABCD$.



Но $S_{ABCD}+S_{AOD}=u(1-u)+\frac{1}{2}u^2=\frac{u(2-u)}{2}$. Аналогично рассматривается случай $\xi_1>\xi_2$.

Таким образом, получаем тот же результат. Важно, что при таком преобразовании площади не меняются (согласно принципу Кавальери).

Замечание. Эту же задачу о встрече можно решить и не прибегая к геометрической вероятности. Более того, ее можно решить для случая встречи n лиц, если считать, что встреча произойдет тогда и только тогда, когда разность времен между приходом первого по времени и последнего будет не больше a $(0<a<1)$, т.е. если каждый ждет остальных не больше времени a.

Разобьем исходное событие на два: B_1 – ***все*** пришли в промежуток времени от $1-a$ до 1 и $B_2=\overline{B}_1$. Тогда $\mathbf{P}(B_1)=a^n$. В противном случае первый пришедший попал в промежуток от 0 до $1-a$, т.е. он пришел в момент $0<x<1-a$. Так как это может быть любой из n участников, то мы умножим на n и пусть это будет первый. Тогда остальные должны придти в онтервале $(x,x+a)$ длины a и вероятность этого равна a^{n-1}, т.е. $\mathbf{P}(B_2)=n(1-a)a^{n-1}$. Складывая эти вероятности, получаем ответ: $a^n + n(1-a)a^{n-1}$. Для $n=2$ получаем прежний ответ $a(2-a)$.

Пример 7. Найдем среднее значение расстояния между двумя точками P и K, каждая из которых распределена равномерно внутри круга радиуса R.

Пусть $A-$ точка на границе круга и AOC есть диаметр, равный $2R$. Точки, удаленные на расстояние x от A, занимают внутри элементарной дуги элемент площади, равный $2x\theta dx$, где $\theta = \arccos(x/2R)$ и поэтому среднее удаление от A равно

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2R} 2x^2 \arccos\frac{x}{2R}dx = \frac{16R}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{32R}{9\pi}.$$

Пусть $M(R)$ есть среднее расстояние. Используя теорему Крофтона о среднем значении, имеем

$$\frac{dM(R)}{dR} = 2\left(\frac{32R}{9\pi} - M(R)\right)\frac{2}{R}.$$

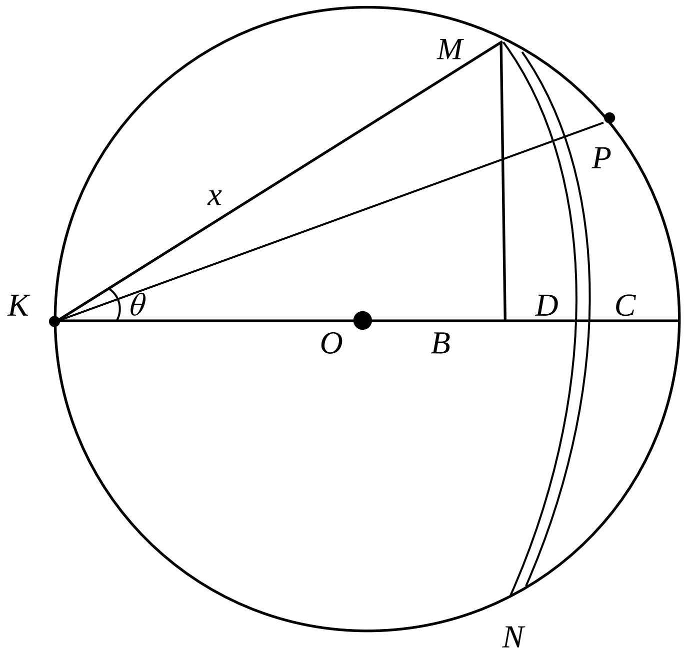
Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, получаем

$$M(R) = \frac{128}{45}R + \frac{C}{R^4}.$$

Так как $M(0)=0,$ то $C=0$, и, следовательно, $M(R) = \frac{128}{45}R.$

Пример 8. Найдем распределение расстояния между двумя точками P и K, каждая из которых распределена равномерно внутри круга радиуса R.

Пусть $p(x,R)\,dx = pdx$ есть вероятность того, что K лежит в интервале $(x, x+dx),$ а P находится на фиксированном расстоянии x. Так как полоса узкая, то можно считать, что K находится на границе. Поменяем эти точки местами, от этого ничего не изменится. Так как длина дуги $\smile MDN$ равна $2\theta x$, то искомая



вероятность равна $\frac{2\theta x}{\pi R^2}dx,$ т.е. плотность $p_1 = \frac{2\theta x}{\pi R^2}$, где $\theta = \arccos(x/2R).$ Кроме того, так как $\cos\theta = \frac{x}{2R},$ то для фиксированного $x,$ $\sin\theta\, d\theta = \frac{x\,dR}{2R^2} = \cos\theta\frac{dR}{R},$ откуда $\mathrm{tg}\theta\, d\theta = \frac{dR}{R}$. Из формулы Крофтона получаем

$dp = 2\cdot\dfrac{(p_1 - p)}{V}dV$. Так как $V=\pi R^2 \ \Rightarrow\ dV = 2\pi R\,dR \ \Rightarrow\ \dfrac{dV}{V} = 2\dfrac{dR}{R}$.

Значит, $\dfrac{dp}{d\theta} + 4p\,\mathrm{tg}\,\theta = 4p_1 = \dfrac{8\theta x}{\pi R^2}\mathrm{tg}\,\theta.$ Но $R = \dfrac{x}{2\cos\theta} \ \Rightarrow\ R^2 = \dfrac{x^2}{4\cos^2\theta}$.

Отсюда, возвращаясь к x, получим: $\dfrac{dp}{d\theta} + 4p\cdot\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{32}{\pi x}\sin\theta\cos\theta.$

Имеем дифференциальное уравнение относительно p с начальным условием: при $\theta=0$ функция $p=0$.

Решим сначала однородное уравнение

$$\frac{dp}{d\theta} = 4p\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ \Leftrightarrow\ \frac{dp}{p} = 4\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta \ \Leftrightarrow\ \ln p = 4\cdot\ln(\cos\theta) + \ln C \ \Rightarrow\ p = C\cdot(\cos\theta)^4 .$$

Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянной C, считая теперь, что $C=C(\theta)$. Подставляя в неоднородное уравнение полученное решение, получим

$$\frac{dC(\theta)}{d\theta}\cdot\cos^4\theta = \frac{32}{\pi x}\cdot\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta \ \Rightarrow\ \frac{dC(\theta)}{d\theta} = \frac{32\cdot\theta\cdot\sin\theta}{\pi x\cdot\cos^3\theta},$$

отсюда

$$C(\theta) = \frac{16}{\pi x}\left(\frac{\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + C_1 .$$

В таком случае

$$p = \cos^4\theta\cdot\left(\frac{16}{\pi x}\left(\frac{\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + C_1\right) = \frac{16}{\pi x}(\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cdot\cos^3\theta) + C_1\cdot\cos^4\theta.$$

Учитывая начальное условие, получим $C_1 = 0$, т.е.

$$p = \frac{16}{\pi x}(\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cdot\cos^3\theta) = \frac{8}{\pi R}(\theta\cos\theta - \sin\theta\cdot\cos^2\theta). \qquad (4)$$

Это мы получили плотность распределения. Чтобы получить функцию распределения надо её проинтегрировать от 0 до θ, поэтому

$$F = \int_0^\theta p\,d\theta = \frac{8}{\pi R}\left(\cos\theta + \theta\cdot\sin\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right). \qquad (5)$$

Возьмем $R=1$, а $\theta = \arccos\dfrac{x}{2}$. Вместо константы $8/(\pi R)$ возьмем подходящую, чтобы не было дробей. Тогда выражая плотность (1) через x, получим

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\left(4x\cdot\arccos\frac{x}{2} - x^2\sqrt{4-x^2}\right),\ \ 0\le x\le 2.$$

Проинтегрировав плотность $p(x)$, получим функцию распределения :

Интеграл равен

$$F(x) = 2x^2\cdot\arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x(2+x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Учитывая, что $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ и подставляя исходные константы получим функцию распределения

$$F(x) = x^2 + \frac{2}{\pi}\left((1-x^2)\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right),\ \ 0\le x\le 2. \qquad (6)$$

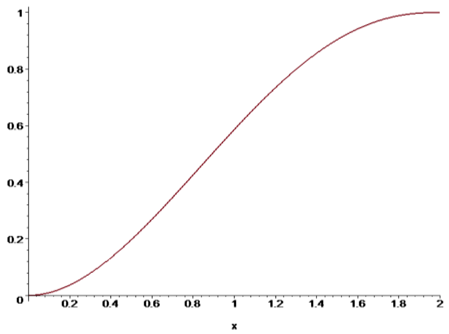


Рис.1. График функции распределения $F(x)$.

Плотность этого распределения имеет следующий график

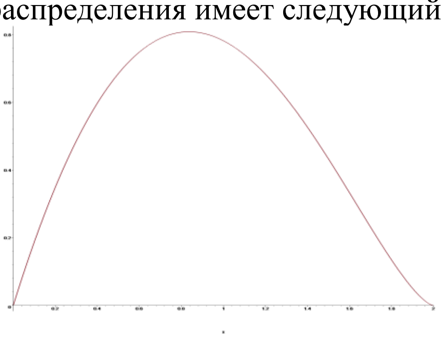


Рис.2. График плотности распределения.

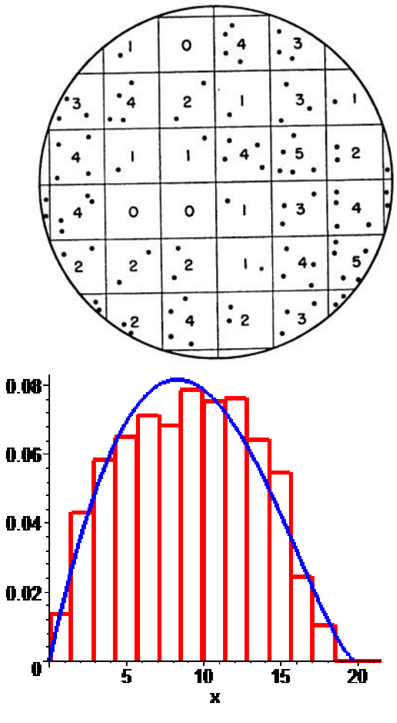


Рис.3. Бактерии в чашке Петри по Ю. Нейману ([29], р.28) и гистограмма межточечных расстояний (чашка петри увеличена)

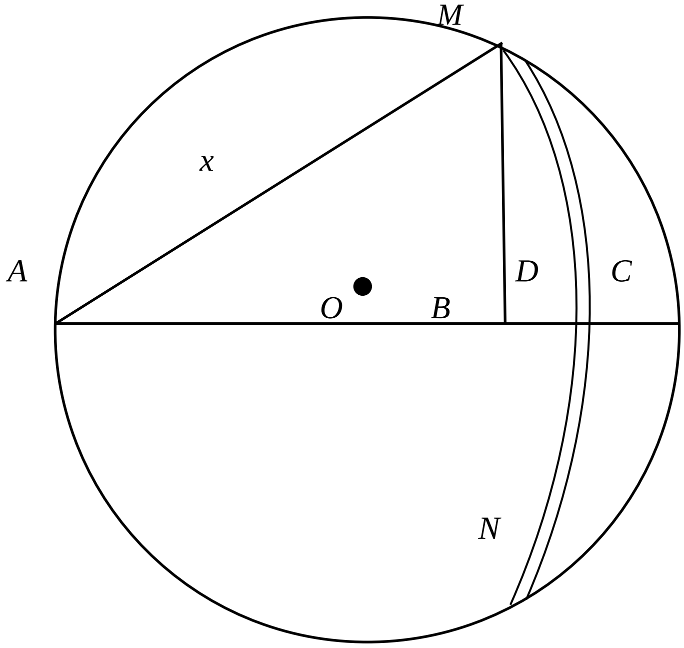
На верхнем рис.3 изображены $n = 87$ бактерий в чашке Петри. Чашка разделена на квадраты и подсчитано число бактерий в квадратах. Если распределение равномерное, то это число подчиняется распределению Пуассона и критерий хи-квадрат не отвергает гипотезу о распределении Пуассона (значение статистики равна $X^2 = 4.35 < 9.49 = \chi^2_{0.95}(4)$). В нижней части приведена гистограмма межточечного расстояния в круге. Однако проверка с помощью критерия хи-квадрат отклоняет распределение (6) ($X^2 = 66.635 > 21.026 = \chi^2_{0.95}(12) -$ если бы распределение было равномерным, то межточечное расстояние имело бы вид (6)).

Отклонения в гистограмме от единицы имеют содержательный смысл. Небольшая величина отклонений для расстояний $0 < r < 4$ отвечает расстоянию, которое было бы при равномерном расстоянии. При $4 < r < 10$ их меньше, чем если бы распределение было равномерным, что отвечает эффективному расстоянию, расстояние $10 < r < 16$ указывает на аномальную концентрацию бактерий у стенки чашки: бактерии стремятся к экспансии и не имея возможности преодолеть барьер, движутся вдоль него.

Для примера Феллера (см. [3] , с.180) на этот недостаток указывал Шурыгин А.М. (см. [4], с.192-193).

Пример 9. Найдем распределение расстояния между двумя точками P и K, каждая из которых распределена равномерно внутри сферы радиуса R.

Пусть $A-$ точка на сфере и $AC = 2R,\ AB = h_1,\ BD = h_2$ (см. рис.). Объем шарового сегмента с высотой AB равен $V_1 = \pi h_1^2(3R - h_1)/3,$ а объем шарового сегмента



с высотой BD равен $V_2 = \pi h_2^2(3 \cdot AE - h_2)/3.$ Если $V = 4\pi R^3/3 -$ объем шара, то вероятность P_1 данного в задаче события, когда одна точка находится на границе области, равна $P_1 = (V_1 + V_2)/V.$ Обозначим $AB = x$. Тогда $h_1 = AB = x\cos\theta = \dfrac{x^2}{2R},\ h_2 = BD = x - AB.$

Подставляя указанные значения в формулу для объемов, получим $P_1 = \dfrac{x^3}{2R^3} - \dfrac{3x^4}{16R^4}.$

Так как объем шара равен $V = 4\pi R^3/3,$ то $dV/V = 3dR/R.$ В таком случае получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{dP}{dR} = \dfrac{6(P_1 - P)}{R},$

его решением с начальным условием $P(x/2) = 1$ будет функция распределения (по $x,\ 0 \le x \le 2R$) $P(x,R) = \dfrac{x^3}{R^3} - \dfrac{9x^4}{16R^4} + \dfrac{x^6}{32R^6}.$

При $R = \dfrac{1}{2}$ имеем следующую функцию распределению ($0 \le x \le 1$)

$F_0(x) = 8x^3 - 9x^4 + 2x^6$ с плотностью распределения $f_0(x) = 12x^2(1 - x^2)(2 + x).$

Заметим также, что в n-мерном шаре плотность распределения удовлетворяет уравнению

$$(2n-1)\, f_n(x) - xf'(x) = \frac{2n(n-1)\, x^{n-1}}{B((n+1)/2,(n+1)/2)} \int_x^1 (1-z^2)^{(n-3)/2}\, dz,$$

откуда $f_n(x) = \dfrac{2n\, x^{n-1}}{B((n+1)/2,(n+1)/2)} \displaystyle\int_x^1 (1-z^2)^{(n-1)/2}\, dz + cx^{2n-1}$,

и $$\frac{f_n(x)}{n} = 4x^2 \frac{f_{n-2}(x)}{n-2} - \frac{2\Gamma(n)}{\left(\Gamma((n+1)/2)\right)^2} x^n (1-x^2)^{(n-1)/2}.$$

Здесь $B(\alpha,\delta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}$ − бета-функция, а $\Gamma(\alpha)$ − гамма-функция.

Пример 10. Человек заблудился в лесу, который представляет собой бесконечно длинную полосу шириной 1. Как ему двигаться, чтобы заведомо выйти из леса, т.е. речь идет о кривой (наименьшей длины), не умещающейся в полосе. Один из путей, выводящий из леса состоит в том, что ему надо двигаться по сторонам равностороннего треугольника длиной по $2\sqrt{3}/3$. Это не самая наилучшая кривая, но она близка к оптимальной кривой, и он заведомо выйдет из леса пройдя путь длиной $4\sqrt{3}/3 \approx 2.31$. Какова средняя длина пройденного при этом пути?

Решение. Пусть эта кривая есть треугольник ABC. Будем считать, что расстояние от нижней прямой x до вершины A случайно, $0 \le x \le 1$, и угол φ, измеряемый по часовой стрелки, также случаен, $0 \le \varphi \le \pi$.

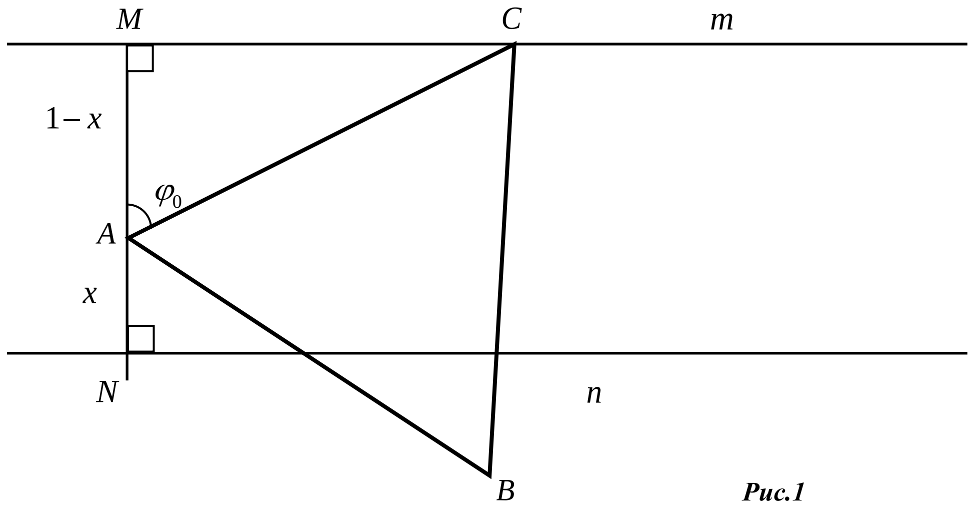


Рис.1

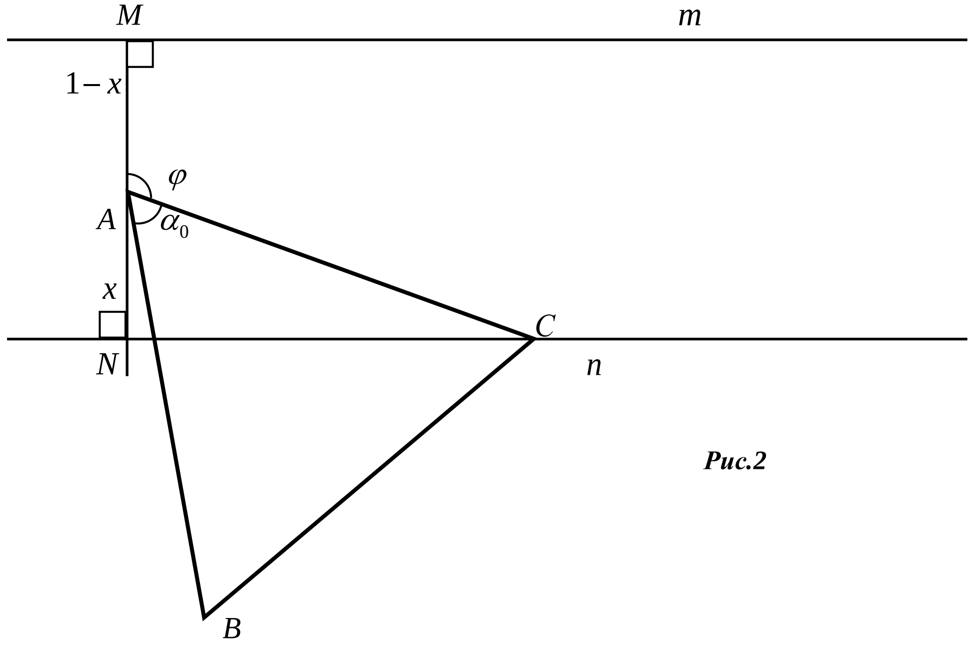


Рис.2

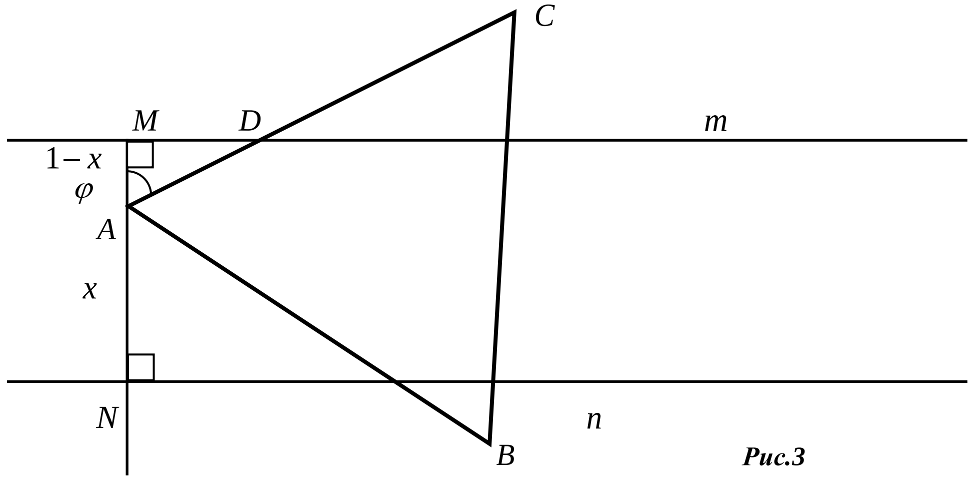


Рис.3

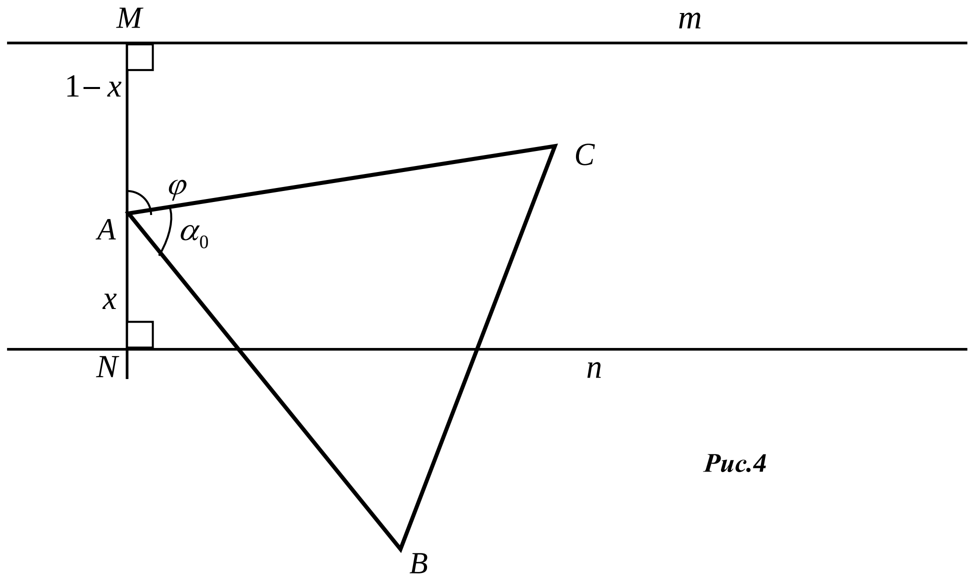


Рис.4

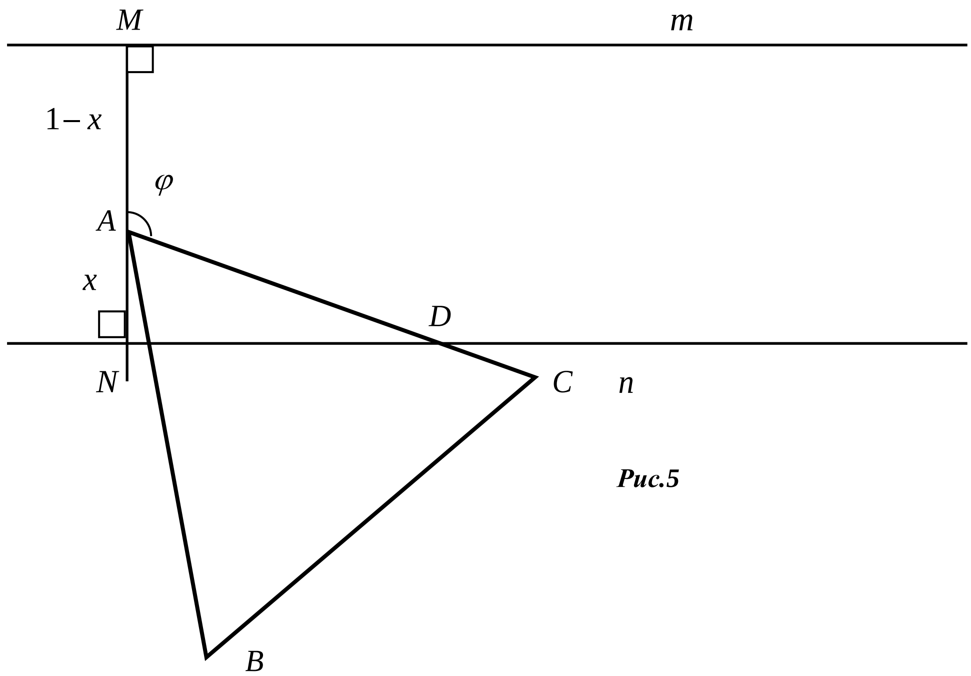


Рис.5

Пусть вершина C треугольника ABC лежит на прямой m и $\angle MAC = \varphi_0$ (рис.1). Тогда $\varphi_0 = \arccos\dfrac{(1-x)\sqrt{3}}{2}$. Если C лежит на прямой n, то $\alpha_0 = \arccos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти среднюю длину пути выхода из леса, рассмотрим три случая.

1) $0 \le \varphi \le \varphi_0$. Пройденный путь $L_1(x,\varphi) = AD = \dfrac{1-x}{\cos\varphi}$.

2) $\varphi_0 \le \varphi \le \pi - \alpha_0$. Тогда из элементарной геометрии получаем

$$L_2(x,\varphi) = AB + CD = \sqrt{3} + \frac{x}{\sin(\varphi + \pi/6)} + \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

3) $\pi - \alpha_0 \le \varphi \le \pi$. Тогда пройденный путь равен

$$L_3(x,\varphi) = AD = \frac{x}{\cos(\angle NAD)} = -\frac{x}{\cos\varphi}.$$

Тогда средняя длина пути будет равна

$$L_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\varphi_0} L_1(x,\varphi)\,d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi-\alpha_0} L_2(x,\varphi)\,d\varphi + \int_{\pi-\alpha_0}^{\pi} L_3(x,\varphi)\,d\varphi\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1\right) \approx 0.91,$$

что примерно в 2,5 раза меньше наибольшей длины.

3. Распределение расстояния в прямоугольнике

Имеем прямоугольник со сторонами $a \le b$ и пусть $P = (x_1, x_2), Q = (y_1, y_2), 0 \le x_1, y_1 \le a, 0 \le x_2, y_2 \le b -$ две точки этого прямоугольника. Рассмотрим независимые и равномерно распределенные случайные величины: $\xi_1, \eta_1 \in \mathrm{R}(0,a)$ и $\xi_2, \eta_2 \in \mathrm{R}(0,b)$. Пусть

$$u = (\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 = a^2\left(\frac{\xi_1}{a} - \frac{\eta_1}{a}\right)^2 + b^2\left(\frac{\xi_2}{b} - \frac{\eta_2}{b}\right)^2 = a^2(u_1 - u_2)^2 + b^2(u_3 - u_4)^2,$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 – независимые и равномерно распределенные на интервале $(0,1)$ случайные величины. Обозначим через $f_1(v_1)$ плотность распределения величины $v_1 = a(u_1 - u_2)$. Тогда

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt = \mathbf{P}(v_1 < x) = \mathbf{P}(a(u_1 - u_2) < x) = \mathbf{P}\left(u_1 - u_2 < \frac{x}{a}\right) =$$

$$= \int \mathbf{P}\left(u_1 < \frac{x}{a} + u \mid u_2 = u\right)du = \int_0^1 H\left(\frac{x}{a} + u\right)h(u)\,du,$$

где $h(u)-$ плотность распределения равномерного на интервале $(0,1)$ распределения, а $H(u)-$ ее функция распределения. Отсюда

$$f_1(v_1) = \int_0^1 h\left(\frac{v_1}{a} + u\right)h(u)\,du = \frac{1}{a^2}\int_{\max(0,-v_1/a)}^{\min(1,1-v_1/a)} du = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a + v_1), -a \le v_1 < 0, \\ \frac{1}{a^2}(a - v_1), 0 \le v_1 \le a, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения величины $w_1 = v_1^2$, обозначаемая как $g_1(w_1)$, равна

$$g_1(w_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{w_1}} - 1\right), \ 0 \le w_1 \le a^2, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Точно так же, плотность распределения величины $w_2 = b^2(u_3 - u_4)^2$ равна

$$g_2(w_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{b}{\sqrt{w_2}}-1\right),\ 0\le w_2\le b^2,\\ 0,\text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть теперь $u=w_1+w_2$. Если через $g(u)$ обозначить плотность распределения величины u, то $g(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(v)\,g_2(u-v)\,du=\int\limits_{\max(0,u-b^2)}^{\min(a^2,u)} g_1(v)\,g_2(u-v)\,du=$

$$=\begin{cases}\int\limits_0^u g_1(v)\,g_2(u-v)\,du,\ 0\le u\le a^2,\\ \int\limits_0^{a^2} g_1(v)\,g_2(u-v)\,du,\ a^2\le u\le b^2,\\ \int\limits_{u-b^2}^{a^2} g_1(v)\,g_2(u-v)\,du,\ b^2\le u\le a^2+b^2,\\ 0,\text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Теорема. *Пусть точки P и Q независимо и равномерно распределены в прямоугольнике со сторонами длиной* a *и* $b(a\le b)$. *Пусть x есть расстояние между P и Q и* $u=x^2$. *Тогда плотность распределения величины* u *дается формулой*

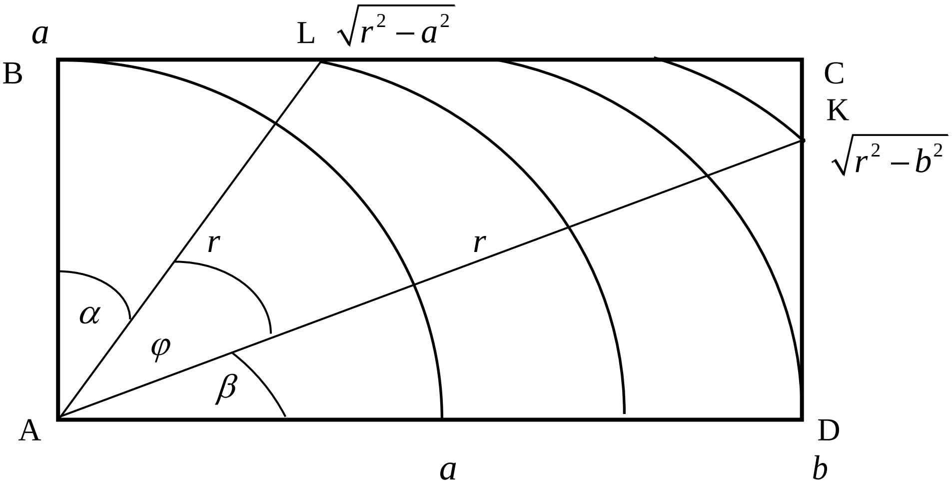
$$g(u)=\frac{1}{a^2b^2}\begin{cases}\pi ab-2(a+b)\sqrt{u}+u,\quad 0\le u\le a^2,\\ 2ab\arcsin\left(\dfrac{a}{\sqrt{u}}\right)-a^2-2b\sqrt{u}+2b\sqrt{u-a^2},\ a^2\le u\le b^2,\\ 2ab\left(\arcsin\left(\dfrac{a}{\sqrt{u}}\right)-\arcsin\left(\sqrt{1-\dfrac{b^2}{u}}\right)\right)-u-(a^2+b^2)+2a\sqrt{u-b^2}+2b\sqrt{u-a^2},\\ \qquad b^2\le u\le a^2+b^2,\\ 0,\text{ иначе,}\end{cases}$$

а плотность распределения величины $x=\sqrt{u}$ *дается формулой* $f(x)=\dfrac{4x}{a^2b^2}\psi(x)$, *где*

$$\psi(x)=\begin{cases}\pi ab/2-(a+b)x+x^2/2,\quad 0\le x\le a,\\ ab\arcsin\left(\dfrac{a}{x}\right)-\dfrac{a^2}{2}-bx+b\sqrt{x^2-a^2},\ a\le u\le b,\\ ab\left(\arcsin\left(\dfrac{a}{x}\right)-\arccos\left(\dfrac{b}{x}\right)\right)-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)+a\sqrt{x^2-b^2}+b\sqrt{x^2-a^2},\\ \qquad b\le u\le\sqrt{a^2+b^2},\\ 0,\text{ иначе.}\end{cases}$$

В книге [4] эта функция использовалась для прогноза кемберлитовых трубок.

Найдем еще распределение расстояния в прямоугольнике, когда *одна точка закреплена в вершине прямоугольника*, именно, поместим левый нижний угол прямоугольника в начало координат. Необходимо найти вероятность $F(r)$ того, что расстояние R от случайной точки до начала координат будет меньше некоторого фиксированного значения r.



Заметим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, а $\sin\beta = \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r}$, $\cos\beta = \frac{b}{r}$. Тогда

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{ab-\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}{r^2}.$$

Теперь:

1) если $0 \le r \le a$, то $F(r) = \frac{\pi r^2}{4}$, так как это четверть площади круга радиуса r;
2) если $a < r \le b$, то $F(r)$ складывается из площади треугольника ABL и площади сектора с углом $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, но $\sin\delta = \cos\alpha = \frac{a}{r}$, значит, $\delta = \arcsin\frac{a}{r}$, поэтому

$$F(r) = \frac{1}{2}a\sqrt{r^2-a^2} + \frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{a}{r};$$

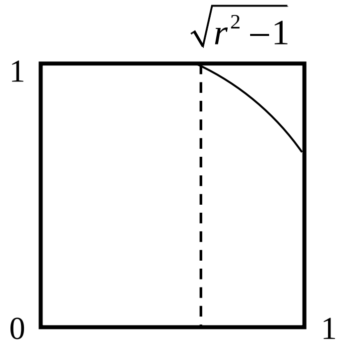
3) если $b < r \le \sqrt{a^2+b^2}$, то

$$F(r) = \frac{1}{2}a\sqrt{r^2-a^2} + \frac{1}{2}b\sqrt{r^2-b^2} + \frac{1}{2}r^2\arcsin\left(\frac{ab-\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}{r^2}\right).$$

При $a=b=1$ квадрат для $1<r\le\sqrt{2}$ имеем:

$$F(r) = \sqrt{r^2-1} + \frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{2-r^2}{r^2}.$$

Заметим, что для $1<r\le\sqrt{2}$ функцию $F(r)$ можно найти как интеграл:



$$F(r)=\sqrt{r^2-1}+\int\limits_{\sqrt{r^2-1}}^{1}\sqrt{r^2-x^2}\,dx .$$

Поскольку $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{1}{2}r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$, то используя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$F(r)=\sqrt{r^2-1}+\frac{1}{2}r^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{r}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right)\right).$$

Обозначим $\varphi_1=\arcsin\left(\frac{1}{r}\right)$, $\varphi_2=\arcsin\left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right)$. Так как

$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_2=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\cdot\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}=\frac{2-r^2}{r^2}$, то получаем

$$F(r)=\sqrt{r^2-1}+\frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{2-r^2}{r^2}.$$

При $r=1$ получаем $F(1)=\frac{\pi}{4}$, а при $r=\sqrt{2}$, $F(\sqrt{2})=1$.

4. Задачи.

1. Значения a равновозможны из интервала (0,1), а значения b равновозможны из интервала $(-1,0)$. Сколь вероятно, что прямая $y=ax+b$ на интервале (0,1) пересечет ось OX.

2. На отрезке AB длины 8 см наудачу поставлена точка M. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до середины отрезка меньше, чем расстояние от этой точки до одного из краев?

3. На окружности радиуса $R=2$ наугад взято две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает $\frac{\pi}{6}$, если это расстояние отсчитывается на окружности как наименьшая из дуг, их соединяющая?

4. На отрезке AB длины 10 см наудачу поставлены две точки M и K. Они делят отрезок на три части. Какова вероятность того, что длина каждой из частей не превосходит 5 см ?

5. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых отрезков, один из которых имеет длину от 0 до 8 см, а другой от 0 до 4 см, не превосходит 6 см?

6. На отрезке AB длиной 12 см наугад поставлены точки K и M. Найти вероятность того, что точка K будет ближе к точке M, чем к точке A.

7. На окружности радиуса R случайным образом выбраны две точки A и B. Найти вероятность того, что площадь большего из полученных секторов превышает площадь меньшего, но не более чем в 3 раза.

8. На отрезке AB длины 6 см наудачу ставится точка M. Какова вероятность того, что возможно построить треугольник, имеющий сторонами отрезки AM, BM и отрезок длины 3 см ?

9. Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками не менее 5 минут. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию один в 10 часов, а другой – в 10 часов 10 минут. Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах 10 минут, а второй – в пределах 5 минут, при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?

10. Загон представляет из себя квадрат со стороной 5 м. В выбранную наугад точку внутри загона фермер вбивает кол и привязывает к нему козу на веревке длиной 1 м. Найти вероятность того, что коза не сможет дотянуться ни до одного угла загона.
11. Через середину одной из сторон единичного квадрата проводят прямую, чей угол с этой стороной квадрата выбирают наугад. Найти вероятность того, что прямая делит квадрат на треугольник и пятиугольник, причем площадь треугольника меньше a, $0 < a < 1/4$.
12. К автобусной остановке через каждые четыре минуты приходит автобус №1 (в моменты времени 0, 4, 8, 12, ..). Интервал времени между моментами прихода автобуса №1 и ближайшего следующего автобуса №2 равновозможен в пределах от 0 до 4-х минут, а далее автобус №2 идет ровно через 6 минут. Вы приходите в случайный момент времени от 0 до 12 минут. Определить вероятность того, что первый подошедший автобус окажется автобусом №1.
13. Двое договорились встретиться между 12-00 и 13-00. Каждый из них приходит в случайный момент времени, причем первый ждет второго 20 мин, а второй уходит в 13-00, если встреча не произошла. Найти вероятность встречи.
14. Прибытие каждого из двух судов в порт равновозможно в течение данных суток. В порту имеется только один разгрузочный терминал определенного вида. Какова вероятность того, что одному из судов придется ожидать освобождения терминала, если время разгрузки первого судна составляет 3 часа, а второго – 4 часа?
15. Пароход приходит к пристани в случайный момент времени между 13.00 и 14.00. Автобус отходит от пристани в случайный момент времени между 13.24 и 13.34. Пассажиру требуется 10 минут, чтобы перейти от парохода к остановке автобуса. Найти вероятность того, что пассажир успеет на автобус.
16. На дороге которая имеет длину 66 км, на 41 км находится автомобильный сервис, а на 44 км – закусочная. Какова вероятность того, что при поломке автомобиля, сервис окажется ближе нежели закусочная?
17. Расстояние от пункта A до пункта B равно 120 км. В случайные моменты на интервале времени от 12 ч до 13 ч из пункта A в пункт B стартуют две машины – «Ауди» и «Фольксваген» со скоростями соответственно 100 км/ч и 80 км/ч. Какова вероятность того, что «Ауди» первой достигнет пункта B?
18. Автобусы №1 и №2 в начале движения выходят одновременно на маршрут, а затем следуют: №1 – ровно через 5 минут, а №2 – ровно через 7 минут. Вы приходите в случайный момент времени. Какова вероятность того, что вам придется ждать не более двух минут.
19. Точка A случайно бросается на квадрат со стороной 1. Найти вероятность следующего события: расстояние от A до ближайшей стороны квадрата не превосходит 0.3.
20. Две точки x и y случайно берутся на смежных сторонах квадрата, длина стороны которого равна10. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет меньше 4?
21. На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
22. Из отрезка [0,1] случайно выбирают одну за одной три точки. Какова вероятность того, что третья точка окажется между двумя другими?
23. На отрезке AB длины 1 случайно выбирают две точки K и L, которые разбивают этот отрезок на три части. Какова вероятность того, что длина хотя бы одного из получившихся кусков превосходит $5/12$?
25. На отрезке AB длины 1 случайно выбирают две точки K и L, которые разбивают этот отрезок на три части: AK, KL и LB. Какова вероятность того, что отрезок KL будет большей стороной тупоугольного треугольника?
Указание. Использовать условие: для каких длин отрезков треугольник будет тупоугольным.
26. Расстояние до следующей (узловой) остановки равно 1 км. Трамвай это расстояние проходит за 2 мин, а пассажир за 10 минут. Интервал движения трамвая составляет ровно 20 минут. Предыдущая остановка находится в пределах прямой видимости на расстоянии 1 км, поэтому

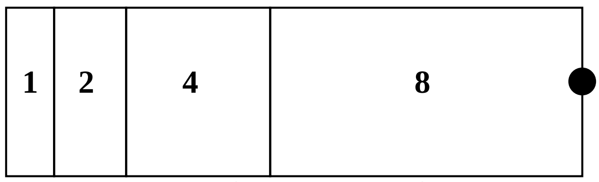
пассажиру видно, появился трамвай или нет. Пассажир приходит в случайный момент времени и если трамвая не видно, решает идти пешком до следующей остановки. Какова вероятность того, что в пути его обгонит трамвай?

27. Буратино посадил на прямоугольный лист размером 20 см на 25 см круглую кляксу радиуса 1 см. Сразу после этого он посадил еще одну такую же по размерам кляксу, которая целиком оказалась на листе. Сколь вероятно, что эти две кляксы не соприкасаются? (Считая, что лист бумаги значительно больше размеров кляксы укажите примерное значение этой вероятности).

28. Автобус ходит каждые 10 минут и от вашей остановки до конечной идет ровно 8 минут. Вы планируете прибыть на конечную остановку к 15:00. Какова вероятность того, что вы прибудете на конечную остановку вовремя, если к своей остановке вы подошли в 14:48?

29. В прямоугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 60^o$, случайным образом выбрана точка. Какова вероятность того, что она расположена ближе к вершине A, чем к вершинам B и C ?

30. Вы катите шайбу от меньшей стороны прямоугольника, на котором написано число очков пропорционально длине



со случайной скоростью от 5 $м/сек$ до 15 $м/сек$ перпендикулярно меньшей длине. Так как стол шероховатый, то шайба замедляется со скоростью 5 $м/сек^2$. Какова вероятность того, что шайба не упадет со стола, если шайба имеет относительно маленькие размеры? *Указание*. Из физики известно, что если $u-$конечная скорость, $v-$начальная скорость, $a-$ ускорение, а s пройденное расстояние, то $v^2 = u^2 + 2as$.

31. Электрон вылетает из случайной точки нити накала и движется по перпендикуляру к нити. С какой вероятностью он свободно пройдет через сетку, окружающую нить и имеющую вид винтовой линии радиуса $R = 3$, толщиной $d = 2$ и шага $h = 8$. Ответ: $p = 1 - \frac{d}{h} = 0,75$.

32. В квадратном уравнении $ax^2 + 2bx + c = 0$ коэффициенты b и c берутся случайно из интервала $(0,1)$, а коэффициент a случайно выбирается из интервала $(0.5,2)$. Найти вероятность того, что уравнение имеет действительные корни.

33. В счетчик Гейгера в течение одной секунды в случайный момент попало 2 частицы. Если разность между моментами их попадания меньше, чем 0,1, то они фиксируются как одна. Найти вероятность того, что они будут зафиксированы как две частицы.

34. Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пресекая пролив за 40 минут. Определить вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 10 минут до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 10 минут после пересечения судном курса лодки. Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу лодки.

35. Через реку шириной 100 м перекинут мост. В некоторый момент, когда на мосту находятся два человека, мост рушится, и оба они падают в реку. Первый умеет плавать и спасётся. Второй плавать не умеет, и спасётся, только если упадёт не далее 10-ти метров от берега или не далее, чем в 10-ти метрах от первого. Какова вероятность, что второй человек спасётся?

36. Партия из 100 изделий случайно распределена для проверки между тремя контролерами. Найти вероятность того, что каждому контролеру досталось для проверки не менее 25 изделий.

37. Согласно правилам дорожного движения, пешеход может перейти улицу в неустановленном месте, если в пределах видимости нет пешеходных переходов. В городе Миргороде расстояние между пешеходными переходами на улице Фруктовой равно 1 км. Пешеход перехо-

дит улицу Фруктовую где-то между двумя переходами. Он может видеть знак перехода не дальше чем за 100 м от себя. Найдите вероятность того, что пешеход не нарушает правила.
38. Стержень длины a наудачу разломан на 3 части. Какова вероятность того, что каждая часть окажется больше $a/4$.
39. Поезд проходит мимо платформы за полминуты. В случайный момент времени Иван Иванович выглянул из своего купе в окно и смотрел в окно ровно 10 секунд, а затем отвернулся. Какова вероятность того, что он видел Ивана Никифоровича, который стоял посередине платформы.
40. Пете надо принести воды объемом 20 л, его ведро вмещает 10 л воды. Зачерпнув из колодца полное ведро, он по дороге домой разливает случайную долю воды. Какова вероятность того, что ему достаточно сходить за водой еще два раза?
41. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 80 км в 12-00 стартует 1-й автомобиль, который проходит трассу со скорость 80 км/ч. Два других автомобиля опаздывают к старту и прибывают в случайные моменты времени в промежутке от 12-00 до 13-00. Второй автомобиль проходит трассу со скоростью 100 км/ч, а третий − со скоростью 120 км/ч. Какова вероятность того, что третий автомобиль прибудет в пункт Б первым.
42. На окружности случайно выбираются а) три точки; б) четыре точки. Чему равна вероятность того, что они окажутся на одной и той же полуокружности?
43. Стержень длины l произвольным образом разрубается на три части (т.е. независимо одна от другой на отрезке длины l берутся две точки). Найти вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.
44. Из отрезка $[-1, 2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?
45. В интервале времени $[0, T]$ в случайный момент u подается сигнал длительности 2. Приемник включается в случайный момент $v \in [0, T]$ на время t. Предположив, что точка (u, v) равномерно распределена в квадрате $[0, T] \times [0, T]$ (равновозможность), найти вероятность обнаружения сигнала, если $T = 10, \Delta = 2, t = 1$ мин.
46. По радиоканалу в течение промежутка времени $(0, 1)$ передаются два сигнала длительностью $\tau < 1/2$; каждый из них с одинаковой возможностью начинается в любой момент интервала $(0, 1-\tau)$. Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, оба они искажаются и приняты быть не могут. а) Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений, если $\tau = 0.2$. б) Каким взять τ, чтобы эта вероятность равнялась $0{,}9216$?
47. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что она будет удалена от центра квадрата на расстояние меньше, чем 1/3, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше, чем на 1/6?
48. Самолет, имеющий радиолокационную станцию с дальностью действия a, осуществляет поиск со скоростью v в достаточно большом районе площадью S, в любой точке которого может всплыть на время t подводная лодка. Найти вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время t невелико и лодка обнаруживается при попадании в зону действия радиолокатора.
49. На отрезке длины $1+\delta$ случайно паркуются три автомобиля длины δ ($\delta -$ достаточно мало. Какова вероятность того, что 3 автомобиля припаркуются в том порядке, в котором прибывают.
50. Какова вероятность того, что прямая, брошенная наудачу на плоскость и пересекающая окружность радиуса R, пересечет отрезок длины $2a$, лежащий на диаметре симметрично относительно центра окружности $(a < R)$? В качестве меры прямой, наудачу брошенной на плоскость, и пересекающей выпуклое множество, будем понимать периметр этого выпуклого множества.

51. На сфере радиуса R случайно выбираются две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними будет меньше α (расстояние на сфере отсчитывается по меньшей длине дуги большой окружности).

52. Две точки x и y берутся случайно на смежных сторонах квадрата, длина стороны которого равна $2a$. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет меньше h, если $h < a$.

53. В параллелограмме $ABCD$ с углом $\angle BAC = 60^\circ$ и сторонами $AB = 12$, $AD = 6$ выбирается случайно точка M. Какова вероятность того, что она ближе к точке A, нежели к точкам B, C, D ?

54. В ромбе $ABCD$ с углом $\angle BAC = 60^\circ$ поставлена случайная точка M. Какова вероятность того, что она ближе к точке A, нежели к точкам B, C, D ?

55. Верхняя сторона квадрата белая, а нижняя − красная. В квадрате случайным образом выбирается точка M. Затем квадрат сгибают так, чтобы одна случайно выбранная вершина наложилась на точку M. Найдите вероятность того, что результате наложения получится треугольник.

56. Случайная точка A брошена в квадрат со стороной 1. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

57. Стороны прямоугольника − наудачу взятые отрезки, длина каждого из которых не превосходит 2. Какова вероятность того, что площадь прямоугольника не превзойдет 1?

58. Для сборки шарикоподшипника необходимо, чтобы между R − радиусом наружного кольца, r − радиусом внутреннего кольца и d − диаметром шариков существовало следующее соотношение: $0 \le R - r - d \le \delta$. Предполагая, что R, r, d выбираются случайной и независимо соответственно из интервалов $(50, 51), (40, 41), (9.5, 10)$, найти вероятность сборки шарикоподшипника, если $\delta = 0.5$.

59. Пусть a и b выбираются случайно из интервала $(0,1)$, $u = \min(a,b)$, $w = \max(a,b)$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + 2wx + u = 0$ имеет действительные корни.

60. На плоскость подкручивая бросается спичечный коробок. Будем считать, что он упадет на плоскость той стороной, через которую при его первом соприкосновении с плоскостью проходит центральная вертикальная прямая (т.е. эта прямая проходит через центр коробка). Считая, что длины ребер его равны $a = 5.7$, $b = 3.7$, $c = 1.7$ см, найти вероятности выпадения спичечного коробка той или иной гранью. <u>*Указание.*</u> Площадь сферического прямоугольника ab равна $S_{ab} = D^2 \operatorname{arctg} \dfrac{ab}{cD}$, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ − диаметр.

61. На отрезке AB длины l на фиксированном расстоянии b от точки A находится точка M и случайно выбирается отрезок KL длины $a < l$, целиком умещающийся на отрезке AB. Найти вероятность того, что точка M окажется не покрытой отрезком KL.

62. На отрезке AB длины l на случайном расстоянии b от точки A находится точка M и случайно выбирается отрезок KL длины $a < l$, целиком умещающийся на отрезке AB. Найти вероятность того, что точка M окажется не покрытой отрезком KL.

63. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 мин., а пешеход за 15 мин. Интервал движения автобуса составляет 25 мин. Вы подходите в случайный момент времени к пункту А и отправляетесь пешком. Какова вероятность того, что в пути вас догонит очередной автобус?

64. Значения a и b равновозможны на интервале $(-1,1)$. Найти вероятность следующих событий: $A =$ уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ имеет действительные корни, $B =$ корни уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ одинаковы, $C =$ действительные корни уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ положительны, $E =$ произведение действительных корней положительно, $H =$ сумма действительных корней положительна.

65. Оператор наблюдает за ходом некоторого технологического процесса, при котором происходит смешивание двух веществ, и следит за показаниями температуры обоих компонентов смеси не допуская, чтобы температура и того и другого вещества: 1) одновременно у обоих была меньше 560°; 2) одновременно у обоих была больше 600°. Считая, что в ходе процесса температура первого вещества с одинаковой возможностью может принять любое значение от 550° до 620°, а второго от 555° до 605°, найти вероятность того, что процесс будет протекать нормально.
66. Точки A, B, C наудачу поставлены на отрезок MK длины l. Найти вероятность того, что никакие две точки не будут расположены ближе друг к другу на расстояние $d\,(0<d<l/2)$.
67. Храбрый Портняжка из сказки братьев Гримм, убив полотенцем семерых мух, сшил себе пояс с надписью «ОДНИМ УДАРОМ СЕМЕРЫХ». Проверить, насколько вероятным является успешное истребление мух, если стол имеет размеры $2\,м \times 2\,м$, площадь полотенца $0.25\,м^2$, а на столе сидит (равномерно) 20 мух.
68. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты $-$ красный свет, затем снова одну минуту горит зеленый свет и полминуты $-$ красный свет и т.д. В случайный момент к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки.
69. Случайная точка A попала в прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий: а) расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x; б) расстояние от A до любой стороны прямоугольника не превосходит x; расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит x.
70. Необработанный алмаз разбился на k частей. Предполагая, что ценность неограненного алмаза пропорциональна квадрату его веса, определить, во сколько раз уменьшилась его ценность, вычислив математическое ожидание стоимости осколков. При решении задачи считать все возможные разделения на k частей одинаково возможными.
71. Стороны прямоугольника $-$ наудачу взятые отрезки, длина каждого из которых не превосходит a. Какова вероятность того, что площадь прямоугольника не превосходит $h^2\,(0<h<a)$.
72. Перед вращающимся с постоянной скоростью диском находится отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости диска таким образом, что прямая, соединяющая середину отрезка, перпендикулярна отрезку. По касательной к окружности в случайный момент времени вылетает частица и лет по прямой в плоскости диска. Определить вероятность попадания частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром диска равно a.
73. Точка P и круг K_1 радиуса a_1 выбираются случайно на плоскости так, что точка P лежит в круге K_0 радиуса a_0 и $K_0 \bigcap K_1 \neq \varnothing$. Найти вероятность того, что $P \in K_0 \bigcap K_1$.
74. Пусть $K_i -$ круг радиуса $a_i\,(i=0,1,2)$. Круги K_1 и K_2 наудачу бросаются на плоскость и пересекают K_0 и $K_1 \subset K_0$. Найти вероятность того, что $K_0 \bigcap K_1 \bigcap K_2 \neq \varnothing$.
Указание. Воспользуйтесь [6], с.84, (6.48): *Мера всех положений выпуклого множества* K_1 *площади* F_1 *и периметра* L_1, *в которых оно пересекает фиксированное множество* K_0 *площади* F_0 *и периметра* L_0, *равна* $m(K_1; K_1 \bigcap K_0 \neq \varnothing) = 2\pi(F_1+F_0)+L_1L_0$.
75. Расстояние до самого дальнего клиента быстрой доставки – 297 км, поэтому водитель фирмы каждое утро пополняет бак автомобиля на столько, сколько нужно для того чтобы проехать $297 \times 2 + 27$ километров. Однако не всегда самый дальний клиент делает заказ. Сегодня невнимательный водитель забыл пополнить бак и выехал к клиенту с тем же количеством бензина, которое осталось после предыдущего дня. Какова вероятность того, что ему не хватит бензина?
76. Батарея из n орудий производит одновременно залп по цели, находящейся в точке $a \in R$. Если i-ое орудие наведено на точку $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, то выпущенный снаряд попадает в точку $\beta_i + \xi_i + \varsigma$, где $\xi_i -$ рассеивание i-ого орудия, а $\varsigma -$ одинаковый для всех орудий снос ветра.

Цель оказывается пораженной, если хотя бы один снаряд попадает на отрезок $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \varsigma-$независимы и ξ_i выбирается случайно из интервала $(-c,c)$, а $\varsigma-$ из интервала $(-d,d)$, $0<c<d$. Найти и сравнить вероятности поражения цели (и их пределы при $n\to\infty$) в следующих случаях: а) все орудия наведены на цель: $(\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_n=a,\ \ c+\varepsilon<d)$; б) точки прицела выбираются случайно: ($\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n-$ независимые случайные величины выбираемые случайно из интервала $(a-b, a+b), b>c+d+\varepsilon, \varepsilon<c$).

5. Ответы.

1. $0{,}5$. **2.** $0{,}5$. **3.** $\frac{1}{12}=0{,}08333$. **4.** 0,25. **5.** $0{,}5$. **6.** $\frac{38}{105}=0{,}3619$.

7. $0{,}5$. **8.** $0{,}5$. **9.** $\frac{3}{8}=0{,}375$. **10.** $1-\frac{\pi}{25}=0{,}8743366$. **11.** $\frac{127}{180}\approx 0.7$.

12. $\frac{2}{3}=0.667$. **13.** $\frac{7}{9}=0.77778$. **14.** $\frac{311}{1152}=0.269965$. **15.** $\frac{24}{60}=0.4$.

16. $\frac{85}{132}=0.644$. **17.** $\frac{151}{200}=0.755$. **18.** $\frac{4}{7}=0.571$. **19.** 0.84. **20.** $\frac{4\pi}{25}=0.5027$.

21. $0{,}5$. **22.** $\frac{1}{3}=0.333$. **23.** $\frac{15}{16}=0.9375$. **24.** $\frac{13}{16}=0.8125$. **25.** $1-\ln 2=0.30685$.

26. $\frac{4}{9}=0.44$. **27.** $\frac{118}{125}=0.94$. **28.** 0.4. **29.** $\frac{1}{4}=0.25$. **30.** $\frac{15-\sqrt{150}}{15-5}=0.28$.

31. $1-\frac{d}{h}=0.75$. **32.** $\frac{\ln 16}{9}=0.308$. **33.** 0.81. **34.** $\frac{7}{16}=0.4375$. **35.** 0.36.

36. $\frac{1}{16}=0.0625$. **37.** 0.8. **38.** $\frac{1}{4}=0.25$. **39.** $\frac{1}{3}=0.33$. **40.** $\frac{1}{5}=0.2$.

41. 0.1. **42.** 3) $\frac{3}{4}=0.75$. 4) $0{,}5$. **43.** $\frac{1}{4}=0.25$. **44.** $\frac{3+4\ln 2}{18}=0.3207$. **45.** $\frac{11}{40}=0.275$.

46. 0.5625. **47.** $\frac{\pi}{4}=0.7854$. **48.** $\frac{\pi a^2+2avt}{S}$. **49.** $\frac{(1-2\delta)^3}{6}$. **50.** $\frac{2a}{\pi R}$.

51. $\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **52.** $\frac{\pi h^2}{4a^2}$. **53.** $\frac{1}{8}=0.125$. **54.** $\frac{1}{6}=0.1667$. **55.** $\frac{\pi}{2}-1=0.57$.

56. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1=0.414$. **57.** $\frac{2+\ln 2}{4}-0.673$. **58.** $\frac{5}{12}=0.4167$. **59.** $\frac{2}{3}=0.667$.

60. $p_{ab}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0.06$; $p_{bc}=0.33$; $p_{ac}=0.11$. **61.** 1) $b>a$ и $b<l-a$, то $p=\frac{l-2a}{l-a}$; 2) $b>a$ и $b\ge l-a$, то $p=\frac{b-a}{l-a}$; 3) $b\le a$, то $p=\frac{l-a-b}{l-a}$. **62.** Если $a<\frac{l}{2}$, то $\overline{p}=1-\frac{a}{l}$. Если $a\ge\frac{l}{2}$, то $\overline{p}=\frac{a(2l-3a)}{l(l-a)}$. **63.** $p=\frac{13}{25}$. **64.** $\mathbf{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(B)=0$, $\mathbf{P}(C)=\frac{1}{12}$, $\mathbf{P}(E)=\frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(H)=\frac{1}{3}$. **65.** $p=\frac{16}{35}$. **66.** $p=\left(1-\frac{2d}{l}\right)^3$. **67.** $p=0{,}0001248$.

68. $p=2/3$. **69.** а) если $0\le x<1/2$, то $p=x(3-2x)$; $1/2<x$, то $p=1$. б) $x<1$, то $p=0$; $1\le x\le 2$, то $p=x-1$; $x>2$, то $p=1$. в) $x<1/\sqrt{5}$, то $p=1-(1-\sqrt{5}x)^2$; $x\ge 1/\sqrt{5}$, то $p=1$.

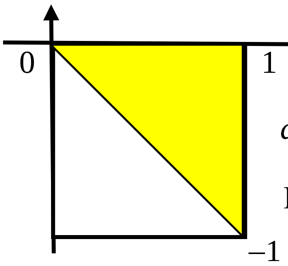
70. $\frac{2}{k+1}$. **71.** $p=\frac{h^2}{a^2}$. **72.** $p=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h}{a}$. **73.** $p=\frac{a_1^2}{(a_0+a_1)^2}$.

74. $p=\frac{(a_1+a_2)^2}{(a_0+a_2)^2}$. **75.** $p=\frac{12}{23}=0,5217$.

76. а) $Q_n=\frac{c+\varepsilon}{d}-\frac{c-\varepsilon}{d}\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n-\frac{2c}{d\,(n+1)}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^{n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{c+\varepsilon}{d}$. б) $Q_n=1-\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\underset{n\to\infty}{\to}1$.

6. Решения

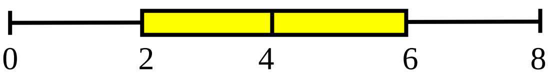
1. Пусть (a,b) – какой-либо элементарный исход, который мы будем изображать в системе координат $a0b$.



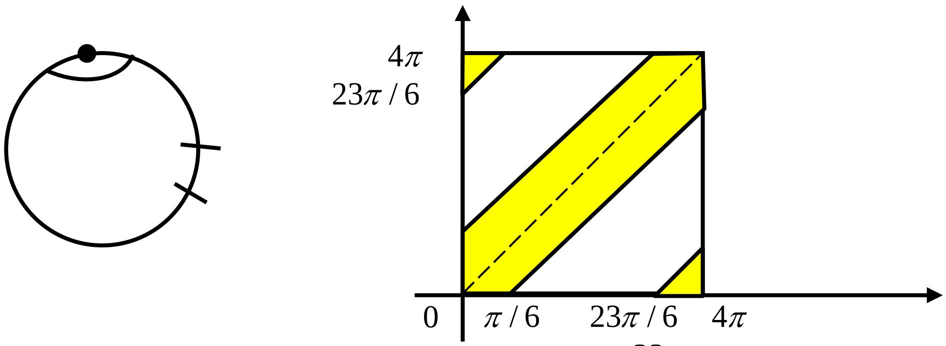
$ax+b=0,\ x=-\frac{b}{a},\ 0<-\frac{b}{a}<1,\ 0<-b<a.$

При этом $a\in(0,1),\ b\in(-1,0)$. Отсюда $p=1/2=0,5$.

2. Множество всех исходов есть отрезок $[0,8]$ длины 8, а множество благоприятствующих исходов есть отрезок $[2,6]$ длины 4, поэтому искомая вероятность равна $p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0,5$.



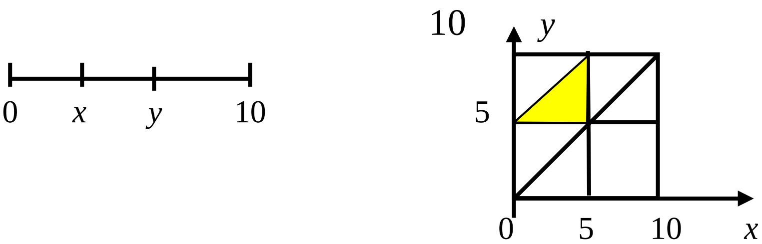
3.



$$|x-y|\le\frac{\pi}{6},\ |x-y|\ge 4\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{23}{6}\pi,$$

$m(G)=16\pi^2$, $m(G)-m(g)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{23}{6}\pi\cdot\frac{23}{6}\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{44}{3}\pi^2$, $m(g)=\frac{4}{3}\pi^2$. $p=\frac{m(g)}{m(G)}=\frac{1}{12}=0,083$.

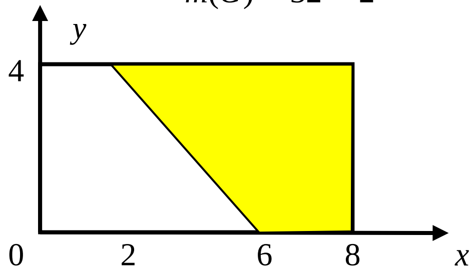
4.



1) $x\le 5$ 2) $10-y\le 5\Rightarrow y\ge 5$ 3) $y-x\le 5\Rightarrow y\le x+5$. Вероятность $p=\frac{1}{4}=0,25$.

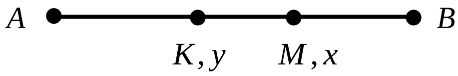
5. Множество элементарных исходов $G=\{(x,y):0\le x\le 8, 0\le y\le 4\}$, $m(G)=32$.
Множество благоприятствующих $g=\{(x,y):0\le x\le 8, 0\le y\le 4,\ x+y<6\}$, $m(g)=16$.

Вероятность $p=\dfrac{m(g)}{m(G)}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}=0,5$.



Незакрашенная часть – множество благоприятствующих исходов.

6.

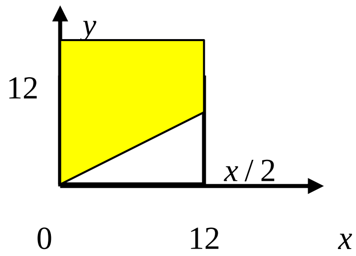


1) если $y>x$, то выполнено. 2) $y<x$, то выполнено если $\dfrac{x}{2}<y<x$.

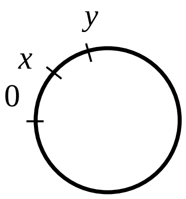
$m(G)=12\cdot 12=144$,

$m(g)=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 6=36$,

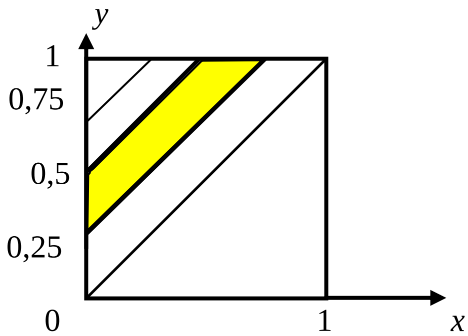
$q=\dfrac{m(g)}{m(G)}=\dfrac{36}{144}=\dfrac{1}{4}=0,25,\ p=1-q=0,75$.



7.



$x<y$



1) а) $y-x<1-(y-x)\Rightarrow y-x<0,5\Rightarrow y<x+0,5$.

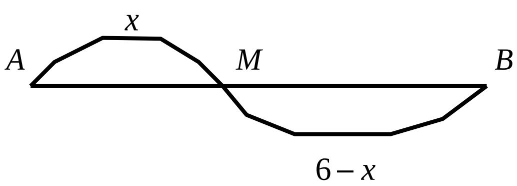
б) $\dfrac{1-(y-x)}{y-x}<3\Rightarrow 1<4(y-x)\Rightarrow y>0,25+x$.

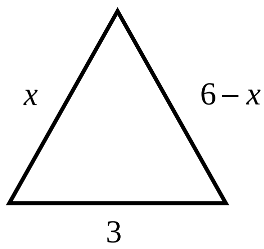
2) а) $y-x>1-(y-x)\Rightarrow y>0,5+x$. б) $\dfrac{y-x}{1-(y-x)}<3\Rightarrow y<0,75+x$.

Общая часть – закрашенная область, поэтому $m(G)=0,5$,

$m(g)=0,5\cdot 0,75\cdot 0,75-0,5\cdot 0,25\cdot 0,25=0,5\cdot 0,5=0,25$, $p=\dfrac{0,25}{0,5}=0,5$.

8.

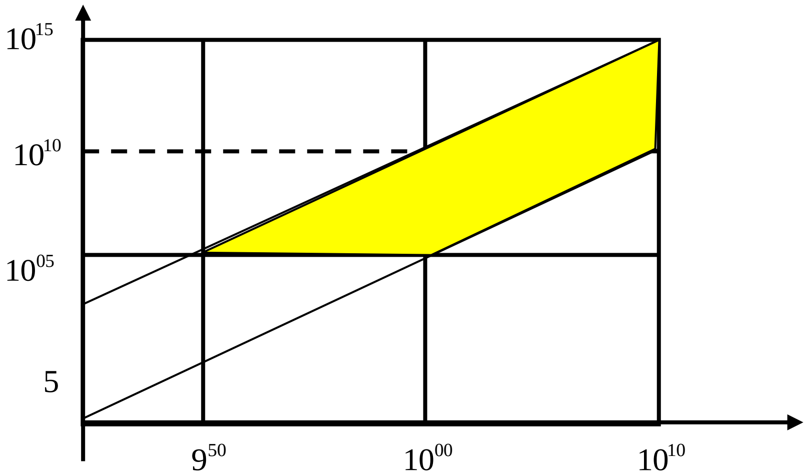




1) $x+3>6-x\Rightarrow 2x>3$, 2) $6-x+3>x\Rightarrow 2x<9$, 3) $6>3$

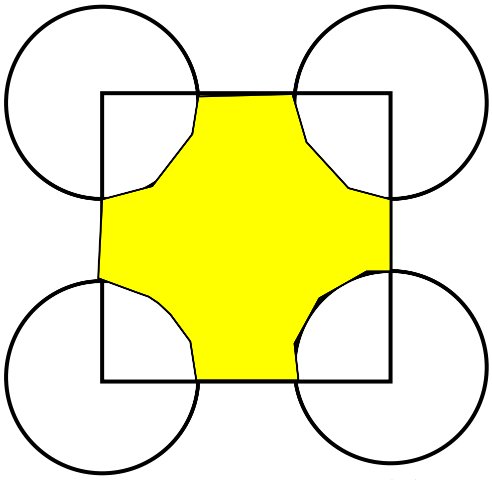
Получаем $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{9}{2}$. Тогда $m(G)=6$, $m(g)=3$, $p=\dfrac{m(g)}{m(G)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0,5$.

9.



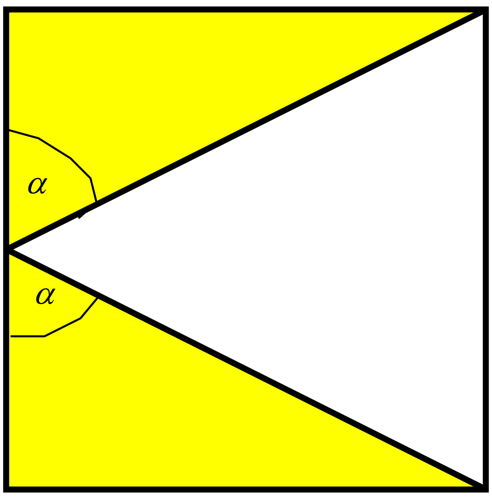
Множество всех исходов $G = \{(x, y): 9^{50} \le x \le 10^{10}, 10^{05} \le y \le 10^{15}\}, m(G) = 20 \cdot 10 = 200$.
Не разойдутся, если $x < y < x + 5$.
Множество благоприятствующих исходов: разойдутся если $y < x$ или $y - x > 5$. Тогда $m(g) = 10 \cdot 10 - 25 = 75$, поэтому $p = \dfrac{75}{200} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

10.



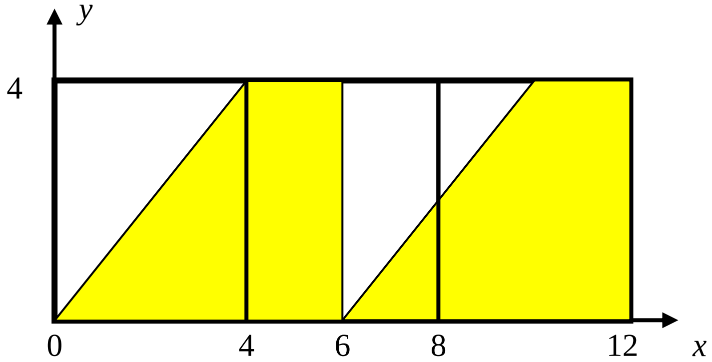
$m(G) = 25$, $m(g) = 25 - \pi$, $p = \dfrac{m(g)}{m(G)} = 1 - \dfrac{\pi}{25} = 0{,}8743366$

11.



$S_{кв} = 1$. Предельное положение прямых при $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}5^{o}$, $p = \dfrac{127}{180} \approx 0{,}7$.

12. Пусть x – момент вашего прихода, y – момент прихода автобуса №2, т.е. пара (x, y) – элементарный исход, где $0 \le x \le 12$, $0 \le y \le 4$.

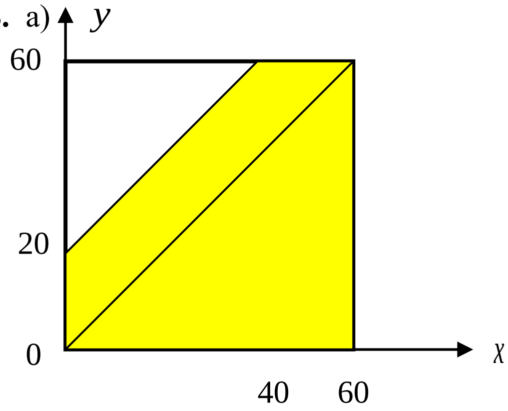


1) если $0 < x < 6$, то $y < x < 6$.

2) если $6 < x < 12$, то $y + 6 < x < 12$.

$m(G) = 48$, $m(g) = 48 - 16 = 32$. Тогда $p = \frac{32}{48} = \frac{2}{3} = 0,667$.

13. а)

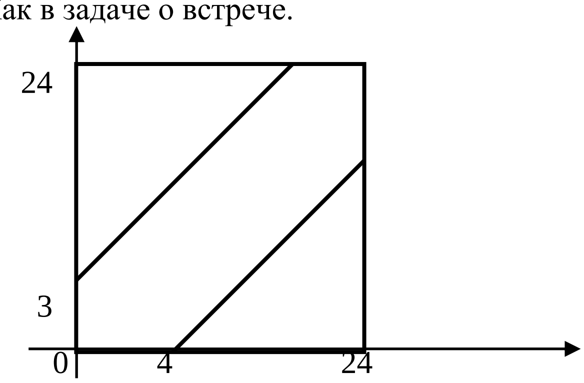


x – момент прихода первого, y – момент прихода второго. Встреча состоится, если

1) $x > y$, т.е. когда первый приходит позже второго; 2) $x < y$ и $y - x < 20 \Leftrightarrow y < x + 20$.

Тогда $p = \dfrac{60^2 - \frac{1}{2} \cdot 40^2}{60^2} = \dfrac{3600 - 800}{3600} = \dfrac{7}{9} = 0,77778$.

14. Как в задаче о встрече.



$$p = \frac{24^2 - \frac{1}{2} \cdot 21^2 - \frac{1}{2} \cdot 20^2}{24^2} = 1 - \frac{841}{1152} = \frac{311}{1152} = 0,27$$

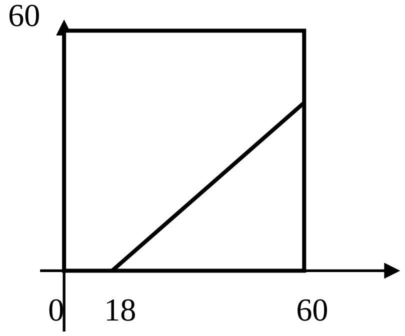
15. Пусть пароход пришел в t минут после 13.00, тогда $0 \le t \le 60$. Поскольку требуется еще 10 минут, чтобы дойти до остановки, то пассажир успеет на автобус, если $t + 10 \le 34 \Leftrightarrow t \le 24$, поэтому вероятность $p = \frac{24}{60} = 0.4$.

16. Имеем:

длина отрезка $AB=66$, $AS=41$, $SZ=3$, $SK=KZ=1{,}5$. Если мы находимся на участке AK, то мы находимся ближе к S, чем к Z. Тогда $p=\frac{41+1{,}5}{66}=\frac{42{,}5}{66}=0{,}644$.

17. Имеем: $p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{T}\right)^2$, $b=\frac{s(v_1-v_2)}{v_1v_2}=\frac{120\cdot 20}{100\cdot 80}=\frac{3}{10}$, $T=1$ час.

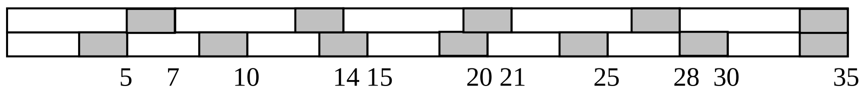
$$p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{10}\right)^2=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{100}=\frac{151}{200}=0{,}755.$$



Время в пути равно $\Delta_1=\frac{120}{100}=\frac{6}{5}$, $\Delta_2=\frac{120}{80}=\frac{3}{2}$. Первый приедет в момент $t_1+\Delta_1$, если стартовал в момент t_1, второй приедет в $t_2+\Delta_2$. А первой достигнет, если

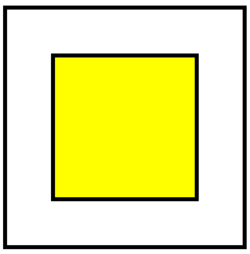
$t_1+\Delta_1<t_2+\Delta_2 \Rightarrow t_1+\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{2}\right)<t_2 \Rightarrow t_1-\frac{3}{10}<t_2$, но 0,3 часа – это 18 минут.

18. Расположим моменты прихода на оси. Серым обозначены прямоугольники длины 2. Общая длина серых прямоугольников равна 4+2+3+3+2+4+2=20, а общая длина равна 35.



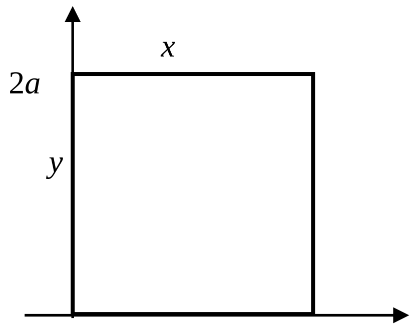
Поэтому $p=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}=0.571$.

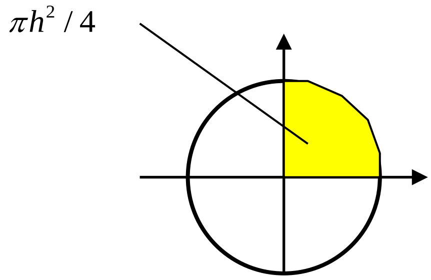
19. Светлая часть – нужная нам часть, ширина которой 0,3.



$$p=1-0{,}4^2=0{,}84.$$

20.

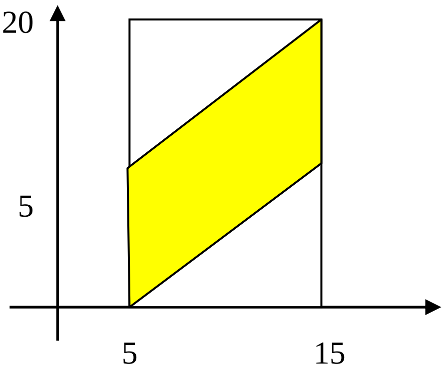




$x^2+y^2<h^2$, $h=4/\ \ 2a=10 \Rightarrow a=5$.

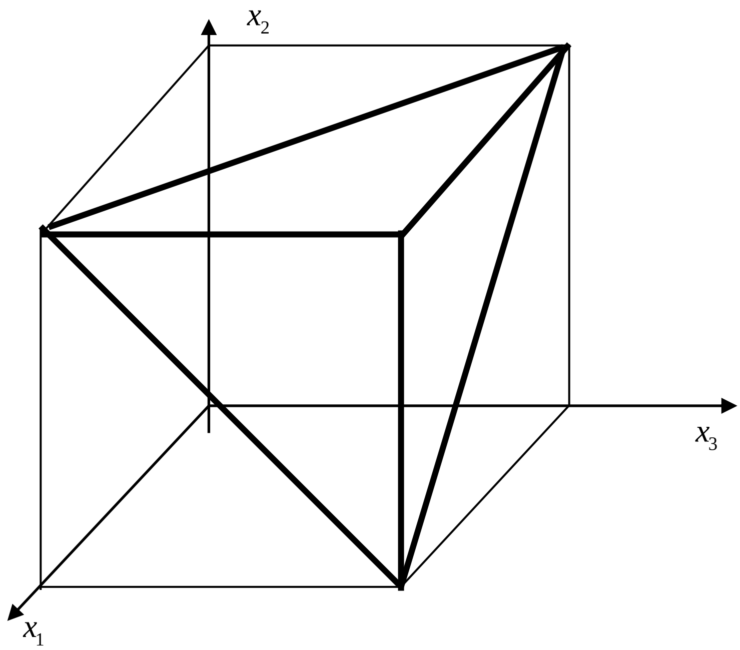
$4\cdot\frac{\pi h^2}{4}=\pi h^2$ – четыре угла. Площадь $S=4a^2=4\cdot 25$. Вероятность $p=\frac{\pi h^2}{4a^2}=\frac{16\pi}{4\cdot 25}=\frac{4\pi}{25}$

21. Пусть y – расстояние от точки до начала координат, а x – координата середины отрезка. Тогда $0 \le y \le 20$, $5 \le x \le 15$. Точка y попадет на меньший отрезок, если $|x-y| \le 5 \Leftrightarrow x-5 \le y \le x+5$.



$m(G) = 20 \cdot 10 = 200$, $m(g) = 200 - 10 \cdot 10 = 100$, $p = \dfrac{m(g)}{m(G)} = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

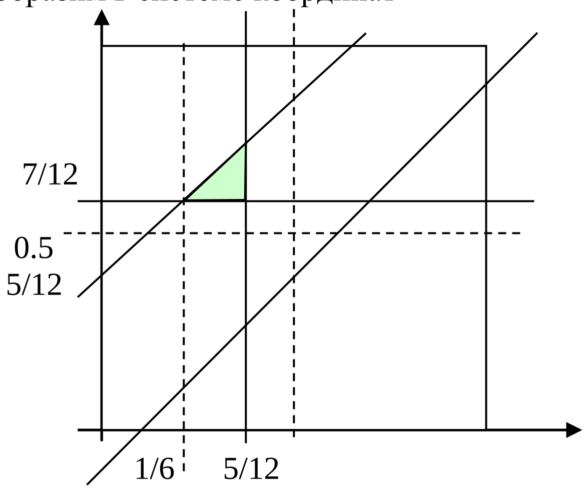
22. Рассмотрим систему координат $x_1 x_3 x_2$.



Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{1}{6}$, поскольку это объем выделенного тетраэдра.

23. Пусть $AK = x$, $AL = y$ и $x < y$. Тогда получившиеся куски имеют длины x, $y - x$, $1 - y$. Площадь части где $x < y$ равна $\dfrac{1}{2}$. Найдем вероятность противоположного события, т.е. мы имеем: $\left\{ x < \dfrac{5}{12}, y - x < \dfrac{5}{12}, 1 - y < \dfrac{5}{12} \right.$ или $\left\{ x < \dfrac{5}{12}, y < x + \dfrac{5}{12}, y > \dfrac{7}{12} \right.$.

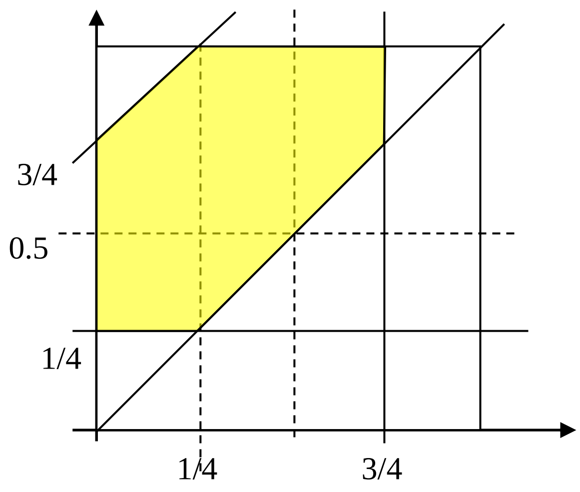
Изобразим в системе координат



Найдем точку пересечения $\frac{7}{12} = x + \frac{5}{12} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$. Площадь закрашенной части равна $S = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{32}$, поэтому вероятность события: длина всех кусков не превосходит $\frac{5}{12}$ равна будет $p = \frac{1}{32} : \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Значит, искомая вероятность равна $q = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$.

24. Пусть $AK = x$, $AL = y$ и $x < y$. Тогда получившиеся куски имеют длины x, $y - x$, $1 - y$. Площадь части где $x < y$ равна $\frac{1}{2}$. Найдем вероятность противоположного события, т.е. мы имеем: $\left\{ x < \frac{3}{4}, y - x < \frac{3}{4}, 1 - y < \frac{3}{4} \right.$ или $\left\{ x < \frac{3}{4}, y < x + \frac{3}{4}, y > \frac{1}{4} \right.$.

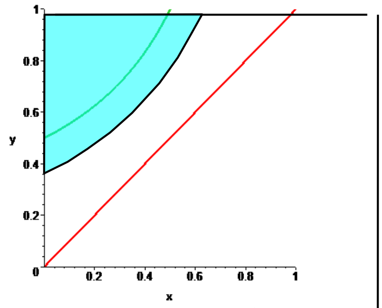
Изобразим в системе координат



Площадь закрашенной части равна $S = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{16} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{16}$, поэтому вероятность события: длина всех кусков не превосходит $\frac{5}{12}$ равна будет $p = \frac{13}{16}$. Значит, искомая вероятность равна $q = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16} = 0.1875$.

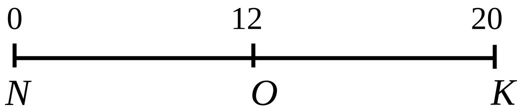
25. Пусть $AK = x$, $AL = y$. Тогда $LB = 1 - y$ и $KL = y - x$. Пусть также $x < y$. Площадь этой части (т.е. когда $x < y$) равна $\frac{1}{2}$. Для того чтобы KL было большей стороной тупоугольного треугольника должно выполнять неравенство

$$KL^2 > AL^2 + LB^2 \Leftrightarrow (y-x)^2 > x^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow y > \frac{1}{2(1-x)}.$$



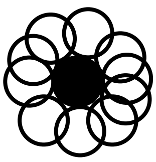
Площадь закрашенной части равна $S = \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2(1-x)}\right) dx = \frac{1 - \ln 2}{2}$. Поэтому искомая вероятность равна $p = 1 - \ln 2$.

26.



Если бы не было предыдущей остановки, то эта вероятность равна $p = \frac{|OK|}{|NK|} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$. Но, поскольку трамвай видно в пределах 2-х минут, эта вероятность равна $p = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} = 0.44$.

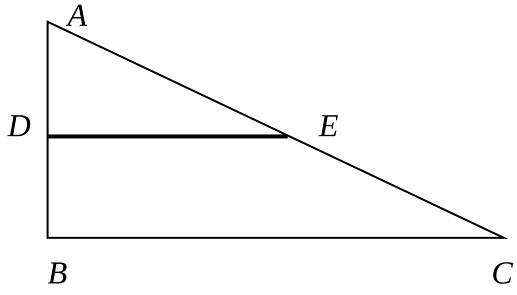
27.



Первая клякса, радиусом 1 см, закрашена черным цветом.
Контурами показаны возможные расположения второй кляксы - в случае касания первой и второй. Видим, что кляксы касаются тогда, когда вторая попадет в кольцо, образованное окружностью радиусом 3 см и окружностью радиусом 1 см. Кляксы не должны также пересекаться. Значит, вторая клякса не должна попасть в круг, радиусом 3. Найдем площадь круга.
$S_{круга} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$. Благоприятным считаем исход, когда кляксы не имеют общих точек.
В этом случае область для попадания - прямоугольник с вырезанным кругом. Найдем площадь этой фигуры. $S_1 = 20 \cdot 25 - 9\pi = 500 - 9\pi = 472, S = 20 \cdot 25 = 500$. Вероятность $p = \frac{S_1}{S} = \frac{472}{500} = 0,94$.

28. Чтобы успеть вовремя, вы должны сесть не позже 14:52, но 14:52 – 14:48 = 4 мин и так как автобус ходит каждые 10 минут, то эта вероятность равна $p = \frac{4}{10} = 0,4$.

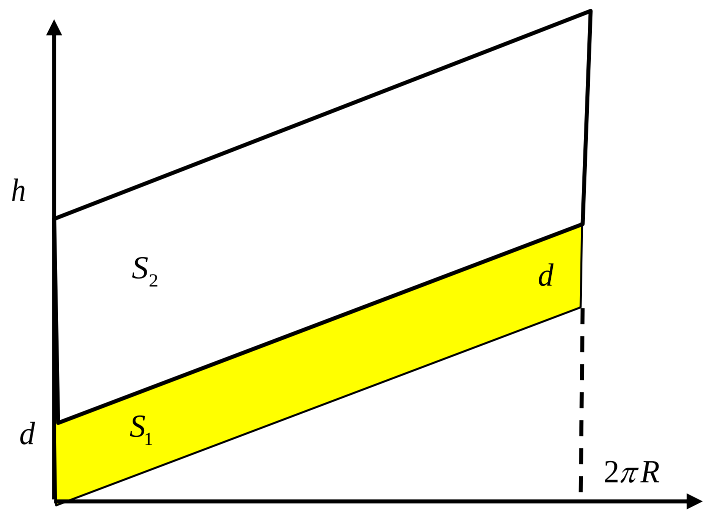
29. Имеем



Те точки, которые попадают в верхний треугольник $DE-$ средняя линия, находятся ближе к A, нежели к B и C. Так как его площадь равна $\frac{1}{4}$ площади большого треугольника (коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$), то $p=\frac{1}{4}=0,25$.

30. Так конечная скорость v и начальная скорость u связаны с замедлением a и пройденным расстоянием s формулой $v^2=u^2-2sa$ и так как $v=0$ (шайба остановилась), то $s=\frac{v^2}{10}\Rightarrow v=\sqrt{10s}$. Кроме того, $s>8+4+2+1=15$, поэтому $v>\sqrt{150}$. Тогда вероятность равна $p=\frac{15-\sqrt{150}}{15-5}=0.28$.

31.



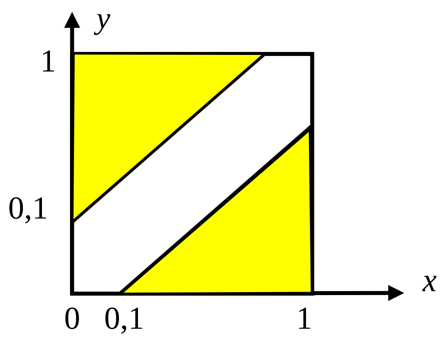
Площадь параллелограмма $S=S_1+S_2=2\pi Rh$, благоприятствующая область $S_2=2\pi R(h-d)$. Тогда $p=\frac{S_2}{S}=\frac{2\pi R(h-d)}{2\pi Rh}=1-\frac{d}{h}$. При $d=h$ (точка поднимается на высоту h получаем нить без щелей и тогда $p=0$.

32. Корни квадратного уравнения действительны, если $b^2-ac\geq 0\Leftrightarrow c\leq\frac{b^2}{a}$.

Тогда V_1- благоприятствующая область, объем которой равен $\int\limits_{0,5}^{2}da\int\limits_{0}^{1}\frac{b^2}{a}db=\int\limits_{0,5}^{1}\frac{da}{3a}=\frac{2\cdot\ln 2}{3}$.

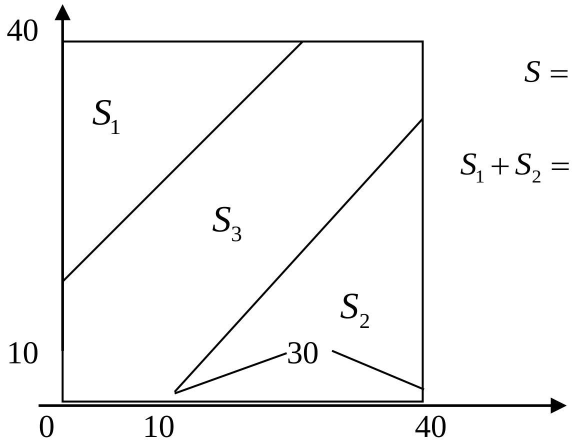
Объем исходной области $V=1.5=\frac{3}{2}$. Тогда вероятность равна $p=\frac{4\cdot\ln 2}{9}\approx 0,308$.

33.



Благоприятствующие исходы – попасть в заштрихованную часть, площадь которой равна $0,9^2 = 0,81$. Площадь всей части равна 1, вероятность равна $p = 0,81$.

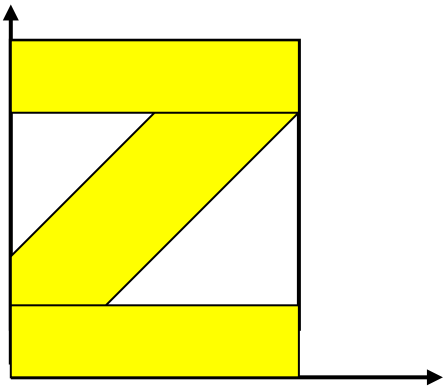
34. Имеем $p = \dfrac{1600-900}{1600} = \dfrac{700}{1600} = \dfrac{7}{16} = 0,4375$.



$S = 40^2 = 1600$

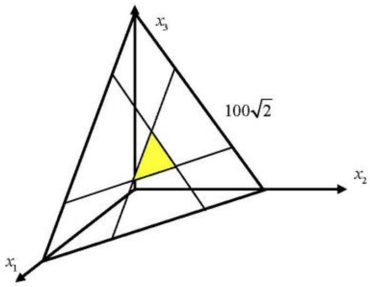
$S_1 + S_2 = 30^2 = 900$, $S_3 = 1600 - 900 = 700$

35. Обозначим через x расстояние от левого берега реки до точки падения первого человека, а через y – расстояние от левого берега до точки падения второго человека.



Тогда $G = \{(x, y): 0 \le x \le 100, 0 \le y \le 100\}$, $m(G) = 10000$.
Две полосы: $0 < y < 10$ и $90 < y < 100$ – те исходы, при которых второй человек упал в воду не далее 10-ти метров от берега. Лента: $|y - x| < 10$ – те исходы,
Когда второй упадет не далее 10-ти метров от первого.
Площадь незкрашенной части равна 6400,
зкрашенной части равна 10000 – 6400 = 3600,
поэтому $p = 0,36$.

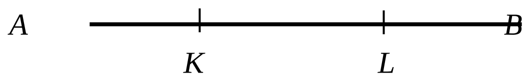
36. Поскольку числа большие, то для решения задачи воспользуемся геометрической вероятностью: $G = \{(x_1, x_2, x_3): 0 \le x_1 \le 100,\ 0 \le x_2 \le 100, 0 \le x_3 \le 100, x_1 + x_2 + x_3 = 100\}$,
$g = G \bigcap \{x_1 \ge 25,\ x_2 \ge 25,\ x_3 \ge 25\}$.



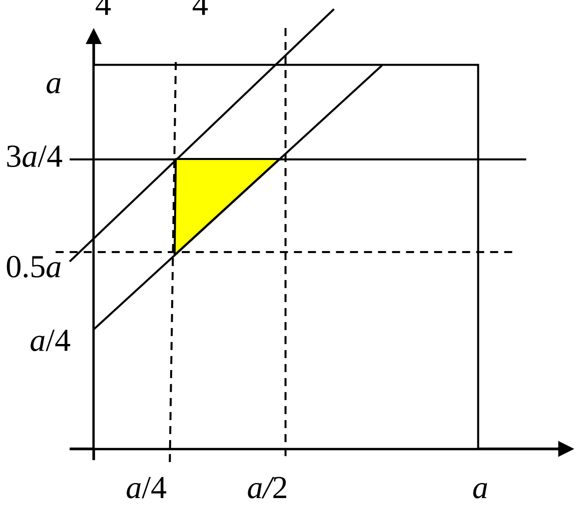
Площадь большого треугольника равна $m(G) = 20000\sqrt{3}/4 = 5000\sqrt{3}$. Маленький треугольник имеет стороны по 50, поэтому $m(g) = \dfrac{1250\sqrt{3}}{4}$, поэтому $p = \dfrac{m(g)}{m(G)} = \dfrac{1}{16} = 0,0625$.

37. Множество всех исходов $G = \{x: 0 \le x \le 1000\}$, множество благоприятствующих исходов $g = \{100 \le x \le 900\}$, вероятность равна $p = \dfrac{800}{1000} = 0,8$.

38.



Пусть $AK = x$, $AL = y$ и $x < y$. Тогда получившиеся куски имеют длины x, $y - x$, $a - y$. Площадь части где $x < y$ равна $\frac{a^2}{2}$. Мы имеем: $\begin{cases} x > \frac{a}{4}, y - x > \frac{a}{4}, a - y > \frac{a}{4} \end{cases}$ или $\begin{cases} x > \frac{a}{4}, y > x + \frac{a}{4}, y < \frac{3a}{4} \end{cases}$. Изобразим в системе координат

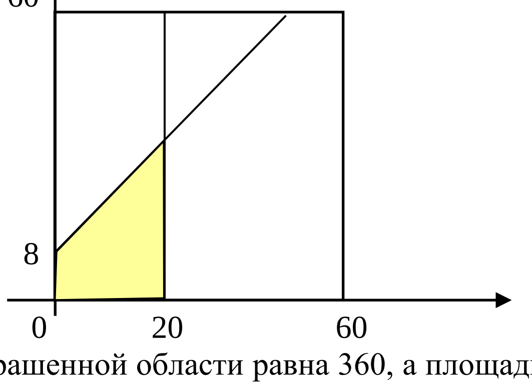


Найдем точку пересечения $\frac{3a}{4} = x + \frac{a}{4} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$. Площадь закрашенной части равна $S = \frac{a^2}{8}$, поэтому вероятность события: длина всех кусков больше $\frac{a}{4}$ равна будет $p = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

39. Иван Иванович увидит Ивана Никифоровича, если до середины будет не более 10 сек и после. Тогда $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0.333.$

40. Пусть $x -$ доля разлитой воды, $0 < x < 1$. Тогда Петя принес за первый раз воды $10 \cdot (1 - x)$. За второй раз он не сможет принести воды так, чтобы суммарное количество стало равным 20 л, поэтому ему придется сходить, по крайней мере, еще один раз. Если y и $z -$ доли выплеснутой воды соответственно за второй и третий раз, то в сумме у него будет $10 \cdot (3 - x - y - z)$. Это должно быть не меньше 20, поэтому имеем: $3 - x - y - z \geq 2$, откуда $x + y + z \leq 1$. Это множество есть тетраэдр, объем которого равен $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

41. Время прохождения пути: для первого − 60 мин, для второго − 48 мин, для третьего − 40 мин. Пусть второй прибывает на место старта в момент $0 \leq x_2 \leq 60$, третий в момент $0 \leq x_3 \leq 60$. Поскольку первый проходит путь за 60 мин, то третий опередит первого, если $x_3 + 40 < 60 \Leftrightarrow x_3 < 20$. В то же время третий приходит раньше второго, т.е. должно быть $x_3 + 40 < x_2 + 48 \Leftrightarrow x_3 < x_2 + 8$. Таким образом, получаем область



Площадь закрашенной области равна 360, а площадь всего квадрата равна 3600, поэтому вероятность равна 0.1.

42. Для трех точек

$G=\{0<x<y<z<1\}$**,** (x,y,z) **– расстояния от начала.**

$$m(G)=\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 dz=\frac{1}{6}\,.$$

На одной полуокружности:

1) $z<\left(\frac{1}{2}+x\right)\Lambda 1$ **2)** $y-x\geq+\frac{1}{2}$ **3)** $z-y\geq\frac{1}{2}$**,** т.е. если какой-либо из отрезков $\geq\frac{1}{2}$.

$V_1=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1/2+x}dy\int_y^{1/2+x}dz+\int_{1/2}^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 dz=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{1}{12}$**,** $V_3=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1/2}dy\int_{y+1/2}^1 dz=\frac{1}{48}$**.**

$V_2=\int_0^{1/2}dx\int_{1/2+x}^1 dy\int_y^1 dz=\frac{1}{48}$ $p=\frac{\frac{1}{48}+\frac{1}{48}+\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$**.**

Для n точек.

1) $x_2-x_1\geq\frac{1}{2}$; 2) $x_3-x_2\geq\frac{1}{2}$; $n-1$) $x_n-x_{n-1}\geq\frac{1}{2}$; n) $x_n-x_1\leq\frac{1}{2}$ ($x_n\leq\min\left(\frac{1}{2}+x_1,1\right)$).

$V_1=\int\limits_0^{1/2}dx_1\int\limits_{x_1+1/2}^{1}dx_2\int\limits_{x_2}^{1}dx_3\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{1}dx_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}$, $V_2=\int\limits_0^{1/2}dx_1\int\limits_{x_1}^{1/2}dx_2\int\limits_{x_2+1/2}^{1}dx_3\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{1}dx_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}=V_1$, … , $V_{n-1}=V_1$,

$V_n=\int\limits_0^{1/2}dx_1\int\limits_{x_1}^{x_1+1/2}dx_2\int\limits_{x_2}^{x_1+1/2}dx_3\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{x_1+1/2}dx_n+\int\limits_{1/2}^{1}dx_1\int\limits_{x_1}^{1}dx_2\int\limits_{x_2}^{1}dx_3\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{1}dx_n=\frac{1}{2^n\cdot(n-1)!}+\frac{1}{2^n\cdot n!}$

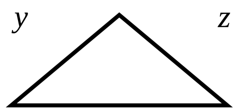
$V=\frac{1}{n!}$, поскольку $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$.

Поэтому вероятность равна $p=\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{2n}{2^n}$.

При $n=3$ получаем $p=\frac{3}{4}$, при $n=4$ получаем $p=\frac{1}{2}$.

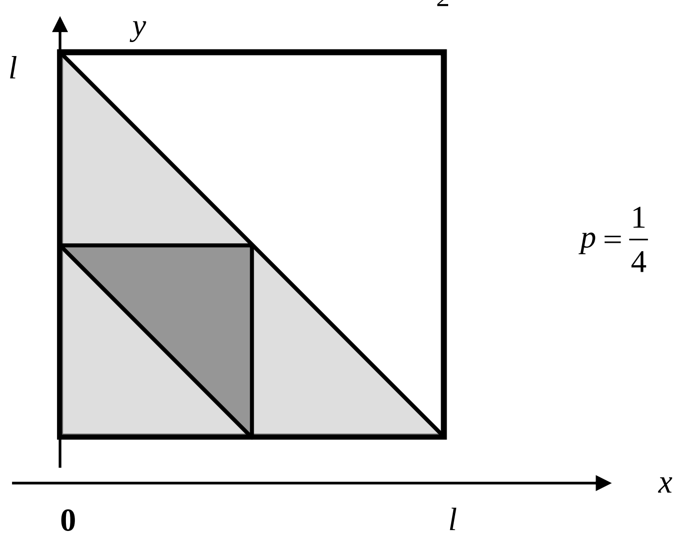
43.

$(x,y),0<x<l,0<y<l,x+y<l$



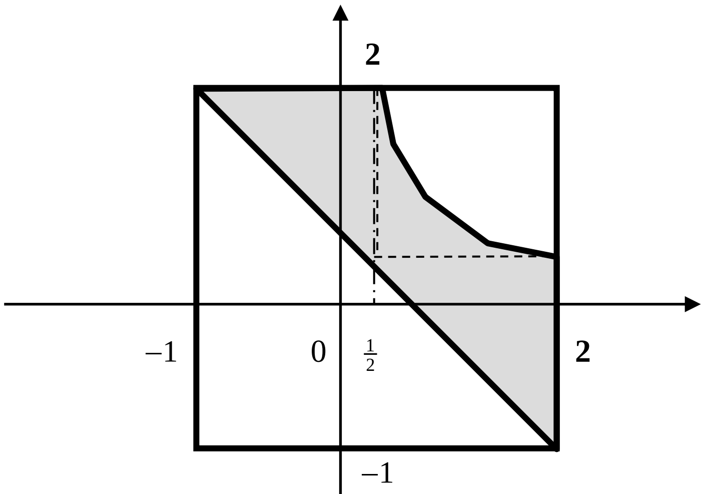
1) $x+y\geq z\Leftrightarrow x+y\geq l-(x+y)\Rightarrow x+y\geq\frac{l}{2}$, 2) $x+z\geq y\Leftrightarrow x+l-(x+y)\geq y\Rightarrow y\leq\frac{l}{2}$

3) $y+z\geq x\Leftrightarrow y+l-(x+y)\geq x\Rightarrow x\leq\frac{l}{2}$.



$p=\frac{1}{4}$

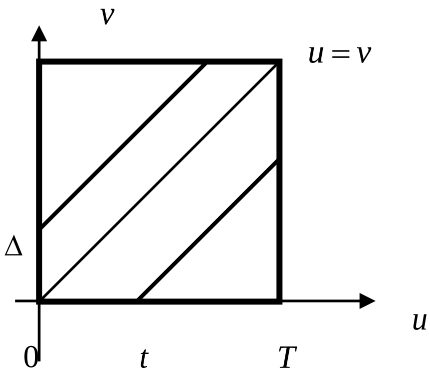
44.

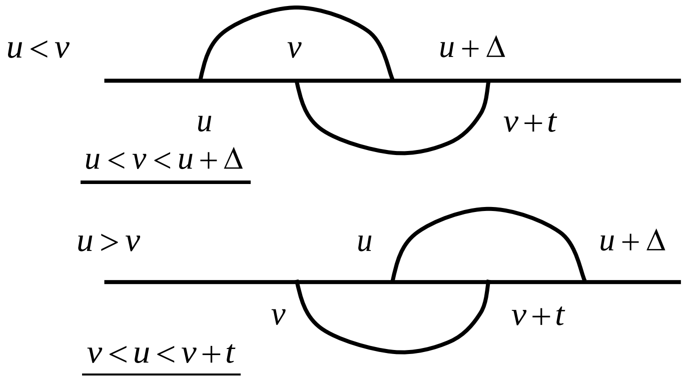


$x+y>1,\ xy<1 \Rightarrow y<\dfrac{1}{x}$, $m(G)=9$, $m(g)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\int\limits_{1/2}^{2}\dfrac{dx}{x}+1\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}+2\ln 2=\dfrac{3}{2}+2\ln 2$.

$P(A)=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{3}{2}+2\ln 2\right]=\dfrac{3+4\ln 2}{18}=0.3207$.

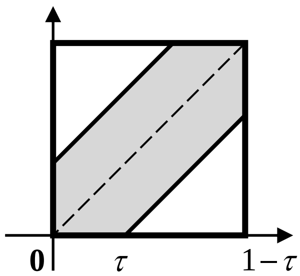
45.





$$p=\frac{T^2-\frac{1}{2}(T-t)^2-\frac{1}{2}(T-\Delta)^2}{T^2}=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2=0.275.$$

46.

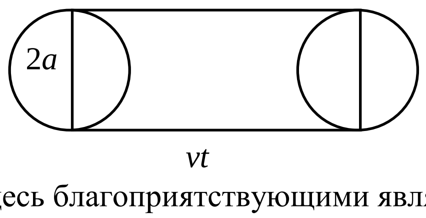


а) $p=\left(\dfrac{1-2\tau}{1-\tau}\right)^2=0.75^2=0.5625$.

$\tau=0.073$.

47. $p=\dfrac{\pi(1/3)^2}{(4/6)^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

48. Благоприятствующие исходы, если точка попадает в область V, площадь которой равна $S_1=\pi a^2+2avt$, поэтому вероятность равна $p=(\pi a^2+2avt)/S$.



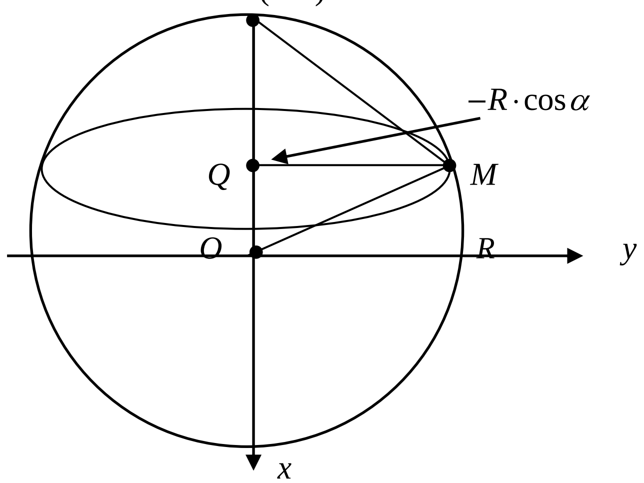
49. Здесь благоприятствующими являются исходы, для которых $t_1+2\delta<t_2+\delta<t_3<1$.

Тогда $\int\limits_0^{1-2\delta} dt_1 \int\limits_{t_1+\delta}^{1-\delta} dt_2 \int\limits_{t_2+\delta}^{1} dt_3 = \int\limits_0^{1-2\delta} dt_1 \int\limits_{t_1+\delta}^{1-\delta} (1-t_2-\delta)dt_2 = \int\limits_0^{1-2\delta} dt_1 \left(-\frac{(1-t_2-\delta)^2}{2}\Bigg|_{t_1+\delta}^{1-\delta} \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1-2\delta} (1-t_1-2\delta)^2 dt_1 =$

$= \frac{(1-2\delta)^3}{6}$, поэтому $p = \frac{(1-2\delta)^3}{6}$.

50. Поскольку окружность радиуса R имеет периметр, равны $2\pi R$, а отрезок имеет периметр $4a$, то $p = \frac{4a}{2\pi R} = \frac{2a}{\pi R}$.

51.



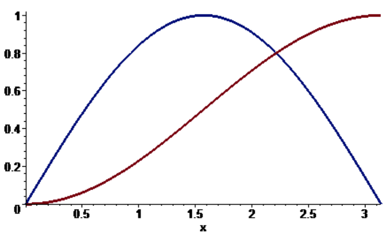
Пусть $\angle AOM = 2\alpha$. Сфера получается вращением полуокружности, заданной формулой $y = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \le x \le R.$ Тогда

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} R\,dx = 4\pi R^2.$$

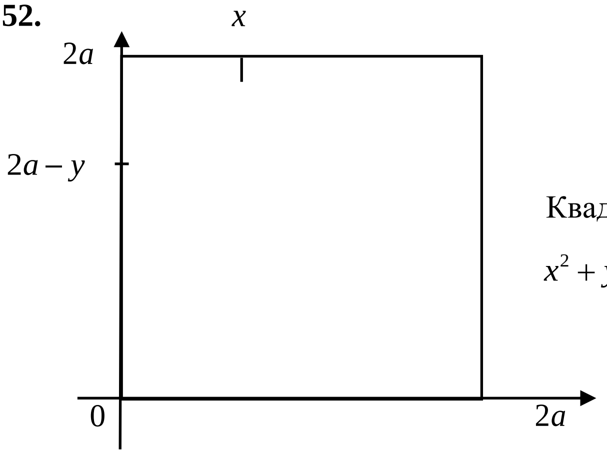
Аналогично, для сферической шапочки, $S = 2\pi \int\limits_{-R}^{-R\cos\alpha} R\,dx = 2\pi R^2(1-\cos\alpha).$

Отсюда, вероятность равна $p = \frac{S_1}{S} = \frac{2\pi R^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2},$ где $0 \le \alpha \le \pi.$

Таким образом, $F_2(\alpha) = (1-\cos\alpha)/2,\ f_2(\alpha) = \sin\alpha/2, 0 \le \alpha \le \pi.$ Как известно, для окружности радиуса R функция распределения $F_1(x) = x/(\pi R), 0 \le x \le \pi R.$ График функций $F_2(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ представлен ниже.

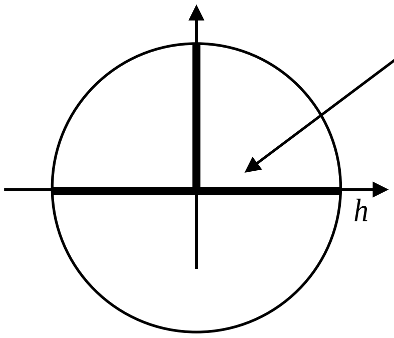


52.



Квадрат расстояния

$x^2 + y^2 < h^2 \iff \int\limits_0^h \sqrt{h^2 - y^2}\, dy,\ 0 < y < h.$

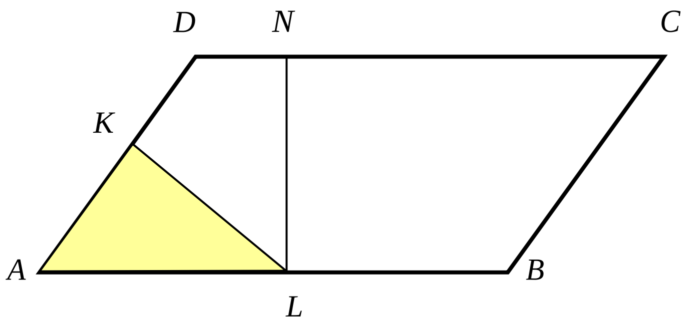


$\frac{\pi h^2}{4}$ (один угол, а их четыре)

Площадь $S = 4a^2$

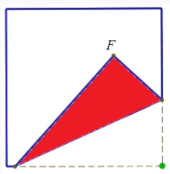
Вероятность равна $p = \frac{\pi h^2}{4a^2}$.

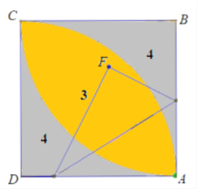
53.



Пусть $AK = KD = 3,\ AL = 6 = LB$, $LN \perp AB,\ KL \perp AD$. Тогда KL – геометрическое место точек, равноудаленных от A и D, а LN – геометрическое место точек, равноудаленных от A и B, поэтому если точка M попадет в треугольник AKL, то она будет ближе к точке A, чем к остальным точка, откуда $p = \frac{S_{AKL}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{6 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1}{8}$.

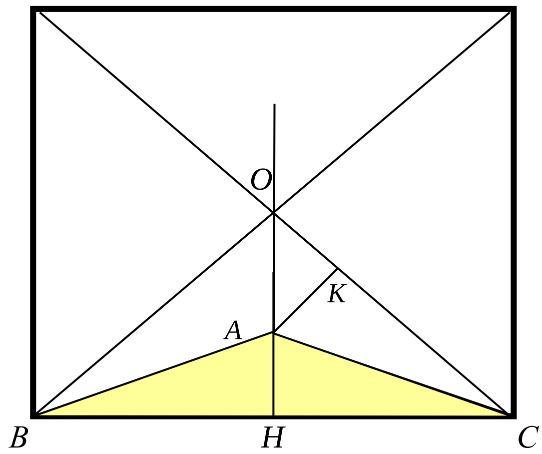
54. $p = \frac{1}{6}$ (см. вариант 53). **55.**





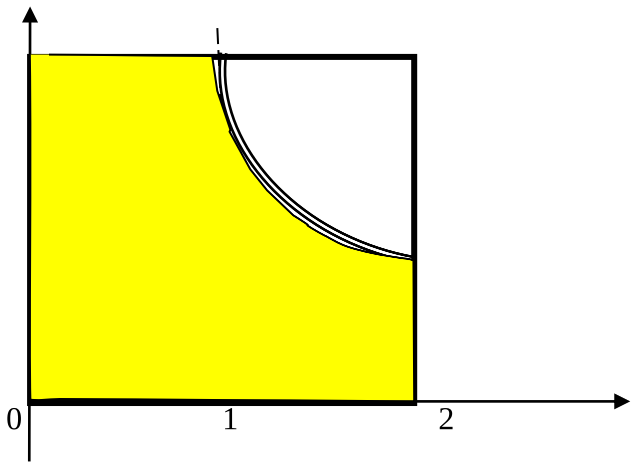
Результат зависит только от взаимного положения точки *F* и выбранной вершины. Поэтому можно считать, что вершина фиксирована (пусть это будет вершина *A*), а точка *F* выбирается случайно. Если точка *F* принадлежит оранжевому двуугольнику, то в результате сложения получится треугольник (серединный перпендикуляр к отрезку *AF* пересечёт одну из сторон *AD* или *BC*), а если точка *F* вне двуугольника, в серой области, то будет четырёхугольник.
Если считать, что площадь квадрата равна 1, то вероятности P попадания точки *F* в оранжевую области равны площадям этих областей P = $^{\pi}/_{2} - 1 \approx 1{,}57 - 1 = 0{,}57$..

56.



Рассмотрим треугольник AOC, где $AH = AK,\ AB = a$. Если точка попадает в треугольник BOC, то ее расстояние до стороны меньше, чем до диагонали квадрата, поэтому искомая вероятность равна $p = \left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)/\left(\frac{a^2}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$

57.

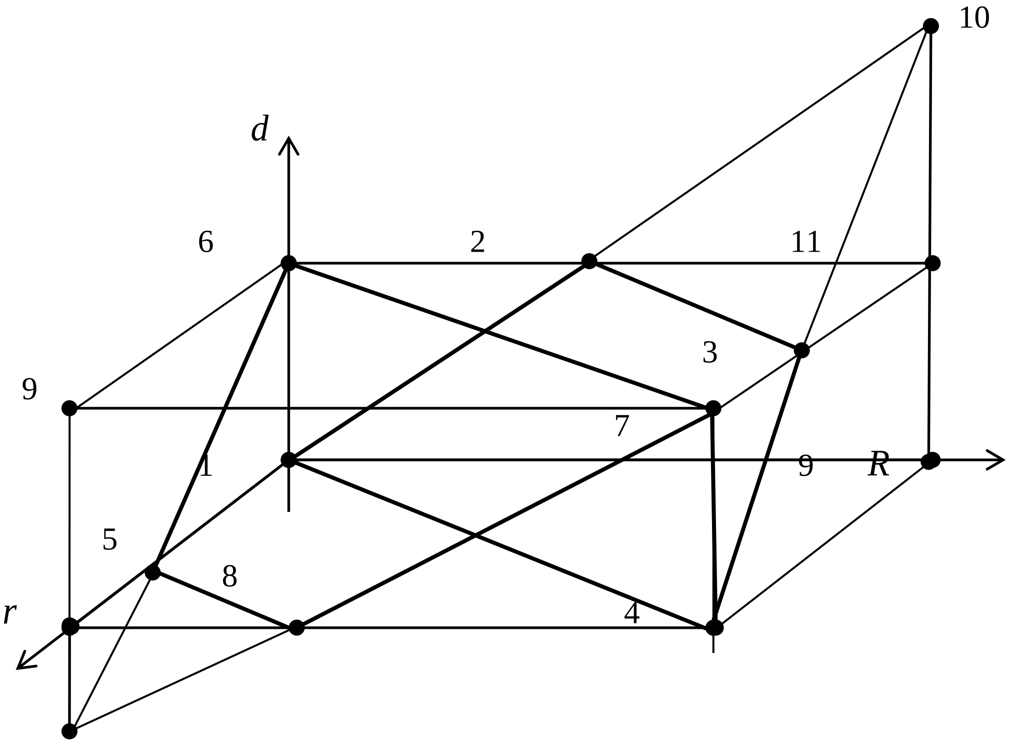


Из условия задачи имеем: $xy < 1 \Leftrightarrow y < \frac{1}{x}$.

Найдем площадь благоприятствующих исходов:

$S_1 = 2 + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2 + \ln 2,\ S = 4.$ Поэтому вероятность равна $p = \frac{S_1}{S} = \frac{2+\ln 2}{4}.$

58.



Вершины области возможных значений находятся в точках с координатами 1(50,40,9.5), (51,40,9.5), 4(51,41,9.5), (50,41,9.5),

6(50,40,10), (51,40,10) 7(51,41,10), (50,41,10).

Благоприятствующие исходы составляют множество точек, лежащих внутри и на границе многогранника с вершинами в точках

1(50,40,9.5), 2(50.5,40,10), 3(51,40.5,10), 4(51,41,9.5),

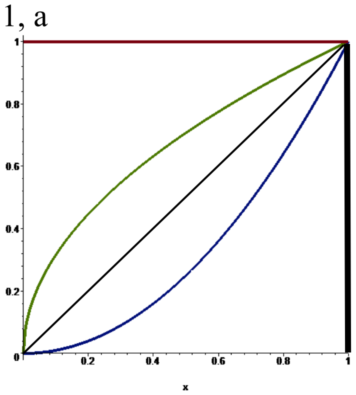
5(50,40.5,9.5), 6(50,40,10), 7(51,41,10), 8(50.5,41,9.5).

Объем параллелепипеда равен $V = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}$. Объем многогранника с вершина 1,2,3,4,11,10 равен $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}$.

Тогда объем многогранника с вершинами 12345678 равен

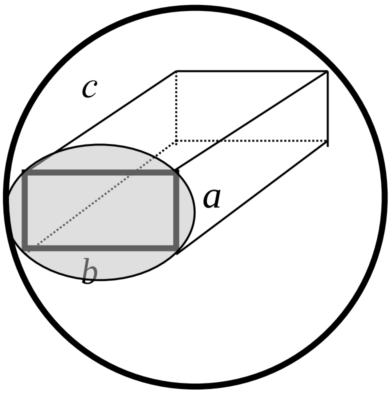
$V_2 = V - 2V_1 = \frac{1}{2} - \frac{7}{24} = \frac{5}{24}$, поэтому вероятность искомого события равна $p = \frac{V_2}{V} = \frac{5}{12}$.

59. Отобразим в системе координат $a0b$. Тогда множеств всех исходов – это единичный квадрат площади 1, а



а множество благоприятствующих исходов это области под кривой $b = a^2$ площади 1/3 и над кривой $b = \sqrt{a}$ тоже площади 1/3, поэтому искомая вероятность будет равна 2/3.

60. Речь идет о равномерном распределении на сфере. Коробок упадет на ребро ab, если его центр тяжести находится над ее проекцией на плоскость падения.



Площадь поверхности шара равна $S = \pi D^2$, где $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ – диаметр шара. Из сферической геометрии известно, что площадь сферического прямоугольника ab равна

$$S_1 = D^2 \operatorname{arctg} \frac{ab}{cD},$$

поэтому соответствующая вероятность равна

$$p_{ab} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ab}{cD} = 0.0613292 \approx 0.06, \ p_{bc} = 0.3297303 \approx 0.33, \ p_{ac} = 0.1089404 \approx 0.11.$$

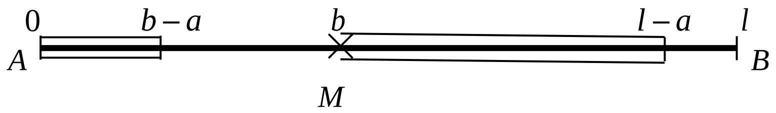
Для случая $a = b = c$ (т.е. для кубика) имеем:

$$p_{ab} = p_{bc} = p_{ac} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6} = 0.167.$$

61. Из условия задачи считаем, что точка K выбирается случайно из отрезка $[0, l-a]$.

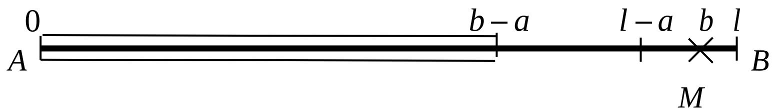
1) Если $b > a$ и $b < l - a$ (при $a < \frac{l}{2}$), то вероятность не накрыть точку M равна

$$p_1 = \frac{b - a + l - a - b}{l - a} = \frac{l - 2a}{l - a}$$



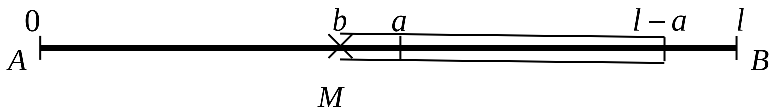
2) Если $b > a$ и $b \ge l - a$, то вероятность не накрыть точку M равна (как при $a < \frac{l}{2}$, так и при $a \ge \frac{l}{2}$)

$$p_2 = \frac{b - a}{l - a},$$



3) Если $b \le a$, то эта вероятность равна

$$p_3 = \frac{l - a - b}{l - a}.$$



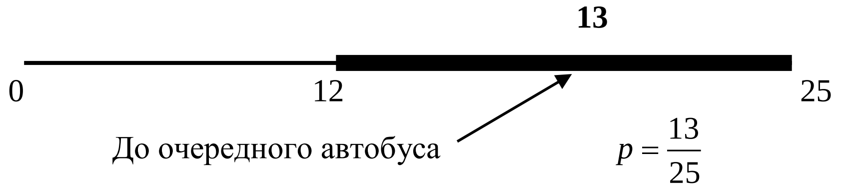
62. См. также решение задачи 61. Пусть $a < \frac{l}{2}$. Тогда искомая вероятность $\overline{p} = \overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \overline{p}_3$, где

$$\overline{p}_1 = \frac{1}{l} \int_a^{l-a} p_1\, db = \frac{(l-2a)^2}{l\,(l-a)}, \quad \overline{p}_2 = \frac{1}{l} \int_{l-a}^{l} p_2\, db = \frac{1}{l\,(l-a)} \int_{l-a}^{l} (b-a)\, db = \frac{l-a}{2l} - \frac{(l-2a)^2}{2l\,(l-a)},$$

$$\overline{p}_3 = \frac{1}{l} \int_0^a p_3\, db = \frac{1}{l\,(l-a)} \int_0^a (l-a-b)\, db = \frac{l-a}{2l} - \frac{(l-2a)^2}{2l\,(l-a)}.$$

Поэтому $\bar{p} = 1 - \frac{a}{l}$. Если $a \geq \frac{l}{2}$, то $\bar{p} = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \frac{a(2l - 3a)}{l(l-a)}$.

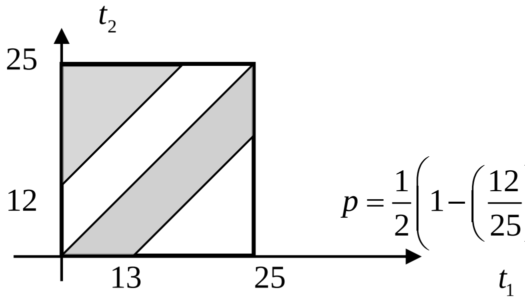
63.



$$p = \frac{13}{25}$$

Пусть 1-й автобус выбирает начальный момент t_1 в течение $(0, 25)$, а далее ровно через 25 минут, а вы приходит в случайный момент t_2.

1) если $t_2 < t_1$, но $t_2 + 15 > t_1 + 2 \Rightarrow t_2 > t_1 - 13$
2) если $t_2 > t_1$, но тогда $t_2 - 25 < t_1 \Rightarrow t_2 - 25 + 15 > t_1 + 2 \Rightarrow t_2 > t_1 + 12$



$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{13}{25}\right)^2\right) = \frac{13}{25}$$

64. Множество всех возможных значений есть квадрат площади 4. Корни квадратного уравнения действительны т. и т.т., когда $D/4 = a^2 - b \geq 0 \iff b \leq a^2$.Значит,

$\mathbf{P}(A) = \dfrac{2 + 2 \cdot \int_0^1 a^2 da}{4} = \dfrac{1 + 1/3}{2} = \dfrac{2}{3}$. Корни одинаковы, если $b = a^2$, поэтому $\mathbf{P}(B) = 0$.

Если корни x_1, x_2 положительны, то $x_1 \cdot x_2 = b > 0, \;\; x_1 + x_2 = -2a > 0 \Leftrightarrow a < 0,$ значит,

$\mathbf{P}(C) = \dfrac{1/3}{4} = \dfrac{1}{12}$, $\mathbf{P}(E) = \dfrac{2/3}{4} = \dfrac{1}{6}$, $\mathbf{P}(H) = \dfrac{1 + 1/3}{4} = \dfrac{1}{3}$.

65. Пусть (x, y) – элементарный исход, где x – температура первого вещества, а y – температура второго вещества, $550 \leq x \leq 620, 555 \leq y \leq 605$ (множество всех исходов). Множество благоприятствующих исходов: $560 \leq x \leq 600, 560 \leq x \leq 600.$ Поэтому вероятность равна

$p = \dfrac{40 \cdot 40}{70 \cdot 50} = \dfrac{16}{35}.$

66. Достаточно ограничиться случаем, когда точки A, B, C имеют координаты

$G = \{(x, y, z) : 0 < x < y < z < l\}$. Имеем: $m(G) = \dfrac{l^3}{6}$. Множество благоприятствующих исходов есть множество $g = \{(x, y, z) : 0 < x < y + d < z + 2d < l\}$. Проинтегрируем сначала по z, потом по y, потом по x. Заметим, например, что $x < y$ и $x - d < y$ влечет $\max(x, x-d) = x < y < l - 2d$ и т.д., поэтому

$$m(g) = \int_0^{l-2d} dx \int_x^{l-2d} dy \int_y^{l-2d} dz = \int_0^{l-2d} dx \int_x^{l-2d} dy (l - 2d - y) = \frac{1}{2}\int_0^{l-2d} (l - 2d - x)^2 dx = \frac{(l-2d)^3}{6}.$$

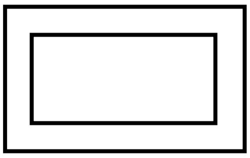
Таким образом, искомая вероятность равна $p = \left(1 - \dfrac{2d}{l}\right)^3$.

67. Так как множество всех возможных исходов G есть квадрат размером 2×2, то $m(G) = 4$, мера благоприятствующих исходов $m(g) = 0.25$, то $p_0 = 0.25/4 = 0.0625$, а значит,

$p = C_{20}^7 p_0^7 (1-p_0)^{13} = 77520 \cdot 0,0625^7 \cdot 0,9375^{13} = 0,0001248$.

68. Множество всех исходов есть интервал в 1,5 мин, а множество благоприятствующих исходов (когда горит зеленый) есть 1 мин, то $p = 1/1,5 = 2/3$.

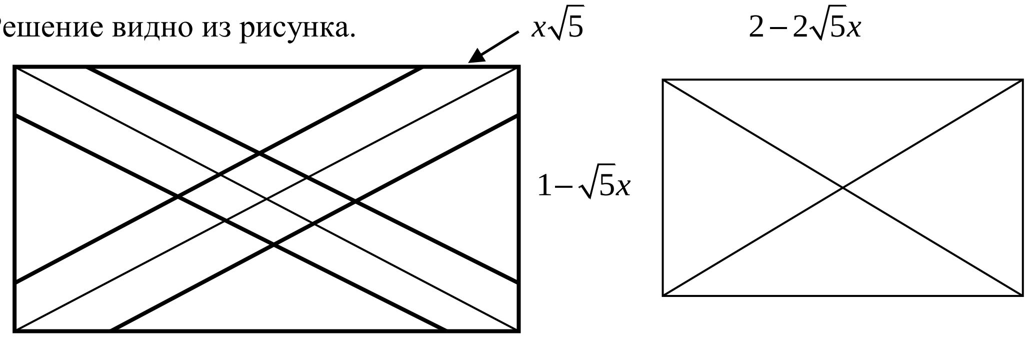
69. а) Множество всех исходов G есть прямоугольник размерами 1×2 площади $m(G) = 2$.



Множество благоприятствующих исходов g есть рамка шириной x, поэтому если $0 \le x \le 1/2$, то $m(g) = 2-(1-2x)\cdot(2-2x) = 6x-4x^2$, поэтому $p = x(3-2x)$. Если же $x \ge 1/2$, то $p = 1$.

б) Если $x < 1$, то $p = 0$, так длина большей стороны равна 2. Если $x \ge 1$, то для меньшей стороны условие будет выполнено, а для большей стороны множество благоприятствующих исходов есть множество $\{y : 2-x \le y \le x\}$ длины $2x-2$, значит $p = x-1$, причем должно быть $x \le 2$. Для $x > 2$ вероятность $p = 1$.

в) Решение видно из рисунка.



Если $x < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, то $p = \dfrac{1}{2}(2-(1-\sqrt{5}x)(2-2\sqrt{5}x)) = 1-(1-\sqrt{5}x)^2$, если $x \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, то $p = 1$.

70. ***Решение 1.*** Будем считать, что отрезок единичной длины разбивается на $k+1$ часть точками $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_k < 1$, т.е. это порядковые статистики из равномерного распределения выборки объема $k+1$. Тогда ценность будет пропорциональна

$$C = \xi_1^2 + (\xi_2-\xi_1)^2 + (\xi_3-\xi_2)^2 + ... + (\xi_k-\xi_{k-1})^2 + (1-\xi_k)^2 =$$

$$= 2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + ... + \xi_k^2 - \xi_2\xi_1 - \xi_3\xi_2 - ... - \xi_k\xi_{k-1} - 2\xi_k + 1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(C) = 2(\mathbf{E}(\xi_1^2) + \mathbf{E}(\xi_2^2) + \mathbf{E}(\xi_3^2) + ... + \mathbf{E}(\xi_k^2) - \mathbf{E}(\xi_2\xi_1) - \mathbf{E}(\xi_3\xi_2) - ... - \mathbf{E}(\xi_k\xi_{k-1}) - 2\mathbf{E}(\xi_k) + 1.$$

Известно, что если ξ_j есть j – я порядковая статистика из выборки объема n равномерного распределения, то

$$\mathbf{E}(\xi_j) = \frac{j}{n+1},\ \mathbf{E}(\xi_j^2) = \frac{(j+1)j}{(n+2)(n+1)},\ \mathbf{E}(\xi_j\xi_s) = \frac{j(s+1)}{(n+2)(n+1)},\ j < s.$$

В нашем случае

$$\mathbf{E}(\xi_j) = \frac{j}{k+1},\ \mathbf{E}(\xi_j^2) = \frac{(j+1)j}{(k+2)(k+1)},\ \mathbf{E}(\xi_j\xi_{j-1}) = \frac{(j+1)(j-1)}{(k+2)(k+1)},$$

поэтому

$$\mathbf{E}(C) = \frac{2}{(k+2)(k+1)}(2\cdot1 + 3\cdot2 + 4\cdot3 + ... + (k+1)k - 3\cdot1 - 4\cdot2 - ... - (k+1)(k-1)) - \frac{2k}{k+1} + 1 =$$

$$= \frac{2}{(k+2)(k+1)}(2+3+4+...+(k+1)) + \frac{1-k}{k+1} = \frac{k(k+3)}{(k+2)(k+1)} + \frac{1-k}{k+1} = \frac{2}{k+2}.$$

Таким образом, ценность пропорциональна $\dfrac{2}{k+1}$.

Решение 2. Положим $\upsilon_1 = \xi_1$, $\upsilon_i = \xi_i - \xi_{i-1}$, $i = 2,3,...,k$, и пусть $T = \sum_{i=1}^{k} \upsilon_i^2$. Рассмотрим

$$\mathbf{E}(T^m) = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{k} \upsilon_j^2\right)^m\right) = \sum_{m_1+m_2+...+m_k=m} \frac{m!}{m_1!\cdot...\cdot m_k!}\mathbf{E}((\upsilon_1^2)^{m_1}...(\upsilon_k^2)^{m_k}).$$

Далее,

$$\mathbf{E}((\upsilon_1^2)^{m_1}...(\upsilon_k^2)^{m_k}) = \mathbf{E}(\upsilon_1^{2m_1}...\upsilon_k^{2m_k}) = (k-1)!\int_\Omega \upsilon_1^{2m_1}...\upsilon_k^{2m_k} d\upsilon_1...d\upsilon_{k-1},$$

где $\upsilon_k = 1-\upsilon_1-...-\upsilon_{k-1}$ и $\Omega = \{(\upsilon_1,...,\upsilon_{k-1}): 0<\upsilon_j<1,\ j=1,...,k-1,\ \upsilon_1+...+\upsilon_{k-1}<1\}$.

Отсюда

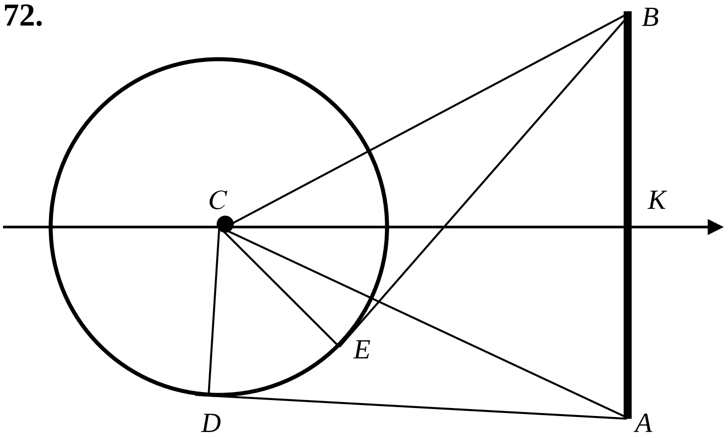
$$\int_\Omega \upsilon_1^{2m_1}...\upsilon_k^{2m_k} d\upsilon_1...d\upsilon_{k-1} = \frac{\Gamma(2m_1+1)...\Gamma(2m_k+1)}{\Gamma(2m_1+...+2m_k+k)} = \frac{(2m_1)!...(2m_k)!}{(2m+k-1)!},$$

где мы использовали, что $m_1+...+m_k = m$. В частности, для $m=1$ будем иметь k слагаемых, в силу того, что $(m_1,...,m_k) = (1,0,...,0),...,(0,...,0,1)$. Поэтому $\mathbf{E}(T) = (k-1)!k\dfrac{2!}{(2+k-1)!} = \dfrac{2}{k+1}$.

Кроме того, $\mathbf{E}(T^2) = (k-1)!\left(C_k^1 \dfrac{2!}{2!0!...0!}\dfrac{4!}{(4+k-1)!} + C_k^2 \dfrac{2!}{1!1!0!...0!}\dfrac{2!2!}{(4+k-1)!}\right) = \dfrac{4(k+5)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

71. Рассматривая прямоугольник со сторонами (x, y) имеем, что множество всех исходов – квадрат площади a^2, а площадь множества благоприятствующих исходов равна h^2, поэтому $p = \dfrac{h^2}{a^2}$.

72.



Пусть $C-$ центр окружности, $CK = a,\ BK = h = AK$. Тогда из теоремы Пифагора $AC = CB$. Кроме того, $CD = CE = R-$ радиусу окружности и $\angle CDA = \angle CEB = 90^\circ$. Значит, треугольник CDA равен треугольнику CEB. Пусть угловая мера дуги DE равна φ. Треугольники CDA и CEB поворачиваются на угол φ, поэтому $\angle ACB = \varphi,\ \angle KCB = \varphi/2$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{h}{a}$.

Длина дуги DE равна φR (в радианах), поэтому искомая вероятность

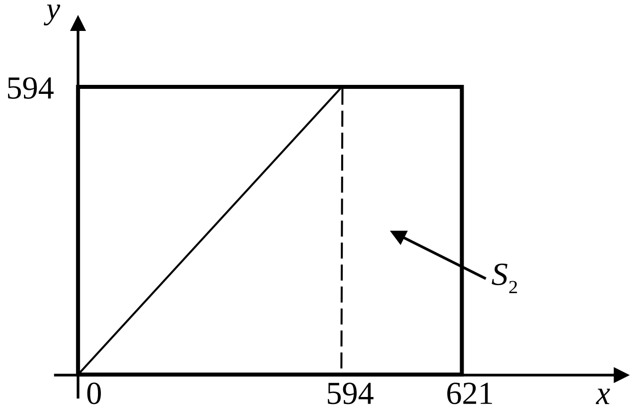
$$p = \frac{\varphi R}{2\pi R} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h}{a}.$$

73. (см. решение задачи 74). Рассматривая частный случай, когда круг превратился в точку, получим, что $p = \dfrac{a_1^2}{(a_0+a_1)^2}$.

74. Используя указание, имеем: $p = \dfrac{2\pi(F_1+F_2)+L_1L_2}{2\pi(F_0+F_2)+L_0L_2}$.

Теперь заметим, что $F_i = \pi a_i^2,\, L_i = 2\pi a_i$. Значит, $p = \dfrac{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2}{a_0^2+a_2^2+2a_0a_2} = \dfrac{(a_1+a_2)^2}{(a_0+a_2)^2}$.

75. Пусть $x-$ расстояние, которое водитель может проехать, а $y-$ удвоенное расстояние, которое необходимо проехать. Тогда элементарным исходом является (x, y), где $0 \le x \le 621 = 2\cdot 297+27$, $0 \le y \le 594 = 2\cdot 297$, т.е. прямоугольник S. Будем считать, что x и y равновозможны от 0 до 621 и от 0 до 594. Водителю не хватит бензина, если $x < y$, т.е. множество благоприятствующих исходов есть трапеция S_2.



Тогда $m(S) = 594\cdot 621$, $m(S_2) = 594\cdot 621 - \dfrac{1}{2}\cdot 594^2 = 594\cdot 324$. Вероятность равна

$$p = \frac{m(S_2)}{m(S)} = \frac{594\cdot 324}{594\cdot 621} = \frac{12}{23} = 0{,}5217.$$

76. а) По условию *i*-ое орудие поражает цель, если $|\beta_i + \xi_i + \varsigma - a| = |\xi_i + \varsigma| < \varepsilon$.

Так как с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \varsigma -$ независимы, $\mathbf{P}(\varsigma < x) = \dfrac{x+d}{2d}, |x| \le d$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n -$ одинаково распределены, то вероятность Q_n поражения залпом из n орудий определяется формулой

$$Q_n = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(|\xi_i+\varsigma| \ge \varepsilon)\right) = 1 - \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(|\xi_i+\varsigma| \ge \varepsilon)\right)|\varsigma\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(|\xi_i + x| \ge \varepsilon)\, f_\varsigma(x)\,dx =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2d}(1-\mathbf{P}(|\xi+x|<\varepsilon))^n\, f_\varsigma(x)\,dx.$$

Используя то, что $\xi \in (-c, c)$ и условие $c + \varepsilon < d$, находим

$$\mathbf{P}(|\xi_i + x| \ge \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c} < 1, & \text{если } |x| \le c - \varepsilon, \\ \dfrac{c+\varepsilon-|x|}{2c} < 1, & \text{если } c-\varepsilon < |x| < c+\varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x| \ge c+\varepsilon. \end{cases}$$

Значит, $Q_n = 1 - \dfrac{1}{d}\left(\displaystyle\int_0^{c-\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\left(1-\frac{c+\varepsilon-x}{2c}\right)^n dx + \int_{c+\varepsilon}^{d} dx\right) =$

$$= \frac{c+\varepsilon}{d} - \frac{c-\varepsilon}{d}\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n - \frac{2c}{d\,(n+1)}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{c+\varepsilon}{d}.$$

б) Введем вспомогательные случайные величины $\beta_i^* = \beta_i - a,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Эти величины независимы и имеют равномерное распределение на интервале $(-b, b), b > c + d + \varepsilon$. Условие поражения цели *i*-м орудием принимает вид: $|\beta_i + \xi_i + \varsigma - a| = |\beta_i^* + \xi_i + \varsigma| < \varepsilon.$

Аналогично пункту а) получаем $Q_n = 1 - \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(|\beta_i^* + \xi_i + \varsigma| \ge \varepsilon)\right) | \varsigma, \xi_1, ..., \xi_n\right) =$

$$= 1 - \frac{1}{2d\,(2c)^n}\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c}...\int_{-c}^{c}\bigcap_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(|\beta_i^* + y_i + x| < \varepsilon))\,dy_1...dy_n dx.$$

Так как $\beta_i^* \in \mathrm{R}(-b,b)$ и $b > c + d + \varepsilon \ge |y_i| + |x| + \varepsilon$ при любых $y_i \in [-c,c],\ \ x \in [-d,d],$ то $\mathbf{P}(|\,\beta_i^* + y_i + x\,| < \varepsilon) = \dfrac{2\varepsilon}{2b} = \dfrac{\varepsilon}{b},$ если $|y_i| \le c, |x| \le d.$

Значит, $Q_n = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{b}\right)^n \dfrac{1}{2d\,(2c)^n}\displaystyle\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c}...\int_{-c}^{c} dy_1...dy_n dx = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{b}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 1.$

Сравнение результатов пп а) и б) показывает, что при достаточно больших n поведение искусственного рассеивания при прицеливании увеличивает вероятность поражения цели. Этот неожиданный эффект был в свое время отмечен А.Н.Колмогоровым.

7. Литература

1. Гливенко В.И. Курс теории вероятностей. М.-Л., ГОНТИ, 1939. − 220 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2005. − 448 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. т.1 − 528 с.
4. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. М.: Финансы и Статистика, 2000. − 224 с.
5. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. − 192 с.
6. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука,1983. − 360с.
7. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989. − 320с.
8. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1989. − 328 с.
9. Сборник задач по математике для втузов, ч.3: теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1990. − 428 с.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций под ред. Свешникова А.А. СПб: Лань, 2007. − 448 с.
11. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1963. − 156 с.
12. Яглом А.,Яглом И. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.:Эдиториал УРСС, 2006. − 544 с.
13. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. М.-Л.: ГИТТЛ, 1954. − 246 с.
14. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир. 1990. − 240 с.
15. Mathai A.M. An Introduction to Geometrical Probability: Distributional Aspects with Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1999 – 554 p.
16. Ambartzumian, R. V. (Ed.). Stochastic and Integral Geometry. Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1987.
17. Isaac, R. The Pleasures of Probability. New York: Springer-Verlag, 1995.
18. Kendall, M. G. and Moran, P. A. P. Geometric Probability. New York: Hafner, 1963.
19. Kendall, W. S.; Barndorff-Nielson, O.; and van Lieshout, M. C. Current Trends in Stochastic Geometry. Likelihood and Computation. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998.
20. Klain, D. A. and Rota, G.-C. Introduction to Geometric Probability. New York: Cambridge University Press, 1997.
21. Santaló, L. A. Integral Geometry and Geometric Probability. Reading, MA: Addison-Wesley, 1976.

22. Solomon, H. Geometric Probability. Philadelphia, PA: SIAM, 1978.
23. Stoyan, D.; Kendall, W. S.; and Mecke, J. Stochastic Geometry and Its Applications, 2nd ed. New York: Wiley, 1987.
24. Tikhov M.S., Vyakhirev D.V. On the Average Length of the Way Out a Forest. – Journal of Math. Sciences, 2004, v.119, no.3, pp. 369-376.
25. Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора), М., МЦНМО, 2009.
26. Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
27. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971 − 536 с.
28. Симушкин С.В., Пушкин А.Н. Задачи по теории вероятностей. − Казань, Казан. ун-т, 2011. − 223 с.
29. Neyman J. Lectures and conferences on mathematical statistics, Dept. of Agriculture, Washington, 1952. − 273 p.

Михаил Семенович **Тихов**
Владимир Анатольевич **Гришин**

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования

«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.