

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Ю.А. Касаткина
Т.М. Митрякова

Потоки на окружности

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 "Математика",
02.03.01 "Математика и компьютерные науки",
01.03.02 "Прикладная математика и информатика",
01.03.03 "Механика и математическое моделирование."

Нижний Новгород
2015

УДК 517.9
ББК 22.1
П 64

П 64 Потоки на окружности. Составители: **Касаткина Ю.А., Митрякова Т.М.** Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 23 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Е.Н. Махрова**

Работа посвящена потокам на окружности в приложениях. Рассматриваются задачи из различных областей науки, на примере решения которых поясняется понятие потока на окружности. Кроме того, даны задания для самостоятельной работы студентов.

Предназначается студентам для более углубленного изучения качественной теории дифференциальных уравнений.

УДК 517.9
ББК 22.1

©Касаткина Ю.А., Митрякова Т.М., 2015
©Нижегородский госуниверситет
им. Н.И. Лобачевского, 2015

Введение

Хорошо известно, что визуализация решений дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ представляет собой векторное поле на прямой. Рассмотрим теперь другой вид дифференциального уравнения и соответствующее ему фазовое пространство. А именно, уравнению вида $\dot{\theta} = f(\theta)$, где θ — точка на окружности, а $\dot{\theta}$ — вектор скорости, определенный по правилу $\dot{\theta} = f(\theta)$, будет соответствовать теперь векторное поле на окружности. Аналогично прямой, окружность одномерна, но обладает одним важным свойством: двигаясь по окружности в одном направлении, частица, в конечном итоге, может вернуться в свое начальное положение. Эта отличительная от прямой особенность окружности приводит к появлению периодических решений соответствующего дифференциального уравнения. Иными словами, векторные поля на окружности являются базовой моделью систем, которые могут колебаться. Однако, во всех других отношениях, потоки на окружности подобны потокам на прямой. Мы будем изучать динамику некоторых простых генераторов, и затем покажем, что эти уравнения достаточно часто возникают в различных приложениях. Например, мелькание светлячков и колебания напряжения сверхпроводящих Джозефсоновских контактов были смоделированы с помощью того же уравнения, хотя частоты их колебаний отличаются примерно на десять порядков. В основу учебно-методического пособия легла книга [11].

1. Примеры и определения

Рассмотрим некоторые примеры и дадим более точное определение векторного поля на окружности.

Пример 1.1. Построить эскиз векторного поля на окружности, соответствующего уравнению $\dot{\theta} = \sin \theta$.

РЕШЕНИЕ 1.1. Координаты точки на окружности определим обычным образом: начиная с $\theta = 0$ в положении „восток“ и увеличивая θ против часовой стрелки. Чтобы сделать эскиз векторного поля, во-первых, найдем неподвижные точки, определяемые уравнением $\dot{\theta} = 0$. Это точки $\theta^* = 0$ и $\theta^* = \pi$. Для определения их устойчивости заметим, что $\sin \theta > 0$ на верхней полуокружности. Следовательно, $\dot{\theta} > 0$, таким образом, поток направлен против часовой стрелки.

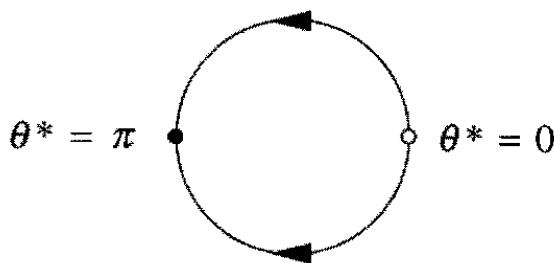


Рис. 1

Аналогично, поток направлен по часовой стрелке на нижней полуокружности, где $\dot{\theta} < 0$. Следовательно, $\theta^* = \pi$ устойчивая точка и $\theta^* = 0$ неустойчивая точка, как показано на рисунке 1. Заметим, что если рассматривать уравнение $\dot{x} = \sin x$, то получим векторное поле на прямой.

Пример 1.2. Объясните, почему $\dot{\theta} = 0$ не может быть рассмотрено как векторное поле на окружности для $-\infty < \theta < +\infty$.

РЕШЕНИЕ 1.2. Скорость определена неоднозначно. Например, $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ два положения одной и той же точки на окружности, но первое положение соответствует нулевой скорости, а второе 2π .

Для того, чтобы избежать этого, необходимо ограничить θ на $-\pi < \theta \leq \pi$, тогда вектор скорости будет иметь разрыв в точке,

соответствующей $\theta = \pi$. Таким образом, нет никакого способа рассматривать $\dot{\theta} = 0$ как гладкое векторное поле на всей окружности.

Конечно, нет никаких проблем трактовать $\dot{\theta} = 0$ как векторное поле на прямой, потому что $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ различные точки, и нет противоречия, как определить скорость в каждой из них.

Пример 1.2 предлагает, как определить векторное поле на окружности. Таким образом, геометрическое определение: векторное поле на окружности — это правило, ставящее в соответствие единственный вектор скорости каждой точке на окружности.

На практике такие векторные поля возникают при рассмотрении системы первого порядка $\dot{\theta} = f(\theta)$, где $f(\theta)$ вещественнозначная 2π -периодическая функция, то есть $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ для всех действительных θ . Кроме того, предполагается (как обычно), что $f(\theta)$ достаточно гладкая, чтобы гарантировать существование и единственность решений. С другой стороны, эта система может быть расценена как особый случай векторного поля на прямой, хотя понятнее трактовать ее как векторное поле на окружности (см. пример 1.1). Это означает, что значения θ , отличающиеся друг от друга на целое число, кратное 2π , не различаются. Здесь периодичность $f(\theta)$ становится важна — это гарантирует, что скорость $\dot{\theta}$ однозначно определяется в каждой точке θ на окружности, в том смысле, что $\dot{\theta}$ одно и то же, будь то точка θ , или $\theta + 2\pi$, или $\theta + 2\pi k$ для любого целого k .

2. Однородный генератор

Точку на окружности часто называют углом или фазой. Тогда простейший генератор из всех — это тот, в котором фаза θ меняется равномерно:

$$\dot{\theta} = \omega,$$

где ω — константа. Решение этого уравнения имеет вид

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0,$$

которое соответствует равномерному движению по окружности с угловой частотой ω . Это решение является периодическим, в том смысле, что $\theta(t)$ изменяется каждые 2π , и поэтому возвращается в ту же точку на окружности через некоторое время $T = \frac{2\pi}{\omega}$. T называется периодом колебаний.

Заметим, что амплитуда колебаний в этой системе не меняется. Если бы амплитуда, также как и фаза, изменялась, то необходимо было бы рассматривать двумерное фазовое пространство, эта

ситуация более сложная (можно представить, что колебания возникают с фиксированной амплитудой, соответствующей радиусу кругового фазового пространства, в любом случае амплитуда не играет роли в динамике).

Пример 2.1. Два бегуна равномерно двигаются по окружности. Один тратит T_1 секунд на полный круг, другой — $T_2 > T_1$ секунд. Конечно, первый будет периодически настигать второго. Через какое время первый бегун догонит второго, при условии, что они стартовали одновременно?

РЕШЕНИЕ 2.1. Пусть $\theta_1(t)$ положение первого бегуна на трассе. Тогда $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. Данное уравнение говорит о том, что первый бегун работает в устойчивом режиме и полный круг проходит каждые T_1 секунд. Аналогично полагаем, что $\dot{\theta}_2 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ для второго бегуна.

Условием того, что первый бегун догонит второго, является то, что угол между ними увеличивается на 2π . Таким образом, если определить фазовую разность $\phi = \theta_1 - \theta_2$, то необходимо найти, как долго ϕ будет увеличиваться на 2π . Найдем $\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2$. Таким образом ϕ возрастает на 2π через время $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)^{-1}$.

Пример 2.1 иллюстрирует эффект, называемый явлением удара. Два не взаимодействующих генератора с различными частотами будут периодически входить в фазы друг друга и выходить из фаз друг друга. Этот эффект можно наблюдать и в действительности, когда колокола двух различных церквей будут звонить одновременно, сначала их звучания медленно расходятся, а затем, в конечном итоге, колокола снова звонят вместе. Если генераторы взаимодействуют (например, если два бегуна пытаются остаться вместе, или звонари могут слышать друг друга), тогда можно наблюдать более интересные эффекты, как будет рассмотрено чуть ниже на примере мигающего ритма светлячков.

3. Неоднородный генератор

Уравнение

$$(1) \quad \dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$$

возникает во многих различных отраслях науки и техники, таких, как: электроника, биология (колеблющиеся нейроны, мигание светлячков, человеческий цикл сна и бодрствования), физика

конденсированного состояния вещества (Джозефсоновское соединение, волны заряд-плотность), механика (демпфированный маятник, приводимый в движение постоянным вращающим моментом). Некоторые из этих приложений будут обсуждены далее.

Анализируя уравнение (1), будем предполагать, что $\omega > 0$ и $a \geq 0$ для удобства, результаты для отрицательных ω и a аналогичны.

3.1. Векторные поля

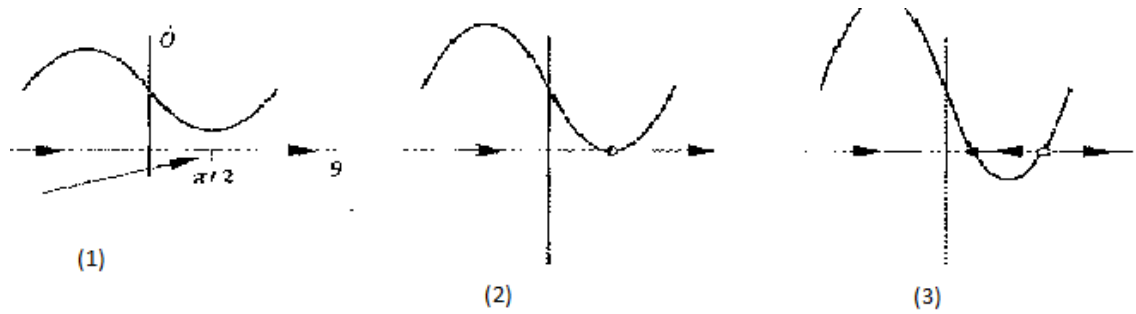


Рис. 2

Если $a = 0$, то уравнение (1) становится уравнением однородного генератора. Параметр a дает неоднородность в потоке по окружности: поток является самым быстрым в $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и самым медленным в $\theta = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2, (1), $a < \omega$). Эта неоднородность становится более выраженной при увеличении параметра a . Когда a чуть меньше, чем ω , колебания становятся очень судорожными: точке фазы $\theta(t)$ требуется много времени, чтобы пройти через „бутылочное горлышко“ около $\theta = \frac{\pi}{2}$, после которого точка проходит оставшуюся часть окружности в более быстрых временных рамках. Когда $a = \omega$, система вообще прекращает колебаться: полуустойчивая неподвижная точка рождается при бифуркации „седло-узел“ в $\theta = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2, (2)) $a = \omega$). Наконец, когда $a > \omega$, полуустойчивая неподвижная точка распадается на устойчивую и неустойчивую неподвижные точки (см. рис. 2, (3)). Все траектории стремятся к устойчивой неподвижной точке при $t \rightarrow \infty$. Аналогичную картину можно показать изображая векторное поле на окружности (см. рис. 3).

Пример 3.1. *Используя линейный анализ устойчивости, классифицировать неподвижные точки (1) для $a > \omega$.*

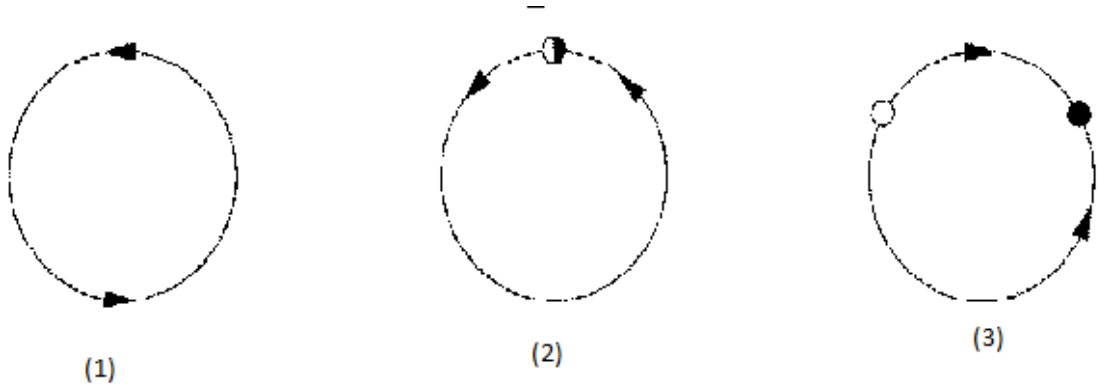


Рис. 3

РЕШЕНИЕ 3.1. *Неподвижные точки θ^* удовлетворяют уравнению*

$$\sin \theta^* = \frac{\omega}{a}, \cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}.$$

Их линейная устойчивость определяется

$$f'(\theta^*) = -a \cos \theta^* = \mp a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}.$$

Таким образом неподвижная точка с $\cos \theta^ > 0$ будет устойчивой. Это согласуется с рисунком 2, (3).*

3.2. Период колебания

Для $a < \omega$ период колебаний может быть найден аналитически, а именно: время, необходимое для изменения θ на 2π , определяется формулой

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta},$$

где воспользовались (1), чтобы заменить $\frac{dt}{d\theta}$. Этот интеграл может быть оценен методами комплексных переменных, или заменой $u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. В результате получим

$$(2) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}.$$

Рисунок 4 показывает график T как функции от a .

Когда $a = 0$, уравнение (2) сводится к $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - известный результат для однородного осциллятора. Период увеличивается с a

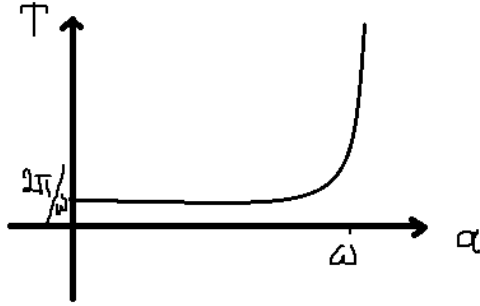


Рис. 4

и уменьшается, при a стремящемся к ω снизу (обозначим этот предел $a \rightarrow \omega^-$). Мы можем оценить порядок дивергенции, заметив, что

$$\sqrt{\omega^2 - a^2} = \sqrt{\omega + a}\sqrt{\omega - a} \approx \sqrt{2\omega}\sqrt{\omega - a}$$

при $a \rightarrow \omega^-$. Следовательно,

$$(3) \quad T \approx \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}}\right) \frac{1}{\sqrt{\omega - a}},$$

который показывает, что T „взрывается“ как $(a_c - a)^{-\frac{1}{2}}$, где $a_c = \omega$. Теперь объясним происхождение этого квадратного корня законом скейлинга.

3.3. „Призраки“ и „бутылочные горлышки“

Закон скейлинга для квадратного корня, найденный выше, является очень общей особенностью систем, которые находятся вблизи седло-узловой бифуркации. Сразу после столкновения неподвижных точек, возникает седло-узловой остаток или „призрак“, который замедляет прохождение через „бутылочное горлышко“.

Например, рассмотрим $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$ для уменьшающихся значений a , начиная с $a > \omega$. При уменьшении a , две неподвижные точки приближаются друг к другу, сталкиваются и исчезают (эта последовательность явлений была показана ранее на рис. 3, только в обратном направлении). Для a чуть меньше, чем ω , неподвижных точек около $\pi/2$ нет, но они еще дадут о себе знать через седло-узловой „призрак“ (см. рис.5).

График $\theta(t)$ изображен на рис. 6. Следует обратить внимание на то, как траектория проводит практически все свое время, проходя через „горлышко бутылки“.

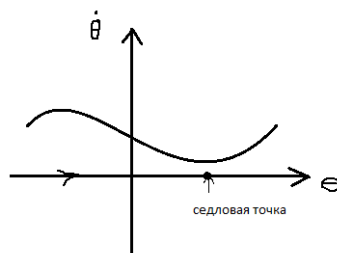


Рис. 5

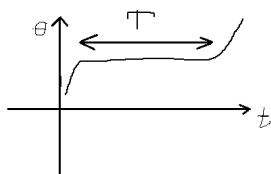


Рис. 6

Теперь получим общий закон скейлинга для времени, которое потребуется для прохождения „бутылочного горлышка“. Единственное, что имеет значение, так это поведение $\dot{\theta}$ в непосредственной близости от минимума, поскольку время, проведенное там, доминирует над всеми другими временными масштабами в задаче. В общем, $\dot{\theta}$ имеет вид параболы вблизи своего минимума. Тогда проблема чрезвычайно упрощается: динамика может быть сведена к нормальной форме для бифуркации седло-узел. Локальным перемасштабированием пространства, мы можем переписать векторное поле как

$$\dot{x} = r + x^2,$$

где r пропорционально расстоянию от бифуркации, и $0 < r \ll 1$. График \dot{x} показан на рис. 7.

Чтобы оценить время, проведенное в „горлышке“, вычислим время, необходимое x для перехода от $-\infty$ (все время с одной стороны от „горлышка“) к $+\infty$ (все время с другой стороны). В результате получим

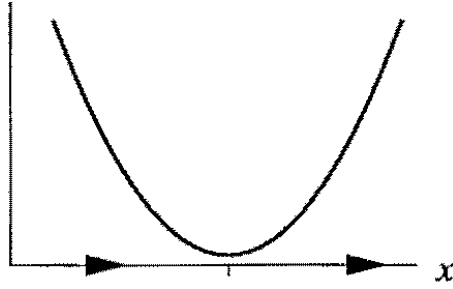


Рис. 7

$$(4) \quad T_{bottleneck} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

который показывает общность закона скейлинга квадратного корня.

Пример 3.2. Оценить период $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$ в пределе $a \rightarrow \omega^-$, используя метод нормальных форм вместо точного результата.

РЕШЕНИЕ 3.2. Период будет основным временем, необходимым, чтобы пройти через „горлышко“. Для оценки этого времени, будем использовать разложение в ряд Тейлора в окрестности $\theta = \frac{\pi}{2}$, где возникает „бутылочное горлышко“. Пусть $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$, где ϕ достаточно мало. Тогда

$$\dot{\phi} = \omega - a \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = \phi - a \cos \phi = \omega - a + \frac{1}{2}a\phi^2 + \dots,$$

которое близко к желаемой нормальной форме. Если положить

$$x = (a/2)^{1/2}\phi, r = \omega - a,$$

то $(2/a)^{1/2}\dot{x} \approx r + x^2$. Разделяя полученные переменные

$$T \approx (2/a)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r+x^2} = (2/a)^{1/2} \frac{\pi}{\sqrt{r}}.$$

Теперь подставим $r = \omega - a$. Кроме того, поскольку $a \rightarrow \omega^-$, мы можем заменить $2/a$ на $2/\omega$. Следовательно

$$T \approx \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}}\right) \frac{1}{\sqrt{\omega - a}},$$

что согласуется с (3).

4. Демпфированный маятник

Рассмотрим простой механический пример неоднородного генератора: демпфированный маятник, приводимый в движение постоянным вращающим моментом. Через θ обозначим угол между маятником и нисходящей вертикалью, и предположим, что θ увеличивается против часовой стрелки (см. рис.8).

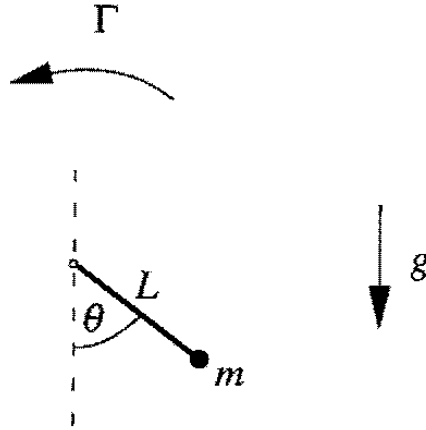


Рис. 8

Тогда закон Ньютона дает

$$(5) \quad mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma,$$

где m — масса и L — длина маятника, b — коэффициент вязкого демпфирования, g — ускорение свободного падения, а Γ — постоянный крутящий момент. Все эти параметры являются положительными. В частности, $\Gamma > 0$ означает, что приложенный момент закручивает маятник против часовой стрелки, как показано на рисунке 8.

Уравнение (5) является системой второго порядка, но в демпфированном пределе достаточно большого b , она может быть аппроксимирована системой первого порядка. В этом пределе инерционное слагаемое $mL^2\ddot{\theta}$ незначительно и, таким образом, (5) принимает вид

$$(6) \quad b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma.$$

Чтобы понять физическую интерпретацию этой задачи, можно представить, что маятник погружен в патоку. Вращающий момент Γ позволяет маятнику „вспахивать“ его вязкое окружение. Это противоположный предел знакомому идеальному случаю, в котором энергия сохраняется, и маятник качается взад и вперед вечно. В данном случае энергия теряется на затухание и переходит в прилагаемый крутящий момент.

Для анализа (6), разделим обе части уравнения на mgL , получим

$$\frac{b}{mgL}\dot{\theta} = \frac{\Gamma}{mgL} - \sin \theta.$$

Следовательно, если положить

$$(7) \quad \tau = \frac{mgL}{b}t, \gamma = \frac{\Gamma}{mgL},$$

то

$$(8) \quad \theta' = \gamma - \sin \theta,$$

где $\theta' = d\theta/d\tau$.

Безразмерная группа γ представляет собой отношение приложенного вращающего момента к максимальному гравитационному крутящему моменту. Если $\gamma > 1$, то приложенный вращающий момент никогда не может быть уравновешен гравитационным крутящим моментом и маятник будет постоянно опрокидываться. Скорость вращения является неоднородной, так как сила тяжести помогает приложенному вращающему моменту с одной стороны, и противостоит ему с другой (см. рис. 9).

При $\gamma \rightarrow 1^+$, маятник тратит все больше и больше времени, чтобы подняться мимо $\theta = \pi/2$ на медленной стороне. Когда $\gamma = 1$ появляется неподвижная точка в $\theta^* = \pi/2$, и затем разделяется на две когда $\gamma < 1$ (см. рис. рисунок 10). Из физических соображений ясно, что нижнее из двух положений равновесия является устойчивым.

При уменьшении γ , две неподвижные точки разбегаются дальше друг от друга. Наконец, когда $\gamma = 0$ приложенный вращающий момент обращается в нуль и существует неустойчивое равновесие вверху (перевернутый маятник) и устойчивое равновесие внизу.

5. Светлячки

Светлячки представляют один из самых впечатляющих примеров синхронизации в природе. В некоторых частях Юго-Восточной Азии, тысячи светлячков-самцов собираются на деревьях ночью и

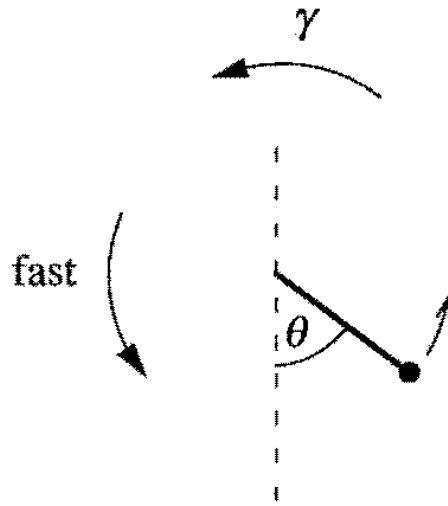


Рис. 9

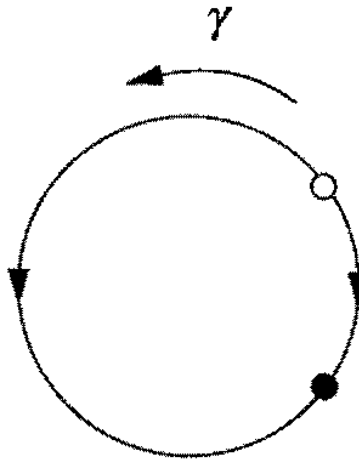


Рис. 10

вспыхивают и гаснут в унисон. Тем временем самки светлячков, летая в воздухе, наблюдают за самцами с красивым светом.

Чтобы по-настоящему оценить это представление, необходимо посмотреть видео этого эффекта. Как происходит синхронизация? Конечно, светлячки не синхронизированы, они находятся на деревьях, в сумраке, и синхронность накапливается постепенно, по мере того, как сгущается ночь. Ключом к разгадке является то, что светлячки влияют друг на друга: когда один светлячок видит вспышку другого, он замедляет или убыстряет свечение, чтобы вспыхнуть более близко в фазе на следующем цикле.

5.1. Модель

Ermentrout и Rinzel (1984) предложили простую модель синхронного мигания светлячков и их реакций на раздражители. Предположим, что $\theta(t)$ фаза мигания светлячка, где $\theta = 0$ соответствует моменту, когда излучается вспышка. Предположим, что в отсутствие раздражителей, светлячок проходит свой цикл с частотой ω , такой что $\dot{\theta} = \omega$. Теперь предположим, что существует периодический стимул, фаза которого Θ удовлетворяет уравнению

$$(9) \quad \dot{\Theta} = \Omega,$$

где $\Theta = 0$ соответствует вспышке стимула. Будем моделировать ответ светлячка этому стимулу следующим образом: если стимул находится впереди в цикле, то светлячок ускоряется в попытке синхронизировать, с другой стороны, светлячок замедляется, если он вспыхивает слишком рано. Простая модель, учитывающая эти предположения, примет вид

$$(10) \quad \dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta),$$

где $A > 0$. Например, если Θ опережает θ (т.е. $0 < \Theta - \theta < \pi$), светлячок ускоряется ($\dot{\theta} > \omega$). Сила сброса A измеряет способность светлячка изменить свою мгновенную частоту.

5.2. Анализ

Проанализируем динамику сдвига фаз $\phi = \Theta - \theta$. Вычитая (10) из (9), получим:

$$(11) \quad \dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin \phi,$$

которое является уравнением неоднородного генератора для $\phi(t)$. Уравнение (11) может быть преобразовано путем замены

$$(12) \quad \tau = At, \mu = \frac{\Omega - \omega}{A}.$$

Тогда

$$(13) \quad \phi' = \mu - \sin \phi,$$

где $\phi' = \frac{d\phi}{dt}$. Безразмерная группа μ является мерой разности частот относительно силы сброса. Когда μ мало, частоты располагаются относительно близко друг к другу, поэтому захват возможен. Эти ситуации изображены на рисунке 11, где нарисованы векторные поля для (13) при различных значениях $\mu \geq 0$ (аналогично при $\mu < 0$).

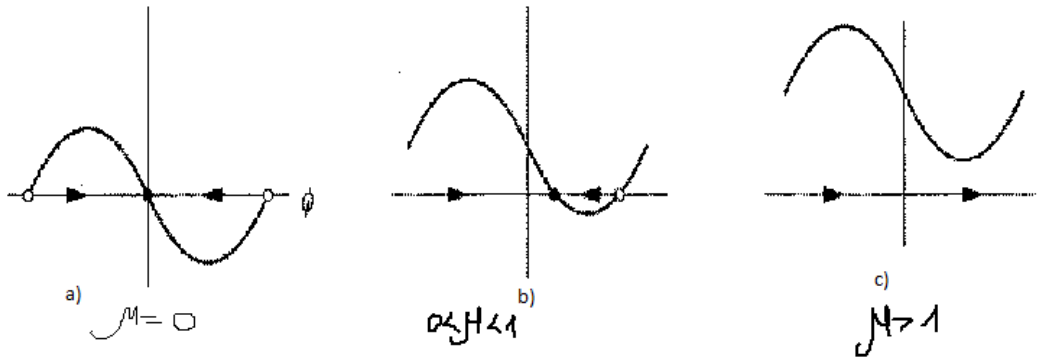


Рис. 11

Когда $\mu = 0$, все траектории стремятся к устойчивой неподвижной точке $\phi^* = 0$ (см. рис. 11,а)). Таким образом, светлячок в конечном счете увлекает с нулевым сдвигом фаз в случае $\Omega = \omega$. Другими словами, светлячок и стимул мигают одновременно, если светлячок приводится в действие со своей естественной частотой. Рис. 11, b) показывает, что для $0 < \mu < 1$, кривая на рис.11, а) поднимается вверх и устойчивые и неустойчивые неподвижные точки становятся ближе друг к другу. Все траектории все еще стремятся к устойчивой неподвижной точке, но теперь $\phi^* > 0$. Так как сдвиг фаз приближается к константе, можно сказать, что ритм светлячка является блок-фазой для стимула. Захват фазы означает, что светлячок и стимул бегут с одной и той же мгновенной частотой, хотя они больше не вспыхивают совместно. Результат $\phi^* > 0$ предполагает, что стимул мигает быстрее светлячка в каждом цикле. Это имеет смысл — предполагали $\mu > 0$, а это означает, что $\Omega > \omega$, стимул по своей природе быстрее, чем светлячок, и гонит его быстрее, чем он хочет пойти. Таким образом, светлячок отстает. Но он никогда не будет быстрее стимула — он всегда отстает по фазе на постоянную величину ϕ^* .

Если продолжать увеличивать μ , то устойчивые и неустойчивые неподвижные точки, в конечном итоге, сливаются в седло-узловую бифуркацию при $\mu = 1$. Для $\mu > 1$ обе неподвижные точки исчезают и захват фазы потерян, разность фаз ϕ неограниченно возрастает, что соответствует фазе дрейфа (см. рис. 11,с)) (конечно, как только ϕ достигает значения 2π , осцилляторы снова будут в фазе). Заметим, что фазы не являются независимыми, что качественно согласуется с экспериментами Хэнсона (1978): ϕ медленнее всего растет, когда она проходит под минимумом синусоидальной волны (см. рис. 11,с)) при $\phi = \pi/2$, и наиболее быстро растет, когда она проходит под максимумом в $\phi = -\pi/2$.

Модель делает ряд конкретных и проверяемых предсказаний. Захват, по прогнозу, будет возможным только в пределах симметричного интервала частот, а именно $\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A$. Этот интервал называют диапазоном захвата (см. рис. 12).



Рис. 12

Измеряя диапазон захвата экспериментально, можно уточнить значение параметра A . Тогда модель выдвигает устойчивую гипотезу для сдвига фаз во время захвата, а именно,

$$(14) \quad \sin \phi^* = \frac{\Omega - \omega}{A},$$

где $-\pi/2 \leq \phi^* \leq \pi/2$ соответствует устойчивой неподвижной точке (11). Кроме того, для $\mu > 1$, период фазы дрейфа может быть спрогнозировано следующим образом. Время, необходимое для ϕ для изменения на 2π определяется по формуле

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Omega - \omega - A \sin \phi}.$$

Чтобы оценить этот интеграл, воспользуемся формулой (2), которая дает

$$(15) \quad T_{drift} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - A^2}}.$$

Так как A и ω предположительно фиксированные свойства светлячка, прогнозы (14) и (15) могут быть проверены путем изменения частоты Ω . Такие эксперименты еще предстоит проделать.

Упражнения

1. Для каждого ли действительного значения a уравнение $\dot{\theta} = \sin(a\theta)$ дает четко определенное векторное поле на окружности?

2. Для каждого из следующих векторных полей найти и классифицировать все неподвижные точки и сделать эскиз фазового портрета на окружности:

a) $\dot{\theta} = 1 + 2 \cos \theta$;

b) $\dot{\theta} = \sin^3 \theta$;

c) $\dot{\theta} = 3 + \cos 2\theta$;

d) $\dot{\theta} = \sin 2\theta$;

e) $\dot{\theta} = \sin \theta + \cos \theta$;

f) $\dot{\theta} = \sin k\theta$, где k положительное целое.

3. (Потенциальное векторное поле на окружности)

a) Рассмотрим векторное поле на окружности, заданное уравнением $\dot{\theta} = \cos \theta$. Показать, что эта система имеет однозначный потенциал $V(\theta)$, то есть для каждой точки на окружности существует определенное значение V такое, что $\dot{\theta} = -dV/d\theta$ (как обычно, θ и $\theta + 2\pi k$ рассматриваются как одинаковые точки на окружности для каждого целого k).

b) Теперь рассмотрим $\dot{\theta} = 1$. Показать, что не существует однозначного потенциала $V(\theta)$ для этого векторного поля на окружности.

c) Каково общее правило? Когда $\dot{\theta} = f(\theta)$ имеет однозначный потенциал?

4. (Часовая проблема) В 12 : 00 часовая стрелка и минутная стрелка часов идеально ровные. Когда в следующий раз они будут выровнены?

5. Период колебаний неоднородного генератора задается интегралом $T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta}$, где $\omega > a > 0$. Оценить этот интеграл следующим образом.

a) Пусть $u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Решить для θ и выразить $d\theta$ в терминах u и du .

b) Показать, что $\sin \theta = 2u/(1 + u^2)$. (Указание: нарисуйте прямоугольный треугольник с основанием 1 и высотой u . Тогда $\frac{\theta}{2}$ — это угол напротив стороны длины u , так как $u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ по определению. В заключении, применить формулу половинного угла $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$.)

c) Показать, что $u \rightarrow \pm\infty$ при $\theta \rightarrow \pm\pi$, и, используя этот факт, переписать пределы интегрирования.

d) Выразить T как интеграл относительно u .

6. (Обоснованность демпфированного предела) Найти условия, при которых существует обоснованная аппроксимация уравнения $mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma$ его демпфированным пределом $b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma$.

7. (Треугольная волна) В модели светлячков синусоидальная форма функции отклика светлячков была выбрана несколько условно. Рассмотрим альтернативную модель $\dot{\Theta} = \Omega$, $\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$, где f задается теперь треугольной волной, а не синусоидальной. Точнее, пусть $f(\phi) = \phi$ при $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ и $f(\phi) = \pi - \phi$ при $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$ на промежутке $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$, и продолжена периодически вне этого промежутка.

- a) Построить график $f(\phi)$.
- b) Найти диапазон захвата.
- c) Предполагая, что светлячок является фазой-блоком для стимула, найти формулу для разности фаз ϕ^* .
- d) Найти формулу для T_{drift} .

Литература

- [1] Арнольд В. И. Малые знаменатели I. Отображение окружности на себя // Известия АН СССР. Сер. Мат. - 1961. - Т. 25. - С. 21-86.
- [2] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ РАН. - 1986. - Т. 5. - 283 с.
- [3] Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев: Наукова думка, 1979. - 174 с.
- [4] Birkhoff G. On the periodic motions of dynamics // Acta math. - 1927. - V. 50. - P. 359-379.
- [5] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. - М.: Факториал, 1999. - 768 с.
- [6] Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. - М.: Мир, 1983. - 302 с.
- [7] Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Уч. Зап. ГГУ. Горький, Изд-во ГГУ. Вып. 12. - 1939. - С. 215-229.
- [8] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972. - 472 с.
- [9] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. - М.: Наука, 1975. - 304 с.
- [10] Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos - Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press, 1999.
- [11] Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos - Perseus Books is a member of the Perseus Books Group, 1994. - 505 p.
- [12] Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979. - 280 с.
- [13] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003. - 428 с.

Содержание

Введение	3
1. Примеры и определения	4
2. Однородный генератор	5
3. Неоднородный генератор	6
3.1. Векторные поля	7
3.2. Период колебания	8
3.3. „Призраки“ и „бутылочные горлышки“	9
4. Демпфированный маятник	12
5. Светлячки	13
5.1. Модель	15
5.2. Анализ	15
Литература	21

Юлия Александровна **Касаткина**
Татьяна Михайловна **Митрякова**

Потоки на окружности

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования "Национальный
исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.