МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Л.В.Лебедева

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
03.03.03. «Радиофизика», 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2019

УДК 517
ББК 22.16
Л33

Рецензент: кандидат технических наук, доцент **С. Н. Стребуляев**

Л33 Лебедева Л.В. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 26 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются две темы по курсам «Математический анализ» и «Кратные интегралы и ряды» - дисциплинам, читаемым на радиофизическом факультете ННГУ во втором семестре. Каждый из разделов пособия («Локальный экстремум функции нескольких переменных» и «Условный экстремум») содержит необходимый минимум теоретических сведений, примеры решения типовых задач, упражнения (с ответами) для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03. «Радиофизика», 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
к.ф.-м., доцент **Н.Д.Миловский**,
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
д.ф.-м.н., профессор **Е.З.Грибова**

УДК 517
ББК 22.16

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

1. Основные понятия и теоремы

В первой главе рассмотрим вопросы, связанные с понятием безусловного локального экстремума функции.

Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, ..., x_m)$ определена в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_1^\circ, ..., x_m^\circ)$.

Определение. Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 ***локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая окрестность точки M_0, в которой для всех $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$.

Определение. Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 ***нестрогий локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая окрестность точки M_0, в которой для всех $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0)$ $(f(M) \geq f(M_0))$.

Наибольший (наименьший) из локальных максимумов (минимумов) называется ***глобальным максимумом (минимумом)***.

Если функция имеет в точке M_0 максимум или минимум, то говорят также, что она имеет в этой точке ***экстремум.***

1.1. Понятие о квадратичной форме. Чтобы установить наличие или отсутствие экстремумов у функции $u = f(x_1, ..., x_m)$, часто используют, так называемую, квадратичную форму переменных $x_1, x_{2,}, ..., x_m$. Функция вида

$$Q(x_1, ..., x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1 x_2 + ... + a_{1m}x_1 x_m + a_{21}x_2 x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{mm}x_m^2$$

(или в краткой записи $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$), где a_{ij} – постоянные величины, причем $a_{ij} = a_{ji}$, называется ***квадратичной формой*** от переменных $x_1, ..., x_m$. Числа a_{ij} называются ***коэффициентами квадратичной формы***, а составленная из этих коэффициентов симметричная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ – ***матрицей квадратичной формы***.

Определители $\delta_1 = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ... , $\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, ...

$\delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$ называются ***угловыми минорами*** матрицы A.

Квадратичная форма $Q(x_1, ..., x_m)$ называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любых значений переменных $x_1, ..., x_m$, одновременно не равных нулю, она принимает только положительные (только отрицательные) значения.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ – положительно определенная квадратичная форма, так как $Q(x_1, x_2) > 0$ при всех значениях x_1, x_2, кроме точки $(x_1, x_2) = (0{,}0)$.

Отметим, что $Q(0{,}0, ..., 0) = 0$.

Квадратичная форма называется ***знакоопределенной***, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма $Q(x_1, ..., x_m)$ называется ***квазизнакоопределенной***, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль не только при $x_1 = ... = x_m = 0$.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ – квазизнакоопределенная квадратичная форма, поскольку хотя $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$ во всех точках (x_1, x_2), равенство $Q(x_1, x_2) = 0$ выполняется не только при $(x_1, x_2) = (0{,}0)$, но и при любых значениях пары вида $(x_1, -x_1)$, например, $Q(1, -1) = 0$.

Квадратичная форма называется ***знакопеременной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$ – знакопеременная квадратичная форма, поскольку она принимает как положительные, так и отрицательные значения: $Q(1{,}0) = 1 > 0$, $Q(0{,}1) = -1 < 0$.

Критерий Сильвестра *знакоопределенности квадратичной формы*.

1^0. Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1, ..., x_m)$ была *положительно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительными: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0, \ldots, \delta_m > 0$.

2^0. Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1, ..., x_m)$ была *отрицательно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались следующим образом: $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0$, $\delta_4 > 0, \ldots$

1.2. Необходимые условия экстремума

Теорема 1 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $u = f(M) = f(x_1, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^\circ, ..., x_m^\circ)$ локальный экстремум и в этой точке существует частная производная функции по аргументу x_k, то эта производная равна нулю: $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

Следствие. Если функция $u = f(M) = f(x_1, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^\circ, ..., x_m^\circ)$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то ее первый дифференциал равен нулю (при любых значениях дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_m$): $du\Big|_{M_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) \cdot dx_1 + ... + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) \cdot dx_m = 0$.

Определение. Точки, в которых первый дифференциал функции равен нулю, принято называть **точками возможного экстремума (критическими точками** или **стационарными точками)** этой функции.

Для отыскания точек возможного экстремума функции $u = f(x_1, ..., x_m)$ нужно решить систему m уравнений с m неизвестными $x_1, \ldots, x_m$ $\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, ..., x_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_m}(x_1, ..., x_m) = 0 \end{cases}$

Замечание. Функция может достигать своего экстремального значения и в тех точках, в которых частная производная функции по аргументу x_k не существует.

1.3. Достаточные условия экстремума. Второй дифференциал функции $u = f(x_1, ..., x_m)$, где $x_1, ..., x_m$ – независимые переменные, в точке M_0 можно записать в виде: $d^2u\Big|_{M_0} = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \cdot dx_i\, dx_j$. Это выражение показывает, что второй дифференциал функции $u = f(x_1, ..., x_m)$ в точке M_0 является квадратичной формой от переменных $dx_1, ..., dx_m$, а частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ – коэффициентами этой квадратичной

формы, таким образом, матрица квадратичной формы записывается в виде:
$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 *(достаточные условия экстремума).* Пусть функция $u=f(M)=f(x_1,...,x_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^\circ,...,x_m^\circ)$ и дважды дифференцируема в самой точке M_0, причем M_0 – точка возможного экстремума функции, т.е. $du\big|_{M_0}=0$. Тогда если второй дифференциал $d^2u\big|_{M_0}$ является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой от переменных $dx_1,...,dx_m$, то функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум). Если же $d^2u\big|_{M_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то в точке M_0 функция $u=f(M)$ не имеет локального экстремума.

Замечание. Если $du\big|_{M_0}=0$, а $d^2u\big|_{M_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $u=f(M)$ может иметь в точке M_0 локальный экстремум, а может и не иметь его.

1.4. Случай функции двух переменных. Пусть функция $u=f(x,y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке M_0, причем M_0 – точка возможного экстремума данной функции, т.е. $du\big|_{M_0}=0$. Введем обозначения:
$$a_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0},\ a_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0},\ a_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0},\ D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Тогда из теоремы 2 и критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы следуют утверждения:

1) если $D>0$, то в точке M_0 функция $u=f(x,y)$ имеет локальный экстремум (максимум при $a_{11}<0$ и минимум при $a_{11}>0$);

2) если $D<0$, то в точке M_0 функция $u=f(x,y)$ не имеет экстремума;

3) если $D=0$, то в точке M_0 функция $u=f(x,y)$ может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его.

Замечание. Для исследования знака второго дифференциала иногда достаточно воспользоваться методом «выделения полного квадрата». Например, если дифференциал $d^2u = 6\cdot dx^2 - 3\cdot dx\cdot dy + 6\cdot dy^2$ представить в виде суммы $d^2u = 6\cdot\left(dx - \frac{1}{4}dy\right)^2 + \frac{45}{8}\cdot dy^2$, то легко увидеть, что при всех dx, dy, неравных одновременно нулю, величина d^2u является положительной.

2. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$**.**
Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0 \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ u'_z = 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему трех уравнений, находим две точки возможного экстремума: $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции: $u''_{xx} = 4$, $u''_{xy} = u''_{yx} = -1$, $u''_{xz} = u''_{zx} = 2$, $u''_{yy} = 6y$, $u''_{yz} = u''_{zy} = 0$, $u''_{zz} = 2$.

Исследуем точку M_1. Значения частных производных в точке M_1 являются коэффициентами квадратичной формы $d^2u\big|_{M_1}$ от переменных dx, dy, dz. Матрица этой квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Вычисляя главные миноры матрицы A, получаем $\delta_1 = 4 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$. Согласно критерию Сильвестра, $d^2u\big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz.

Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум: $u = -\frac{13}{27}$.

Исследуем вторую точку M_2 возможного экстремума. Матрица квадратичной формы имеет вид $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. И ее угловые миноры $\delta_1 = 4 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0$. Следовательно, $d^2u\big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от dx, dy, dz. Можно показать, что она – знакопеременная. В самом деле, если положить $dx \neq 0$, $dy = dz = 0$, то получим $d^2u\big|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big|_{M_2} \cdot dx^2 = 4 \cdot dx^2 > 0,$ а если $dx = dz = 0$, $dy \neq 0$, то получим $d^2u\big|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big|_{M_2} \cdot dy^2 = -3 \cdot dy^2 < 0$. Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума.

Пример 2. Найдите точки локального экстремума функции $u = x^3 - 3xy + y^3$**.**

Решение. Вычислив частные производные данной функции и приравняв их нулю, получаем систему, решение которой определяет координаты точек возможных экстремумов: $\begin{cases} u'_x = 3(x^2 - y) = 0 \\ u'_y = 3(-x + y^2) = 0 \end{cases}$. Находим две стационарные точки: $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. Теперь вычислим частные производные второго порядка: $u''_{xx} = 6x$, $u''_{xy} = u''_{yx} = -3$, $u''_{yy} = 6y$.

В точке M_1: $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big|_{M_1} = 0$, $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big|_{M_1} = -3$, $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big|_{M_1} = 0$.

Следовательно, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0$, и, значит, в точке M_1 функция не имеет локального экстремума.

В точке M_2: $a_{11} = 6$, $a_{12} = -3$, $a_{22} = 6$. Следовательно, $D = 36 - 9 > 0$, и так как $a_{11} > 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный минимум $u = -1$.

Замечание. В данном примере установить тип стационарной точки можно, определив знак второго дифференциала d^2u как квадратичной формы dx и dy, используя метод выделения первого квадрата. Действительно, например, для точки M_2 имеем: $d^2u = 6(dx)^2 - 3dx \cdot dy + 6(dy)^2 = 6(dx - 0{,}25dy)^2 + 5{,}625(dy)^2$. Откуда видно, что при любых dx и dy, одновременно не равных нулю, и, следовательно, M_2 – точка минимума.

Пример 3. Найдите точки локального экстремума функции $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение. Для определения координат стационарных точек составляем систему (приравняв нулю частные производные данной функции): $\begin{cases} u'_x = -3x^2 + 6xy = 0 \\ u'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$.

Решив систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1(0,0)$ и $M_2(6,3)$.

Вычисляем частные производные второго порядка: $u''_{xx} = -6x + 6y$, $u''_{xy} = 6x$, $u''_{yy} = -12y^2$.

В точке M_1: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$. Следовательно, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, и, значит, точка $M_1(0,0)$ требует дополнительного исследования. Значение функции $u = (x, y)$ в этой точке равно нулю: $u(0,0) = 0$. Если $x < 0, y = 0$, то значение функции положительно: $u(x, y) = -x^3 > 0$. Если $x = 0, y \neq 0$, то значение функции отрицательно: $u(x, y) = -y^4 < 0$. Следовательно, в любой окрестности точки M_1 функция $u(x, y)$ принимает значения и большие значения $u(0,0)$, и меньшие значения $u(0,0)$. И, значит, в точке M_1 функция $u(x, y)$ не имеет локального экстремума.

В точке M_2: $a_{11} = -18$, $a_{12} = 36$, $a_{22} = -108$, и, следовательно, $D = 648 > 0$. Так как $a_{11} < 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный максимум $u = 27$.

3. Упражнения. Найдите точки локального экстремума функций.

1. $u = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$

2. $u = x^2 + (y-1)^2$

3. $u = x^2 - (y-1)^2$

4. $u = (x - y + 1)^2$

5. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

6. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

7. $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$

8. $u = x^2 - xy + y^2$

9. $u = x^2 - xy - y^2$

10. $u = x^2 - 2xy + 2x + 2y^2$

14. $u = xy + \dfrac{1}{2(x+y)}$

15. $u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$

16. $u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$

17. $u = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 2y^2)$

18. $u = e^{-(x^2+y^2)}(x - 2y)$

19. $u = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$

20. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$

21. $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$

22. $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$

23. $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$

11. $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

12. $u = x^3 + 6y - 3x - 2y^3$

13. $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$

24. $u = xyz(1 - x - y - z)$

25. $u = 2\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$

26. $u = e^{-(x^2+y^2+z^2)}(x + y + 2z)$

4. Ответы.

1. $u(3,1) = -72 - \min$; $u(-3,-1) = 72 - \max$

2. $u(0,1) = 0 - \min$

3. Точек экстремума нет

4. Все точки прямой $x - y + 1 = 0$ – точки нестрогого минимума

5. $u(-1,-2,3) = -14 - \min$

6. $u(24,-144,-1) = -6913 - \min$

7. $u(1/2,1,1) = 4 - \min$

8. $u(0,0) = 0 - \min$

9. точек экстремума нет

10. $u(-2,-1) = -2 - \min$

11. $u(4/3;4/3) = -64/27 - \min$; $u(0,0) = 0 - \max$

12. $u(1;-1) = -6 - \min$; $u(-1,1) = 6 - \max$

13. Точек экстремума нет

14. Точек экстремума нет

15. $u(2/3;-4/3) = -(4/3)e^{-2} - \min$

16. $u(0,0) = 0 - \min$

17. $u(0,0) = 0 - \min$; $u(0,1) = u(0,-1) = 2/e - \max$

18. $u(-1/\sqrt{10},2/\sqrt{10}) = -\sqrt{5/(2e)} - \min$; $u(1/\sqrt{10},-2/\sqrt{10}) = \sqrt{5/(2e)} - \max$

19. $u(1/\sqrt{2e},1/\sqrt{2e}) = u(-1/\sqrt{2e},-1/\sqrt{2e}) = -1/(2e) - \min$
$u(1/\sqrt{2e},-1/\sqrt{2e}) = u(-1/\sqrt{2e},1/\sqrt{2e}) = 1/(2e) - \max$

20. $u(1,1) = 3 - \min$

21. $u(1,-1,3) = -11 - \min$

22. $u(1/2,1/2,-2) = -17/4 - \min$

23. $u(1,-2,1/2) = -9/2 - \min$

24. $u(1/4,1/4,1/4) = 1/256 - \max$

25. $u(1/4,1/4,1/4) = -1/8 - \min$

26. $u(1/(2\sqrt{3}),1/(2\sqrt{3}),1/\sqrt{3}) = \sqrt{(3/e)} - \max$;
$u(1/(2\sqrt{3}),1/(-2\sqrt{3}),1/\sqrt{3}) = -\sqrt{(3/e)} - \min$

Глава II. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

1. Основные понятия и теоремы

1.1. Понятие условного экстремума. Предположим, что аргументы функции

$$u = f(M) = f(x_1, ..., x_m) \qquad (1)$$

связаны между собой k соотношениями (т.е. не являются независимыми переменными):

$$g_i(x_1, ..., x_m) = 0 \quad (i = \overline{1, k}) \qquad (2)$$

Соотношения (2) называются ***условиями связи***.

Пусть координаты точки $M_0(x_1^\circ, ..., x_m^\circ)$ удовлетворяют уравнениям (2).

Определение. Говорят, что функция (1) имеет в точке M_0 ***условный максимум*** (***минимум***), если существует такая окрестность ω точки M_0, что для любой другой точки M этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется соотношение: если $M \neq M_0$, то $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Иначе говоря, условный максимум (минимум) – это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке по отношению не ко всем точкам из окрестности ω, а только к тем из них, которые удовлетворяют условиям связи.

Рассмотрим два метода решения задачи об условном экстремуме функции.

1.2. Метод исключения части переменных.

Решение системы (2) относительно переменных $x_1, ..., x_k$: $x_i = \varphi_i(x_{k+1}, ..., x_m)$, $(i = \overline{1, k})$ называется совокупностью неявных функций, определяемых системой (2). Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$ называется якобианом функций $g_1, ..., g_k$ по переменным $x_1, ..., x_k$.

Теорема 3. Если функции g_i $(i = \overline{1, k})$ дифференцируемы в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_1^\circ, ..., x_m^\circ)$, частные производные $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ $(i, j = \overline{1, k})$

непрерывны в точке M_0, $g_i(M_0)=0 \quad (i=\overline{1,k})$, $\Delta(M_0)$, тогда существует такой параллелепипед $W \subset \omega$, в котором система (2) определяет единственную совокупность дифференцируемых функций:

$$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, ..., x_m) = 0 \quad (i=\overline{1,k}) \tag{3}$$

Тогда в параллелепипеде W условия связи эквивалентны соотношениям (3), в которых естественно рассматривать $x_{k+1}, ..., x_m$ как независимые переменные. Если функции (3) удается найти в явном виде, то подставляя их в (1), получим функцию $m-k$ независимых переменных:

$$u = f(\varphi_1(x_{k+1}, ..., x_m), \ldots, \varphi_1(x_{k+1}, ..., x_m), , x_{k+1}, ..., x_m) \equiv$$
$$\equiv F(x_{k+1}, ..., x_m) = F(M^\bullet)$$

В пределах W значение функции $F(M^\bullet)$ в любой точке $M^\bullet(x_{k+1}, ..., x_m)$ совпадает со значением функции $f(M)$ в соответствующей точке $M(x_1, ..., x_m)$, удовлетворяющей условиям (3), или, что то же самое, уравнениям связи (2). Поэтому вопрос об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) в параллелепипеде W сводится к вопросу о безусловном экстремуме функции $F(M^\bullet)$.

Если нахождение функций (3) в явном виде затруднительно (или невозможно), то можно поступить следующим образом. Предположим, что функции (3) подставлены в (1), в результате чего получается функция $F(M^\bullet)$, и в уравнения (2), которые после этой подстановки обращаются в тождества. Дифференциал функции $F(M^\bullet)$ в силу инвариантности формы первого дифференциала можно записать в виде

$$dF = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{4}$$

Здесь $dx_{k+1}, ..., dx_m$ – дифференциалы независимых переменных, а $dx_1, ..., dx_k$ – дифференциалы неявных функций (3). Дифференцируя указанные выше тождества, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} dx_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial g_k}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m} dx_m = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Из системы (5) выразим дифференциалы $dx_1, ..., dx_k$ неявных функций (3) через дифференциалы независимых переменных $dx_{k+1}, ..., dx_m$. Подставляя полученные для $dx_1, ..., dx_k$ выражения в (4), приходим к равенству

$$dF = \sum_{i=k+1}^{m} B_i(x_1, x_2, ..., x_m) dx_i \tag{6}$$

где $x_j = \varphi_j(x_{k+1}, ..., x_m)$ $(j = 1, 2, ..., k)$.

Если в точке $M_0^{\bullet}(x_{k+1}^{\circ}, ..., x_m^{\circ})$ функция $F(M^{\bullet})$ имеет экстремум, то $dF\Big|_{M_0^{\bullet}} = 0$, т.е.

$$\boxed{\sum_{i=k+1}^{m} B_i(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, ..., x_k^{\circ}, x_{k+1}^{\circ}, ..., x_m^{\circ}) dx_i = 0} \tag{7}$$

где $x_j^{\circ} = \varphi_j(x_{k+1}^{\circ}, ..., x_m^{\circ}) = \varphi_j(M_0^{\bullet})$ $(j = 1, 2, ..., k)$. Так как $dx_{k+1}, ..., dx_m$ – дифференциалы независимых переменных, то из (7) получаем

$$B_i(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, ..., x_k^{\circ}, x_{k+1}^{\circ}, ..., x_m^{\circ}) = 0 \quad (i = k+1, ..., m) \tag{8}$$

Равенства (8) являются, таким образом, необходимыми условиям экстремума функции $F(M^{\bullet})$ в точке $M_0^{\bullet}$ или, что то же самое, необходимыми условиями условного экстремума функции $f(M)$ в точке $M_0(x_1^{\circ}, ..., x_m^{\circ})$ при условиях связи (2).

Отсюда следует, что для отыскания координат точки $M_0(x_1^{\circ}, ..., x_m^{\circ})$ возможного экстремума нужно решить систему m уравнений относительно m неизвестных $x_1, ..., x_m$.

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \quad (i = 1, ..., k) \\ B_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \quad (i = k+1, ..., m) \end{cases} \tag{9}$$

Если точка M_0 возможного экстремума найдена, то ее дальнейшее исследование связано с рассмотрением второго дифференциала $d^2F\Big|_{M_0^{\bullet}}$. Его можно вычислять (если функции (1) и (2) дважды дифференцируемы), дифференцируя равенство (6) для dF и используя выражения для дифференциалов $dx_1, ..., dx_k$ неявных функций (3), найденные из системы (5). В итоге находим $d^2F\Big|_{M_0^{\bullet}}$ – квадратичную форму от переменных $dx_{k+1}, ..., dx_m$.

Если эта квадратичная форма положительна (отрицательна), то функция (1) имеет в точке условный минимум (максимум) при условиях связи (2).

1.**3. Метод Лагранжа.** Задача об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) эквивалентна задаче об условном экстремуме функции Лагранжа

$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 g_1(M) + \lambda_2 g_2(M) + \ldots + \lambda_k g_k(M)$

(где λ_i – так называемые множители Лагранжа – произвольные константы) при тех же условиях связи (2), поскольку в точках M, удовлетворяющих уравнениям связи, справедливо равенство $\Phi(M) = f(M)$.

Теорема 4 *(необходимое условие Лагранжа условного экстремума).*

Пусть 1) функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (2); 2) уравнения (2) удовлетворяют в некоторой окрестности точки M_0 условиям теоремы 3.

Тогда существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такие, что все частные производные первого порядка функции Лагранжа равны нулю в точке M_0.

Из теоремы следует, что для отыскания точек возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2) нужно решить систему $m+k$ уравнений:

$$\begin{cases} g_i(x_1, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1 \ldots, \lambda_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{10}$$

относительно $m+k$ неизвестных $x_1, \ldots, x_m, \lambda_1 \ldots, \lambda_k$. Если $\{x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ, \lambda_1^\circ \ldots, \lambda_k^\circ\}$ – решение системы (10) (таких решений может быть несколько), то $M_0(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$ является точкой возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2).

Дальнейшее исследование точки возможного экстремума связано, как и в методе исключения части переменных, с рассмотрением второго дифференциала $d^2F\Big|_{M_0^\bullet}$ функции $F(M^\bullet) = F(x_{k+1}, \ldots, x_m) =$ $\Phi(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_m), x_{k+1}, \ldots x_m)$, где $\Phi = f + \lambda_1^\circ g_1 + \ldots + \lambda_k^\circ g_k$. Его можно вычислить по формуле

$$d^2F\Big|_{M_0^\bullet} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j \tag{11}$$

Здесь $dx_{k+1}, \ldots, dx_m$ – дифференциалы независимых переменных, а $dx_1, \ldots, dx_k$ – дифференциалы неявных функций (3) в точке $M_0^\bullet$. Формула (11) показывает, что для нахождения $d^2F\big|_{M_0^\bullet}$ сначала вычисляется второй дифференциал функции в точке M_0, причем так, как если бы все аргументы $x_1, ..., x_m$ были независимыми переменными. Затем $dx_1, ..., dx_k$ заменяются дифференциалами неявных функций (3) в точке $M_0^\bullet$. В результате получается $d^2F\big|_{M_0^\bullet}$ – квадратичная форма от $dx_{k+1}, ..., dx_m$. Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то в точке M_0 функция (1) имеет условный минимум (максимум) при условиях связи (2), а если $d^2F\big|_{M_0^\bullet}$ – знакопеременная квадратичная форма, то в точке M_0 функция (1) не имеет условного экстремума.

Знак второго дифференциала функции Лагранжа может быть установлен с помощью определителя

$$L = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} & \Phi''_{x_1 x_1} & \cdots & \Phi''_{x_1 x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m} & \Phi''_{x_m x_1} & \cdots & \Phi''_{x_m x_m} \end{vmatrix}.$$

Если знаки угловых миноров $H_{2k+1}, \ldots, H_{k+m}$ (вычисленные в стационарной точке) определителя L (здесь m – количество аргументов $\{x_1, ..., x_m\}$ исследуемой функции u, k – количество уравнений связи) совпадают со знаком величины $(-1)^k$, то стационарная точка M_0 является точкой условного минимума функции u. Если знаки угловых миноров $H_{2k+1}, \ldots, H_{k+n}$ чередуются, причем знак минора H_{2k+1} совпадает со знаком числа $(-1)^k$, точка M_0 является точкой условного максимума.

В частном случае исследования **функции двух переменных** $u = f(x, y)$ при наличии одного уравнения связи $g(x, y) = 0$ для второго дифференциала функции Лагранжа справедливо соотношение $d^2\Phi = -\dfrac{dx^2}{\left(g'_y\right)^2} \cdot L$, где $L = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ g'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix}$. Поэтому, если $L > 0$, то $d^2\Phi < 0$ и M_0 – точка условного максимума. Если $L < 0$, то $d^2\Phi > 0$ и M_0 – точка условного минимума.

В частном случае исследования функции трех переменных определитель имеет вид:

1) при наличии одного уравнения $g(x, y, z) = 0$ связи $L = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ g'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ g'_z & \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz} \end{vmatrix}$

2) при наличии двух уравнений связи $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$:

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (g_1)'_x & (g_1)'_y & (g_1)'_z \\ 0 & 0 & (g_2)'_x & (g_2)'_y & (g_2)'_z \\ (g_1)'_x & (g_2)'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ (g_1)'_y & (g_2)'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ (g_1)'_z & (g_2)'_z & \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz} \end{vmatrix}$$

Поэтому, если $L > 0$, то $d^2\Phi < 0$ и M_0 – точка условного максимума. Если $L < 0$, то $d^2\Phi > 0$ и M_0 – точка условного минимума.

2. Примеры решения задач

Пример 1. **Н**айти экстремум функции

$$u = x + y + z^2 \tag{12}$$

при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases} \tag{13}$$

Решение.

1) Решим задачу методом исключения части переменных. Для этого из системы (13) выразим y и z через x:

$$y = x^2 + x + 1,\ z = x + 1 \qquad (14)$$

Подставим выражения (14) в равенство (12), приходим к функции одной переменной x: $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u'(x) = 4(x+1) = 0$ при $x = -1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''(-1) = 4 > 0$, в точке $x = -1$ функция $u(x)$ имеет минимум. Из системы (14) находим соответствующие $x = -1$ значения y и z: $y = 1,\ z = 0$. Итак, функция (12) при условиях связи (13) имеет в точке $(-1, 1, 0)$ минимум, причем $u(-1, 1, 0) = 0$.

2) Решим задачу методом Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

И рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ g_1 = z - x - 1;\ \ g_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

Она имеет одно решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, т.е. $M_0(-1; 1; 0)$ – единственная точка возможного экстремума функции (12) при условиях связи (13). Отметим, что в окрестности точки M_0 система (13) определяет единственную пару неявных функций $y(x)$, $z(x)$. Предполагая, что в систему (13) подставлено ее решение $y(x)$, $z(x)$ и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0 \\ dy - x\,dz - z\,dx = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dz = dx \\ dy = (x + z)\,dx \end{cases} \qquad (15)$$

Теперь вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dx\,dz$$

И, подставляя $\lambda_2 = -1$ и выражения (15) для dz, получаем положительно определенную квадратичную форму от одной переменной dx: $4(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (12) при условиях связи (13) имеет в точке M_0 условный минимум.

Пример 2. Найти экстремум функции

$$u = 2x + y^2 - 2z^2 \tag{16}$$

при условии связи

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 6 \\ -x + 3y - z = 3 \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Используем метод исключения части переменных. Систему (17) запишем в виде

$$\begin{cases} 2x + y = 5z + 6 \\ -x + 3y = z + 3 \end{cases} \tag{18}$$

С помощью формул Крамера выразим из (18) переменные x и y через переменную z:

$$\begin{cases} x = 2z + \dfrac{15}{7} \\ y = z + \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

Тогда функцию u можно записать как функцию одной переменной z: $u = -z^2 + \dfrac{52}{7}z + \dfrac{354}{49}$. Имеем $u'_z = -2z + \dfrac{52}{7}$. Необходимое условие существования экстремума $u'_z = 0$. Откуда $z = \dfrac{26}{7}$. И, поскольку $u''_{zz} = -2 < 0$, то $u\left(z = \dfrac{26}{7}\right) = \dfrac{1030}{49} = \max u$. Таким образом, функция u достигает своего максимального значения (при условии связи) в точке с координатами $x = \dfrac{67}{7},\ y = \dfrac{38}{7},\ z = \dfrac{26}{7}$.

Пример 3. Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y - z \tag{19}$$

при условиях связи

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13 \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{20}$$

Решение. Воспользуемся схемой метода исключения части переменных, не связанной с нахождением в явном виде каких-либо двух переменных через третью из уравнений связи (20). Предполагая, что система (20) определяет дважды дифференцируемые неявные функции $y(x)$ и $z(x)$, и, считая, что они подставлены в уравнения связи, будем рассматривать равенства (20) как систему тождеств. Вычисляя дифференциалы от обеих частей тождеств (20), получим

$$\begin{cases}(x^2+1)dx+(y^2+1)dy+(z^2+1)dz=0\\ dx+dy=0\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases}dy=-dx\\ dz=\dfrac{-2x+1}{z^2+1}dx\end{cases} \qquad (21)$$

Подставляя эти выражения для dy и dz в выражение для дифференциала функции (19), которое имеет вид $du=dx+dy-dz$, получим

$$du=\frac{2x-1}{z^2+1}dx \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений, состоящую из уравнений (20) и уравнения $u(x)$. Она имеет единственное решение $x=0{,}5; y=0{,}5; z=0$, т.е. $M_0(0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$ – единственная точка возможного экстремума функции (19) при условиях связи (20). Дифференцируя выражение (22) для du, получаем

$$d^2u=\frac{2(z^2+1)dx-(2x-1)\,2z\,dz}{(z^2+1)^2}dx$$

Откуда, используя уравнения (21), находим $d^2u\big|_{M_0}=2(dx)^2$. Так как $2(dx)^2$ – положительно определенная квадратичная форма (одной переменной dx), то функция (19) имеет в точке M_0 минимум при условиях связи (20).

Замечание. Задача решена в предположении, что система (20) определяет дважды дифференцируемые функции $y(x)$ и $z(x)$. Теперь можно уточнить, что это условие должно выполняться в некоторой окрестности точки $M_0(0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$. Покажем, что данное требование выполнено. Воспользуемся теоремой 3. Функции $g_1(x,y,z)=4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z-13$ и $g_2(x,y,z)=x+y-1$ дифференцируемы в любой окрестности точки M_0. Частные производные $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}=12(y^2+1)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial z}=12(z^2+1)$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial z}=0$ непрерывны в точке M_0 . Функции $g_1(x,y,z)$ и $g_2(x,y,z)$ равны нулю в точке M_0. Наконец, $\dfrac{D(g_1,g_2)}{D(y,z)}\Big|_{M_0}=-12\neq 0$. Поэтому в силу теоремы 3 система (20) в некоторой окрестности точки M_0 определяет единственную пару дифференцируемых функций $y(x)$, $z(x)$. Более того, так как функции $g_1(x,y,z)$

и $g_2(x,y,z)$ дважды дифференцируемы в любой окрестности точки M_0, то и функции $y(x)$, $z(x)$ дважды дифференцируемы.

Пример 4. Найти экстремум функции $u = x + 3y$ при условии связи $x^2 + y^2 = 10$.

Решение. Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,\lambda) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$. Для отыскания точек возможного экстремума решаем систему:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \Phi_y = 3 + 2\lambda y = 0. \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Выразив через λ из первого уравнения x, а из второго y, и подставив полученные соотношения в третье уравнение: $\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 10$, найдем два возможных значения множителя Лагранжа λ: $\lambda_1 = -0{,}5; \lambda_2 = 0{,}5$. Таким образом, функция имеет две критические точки $P_1\,(x = 1; y = 3; \lambda_1 = -0{,}5)$ и $P_2\,(x = -1; y = -3; \lambda_2 = 0{,}5)$.

Чтобы установить, имеет ли функция в этих точках экстремум и какой именно, можно воспользоваться одним из следующих способов.

Первый способ.

Так как $\Phi''_{xx} = 2\lambda$, $\Phi''_{xy} = 0$, $\Phi''_{yy} = 2\lambda$, то второй дифференциал функции Φ:

$$d^2\Phi = \Phi''_{xx}dx^2 + 2\Phi''_{xy}dx\,dy + \Phi''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 0 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda\left((dx)^2 + (dy)^2\right),$$

Следовательно, $d^2\Phi > 0$ при $\lambda > 0$, т.е. в точке P_1 функция $u = x + 3y$ имеет условный максимум ($u = 10$). И $d^2\Phi < 0$ при $\lambda < 0$, т.е. в точке P_2 функция $u = x + 3y$ имеет условный минимум ($u = -10$).

Второй способ. В каждой из критических точек установим знак определителя

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \varphi'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$ Так как $H(P_1) = 40 > 0$, то $u(P_1) = 10$ – условный максимум; так как $H(P_2) = -40 < 0$, то $u(P_2) = -10$ – условный минимум рассматриваемой функции.

Пример 5. Найти экстремум функции $u = xy + yz + 3$ при условиях связи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

Решение. Для данной задачи функция Лагранжа имеет вид: $\Phi(x,y,\lambda)=xy+yz+3+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2)$. Критические точки находим из системы:

$$\begin{cases}\Phi'_x=y+2\lambda_1 x=0\\ \Phi'_y=x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0\\ \Phi'_z=y+\lambda_2=0\\ x^2+y^2-2=0\\ y+z-2=0\end{cases}$$

. Получаем, что функция Лагранжа имеет единственную точку возможного экстремума: $P_1(1;1;1)$ при $\lambda_1=-0{,}5$ и $\lambda_2=1$. Чтобы установить, имеет ли функция в этой точке экстремум и какой именно, составим определитель

$$L=\begin{vmatrix}0 & 0 & (g_1)'_x & (g_1)'_y & (g_1)'_z\\ 0 & 0 & (g_2)'_x & (g_2)'_y & (g_2)'_z\\ (g_1)'_x & (g_2)'_x & \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz}\\ (g_1)'_y & (g_2)'_y & \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz}\\ (g_1)'_z & (g_2)'_z & \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

и вычислим его значение в критической точке. Так как $L(P_1)=-24$ и $(-1)^{k+1}=(-1)^3=-1$, ,то есть $\operatorname{sgn} L=\operatorname{sgn}(-1)^{k+1}$, значит точка $P_1(1;1;1)$ является точкой условного максимума.

Пример 6. На эллипсоиде $x^2+2y^2+4z^2=8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $T(0;0;3)$.

Решение. Расстояние ρ между точками $(x;y;z)$ и $T(0;0;3)$ определяется формулой $\rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции

$$u=\rho^2=x^2+y^2+(z-3)^2 \qquad (23)$$

при условиях связи

$$x^2+2y^2+4z^2=8 \qquad (24)$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi=x^2+y^2+(z-3)^2+\lambda(x^2+2y^2+4z^2-8)$$

и рассмотрим систему уравнений :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8 \end{cases} \tag{25}$$

Так как эллипсоид (24) больше всего вытянут вдоль оси OX, то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, т.е. $x \neq 0$. Поэтому из первого уравнения системы (25) следует, что $\lambda = -1$. Тогда из второго и третьего уравнений системы (25) имеем $y = 0$, $z = -1$. Наконец, из последнего уравнения системы (25) находим $x = \pm 2$. Итак, функция (23) имеет две точки возможного условного максимума $M_1(2; 0; -1)$ и $M_2(-2; 0; -1)$. Предполагая, что в уравнение (24) подставлено его решение $z = z(x, y)$ и дифференцируя полученное тождество, находим

$$xdx + 2ydy + 4zdz = 0$$

откуда

$$dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy \tag{26}$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2\Phi = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2\lambda(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2$$

и, подставляя $\lambda = -1$, координаты точки $M_0(-1; 1; 0)$ или $M_0(-1; 1; 0)$ и выражение (26) для dz, получаем в каждом случае отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных dx, dy: $d^2\Phi = -2(dy)^2 - 3{,}5(dx)^2$. Отсюда следует, что функция (23) имеет в точках M_1 и M_2 условный максимум при условиях связи (24), т.е. на эллипсоиде (24) имеются две точки $M_1(2; 0; -1)$ и $M_2(-2; 0; -1)$ наиболее удаленные от точки $T(0; 0; 3)$.

3. Упражнения. Исследуйте функцию на условный экстремум

1. $u = x^2 + y^2$ при условии связи $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

2. $u = x + y$ при условии связи $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$;

3. $u = xy$ при условии связи $x^2 + y^2 = 1$;

4. $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ при условии связи $x - y + z = 1$;

5. $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$ при условии связи $x + y - z = 0$;

6. $u = x - 2y + z$ при условии связи $x + y^2 - z^2 = 1$;

7. $u = xy^2z^3$ при условии связи $x + 2y + 3z = 6$ ($x > 0,\ y > 0,\ z > 0$);

8. $u = x - 2y + 2z$ при условии связи $x + y^2 + z^2 = 1$;

9. $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ при условии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($a > b > c > 0$)

4. Ответы.

1. $u\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}; \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} - \min$

2. $u\left(-\sqrt{2}a; -\sqrt{2}a\right) = -2\sqrt{2}a - \max;$ $\quad u\left(\sqrt{2}a; \sqrt{2}a\right) = 2\sqrt{2}a - \min$

3. $u\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}; \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} - \max;$ $u\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2} - \min$

4. $u(0{,}4; -0{,}4; 0{,}2) = 0{,}4 - \min$

5. $u(0;0;0) = 5 - \min;$ $\quad u(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}) = 7\dfrac{10}{27} - \max$

6. Нет экстремума

7. $u(1;1;1) = 1 - \max$

8. $u\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right) = -3 - \min;$ $\quad u\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right) = 3 - \max$

9. $u(0;0;-1) = u(0;0;1) = c^{-2} - \max;$ $\quad u(-1;0;0) = u(1;0;0) = a^{-2} - \min$

Список рекомендуемой литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2. М.: Наука. 1970.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ Астрель, 2005.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969.

Лариса Владимировна **Лебедева**

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23