

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

**Национальный исследовательский университет**

**Учебно-научный и инновационный комплекс**

«Физические основы информационно-телекоммуникационных систем»

**Основная образовательная программа**

011800 Радиофизика, общий профиль, квалификация (степень) бакалавр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**

«Радиоэлектроника»

**Основная образовательная программа**

090302 Информационная безопасность телекоммуникационных систем,

общий профиль, квалификация (степень) специалист

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**

«Теория электрических цепей»

**Основная образовательная программа**

010300 Фундаментальная информатика и информационные технологии,

общий профиль, квалификация (степень) бакалавр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**

«Теория электрических цепей»

**Ястребов И.П.**

## **ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижегород  
2012

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА. Ястребов И.П. Электронное учебно-методическое пособие. –Нижний Новгород. Нижегородский госуниверситет, 2012. 31 с.

В учебно-методическом пособии основное внимание уделено исследованию процессов дискретизации и восстановления непрерывных сигналов, определены условия преобразования сигналов из непрерывной формы в дискретизированную и обратно без потерь. Приведено описание лабораторной установки и измерительных приборов. Пособие также содержит список заданий для самостоятельной работы и контрольные вопросы.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 011800 «Радиофизика», изучающие курс «Радиоэлектроника», и по направлениям подготовки 090302 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», изучающих курс «Теория электрических цепей».

## Введение

Выдающийся русский ученый В.А. Котельников (1908-2005) написал и опубликовал в 1933 г. фундаментальную работу "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи" [1], в которой им впервые была сформулирована теорема (известная в радиотехнике как теорема Котельникова) о точном представлении функции с ограниченным спектром совокупностью ее отсчетов, произведенных в отдельно взятых точках.

История публикации [1] необычна. Работа была заявлена как доклад на намечавшийся I Всесоюзный съезд по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. Съезд не состоялся, но материалы к нему были опубликованы в 1933 г. Заканчивая аспирантуру, В.А.Котельников доложил свои работы на Ученом совете факультета. Доклад был одобрен, но работу "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи" как и значение сформулированной в ней теоремы отсчетов на совете не поняли — "все, вроде, верно, но похоже на научную фантастику". Между тем, эта работа была устремлена в будущее. Впервые в ней математически обоснована возможность цифровой передачи информации. Идея автора стала основой современной теории информации. В этом аспекте работа опередила свое время, по крайней мере, на 15 лет. Похожая ситуация произойдет и с докторской диссертацией В.А. Котельникова "Теорией потенциальной помехоустойчивости", которая была оценена современниками только спустя годы [2].

Понимая значение теоремы отсчетов, В.А. Котельников в 1936 г. попытался опубликовать статью в более широко читаемом специалистами журнале "Электричество". Получив отказ, он не стал повторять попытки и занялся другими задачами. Через 15 лет в 1948 г. Клод Шеннон опубликовал свою теорему отсчетов. Поскольку эта теорема имеет ключевое значение в теории информации, то к ней было приковано внимание специалистов в этой области, особенно в 1970-е годы, когда с развитием электроники появились технические возможности реализации цифровой передачи и записи информации. В 1977 г. при расстановке приоритетов ее было предложено называть WKS-теоремой или УКШ-теоремой в честь Уиттекера-Котельникова-Шеннона (Whittaker - Kotelnikov – Shannon) [3]. Наконец в 1999 г. Фонд Эдуарда Рейна, подводя тоги наиболее выдающихся научных достижений XX века, присудил премию в номинации "за фундаментальные исследования" российскому ученому Котельникову Владимиру Александровичу за "впервые математически точно сформулированную и опубликованную теорему отсчетов", на которую опирается вся современная, ставшая цифровой, радиотехника и вычислительная техника.

## 1. Теоретическая часть

### 1.1 Дискретизация сигналов во времени

Под дискретизацией сигналов понимают преобразование функций непрерывных переменных в функции дискретных переменных, по которым исходные непрерывные функции могут быть восстановлены с заданной точностью. Для точного представления произвольной непрерывной функции  $x(t)$  на конечном интервале времени  $T$  необходимо располагать данными о мгновенных значениях (отсчётах) этой функции во всех точках интервала, т.е. непрерывным множеством отсчётов, отстоящих друг от друга на бесконечно малые интервалы. Некоторое приближённое представление о функции  $x(t)$  можно составить по её отображению в виде дискретной последовательности

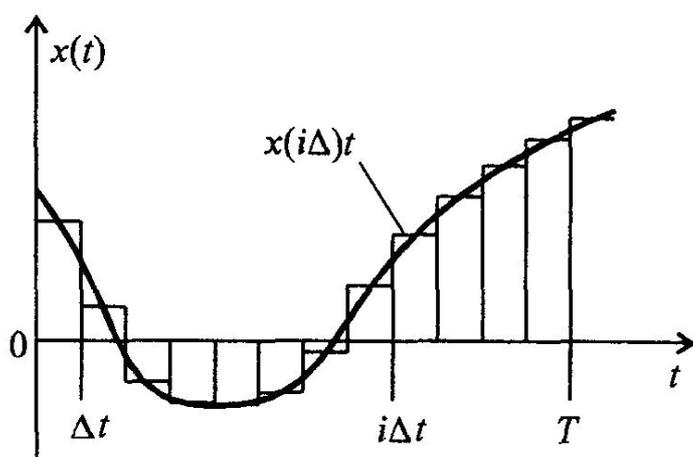


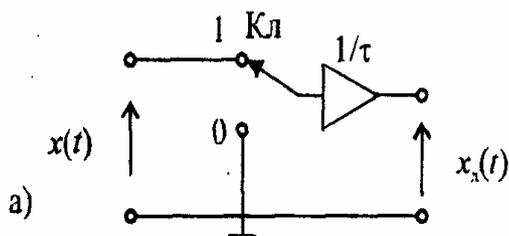
Рис. 1.1. Отображение непрерывной функции последовательностью прямоугольных импульсов

импульсов, имеющих на интервалах  $\Delta t$  значения  $x(i\Delta t)$ , называемых отсчётами (рис.1.1). Операция замены непрерывной функции последовательностью отсчётов её мгновенных значений называется *дискретизацией*. В качестве простейшей физической модели дискретизации рассмотрим коммутационное устройство (рис. 1.2, а). С помощью ключа Кл обеспечивается периодическое с частотой дискретизации  $F_D = 1/\Delta t$  подключение к источнику непрерывного сигнала  $x(t)$

(рис. 1.2, б) на время  $\tau$ , т.е. производится замена непрерывной функции  $x(t)$  последовательностью  $x_D(t)$  на интервалах  $\tau$  (рис. 1.2, в). Последовательность отсчётов  $X_D(t)$  можно трактовать как произведение  $x(t)$  на периодическую последовательность импульсов дискретизации  $f_D(t)$  (рис. 1.3):

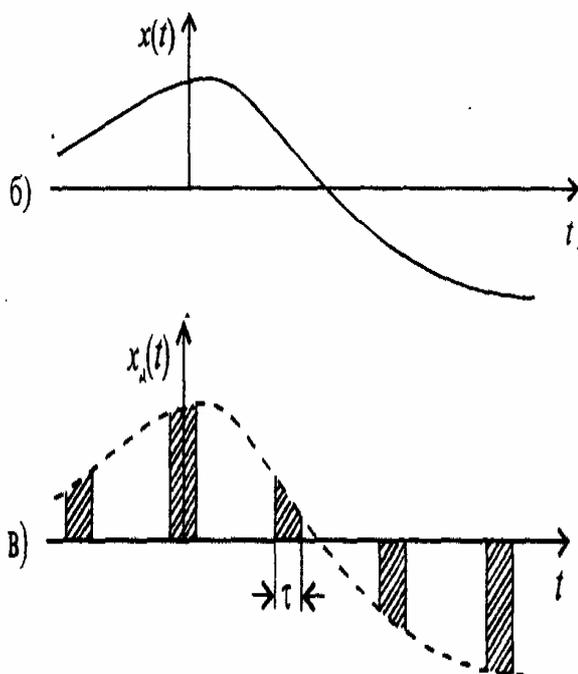
$$x_D(t) = x(t)f_D(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{\tau}(t - k\Delta t),$$

где импульсы дискретизации



$$\Psi_\tau = \begin{cases} 1/\tau, t \in [-\tau/2; \tau/2], \\ 0, t \notin [-\tau/2; \tau/2]. \end{cases}$$

Множитель  $1/\tau$  нормирует функцию  $\Psi_\tau$  к единичной площади. Для этого в схеме рис 1.2 а после ключа Кл введено масштабное звено. Чтобы перейти к отсчётам мгновенных значений  $x(t)$  в точках  $t = k \Delta t$ , необходимо рассмотреть особенности периодической функции  $f_\Delta(t)$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Нетрудно видеть, что при  $\tau \rightarrow 0$  эта периодическая функция заменяется решётчатой функцией



$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

Дискретный сигнал можно выразить так

Рис 1.2 Дискретизация непрерывной функции времени посредством периодической коммутации с частотой дискретизации  $F_D = 1/\Delta t$

$$\begin{aligned} x_D(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta(t - k\Delta t) \end{aligned}$$

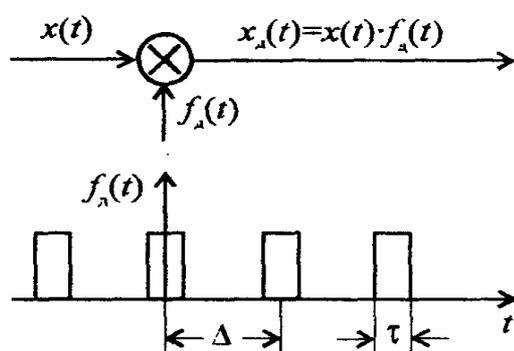


Рис 1.3 Дискретизация непрерывной функции  $x(t)$  путем ее умножения на периодическую последовательность импульсов

### Спектральная трактовка дискретизации.

Как было показано, процедура дискретизации сводится к образованию произведения дискретизируемой функции  $x(t)$  на последовательность импульсов дискретизации  $f_\Delta(t)$ . В спектральной области произведение функций времени соответствует свертке их спектров. Пусть

спектр функции  $x(t)$  имеет вид, представленный на рис. 1.4, а, где  $F_в$  - верхняя граничная частота. Спектр периодической последовательности импульсов дискретизации является линейчатой решетчатой функцией с периодом  $\Delta t = 1/F_д$ . Спектры дискретизированного сигнала представлены для случаев, когда  $F_д = 2 F_в$  (рис. 1.4, в),  $F_д > 2 F_в$ ; (рис. 1.4, г) и  $F_д < 2 F_в$  (рис. 1.4, д). Для неискажённого воспроизведения функции  $x(t)$  по последовательности отсчётов посредством идеального фильтра низких частот необходимо выбирать частоту дискретизации так, чтобы спектральные компоненты свёртки  $S_x(f)$  с каждой из дискретных составляющих периодической функции  $pF_д$  ( $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) располагались в неперекрывающихся областях (рис. 1.4). Этому соответствуют значения  $F_д > 2 F_в$ . При  $F_д < 2 F_в$  спектральные области перекрываются, а в полосу частот  $(-F_в, F_в)$  дискретизируемого сигнала попадут спектральные компоненты смежных областей и возникнут искажения при восстановлении функции по отсчётам. Далее будет показано, что для точного воспроизведения непрерывной функции с *ограниченным (финитным) спектром* достаточно располагать значениями функции (отсчётами) лишь в отдельных точках. Модели сигналов с ограниченным спектром часто используются в технике связи. В частности, в стандартном телефонном канале за верхнюю граничную частоту принимают  $F_в = 3400$  Гц, а, например, при телевизионной передаче граничная частота определяется числом различимых элементов изображения и равна  $F_в = 6,5$  МГц [4].

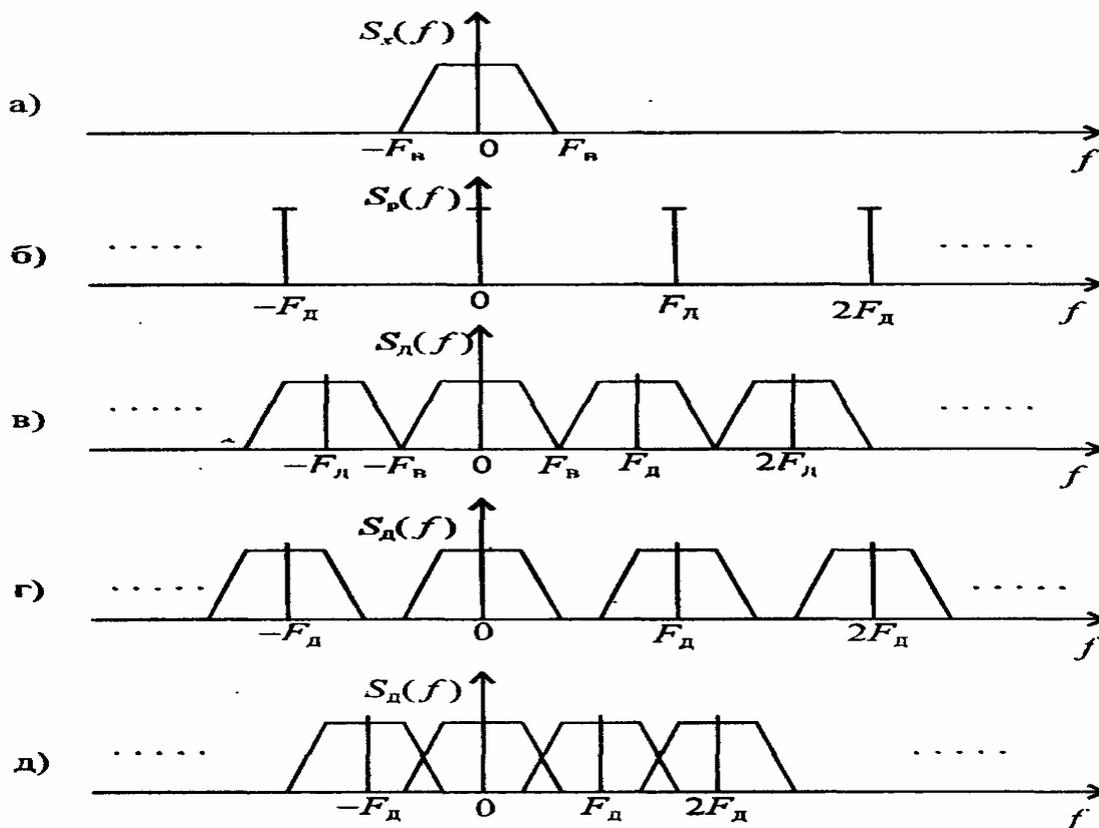


Рис 1.4 Спектр (а) непрерывного сигнала  $x(t)$ ; линейчатой решетчатой функции с периодом  $\Delta t = 1/F_д$ ; (в) дискретного сигнала при  $F_д = 2 F_в$ ; (г) при  $F_д > 2 F_в$ ; (д) при  $F_д < 2 F_в$

В общем случае процессы дискретного представления описываются выражениями:

$$(c_1, c_2, \dots, c_N) = \mathbf{A}[x(t)], \quad (1.1)$$

$$\tilde{x}(t) = \mathbf{A}'[(c_1, c_2, \dots, c_N)], \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{A}$  — оператор дискретного представления,  $\mathbf{A}'$  — оператор восстановления,  $c_1, c_2, \dots, c_N$  — совокупность координат дискретного представления непрерывного сигнала  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  — восстановленный по координатам дискретного представления сигнал [5].

При линейных процессах представления и восстановления выражения (1.1) и (1.2) можно представить в виде

$$c_i = \int_0^{T_c} x(t) \psi_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t), \quad (1.4)$$

где  $\psi_i(t)$  и  $\phi_i(t)$  — *весовые* и *базисные (координатные)* функции.

В зависимости от системы используемых весовых функций  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , различают дискретное временное, дискретное обобщенное и дискретное разностное представления.

В случае дискретного временного представления используется система весовых функций  $\psi_i(t) = \delta(t-t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $\delta(t-t_i)$  — дельта-функция. При этом, как это следует из (1.3), координаты  $c_i = x(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , т. е. совпадают с мгновенными значениями (отсчётами) непрерывной функции  $x(t)$  в дискретные моменты  $t_i$ .

Представление называется регулярным, если шаг дискретизации  $T_d = t_i - t_{i-1}$  постоянный. В противном случае оно называется нерегулярным.

При представлении сигналов регулярными отсчётами основным является выбор частоты дискретизации  $F_d = 1/T_d$  и базисных функций  $\phi_i(t)$ . Особенно важно найти минимальную частоту  $F_d$ , при которой еще имеется принципиальная возможность восстановления непрерывного сигнала с заданной погрешностью. При решении этих задач следует принимать во внимание свойства исходных сообщений, способы восстановления и требуемую точность восстановления.

Для модели сигнала с ограниченным спектром решение указанных задач содержится в теореме Котельникова, формулировка которой звучит так: любую непрерывную функцию со спектром, ограниченным полосой частот от нуля до  $F_g$ , можно однозначно определить последовательностью ее мгновенных значений, взятых через интервалы  $T_d \leq 1/2 F_g$  по формуле [5-9]

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_d) \frac{\sin 2\pi F_g (t - iT_d)}{2\pi F_g (t - iT_d)}, \quad (1.5)$$

Восстановление непрерывной функции производится в соответствии с выражением (1.5), которое называется *рядом Котельникова*. Базисными функциями в данном случае служат функции отсчётов

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin 2\pi F_s(t - iT_D)}{2\pi F_s(t - iT_D)}, \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Они образуют ортогональную на бесконечном интервале  $-\infty < t < \infty$  систему функций.

Фундаментальное значение теоремы Котельникова заключается в том, что она обосновывает возможность дискретизации по аргументу (времени) любых функций с ограниченным спектром. На ней основаны все методы импульсной модуляции.

Пусть для некоторых сигналов  $x(t)$  с ограниченным спектром все отсчёты в точках  $k\Delta t$ , лежащих за пределами некоторого интервала времени длительностью  $T$ , равны нулю. Тогда ряд (1.5) вырождается в конечную сумму, число членов которой  $n$  равно числу отсчётных точек, умещающихся на интервале  $T$ :

$$n \approx T/\Delta t = 2F_s T,$$

эта величина представляет размерность пространства. В теории связи ее называют базой сигнала.

Иногда полученный результат формулируют следующим образом: сигнал длительностью  $T$ , спектр которого не содержит частот выше  $F_s$ , полностью определяется заданием  $2F_s T$  его отсчётов. Однако такая формулировка противоречива. Как известно из теории преобразования Фурье, спектр ограниченного во времени сигнала не может быть финитным, так что сигналов, о которых говорится в приведенной фразе, в природе не существует. В частности, сигнал, представленный конечным числом членов ряда Котельникова, существует и за пределами интервала времени  $T$ , внутри которого находятся все ненулевые отсчёты. Это видно из того, что каждая функция отсчётов не ограничена, хотя и затухает довольно быстро при удалении от своего максимума.

Тем не менее, на практике часто приходится иметь дело с финитными сигналами, энергия которых почти полностью сосредоточена внутри полосы частот  $|f| \leq F_s$ , для таких сигналов нередко используют конечное число  $2F_s T$  членов ряда Котельникова. Но в данном случае это представление является приближенным, и сумма такого конечного ряда отличается от функции  $x(t)$  некоторой погрешностью.

Заметим, что такой ограниченный во времени сигнал можно разложить и по тригонометрическому базису в обычный ряд Фурье по частотам, кратным  $1/T$

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j2\pi kt/T},$$

$$X(k) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Если теперь отбросить малые члены, частоты которых превышают  $F_c$ , то легко убедиться, что число ненулевых членов такого ряда также примерно равно  $2F_c T$ . В этом ничего удивительного нет, так как оба эти представления можно трактовать как разложение функций в пространстве с размерностью  $2F_c T$  по двум различным ортогональным базисам [8].

## 1.2 Восстановление непрерывной функции по ее отсчётам

Дискретизированный по времени сигнал  $x(t)$ , т. е. последовательность его отсчётов, часто бывает представлен последовательностью очень коротких импульсов, площадь которых пропорциональна отсчётам  $x(n\Delta t)$ . Если пропустить такой импульс через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания  $F_c$ , то на выходе восстановится сигнал  $x(t)$ . Действительно, импульсная реакция идеального ФНЧ равна  $g(t) = \sin(2\pi F_c t) / 2\pi F_c t$ , а последовательность входных импульсов (аппроксимируя их дельта-функциями)

можно представить суммой

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t)$$

Тогда на основании интеграла Дюамеля на выходе ФНЧ в момент времени  $t$  получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(\tau - k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_c (\tau - t)}{2\pi F_c (\tau - t)} d\tau =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_c (t - k\Delta t)}{2\pi F_c (t - k\Delta t)} = x(t)$$

Таким образом, непрерывный сигнал восстанавливается, если на вход идеального фильтра нижних частот с полосой пропускания  $0 \dots F_c$  подать последовательность дельта-функций  $\delta(t - iT_d)$ ,  $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , умноженных на коэффициенты  $x(iT_d)$ . Однако ни сигнал в виде дельта-функции, ни идеальный фильтр нижних частот физически нереализуемы. Поэтому на практике вместо дельта-функций используют короткие импульсы, а вместо идеального фильтра нижних частот — реальный фильтр нижних частот, что, естествен-

но, приводит к погрешности восстановления. На рис. 1.5, а, б, в показано, как выглядит процесс восстановления непрерывной функции. Рис. 1.5, а демонстрирует отсчёты сигнала в виде вертикальных сплошных отрезков, а пунктиром обозначена дискретизированная непрерывная функция. На Рис. 1.5, б отображены отсчётные функции для двух произвольных моментов времени: для одного пунктиром, для другого сплошной линией. Рис. 1.5, в включает в себя результат перемножения отсчётных функций предыдущего рисунка со значениями отсчётов в выбранные моменты времени и результат восстановления непрерывной функции.

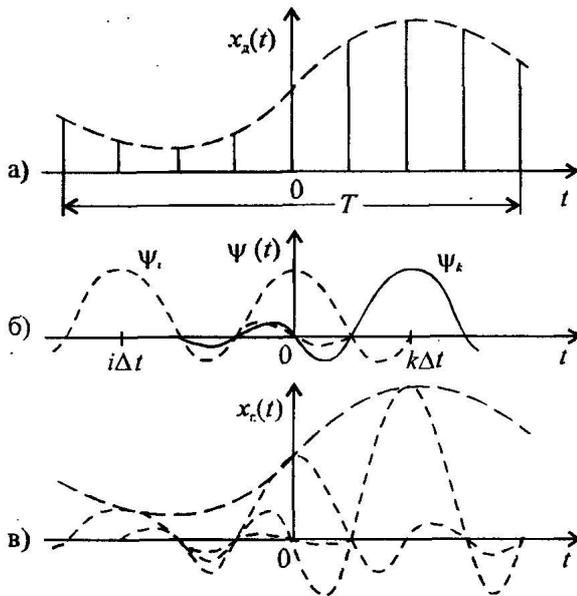


Рис 1.5. Иллюстрация принципа восстановления непрерывной функции по ее отсчётам: а) дискретизированный сигнал, б) отсчётные функции, в) восстановленный сигнал

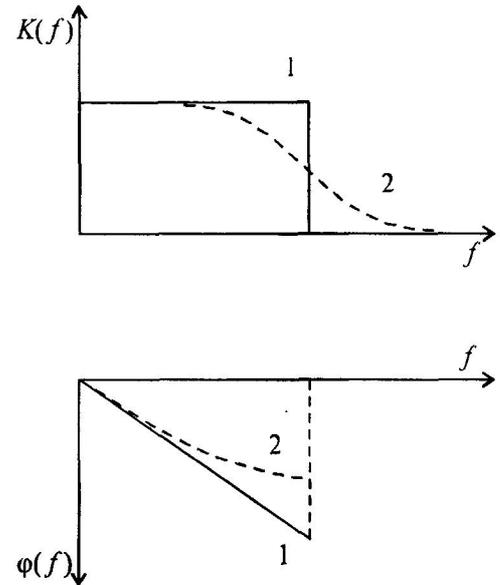


Рис 1.6. АЧХ и ФЧХ фильтра, формирующего отсчётные функции: (1) – идеального ФНЧ, (2) – неидеального ФНЧ

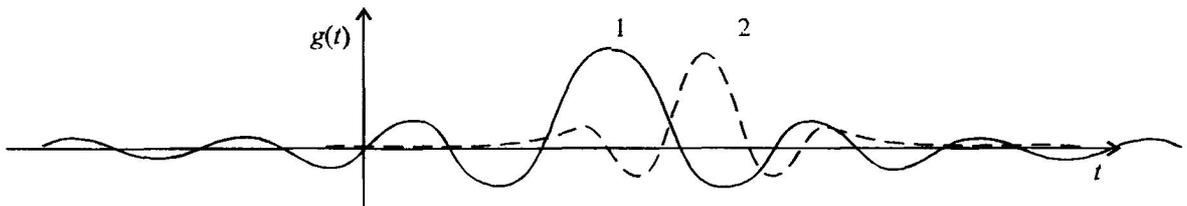


Рис 1.7. Импульсная характеристика фильтра, формирующего отсчётные функции: (1) – идеального ФНЧ, (2) – неидеального ФНЧ

Любую функцию отсчётов  $\varphi_i(t)$  можно получить на выходе идеального фильтра нижних частот, подав на его вход сигнал  $\delta(t - iT_d)$ . Идеальным называется фильтр нижних частот, у которого комплексная частотная характеристика имеет вид  $K(j\omega) = K_0$ , при  $-\omega_{max} \leq \omega \leq \omega_{max}$ ;  $K(j\omega) = 0$ , при  $\omega < -\omega_{max}$   $\omega > \omega_{max}$ . Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и фазочастотные-

характеристики (ФЧХ) для идеального и неидеального ФНЧ показаны на рис.1.6. Импульсные характеристики этих фильтров приведены на рис. 1.7.

### 1.3 Дискретизация узкополосного сигнала. Обобщение теоремы Котельникова.

Рассмотрим сигнал, спектральная плотность которого  $S(\omega)$  равна нулю вне интервала  $(f_c - \Delta F/2, f_c + \Delta F/2)$  для положительных частот (обозначим ее  $S^+(f)$ ) и вне симметричного интервала  $(-f_c - \Delta F/2, -f_c + \Delta F/2)$  для отрицательных частот (обозначим, соответственно,  $S^-(f)$ ) (рис. 1.8). Тем самым ширина спектра на положительной или отрицательной полуоси частот принимает значение  $\Delta F$ . Сигнал будет называться узкополосным, если  $\Delta F \ll f_c$ . Для рассматриваемого сигнала спектральную плотность можно записать в виде

$$S(f) = S^+(f) + S^-(f).$$

Согласно теореме Котельникова, частота дискретизации  $F_D$  должна быть выбрана большей или равной  $2(f_c + \Delta F/2)$ . Тот факт, что спектральная функция рассматриваемого сигнала равна нулю вне введенных выше интервалов, позволяет использовать частоту дискретизации  $F_D$ , значительно меньшую по сравнению с частотой  $F_c$ , определяемой теоремой Котельникова.

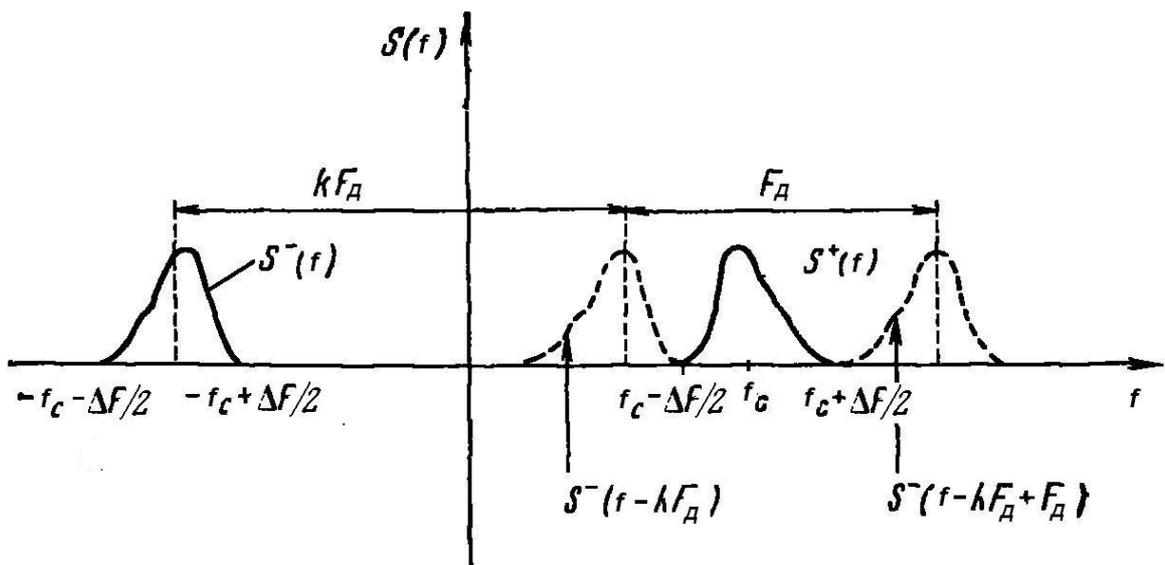


Рис 1.8. Спектр дискретизированного узкополосного сигнала

Рассмотрим только положительные частоты, поскольку все результаты остаются справедливыми и для отрицательных частот. Можно допустить параллельный перенос спектра в интервалах  $(0, f_c - \Delta F/2)$  и  $(f_c + \Delta F/2, +\infty)$ , вызванный процессом дискретизации, при условии, что отсутствует даже частичное пересечение со спектром сигнала  $S^+(f)$  до дискретизации (рис. 1.8). Такой перенос спектра  $S^-(f)$  примыкающего справа к  $S^+(f)$ , получается после

$k+1$  переносов на расстояние  $F_D$ . Для переноса спектра, примыкающего слева к  $S^+(f)$ , требуется  $k$  переносов на величину  $F_D$ . Если при переносах не происходит наложений, то спектры  $S^+(f)$  и  $S^-(f)$  не изменяются. При восстановлении начального спектра  $S(f)$  достаточно умножить получаемый после переносов спектр на сумму двух прямоугольных функций, отличных от нуля соответственно на интервалах  $(f_c - \Delta F/2, f_c + \Delta F/2)$  и  $(-f_c - \Delta F/2, -f_c + \Delta F/2)$ . Число  $k$  называется порядком субдискретизации [9].

Для нахождения частоты дискретизации  $F_D$  необходимо использовать условие, что  $k$  и  $k+1$  переносов  $S^-(f)$  не дают пересечений с  $S^+(f)$ . Ясно, что если нет пересечений с  $S^+(f)$ , то пересечения со спектром отсутствуют везде. Из рис. 1.8 видно, что пересечения отсутствуют, если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -f_c + \Delta F/2 + kF_D &< f_c - \Delta F/2 \\ -f_c - \Delta F/2 + (k+1)F_D &< f_c - \Delta F/2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(2f_c + \Delta F)/(k+1) < (2f_c - \Delta F)/k$$

Субдискретизация возможна, если

$$(2f_c + \Delta F)/(k+1) < (2f_c - \Delta F)/k \quad (1.6)$$

или

$$k < (f_c - \Delta F/2)/\Delta F.$$

Обозначим  $2f_c/\Delta F = v_c$ ,  $F_D/\Delta F = v_d$ , тогда неравенство (1.6) примет вид

$$(v_c + 1)/(k+1) < v_d < (v_c - 1)/k$$

Из последнего выражения следует, что  $v_d = F_D/\Delta F$  должна содержаться между двумя прямыми

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_c - 1)/k, \\ v_2 &= (v_c + 1)/(k+1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отметим, что для всех зон, в которых можно выбирать  $F_D$ , выполнено неравенство  $F_D > 2\Delta F$ . Действительно, когда все переносы являются смежными, неравенство  $F_D \geq 2\Delta F$  должно быть выполнено, поскольку протяженность спектра  $S(f)$  равна  $F$ . (Отметим, что общая протяженность спектра с учетом его составляющих на отрицательных частотах равна  $2\Delta F$ ) Итак, зная центральную частоту  $f_c$ , длину спектральной полосы  $F$  функций  $S^+(f)$  и  $S^-(f)$  и используя уравнение (1.7), можно построить все зоны, внутри которых расположены значения отношения  $F_D/\Delta F$  (рис. 1.9) [9]. Наибольший интерес представляет выбор минимально возможной частоты дискретизации. Такой выбор соответствует ординате выше значения  $F_D/\Delta F = 2$ .

Интервалы частот  $(0, F_D/2)$ ,  $(F_D/2, F_D)$ ,  $(F_D, 3F_D/2)$ , ... принято называть зонами Найквиста. При выполнении полученного условия на выбор частоты отсчетов спектральные плотности при параллельном переносе, вызванном дискретизацией, не будут выходить за пределы одной из зон Найквиста.

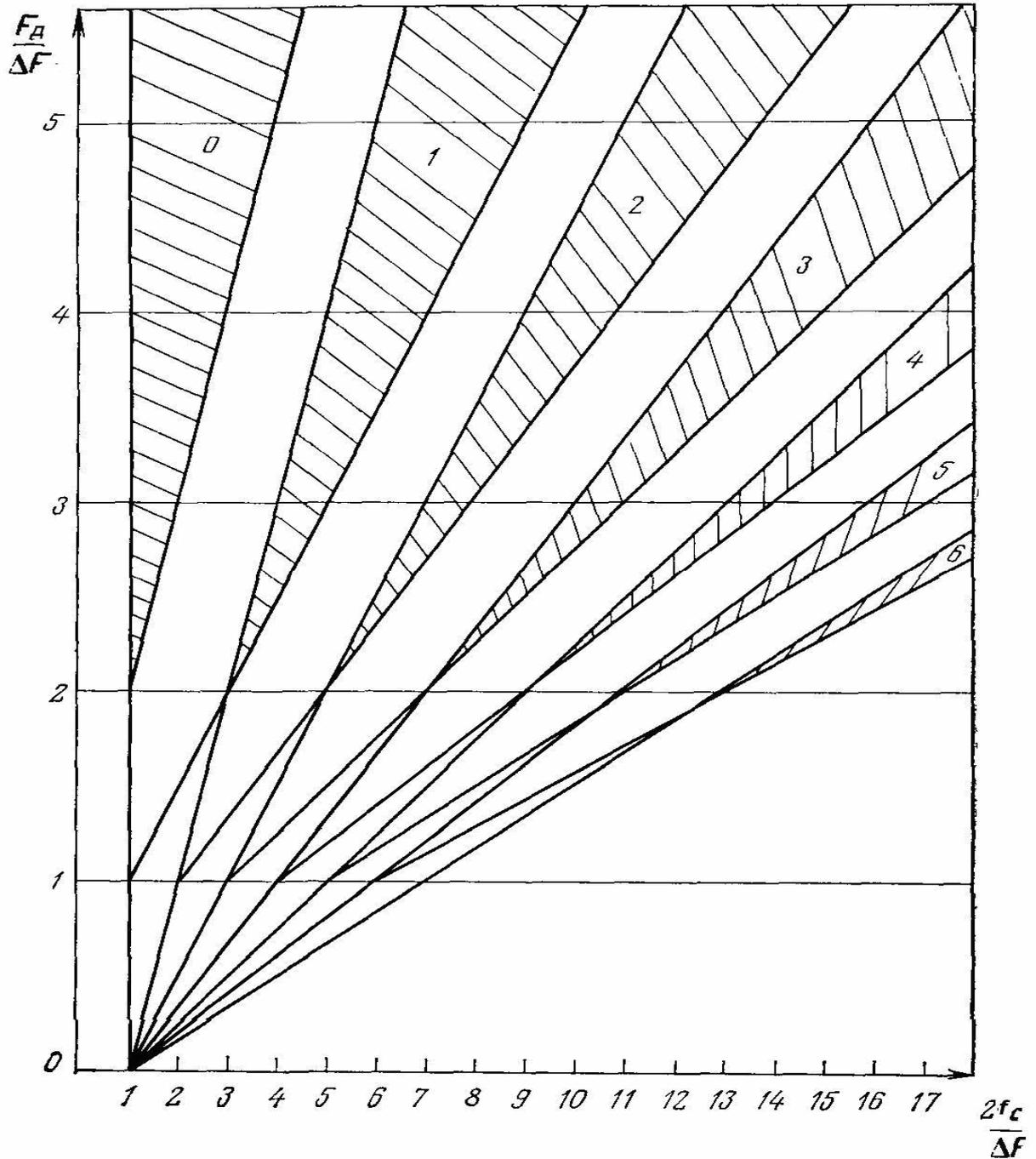


Рис 1.9. Диаграмма, иллюстрирующая диапазоны допустимых значений частоты дискретизации  $F_d$  (заштрихованные области) для узкополосного сигнала на частоте  $f_c$  и полосой  $\Delta F$ . Цифрами на заштрихованных областях указаны номера зон субдискретизации

На практике представляет также интерес максимально возможное увеличение порядка субдискретизации, так как это увеличение позволяет уменьшить число обрабатываемых дискретных значений сигнала.

## 1.4 Дискретизация случайных процессов. Ошибки восстановления

Теорему Котельникова можно распространять и на случайные сигналы. Тогда она формулируется следующим образом: для случайного процесса с односторонней спектральной плотностью мощности, удовлетворяющей условию  $G_x(f)=0$  при  $f > F_B$ , ряд

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} X(iT_D) \frac{\sin 2\pi F_B (t - iT_D)}{2\pi F_B (t - iT_D)},$$

где  $X(iT_D)$ —случайные величины, представляющие собой отсчёты случайного процесса, взятые через интервалы времени  $T_D = 1/2F_B$ , сходится в среднеквадратическом смысле к процессу  $X(t)$ .

Теорема Котельникова даёт предельные соотношения для идеализированных условий, среди которых следует отметить ограниченность спектра по частоте и бесконечное время наблюдения. Все реальные сигналы конечны во времени и имеют неограниченный по частоте спектр. Использование модели с ограниченным спектром и конечное время наблюдения приводят к погрешности при восстановлении непрерывного сигнала.

Рассмотрим причины этих погрешностей. Поскольку все слагаемые ряда (1.5) обращаются при  $t = i\Delta t$  в нуль во всех точках, за исключением, слагаемого с номером  $k = i$ , то в этих сечениях значения восстановленного сигнала совпадают с исходным, т.е. в этих точках погрешность восстановления равна нулю. Погрешность достигнет наибольшей величины внутри промежутка между отсчётами. Кроме того, величина погрешности нарастает к краям рассматриваемого интервала.

Другая причина погрешностей обусловлена тем, что спектры реальных ограниченных во времени сигналов не обращаются в нуль за пределами граничной частоты. Хотя основная энергия сигналов расположена на частотах от нуля до  $F_B$ , некоторая часть приходится на частоты выше граничной.

Третьей причиной погрешностей являются неидеальные характеристики фильтра, формирующего отсчётные функции.

Тем не менее, теорема Котельникова имеет большое практическое значение. Дело заключается в том, что спектр сигнала так или иначе ограничивается (например, при передаче непрерывного сообщения спектр  $G(f)$  целесообразно ограничить частотой  $F_B$ , при которой  $G(f) < N(f)$ , где  $N(f)$  — спектральная плотность мощности шума на выходе канала). В этих случаях теорема Котельникова позволит сориентироваться в отношении частоты дискретизации. Обычно её определяют по приближенной формуле

$$F_D \approx 2\lambda F_B,$$

где  $\lambda$  — некоторый коэффициент, который обычно принимает значения из диапазона 1,25 ... 2,5 [5].

Ограничение спектра сигнала частотой  $F_B$  путем фильтрации приводит к погрешности восстановления, относительный средний квадрат которой

$$\delta_F^2 = \frac{\int_{F_{\max}}^{\infty} G(f) df}{\int_0^{\infty} G(f) df} \quad (1.8)$$

т. е. равен отношению мощности отброшенной части спектра к средней мощности исходного сообщения.

При отсутствии предварительной фильтрации в процессе восстановления сигнала ошибка дискретизации возрастает. Пусть  $S_x(j\omega)$  — спектральная плотность сигнала  $x(t)$ . Тогда спектральная плотность дискретизированного сигнала  $x_d(t)$

$$S_{x_d}(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x[j(\omega - \frac{2\pi n}{T_d})], \quad (1.9)$$

т. е. она представляет собой с точностью до множителя  $1/T_d$  сумму бесконечного числа «копий» спектра исходного сообщения (рис. 1.10). Эти копии располагаются на оси частот через равные промежутки  $2\pi/T_d$ . При восстановлении сигнала идеальным фильтром нижних частот с полосой пропускания  $-\pi/T_d \leq \omega \leq \pi/T_d$  возникает ошибка, относительный средний квадрат этой ошибки с учетом (1.9) определяется как

$$\delta_{от.ф}^2 = \frac{\int_{|\omega| > \pi/T_d} |S_x(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega} + \frac{\int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} |S_x[j(\omega - 2\pi n/T_d)]|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega} \quad (1.10)$$

Первое слагаемое в (1.10) характеризует ошибку, обусловленную тем, что составляющие сигнала  $x_d(t)$  на частотах  $|\omega| > \pi/T_d$  не попадают в полосу пропускания фильтра, и совпадает по значению с (1.8). Второе слагаемое в (1.10) характеризует ошибку, обусловленную попаданием в полосу частот фильтра составляющих копий  $S_x[j(\omega - 2\pi n/T_d)]$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Если ограничиться только влиянием копий с  $n = \pm 1$ , то нетрудно видеть, что второе слагаемое также совпадает по значению с (1.8). При этом

$$\delta_{от.ф}^2 = 2\delta_F^2 \quad (1.11)$$

и, следовательно, будет целесообразна предварительная фильтрация сообщения с целью ограничения его спектра.

Заметим, что обеспечить условие  $G(f) = 0$  при  $f > F_b$  путем фильтрации физически невозможно. Сигнал на выходе любого реализуемого фильтра будет содержать составляющие на частотах  $f > F_b$ . Поэтому ошибка (1.8) является минимально возможной.

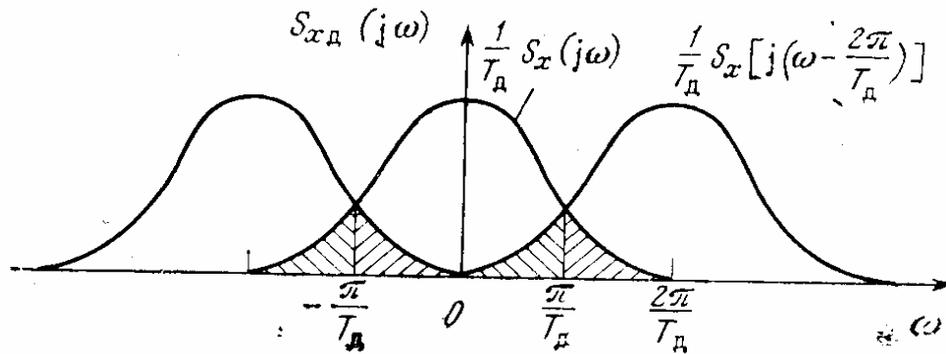


Рис. 1.10. Спектральная плотность дискретизированного сигнала

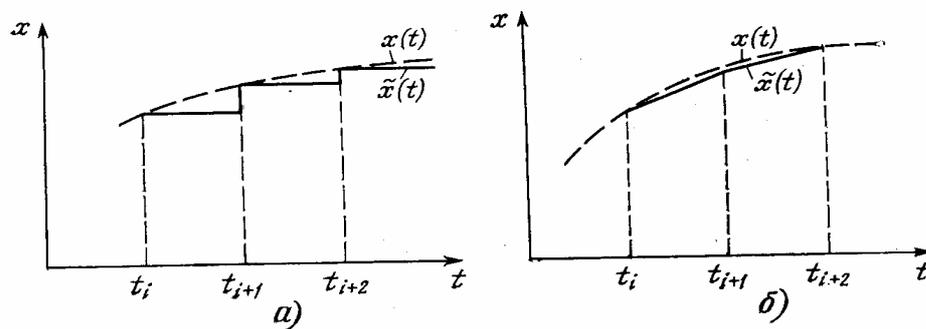


Рис. 1.11. Диаграммы, иллюстрирующие ступенчатую (а) и линейную (б) интерполяции

В общем случае восстановление (интерполяция) непрерывного сигнала  $x(t)$  по его отсчётам выполняется в соответствии с (1.4). При этом в качестве базисных функций широко используют алгебраические полиномы. В частности, на практике часто применяются ступенчатая и линейная интерполяции. При ступенчатой интерполяции (рис. 1.11, а) используется только один отсчёт. Функция  $\varphi_1(t) = 1$ , а  $\tilde{x}(t) = x(t_i)$ ,  $t_i \leq t \leq t_i + T_d$ .

При линейной интерполяции (рис. 1.11, б) используются два отсчёта. Функции  $\varphi_1(t) = 1 - \tau/T_d$ ,  $\varphi_2(t) = \tau/T_d$ , а  $\tilde{x}(t) = x(t_i) + [x(t_{i+1}) - x(t_i)]\tau/T_d$ ,  $t_i \leq t \leq t_i + T_d = t_{i+1}$ ,  $\tau = t - t_i$ .

Относительный средний квадрат погрешности интерполяции зависит от нормированной корреляционной функции  $r_x(\tau)$  исходного процесса  $X(t)$ , способа интерполяции и частоты дискретизации. Для любых стационарных процессов с нулевым математическим ожиданием при ступенчатой интерполяции

$$\delta^2 = 2 \left[ 1 - \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} r_x(\tau) d\tau \right], \quad (1.12)$$

при линейной интерполяции

$$\delta^2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} r_x(T_D) - \frac{4}{T_D} \int_0^{T_D} r_x(\tau) d\tau + \frac{4}{T_D^2} \int_0^{T_D} \tau r_x(\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

При заданной погрешности интерполяции формулы (1.12) и (1.13) используются для нахождения частоты дискретизации. Расчеты показывают, что на практике частота  $F_D$  существенно превышает частоту дискретизации по Котельникову. Так, для сигнала с прямоугольной спектральной плотностью мощности, ограниченной частотой  $F_{\max}$ , отношение  $F_D/2F_{\max}$  равно  $\pi/6\delta$  при ступенчатой интерполяции и  $\pi/\sqrt[4]{600\delta^2}$  при линейной [5].

### 1.5 Адаптивная дискретизация непрерывных сообщений

В данном случае координатами являются мгновенные значения непрерывного сигнала в некоторых точках опроса, неравноотстоящих друг от друга (рис. 1.12). На интервалах, где функция меняется в больших пределах, отсчеты берутся чаще, а на интервалах медленного изменения - реже. Для представления сообщения стараются использовать как можно меньшее число отсчетов, но достаточное для восстановления сообщения с заданной погрешностью.

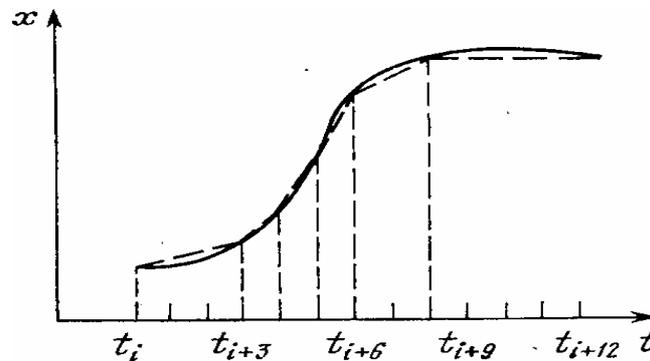


Рис. 1.12. Пример размещения существенных выборок при линейной интерполяции

Отсчеты, позволяющие восстановить непрерывное сообщение на приемной стороне с заданной точностью, называются обычно *существенными*.

Известны различные способы адаптивной дискретизации, отличающиеся алгоритмом формирования существенных отсчетов и видом служебной информации. Простейший алгоритм формирования существенных отсчетов заключается в следующем. Пусть последний существенный отсчет был в момент  $t_i$ . Для формирования следующей выборки сравнивают текущее значение функции  $x(t)$  с  $x(t_i)$ . Момент  $t_{i+j}$ , при котором  $|x(t_{i+j}) - x(t_i)| = \epsilon_m$ , соответствует очередной существенной выборке.

При адаптивной дискретизации отсчеты передаются в случайные мо-

менты. Поэтому для восстановления непрерывного сообщения по отсчетам приемная сторона должна знать, к каким тактовым моментам относятся принятые отсчеты. В связи с этим на приемную сторону приходится передавать дополнительную служебную информацию. Такой информацией могут быть значения тактовых моментов, соответствующих существенным выборкам. При сравнении различных способов представления это обстоятельство необходимо учитывать.

Адаптивные способы дискретизации широко применяют при отсутствии априорной информации о корреляционной функции или спектральной плотности мощности непрерывных сообщений.

## 2. Практическая часть

### 2.1. Описание лабораторной установки и измерительной аппаратуры

Лабораторная установка (рис.2.1) состоит из набора функциональных узлов или блоков, моделирующих систему связи (слева направо):

- источники сигналов;
- блоки КОДЕР-1, АЦП и сумматор;
- сменные блоки (в середине стенда), в данной работе используется блок «ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА»
- светодиодные табло переданного и принятого сообщения, ЦАП и блок контроля ошибок;
- блок индикации, в котором расположены измерительные приборы постоянного и переменного напряжения, а также движковый потенциометр напряжения смещения;
- Персональный компьютер (ПК).

Рассмотрим подробнее, что входит в состав блоков.

В блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ представлены:

- генератор гармонических сигналов с частотами 1кГц, 2кГц и 110кГц с регуляторами выхода (0÷1,5); (точные значения этих частот зависят от номинала кварцевого резонатора, используемого в данной модификации стенда);
- амплитудный модулятор с несущей частотой 110кГц и частотой модуляции 1кГц. Уровень несущей и глубина модуляции (m) регулируются в пределах 0÷1,5В и 0÷1В соответственно;



Рис.2.1 Общий вид лабораторной установки

- генератор шума (ГШ) с регулировкой выходного сигнала (квазибелый шум в полосе не менее 10Гц-100кГц);
- узлы синхронизации, вырабатывающие импульсные сигналы тактовой (С1) и цикловой (С2) синхронизации. Для С1 период  $T=450\mu\text{с}$  (тактовый интервал). Период С2  $T_{\text{ц}}=17T$ . Эти источники импульсных сигналов используются для внешней синхронизации осциллографа;
- источники гармонических сигналов  $f_1$  и  $f_2$ , используемые для получения дискретных видов модуляции;  $f_1=27\text{кГц}$ ;  $f_2=18\text{кГц}$ ;
- источник  $\delta(t)$  - сигнала “ $\delta$ -функции” - прямоугольной формы с длительностью  $t_{\text{ц}}=5\mu\text{с}$  и периодом 17 T; амплитуда не менее 5В.
- источники сигналов  $s_1 \div s_3$  - сигналов сложной формы, состоящих из двух гармоник (основная частота 2кГц).
- Источник сигнала  $s_4$  - сигнала, состоящего из суммы первой и третьей гармоник с частотами 23 и 69 Гц (для исследования АЦП).
- Источники сигналов  $U_1$  и  $U_2$  -регулируемых постоянных напряжений (в пределах  $-10 \div +10$  В);
- диапазонный низкочастотный генератор; имеет плавную и ступенчатую регулировку выходного сигнала ( $0 \div 5$ В). Установка частоты (в пределах 20Гц÷160кГц) производится по встроенному частотомеру с цифровой индикацией [10].

Источником сигнала также служит цифровой генератор Tektronix серии AFG3000 [11], который позволяет более гибко и в большем диапазоне управлять формой и параметрами создаваемых сигналов, вплоть до формирования функции произвольной формы.

В блоке КОДЕР-1 производится ручное формирование любой пятисимвольной комбинации с помощью тумблеров. Набранная комбинация индицируется на светодиодном табло с надписью ПЕРЕДАНО. (Такое же табло, но с надписью ПРИНЯТО, расположено над обозначением ДЕКОДЕР-1).

Блок АЦП является КОДЕРОМ-1 для аналоговых сигналов. На вход 1 блока АЦП подается входной аналоговый сигнал. Блок ЦАП имеет один вход и два выхода. Ниже блоков ЦАП и контроля ошибок расположены гнезда входов ПК с потенциометрами, регулирующими уровень сигналов, подаваемых на ПК. Связь стенда с ПК осуществляется через экранированный кабель, заканчивающийся разъёмом, который должен быть включён на вход звуковой платы ПК, работающей в режиме стерео, т.е. позволяет принимать два независимых сигнала. Программное обеспечение ПК позволяет наблюдать осциллограммы принятых сигналов и их спектры.

В данной работе используется сменный блок «ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА» (рис. 2.2), в состав которого входят дискретизатор и набор из трех фильтров - восстановителей с разными частотами среза. На рис. 2.2 дискретизатор отмечен знаком «X», представляющий собой перемножитель сигнала с последовательностью импульсов дискретизации) Источники исследуемых сигналов -  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  находятся в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ, а сами сигналы представляют собой суммы гармоник с частотами 2, 4 и 6 кГц. (При необходимости исследуемый сигнал может быть усложнен добавлением еще одного гармонического сигнала с частотой 1кГц с помощью сумматора стенда).

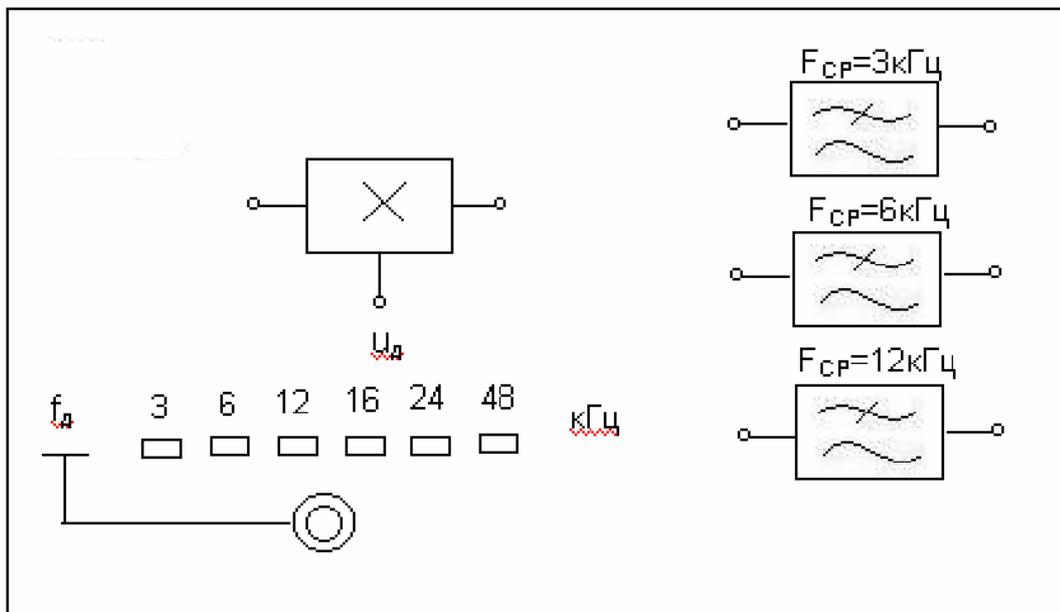


Рис. 2.2. Основные узлы блока «ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА»

Дискретизатор, формирующий отсчёты  $x(k\Delta t)$  непрерывного сигнала  $x(t)$ , выполняет функцию перемножителя этого сигнала с короткими импульсами напряжения дискретизации ( $u_{дискр}$ ). В данном случае дискретизатор выполнен по схеме аналогового коммутатора, пропускающего входной сигнал

$s(t)$  на выход в течение короткого времени существования импульсов дискретизации. Временной интервал между соседними отсчётами дискретизированного сигнала  $x(k\Delta t)$  зависит от выбора частоты дискретизации  $F_D$ :

$$\Delta t = 1/F_D.$$

Эта частота может изменяться дискретно при нажатии кнопки " $f_D$ ", при этом выбранное значение этой частоты индицируется светодиодом ( $F_D = 3, 6, 12, 16, 24$  и  $48$  кГц).

В качестве фильтров - восстановителей используются три активных ФНЧ четвертого порядка с частотами среза 3, 6 и 12 кГц. Для снятия импульсных характеристик фильтров используется сигнала генератора коротких импульсов " $\delta$  - функций" (гнезда  $\delta(t)$  в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ).

В соответствии с теоремой Котельникова отсчёты, следующие через интервалы времени  $\Delta t = 1/2F_g$ , где  $F_g$  - верхняя частота сигнала, могут быть преобразованы в исходный сигнал после прохождения через идеальный ФНЧ с частотой среза  $F_{CP} = F_g$ . В работе используются реальные ФНЧ с достаточно крутыми спадами АЧХ после частоты среза. Поэтому на практике выбирают  $\Delta t$  несколько меньше (а иногда и в несколько раз меньше), чем требуется в теореме Котельникова с тем, чтобы реальный ФНЧ с АЧХ трапецевидной формы позволял выделить спектр исходного сигнала из спектра дискретизированного сигнала, что гарантирует отсутствие искажений при обратном преобразовании (восстановлении) сигнала.

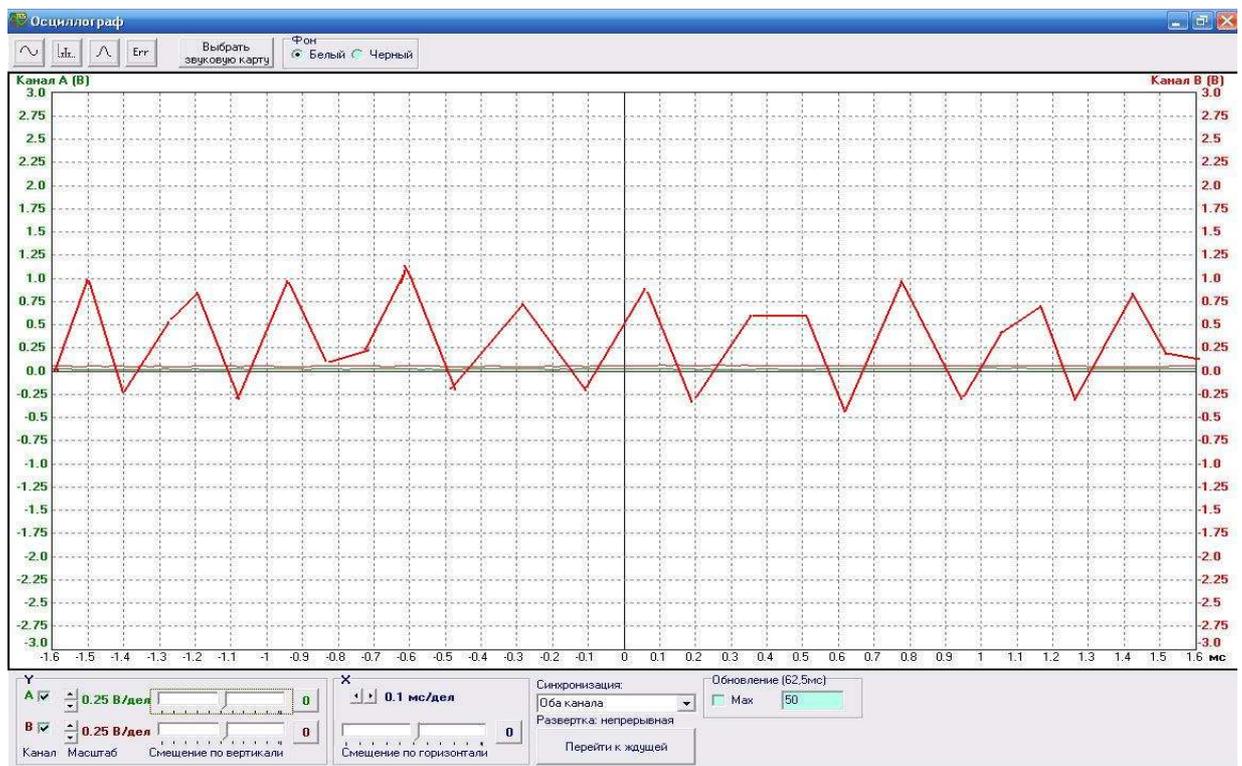


Рис 2.3. Внешний вид окна приложения на ПК в режиме осциллографа

В качестве измерительных приборов используются цифровой двух-канальный осциллограф Tektronix TDS 1001B [11] и ПК Приложение установленное на ПК обладает функциями осциллографа и анализатора спектра. Внешний вид окон этого приложения в режимах осциллографа и анализатора спектра приведены на рис. 2.3 и 2.4 соответственно. Программа содержит органы управления, которые дают возможность масштабировать и перемещать графики по любой из осей, включать и отключать отображение данных по каждому каналу звуковой платы.

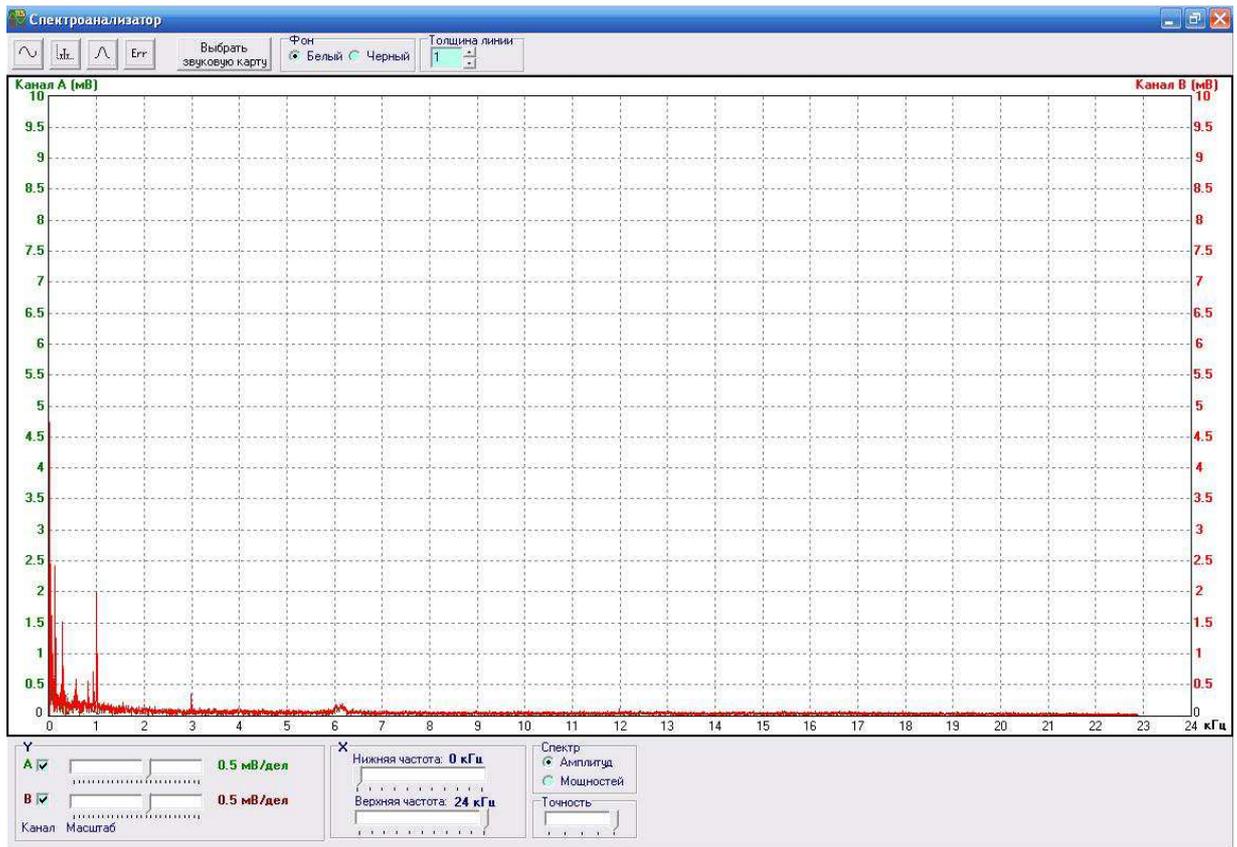


Рис 2.4. Внешний вид окна приложения на ПК в режиме анализатора спектра

## 2.2. Задания и методические указания по выполнению работы

### Задание 1. Дискретизация сигнала. Исследование спектров исходного и дискретизированного сигналов.

- 1.1. Первым шагом работы является уточнение частот дискретизации  $F_d$ . Значения этих частот, указанных на сменном блоке, являются ориентировочными. Для определения их точных значения проведите спектральный анализ сигналов  $U_d$  (гнездо под перемножителем). Спектральный анализ следует провести с использованием программы на ПК

в режиме спектроанализатора на ПК. Для этого гнездо  $U_D$  нужно соединить с гнездом входа "А" ПК.

**Внимание!** Перед использованием программы на ПК следует убедиться, что сигнал, поступающий на звуковую карту ПК, не претерпевает искажений из-за перегрузки входа звукового адаптера ПК. Вращением ручки потенциометра около входа "А" подберите такое положение, чтобы сигнал на временной диаграмме не менял свою форму при небольших поворотах ручки от выбранного положения. Данную корректировку нужно проводить при каждой смене источника сигнала, подаваемого на вход звуковой платы ПК.

Определив частоты первых гармоник этих сигналов при установке  $F_D=3, 6, 12$  и  $16$  кГц, внести уточненные значения в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 Уточненные частоты дискретизации ( $F_D$ ).

Обозначение на блоке	кГц	3	6	12	16	24	48
Измеренное (рассчитанное)	кГц						

Для частот более 24 и 48 кГц спектральный анализ с помощью приложения на ПК невозможен (т.к. звуковая плата позволяет оцифровывать сигналы до  $F_{max}=24$  кГц). Для нахождения точных значений последних двух частот выборки их следует умножить на тот же коэффициент, который связывает указанные на блоке и уточненные значения частот дискретизации. (Этот коэффициент – примерно 1,15 – может быть уточнен по первым четырем значениям  $F_D$ ).

а) Подайте на вход дискретизатора с генератора Tektronix серии AFG3000 гармонический сигнал с частотой 2 кГц. Чтобы выбрать форму сигнала на генераторе, нажмите на передней панели кнопку «Sine» («Синус»), а затем

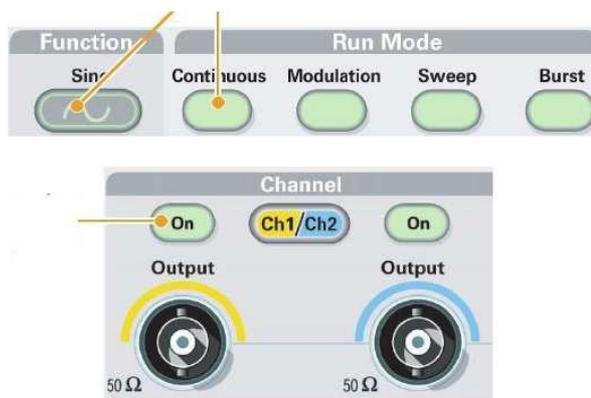


Рис.2.5. Органы управления генератора Tektronix серии AFG3000, используемые для получения гармонического колебания

нажмите кнопку «Continuous» («Непрерывный»). Для включения выходе нажмите на передней панели кнопку «On». около выходного гнезда соответствующего канала (рис. 2.5). Чтобы изменить частоту, нажмите на передней панели кнопку быстрого доступа «Frequency/Period» («Частота/Период»). Чтобы изменить значение частоты, воспользуйтесь цифровой панелью клавиатуры и экранными кнопками «Единицы измерения». После ввода значения частоты нажмите кнопку эк-

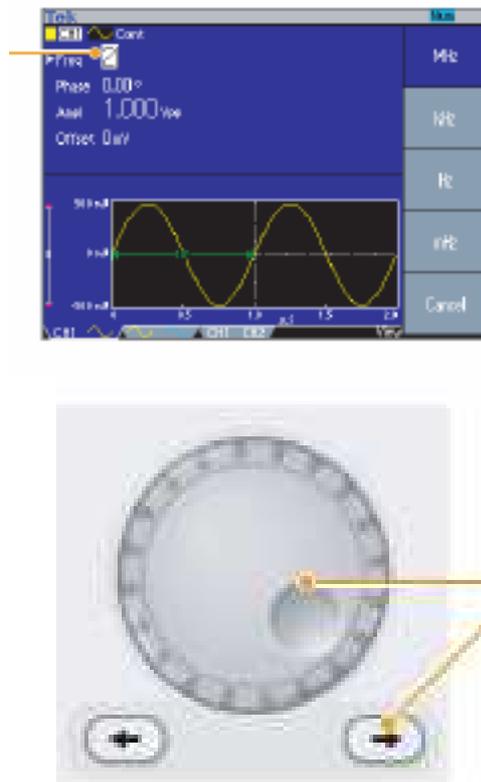


Рис.2.6. Органы управления генератора Tektronix серии AFG3000, используемые для установки частоты гармонического колебания

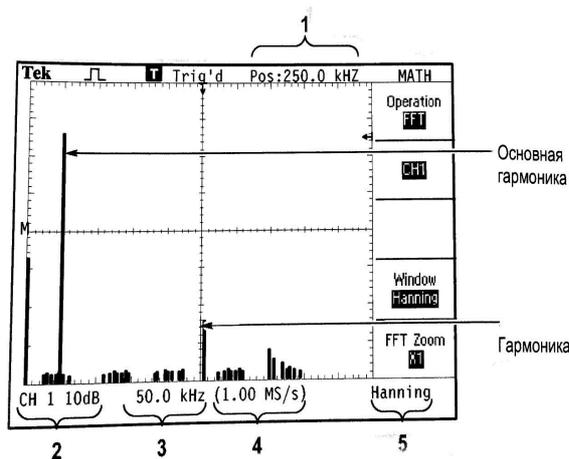


Рис. 2.7. Вид окна осциллографа Tektronix в режиме анализатора спектра.

ранного меню «Единицы измерения» или кнопку **Ввод** на передней панели, чтобы завершить ввод. Аналогично можно изменить значения амплитуды, фазы и сдвига (рис. 2.6). Можно также изменить параметры сигнала, используя универсальный манипулятор и клавиши со стрелками. Для увеличения значения того или иного параметра поверните манипулятор в направлении по часовой стрелке. Чтобы изменить цифровое значение, выберите его, нажимая кнопки со стрелками. Затем измените его поворотом манипулятора (рис. 2.6).

Наблюдайте на осциллографе Tektronix временные диаграммы сначала исходного сигнала с генератора, затем дискретизируйте сигнал с различными частотами. Сделайте вывод о выборе допустимой минимальной частоте отсчётов.

б) Пронаблюдайте спектры исходного сигнала с генератора и дискретизированного сигнала для различных частот выборки с помощью программы анализатора спектра на ПК и с помощью цифрового осциллографа Tektronix. Зафиксируйте их и поясните различия, учитывая тот факт, что осциллограф сам производит дискретизацию сигнала с некоторой частотой, которая отображается на его экране.

Для того, чтобы увидеть спектр на экране цифрового осциллографа, нажмите кнопку «MATH»

(«МАТЕМАТИКА») для вывода меню математических функций. Выберите канал-источник, алгоритм окна и коэффициент увеличения Быстрого преобразования Фурье (БПФ). Одновременно на экран можно вывести только один спектр. Содержимое экрана осциллографа при отображение спектра показано на рис. 2.7. Цифрами обозначены:

- 1 - Частота на центральной линии сетки;
- 2 - Масштаб по вертикали в дБ на деление;
- 3 - Масштаб по горизонтали, единица измерения - частота на деление;
- 4 - Частота дискретизации - числа выборок в секунду;
- 5 - Тип окна БПФ.

в) Изменяйте частоту гармонического сигнала от цифрового генератора с шагом 500 Гц и наблюдайте, как изменяется спектр сигнала на экране осциллографа. Частоту дискретизации  $F_D$  при этом выберите в середину диапазона допустимых значений (например, 12 кГц). Определите максимальную частоту гармонического сигнала, при которой верно определяется частота основной гармоники спектра. Найдите, как эта частота соотносится с частотой дискретизации. Сформулируйте вывод, о том, по какому принципу происходит искажение частоты основной гармоники при нарушении соотношения данной частоты с частотой дискретизации.

г) Сформируйте на втором выходе цифрового генератора гармонический сигнал с частотой примерно вдвое выше частоты гармонического сигнала в первом канале генератора. Подключите оба выхода генератора к входам дискретизатора. Наблюдайте спектры дискретизированного сигнала для различных частот выборки с помощью цифрового осциллографа. Определите, частота какой из двух составляющих суммарного сигнала двух каналов цифрового генератора определяет минимально допустимую частоту дискретизации. Посмотрите спектральный состав при различных соотношениях частот в двух каналах цифрового генератора, при этом рекомендуется меньшую частоту оставить без изменений, а частоту сигнала в другом канале менять от значения близкого к частоте сигнала в первом канале генератора до ее пятикратного превышения. Зафиксируйте временные диаграммы и спектры дискретизируемого сигнала при различных соотношениях частот двух составляющих сигнала. Частоту дискретизации рекомендуется установить равной 12 или 16 кГц.

1.2. а) Выберите один из трех сигналов ( $s_1$ ,  $s_2$  или  $s_3$ ,) в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ и подайте его на вход "А" ПК, работающего в режиме спектроанализатора. (Входы ПК находятся в нижней части стенда справа)

б) С помощью программы спектроанализатора на ПК получите спектр сигнала и определите его верхнюю частоту ( $F_B$ ).

в) Рассчитайте требуемую частоту дискретизации  $F_D$  согласно теореме Котельникова и установите ее на макете кнопкой " $f_D$ ".

г) Зафиксируйте в отчёте временные диаграммы в следующем порядке (с сохранением масштаба по оси времени)

- исследуемый сигнал  $s(t)$ ;
- напряжение дискретизации (гнездо нижнего входа перемножителя);
- выходной дискретизированный сигнал  $s(k\Delta t)$ .

д) С экрана монитора ПК зарисуйте спектры перечисленных выше сигналов.

1.3. Переключая кнопкой частоту дискретизации  $F_d$  на 1-2 шага выше и ниже выбранного значения  $F_d$ , наблюдайте изменения в осциллограммах и спектрах на выходе дискретизатора. Наиболее характерные случаи зафиксируйте в отчёте.

## **Задание 2. Исследование частотных и импульсных характеристик фильтров – восстановителей.**

С целью выбора наилучшего из трех ФНЧ в качестве фильтра - восстановителя необходимо определить частоту среза каждого из них по АЧХ и по импульсной характеристике  $g(t)$ . Кроме того, АЧХ фильтров необходима для последующей коррекции  $F_d$ , а импульсная реакция  $g(t)$  нужна для объяснения процесса восстановления сигнала.

2.1. Снятие АЧХ фильтра проводится путем подачи на его вход гармонического сигнала с напряжением 1В и с частотой 1кГц от цифрового генератора Tektronix серии AFG 3000, либо от встроенного генератора в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ. К выходу фильтра подключите встроенный цифровой вольтметр переменного напряжения. Плавно увеличивая частоту генератора, снимите частотную характеристику  $U_{ВЫХ}=\varphi(f)$  с шагом 1 кГц так, чтобы зафиксировать частоту среза  $F_C$ , на которой  $U_{ВЫХ}$  окажется в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем на частоте 1кГц, а также частоты, на которых  $U_{ВЫХ}$  уменьшится до 0,1 и 0,05 от  $U_{ВЫХ}(1кГц)$ . Постройте на одном графике АЧХ трех фильтров и отметьте на них уточненные значения частот среза  $F_C$ . Выбрать лучший фильтр - восстановитель для исследуемого сигнала.

2.2. Снятие импульсной реакции ФНЧ производится путем подачи на вход фильтра коротких импульсов (от гнезда " $\delta(t)$ " блока "ИСТОЧНИКИ"). Осциллограмма выходного сигнала будет соответствовать импульсной реакции фильтра  $g(t)$ . Зарисуйте осциллограммы  $g(t)$  для трех фильтров, фиксируя на них значения "нулей" (см. рис. 2.8) по шкале на экране осциллографа с учетом масштаба развертки (мкс/дел). Определив  $\Delta t'$  для каждого ФНЧ, находим частоты среза по формуле:

$$F_C = 1/(2 \Delta t').$$

2.3. По пунктам 2.1 или 2.2 выберите фильтр, наиболее пригодный для восстановления дискретизированного сигнала согласно теоретическим соотношениям.

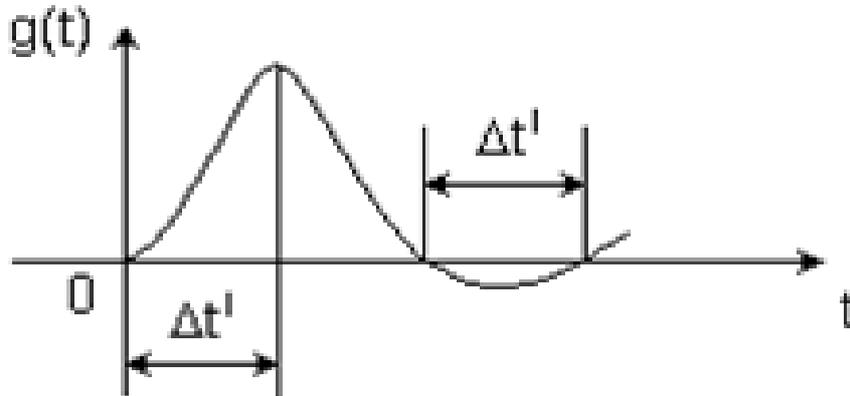


Рис. 2.8. Иллюстрация способа оценки параметра  $\Delta t'$  по импульсной характеристике фильтра

### Задание 3. Исследование процесса восстановления дискретизированных сигналов.

- 3.1. Сопоставляя спектры, снятые по п.1.3. д с частотной характеристикой выбранного фильтра - восстановителя, скорректируйте частоту дискретизации, увеличив ее на 1 - 2 шага от расчетного значения с тем, чтобы спектр сигнала  $s(t)$ , который исследовался в задании 1.3 можно было выделить из спектра дискретизированного сигнала с помощью выбранного реального ФНЧ.
- 3.2. Соедините выход дискретизатора со входом выбранного ФНЧ, установить на макете уточненное в п.3.1. значение  $F_{д'}$ . Подключив один из входов осциллографа ко входу дискретизатора, а второй - к выходу ФНЧ, зафиксируйте в отчете осциллограммы исходного и восстановленного сигнала.
- 3.3. Изменяя частоту дискретизации на 1 - 2 шага от скорректированного значения  $F_{д}$ , зафиксируйте наиболее характерные осциллограммы восстановленных сигналов. В отчете приведите заключение о том, допустимо ли изменять интервал между отсчетами дискретизированного сигнала.
- 3.4. Установив прежнее значение  $F_{д'}$ , замените выбранный ФНЧ на другой, а затем и на третий фильтр, фиксируя в отчете осциллограммы восстановленных сигналов с указанием частоты  $F_{с}$  ФНЧ.

### Задание 4. Исследование процесса дискретизации и восстановления для периодической последовательности импульсов

- 4.1. Получите последовательность импульсов одним из перечисленных ниже способов
- а) Соедините вход дискретизатора с источником периодической последовательности прямоугольных импульсов, в качестве которого используется КОДЕР-1. Установите тумблерами КОДЕРА-1 любую комбинацию из одной единицы и четырех нулей. При этом на выходе КОДЕРА-1 формируются прямоугольные импульсы длительностью 450 мкс с периодом 7650 мкс.
  - б) На цифровом генераторе Tektronix серии AFG3000 выберите один из типов сигнала: прямоугольный импульс, треугольный импульс, гауссовский импульс.
- 4.2. Проведя анализ спектра сигнала, полученного в пункте 4.1, выберите  $F_{\text{Д}}$  и фильтр восстановитель согласно теореме Котельникова. Зафиксируйте осциллограммы и спектры входного, дискретизированного и восстановленного сигналов. Пронаблюдайте, какие искажения возникают при нарушении условий дискретизации и восстановления по теореме Котельникова.

### **Задание 5. Исследование процесса дискретизации узкополосного сигнала.**

- 5.1. С помощью цифрового генератора Tektronix серии AFG3000 сформируйте амплитудно-модулированный сигнал. При этом установите следующие параметры: частота дискретизации 12 кГц или выше; частота несущей ровно в 10 раз выше частоты выборки; частоту модуляции задайте равной 1 кГц, форму модуляции выберите в виде прямоугольной или треугольной функции. Наблюдайте осциллограммы непрерывного и дискретизированного сигнала, зафиксируйте их.
- 5.2. В качестве фильтра-восстановителя выберите фильтр с наименьшей полосой пропускания. Зафиксируйте осциллограммы исходного и восстановленного сигнала.
- 5.3. Меняя частоту несущей в пределах 20% от первоначально установленной, посмотрите, как будут меняться графики на экране осциллографа. Объясните полученные результаты.

### **2.3. Требования к отчёту**

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1. Функциональную схему установки.
2. Осциллограммы, спектры и характеристики фильтров по всем пунктам задания.
3. Выводы из полученных результатов, сравнение теоретических и экспериментальных результатов, анализ причин возможных расхождений.

## 2.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Котельникова.
2. При каких условиях теорема Котельникова обеспечивает двойное преобразование сигналов (дискретизация и восстановление) без искажений?
3. Могут ли быть дискретизированы и затем восстановлены импульсы прямоугольной формы?
4. Каков алгоритм восстановления дискретизированного сигнала?
5. Какова роль ряда Котельникова в объяснении процесса восстановления сигнала?
6. Что такое базисная функция?
7. Какую функцию выполняет ФНЧ?
8. С какой целью в работе исследовались спектры исходного и дискретизированного сигналов?
9. Можно ли произвольно увеличивать или уменьшать  $\Delta t$  между отсчётами? К чему это может привести?
10. В чем отличие идеального и реального ФНЧ?
11. С чем связана необходимость корректировать значение частоты дискретизации?
12. Как Вы представляете себе процесс дискретизации аналогового сигнала? Какие функциональные узлы для этого необходимы?
13. Все ли аналоговые сигналы могут быть:
  - дискретизированы во времени;
  - восстановлены после дискретизации.
14. Назовите причины, вызывающие искажения при восстановлении дискретизированных сигналов.
15. Как формулируется теорема Котельникова для узкополосного сигнала?
16. Что называют зоной Найквиста?

## Список литературы

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. - В. кн.: Материалы по радиосвязи к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи. Всесоюзный энергетический комитет. 1933
2. Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, посвященная памяти академика В. А. Котельникова. //Успехи физических наук, т. 176, 2006, №7, с.751.
3. А.Дж.Джерри. Теорема отсчётов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор. ТИИЭР, 1977, Т.65, №11, с 53-89.
4. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи. М.: Радио и связь, 1999. 432 с.

5. Радиотехнические системы передачи информации. Под ред. В.В. Калмыкова. - М.: Радио и связь, 1990. 304 с.
6. Шеннон К. Связь при наличии шума. - В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963, с. 433—460.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1985.
8. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. М.: Радио и связь, 1980, 288 с.
9. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах, Пер. с франц. - М.: Мир, 1983 - Т.1. 312 с.
10. Борисенко А.В. Теория электрической связи: Методические рекомендации к лабораторным работам. Часть 1 / СПбГУТ; СПбГУИТМО. - СПб, 2004.
11. [www.tektronix.com](http://www.tektronix.com)

## Оглавление

Предисловие .....	3
1. Краткие теоретические сведения .....	4
1.1. Дискретизация сигналов во времени .....	4
1.2. Восстановление непрерывной функции по ее отсчётам .....	9
1.3. Дискретизация узкополосного сигнала. Обобщение теоремы Котельникова .....	11
1.4. Дискретизация случайных процессов. Ошибки восстановле- ния .....	14
1.5. Адаптивная дискретизация непрерывных сообщений .....	17
2. Практическая часть .....	18
2.1. Описание лабораторной установки и измерительной аппара- туры .....	18
2.2. Задание и методические указания по выполнению работы ....	22
2.3. Требования к отчёту .....	28
2.4. Контрольные вопросы .....	29
Список литературы .....	29