

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.И. Машин, А.В. Ершов, Д.А. Грачев  
**ЗАДАЧИ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА В ПРОЕКТИРОВАНИИ  
МНОГОСЛОЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ**  
*Практикум*

Рекомендовано методической комиссией физического факультета  
для бакалавров, обучающихся по следующим направлениям подготовки:  
210100 – «Электроника и наноэлектроника»,  
222900 – «Нанотехнологии и микросистемная техника»

Нижний Новгород  
2014

УДК 621.315.592:61

ББК 22.379

М38

М38 Машин А.И., Ершов А.В., Грачев Д.А. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА В ПРОЕКТИРОВАНИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ: Практикум. Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2014. – 36 с.

Рецензент: д.ф.м.н., профессор кафедры ИТФИ физического факультета ННГУ Морозов Олег Александрович

Практикум представляет собой описание лабораторной работы по курсам «Квантовая и оптическая электроника» и «Физико-химические основы технологии микро- и наноструктур». Методический материал включает теоретические методы анализа и синтеза многослойных оптических покрытий и необходимые сведения о материалах и конструкциях покрытий разных типов, даны указания к выполнению лабораторной работы.

Практикум предназначен для бакалавров физического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки: 210100 – «Электроника и наноэлектроника», 222900 – «Нанотехнологии и микросистемная техника».

Методическая разработка подготовлена с привлечением результатов НИР гранта РФФИ 14-02-00119.

УДК 621.315.592:61

ББК 22.379

© Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, 2014

## Содержание

Введение .....	4
1. Распространение электромагнитных волн в многослойных покрытиях .....	5
2. Задача анализа покрытий.....	12
3. Задача синтеза покрытий .....	13
4. Алгоритмизация решений задач анализа и синтеза.....	18
5. Виды многослойных покрытий.....	21
6. Описание лабораторной работы .....	31
Приложение .....	33
Используемая литература .....	35

## Введение

Многослойные оптические интерференционные покрытия, являясь, по сути, пассивными оптоэлектронными элементами, широко применяются в современной оптоэлектронике, включая интегральную, и в оптических прецизионных приборах бытовой, военной и космической направленности. Примерами здесь могут служить оптические элементы полупроводниковых фотоприемных и светоизлучающих устройств, солнечных фотопреобразователей, элементы приборов высокоточного медицинского оборудования и др.

Различные интерференционные покрытия создаются путем формирования тонких пленок необходимой оптической толщины с высоким и низким показателями преломления. В зависимости от назначения они могут применяться как для значительного уменьшения отражения света в узкой или широкой области спектра, так и для повышения отражающей способности, а также для получения пучков линейно поляризованного света с высокой степенью поляризации.

Данная методическая разработка направлена на практическое освоение методов анализа и синтеза многослойных интерференционных покрытий. Сначала дается решение задачи анализа путем матричного подхода в описании процессов распространения электромагнитного излучения в многослойной системе. Задача анализа рассмотрена на примере одного из популярных машинных методов оптимизации параметров покрытия для получения необходимых спектральных характеристик. Отдельно приведены основные типы многослойных покрытий и предъявляемые к ним требования. В результате освоения практикума предполагается овладение студентом основами конструирования многослойных интерференционных покрытий.

# 1. Распространение электромагнитных волн в многослойных покрытиях

## 1.1 Электромагнитные волны в средах

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в изотропной среде, где диэлектрическая проницаемость обозначена через  $\varepsilon$ , а магнитная проницаемость — через  $\mu$ . В этом случае уравнения Максвелла [1] для  $E$  компоненты (аналогично для  $H$  компоненты) электромагнитного поля можно представить в виде

$$\Delta E + \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} E = 0.$$

Для бесконечной и однородной среды решением является выражение

$$E = E_0 e^{i\phi},$$

где  $\phi$  — фаза волны (эйконал), связанная с волновым вектором  $\vec{k}$  и частотой  $\omega$ :

$$\nabla\phi = \vec{k}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\omega.$$

Из уравнений Максвелла можно также выразить связь компонент электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и волнового вектора  $\vec{k}$ :

$$\begin{aligned} \omega\mu\vec{H} &= c[\vec{k}\vec{E}], \quad \omega\varepsilon\vec{E} = -c[\vec{k}\vec{H}], \\ \vec{k}\vec{E} &= 0, \quad \vec{k}\vec{H} = 0, \\ E^2 &= \frac{\mu}{\varepsilon} H^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Видно, что в электромагнитной волне зависимость поля от координат дается множителем вида  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , где в общем случае волновой вектор является комплексным

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''.$$

Исходя из выражения (1), можно в явном виде установить квадрат волнового вектора

$$k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} = \varepsilon\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2,$$

где  $\lambda$  — длина волны. Для волны, распространяющейся без затухания в непоглощающей (прозрачной) однородной среде, волновой вектор вещественен и по величине равен

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{2\pi}{\lambda},$$

здесь  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  называется *показателем преломления* среды. В более общем случае для поглощающей среды комплексную величину  $\sqrt{\varepsilon\mu}$  записывают в виде  $n + ik$  с вещественными  $n$  и  $k$

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{2\pi}{\lambda} = \tilde{n} \frac{2\pi}{\lambda} = (n + ik) \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Для мнимой части комплексного показателя преломления  $k$  в разных источниках используются разные, иногда вводящие в заблуждение читателя, названия. В немецкой [2] и англоязычной [3, 4] литературе принято для

величины и использовать термин *коэффициент экстинкции*. Этот коэффициент определяет скорость затухания волны по мере ее распространения. Однако затухание волны не обязательно связано с наличием *истинного поглощения*, диссипация энергии имеет место лишь при комплексных величинах  $\varepsilon$  или  $\mu$ , а коэффициент  $k$  может быть отличным от нуля и при вещественных (отрицательных)  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Стоит отметить, что в литературе [5] можно также встретить понятие *показателя поглощения*  $k$ . Эта величина возникает при введении комплексного показателя преломления через произведение  $\tilde{n} = n(1 - ik) = n + ik$ .

Поток электромагнитного излучения задается вектором Пойнтинга [1]

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}],$$

показывающим изменение энергии в единице объема за единицу времени:

$$\frac{dU}{dt} = -\nabla \vec{S} = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Для стационарного случая при наличии диссипации энергии усредненный по времени поток энергии в единице объема показывает систематический приток энергии  $Q$  от внешних источников, который определяется мнимыми составляющими диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'' = \text{Im}(\varepsilon)$  и магнитной восприимчивости  $\mu'' = \text{Im}(\mu)$

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} (\varepsilon'' EE^* + \mu'' HH^*), \quad (2)$$

где звездочкой показано комплексное сопряжение. Материал называется прозрачным, если  $\varepsilon''$  и  $\mu''$  пренебрежимо малы по сравнению с  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Подставив в явном виде решения для  $E$  и  $H$  компонент поля и проинтегрировав в направлении распространения волны ( $0z$ ), можно получить закон Бугера–Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\alpha z},$$

где  $\alpha = 4\pi k/\lambda$  – *коэффициент поглощения* или *аттенюации* ( $\text{см}^{-1}$ ), а  $\lambda$  – длина волны в вакууме.

## 1.2 Падение волны на плоскую границу раздела двух сред

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между однородными средами. Падение происходит из среды 1. Отметим величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2. Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси  $0z$  (с положительным направлением вглубь среды 2).

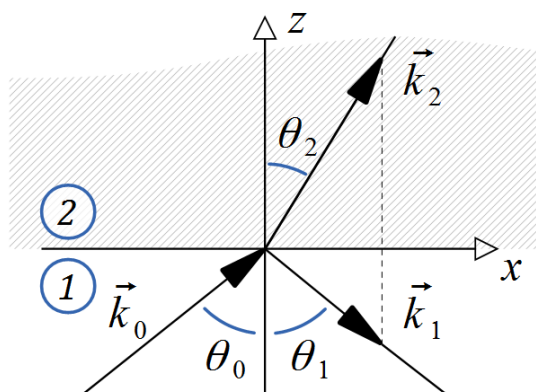


Рис. 1. Схема поведения электромагнитной волны на плоской границе раздела полубесконечных материалов с разными показателями преломления

Ввиду полной однородности в плоскости  $xz$  решения уравнений поля в плоскости  $xz$  во всем пространстве (в каждой из сред и между собой) должно быть одинаковым. Это значит, что компоненты  $k_x, k_y$  волнового вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда следует, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости, называемой *плоскостью падения*; выберем ее в качестве плоскости  $xz$ , тогда можно записать условие равенства компонент  $k_{x0} = k_{x1} = k_{x2}$ .

Из условия постоянства модуля волнового вектора  $k$  ( $|k_0| = |k_1| = |k_2|$ ) можно записать  $k_z$  компоненту векторов, полагая в обеих средах  $\mu = 1$ :

$$k_{z0} = -k_{z1} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_0,$$

$$k_{z2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_2 - k_{x0}^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}.$$

Величина же  $k_z$  в поглощающей среде комплексна, причем корень должен быть взят с таким знаком, чтобы волна затухала вглубь среды 2. Искусственно ввести знак необходимо, если реальная и мнимая части подкоренного выражения меньше нуля.

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн надо обратиться к граничным условиям на поверхности раздела ( $z = 0$ ). При этом рассмотрим два случая. *Первый случай* – вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения, а во *втором* – вектор магнитного поля перпендикулярен плоскости падения. Это соответствует  $s$  и  $p$  поляризации электромагнитного поля.

Рассмотрение случая нормального падения на границу вызвано тем, что трехмерную задачу можно свести к одномерной (по  $Oz$ ), проследив изменение только  $z$  компоненты волнового вектора  $k_z$  на границе двух сред (рис. 2).

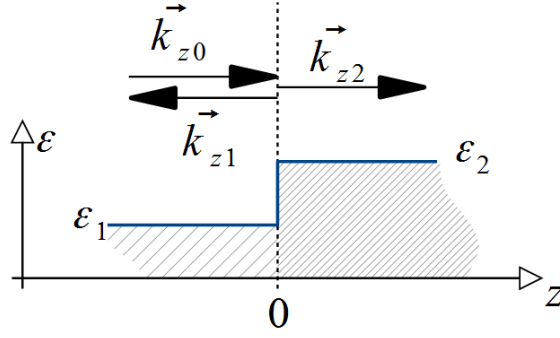


Рис. 2. Случай падения электромагнитной волны на плоскую границу раздела материалов с разными диэлектрическими постоянными

Рассмотрим поведение  $E$  компоненты поля. Исходя из условий  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , и  $\mu = 1$ , на границе должно выполняться равенство амплитуд  $E$  компонент и равенство их производных.

$$\begin{cases} E_0 e^{ik_{z1}\zeta} + E_1 e^{-ik_{z1}\zeta} = E_2 e^{ik_{z2}\zeta}, \\ E_0 i k_{z1} e^{ik_{z1}\zeta} - E_1 i k_{z1} e^{-ik_{z1}\zeta} = E_2 i k_{z2} e^{ik_{z2}\zeta}. \end{cases}$$

Здесь  $E_0$  и  $E_1$  — амплитуды падающей и отраженной волн, а  $E_2$  — амплитуда прошедшей волны. Во избежание путаницы между индексом проекции волнового вектора  $k_z$  на ось  $Oz$  и координатой  $z$  далее будем использовать  $\zeta$  для обозначения координаты, где это будет уместно.

Приведенную выше систему уравнений можно переписать в матричном виде относительно амплитуд электрической компоненты поля в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} = \hat{T}_E \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_E(\zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{k_{z2}}{k_{z1}}\right) \exp[i(-k_{z1} + k_{z2})\zeta] & \left(1 - \frac{k_{z2}}{k_{z1}}\right) \exp[i(-k_{z1} - k_{z2})\zeta] \\ \left(1 - \frac{k_{z2}}{k_{z1}}\right) \exp[i(k_{z1} + k_{z2})\zeta] & \left(1 + \frac{k_{z2}}{k_{z1}}\right) \exp[i(k_{z1} - k_{z2})\zeta] \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\hat{T}_E$ , связывающая компоненты электрического поля, называется *матрицей распространения* или *трансфер-матрицей* [6, 7]. При более детальном рассмотрении можно увидеть, что она является результатом перемножения матрицы  $\hat{B}$ , характеризующей *границу*, и матриц *фаз*  $\hat{A}$  и  $\hat{C}$  в средах 1 и 2, записываемых для конкретной координаты границы  $\zeta$ :

$$\hat{T}_E(\zeta) = (\hat{A}\hat{B}\hat{C})|_{\zeta} = \begin{pmatrix} e^{-ik_{z1}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z1}\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k_{z1} + k_{z2}}{2k_{z1}} & \frac{k_{z1} - k_{z2}}{2k_{z1}} \\ \frac{k_{z1} - k_{z2}}{2k_{z1}} & \frac{k_{z1} + k_{z2}}{2k_{z1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_{z2}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z2}\zeta} \end{pmatrix}.$$

Запишем амплитудные коэффициенты отражения  $r$  и прохождения  $t$  через компоненты матрицы распространения:



$$r = \frac{E_1}{E_0} = \frac{T_{E 21}}{T_{E 11}}, \quad t = \frac{E_2}{E_0} = \frac{1}{T_{E 11}}. \quad (3)$$

Практически применимые коэффициенты пропускания  $T$  и отражения  $R$  показывают усредненную по времени часть потока излучения, прошедшую и отразившуюся от границы соответственно. Каждый из потоков дается средним значением  $z$  компоненты вектора Пойнтинга  $\langle \vec{S} \rangle$  [1]:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon/\mu} E E^*.$$

Известные формулы Френеля [8] могут быть получены, если подставить в явном виде матричные элементы матрицы распространения.

$$R_E = \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2 = \left| \frac{T_{E 21}}{T_{E 11}} \right|^2, \quad T_E = \text{Re} \left( \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) \left| \frac{E_2}{E_0} \right|^2 = \text{Re} \left( \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) \left| \frac{1}{T_{E 11}} \right|^2. \quad (4)$$

Аналогичным образом рассматривается процесс падения для  $H$  компоненты поля. Отличия возникают из-за появления разрыва производной на границе по причине разности диэлектрических постоянных  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ; заметим, для случая  $\mu \neq 1$  компонента  $E$  также будет претерпевать разрыв производной.

$$\hat{T}_H(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{-ik_{z1}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z1}\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}{2\varepsilon_2 k_{z1}} & \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{2\varepsilon_2 k_{z1}} \\ \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{2\varepsilon_2 k_{z1}} & \frac{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}{2\varepsilon_2 k_{z1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_{z2}\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z2}\zeta} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_H(\zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}}\right) \exp[i(-k_{z1} + k_{z2})\zeta] & \left(1 - \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}}\right) \exp[i(-k_{z1} - k_{z2})\zeta] \\ \left(1 - \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}}\right) \exp[i(k_{z1} + k_{z2})\zeta] & \left(1 + \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}}\right) \exp[i(k_{z1} - k_{z2})\zeta] \end{pmatrix};$$

$$R_H = \left| \frac{H_1}{H_0} \right|^2 = \left| \frac{T_{H 21}}{T_{H 11}} \right|^2, \quad T_H = \text{Re} \left( \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right) \left| \frac{H_2}{H_0} \right|^2 = \text{Re} \left( \frac{\varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1}} \right) \left| \frac{1}{T_{H 11}} \right|^2. \quad (5)$$

### 1.3 Отражение и прохождение через многослойное покрытие

Подход матриц распространения значительно облегчает рассмотрение многослойных покрытий. Для этого необходимо предположить стационарный случай падения электромагнитной волны на «ступенчатый» профиль диэлектрической постоянной по  $Oz$ , как это показано на рис. 3.

Пусть амплитуда падающей волны будет  $E_0$ , отраженной —  $E_1$ , а прошедшей —  $E$ . Здесь и далее будем рассматривать  $E$  компоненту поля, так как рассуждения для  $H$  компоненты аналогичны.

Так как случай стационарный, то в любой пространственной области  $w$  (со своей диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_w$ ) существуют две волны, распространяющиеся в противоположные стороны с волновыми векторами  $k_w$  и  $-k_w$ . Исключение составляет последняя область, в которой есть только волна с волновым вектором  $k$ . Это условие выражает отсутствие внешнего источника

излучения. Так, для каждой границы можно выразить связь между амплитудами волн через матрицы распространения:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} = \hat{T}_{1 \leftrightarrow 2}(z_1) \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \hat{T}_{2 \leftrightarrow 3}(z_2) \begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix}, \dots \quad \begin{pmatrix} E_5^+ \\ E_5^- \end{pmatrix} = \hat{T}_{5 \leftrightarrow 6}(z_5) \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что связь между падающей и прошедшей волной можно выразить одной единственной матрицей, полученной в результате мультипликации (умножения) трансфер-матриц для каждой границы:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} = \hat{T}_{1 \leftrightarrow 2} \hat{T}_{2 \leftrightarrow 3} \hat{T}_{3 \leftrightarrow 4} \hat{T}_{4 \leftrightarrow 5} \hat{T}_{5 \leftrightarrow 6} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_w \hat{T}_w \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате задача сводится к рассмотренной ранее, для которой были выведены коэффициенты отражения  $R$  и пропускания  $T$  (см. формулы (4), (5)). Однако такой матричный подход не дает представления о том, какие процессы протекают внутри многослойного покрытия, а именно – об эффектах интерференции.

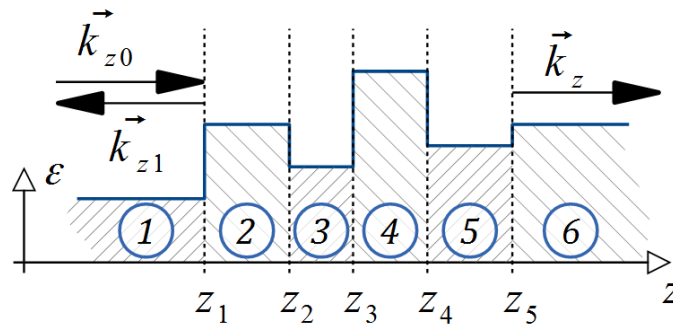


Рис. 3. Случай многослойной системы с разной диэлектрической постоянной

Представим структуру, у которой профиль диэлектрической проницаемости по  $Oz$  меняется так, как на рис. 4. Процессы пропускания и отражения на каждой границе будем рассматривать по отдельности. Можно увидеть, что таких операций необходимо совершить бесконечно много, т.е. происходит многократное отражение падающей волны.

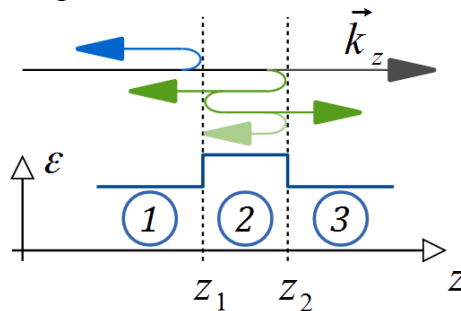


Рис. 4. Случай многократного отражения в тонкой пленке

Результирующая волна на выходе из структуры является суперпозицией волн, испытавших разное количество отражений от внутренних границ. Интенсивность на выходе будет максимальна, если все выходящие волны будут синфазны, и наоборот – минимальна, если волны будут выходить в противофазе. Путем подгонки фазы можно добиться ситуации, когда излучение

будет проходить через структуру без отражения или наоборот – полностью отражаться. Рассмотрим это явление более детально.

Пусть волна за путь, пройденный от первой границы до второй, наберет фазу  $\phi$ . Тогда волна, отраженная по одному разу от второй и первой границы, наберет ко второй границе фазу  $3\phi$ . Дважды отраженная – наберет фазу  $5\phi$  и так далее (см. рис. 5).

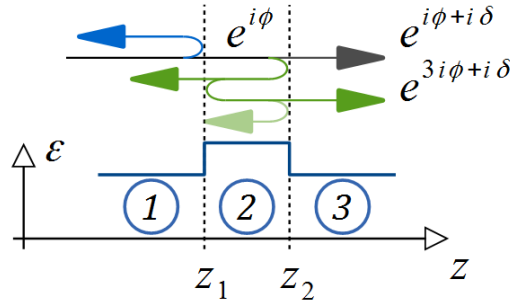


Рис. 5. Изменение фазы при многократном отражении волны

Выходящие волны, испытавшие многократное отражение, будут друг друга усиливать, если прирост фазы  $2\phi$  за путь «туда–обратно» внутри слоя будет кратен  $2\pi$ ; это является следствием того, что фаза волны определена с точностью до  $2\pi$ .

$$2\phi = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbb{Z}$  – множество натуральных чисел:  $\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots$ .

Условие того, что волны будут гасить друг друга, может быть получено, если разность фаз ( $2\phi$ ) будет равна  $\pi$ .

$$2\phi = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Следует помнить, что эти условия будут различны для разных профилей диэлектрической проницаемости. Случаи отражения на границе  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  и  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  отличны тем (рис. 6 а), что в первом случае отраженная волна скачком изменяет свою фазу на  $\pi/2$  (см. (3)). В связи с этим для случая  $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$  (рис. 6 б) вышесказанные условия обращаются на противоположные. Эти рассуждения можно обобщить на произвольный вид профиля  $\epsilon$ .

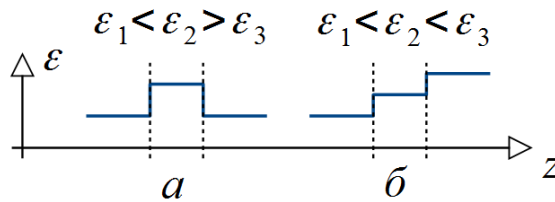


Рис. 6. Примеры профиля сред с разными диэлектрическими постоянными

Отметим, что выше был рассмотрен случай падения волны с одним определенным волновым вектором  $\vec{k}$ . На практике требуется знать, как поведет себя покрытие в некотором диапазоне волновых векторов  $\vec{k}$ . или, другими словами, в определенном диапазоне длин волн  $\lambda$ .

## 2. Задача анализа покрытий

Задача анализа многослойных систем заключается в расчете спектральных коэффициентов пропускания и отражения при заданных конструкции и оптических свойствах используемых материалов (см. рис. 7). Математический аппарат анализа, описанный выше, позволяет заключить, что задача анализа является прямой, где всегда можно получить конечное однозначное решение — какую-то спектральную характеристику.

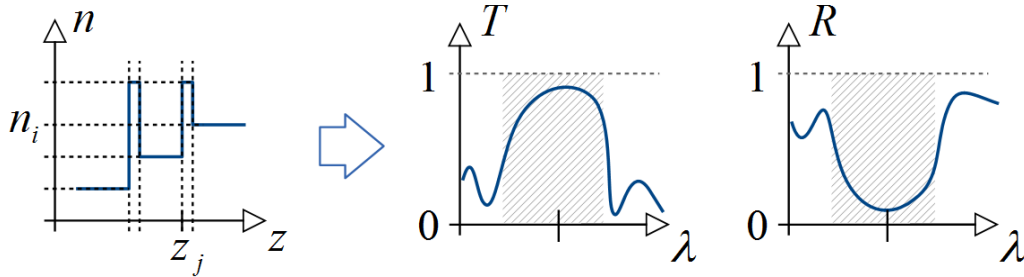


Рис. 7. Иллюстрация прямой задачи анализа покрытий

Любое многослойное оптическое покрытие можно описать наборами чисел  $\{n: n = n_i\}$  и  $\{z: z = z_j\}$ , где  $n_i$  - показатель преломления  $i$  области среды, а  $z_j$  - его геометрическая граница между материалами с разными диэлектрическими постоянными. Необходимо учитывать, что первый и последний слои полубесконечны. С одной стороны, к примеру, может быть воздух  $n_0 \approx 1$ , а с другой – подложка  $n_{\text{п}}$ . Если подложка прозрачна и конечна, то необходимо также учитывать пространство за подложкой.

Иногда в силу технологических причин для изготовления тонких слоев могут применяться поглощающие материалы. В этом случае в расчете (3, 4) коэффициентов  $R$  и  $T$  не стоит пренебрегать коэффициентами экстинкции материалов  $k$ .

Учет поляризации излучения производится путем введения угла наклона плоскости поляризации падающей волны  $\beta$  по отношению к плоскости падения излучения. Полное выражение для коэффициентов отражения и пропускания записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= R_H(\lambda) \cos^2 \beta + R_E(\lambda) \sin^2 \beta, \\ T(\lambda) &= T_H(\lambda) \cos^2 \beta + T_E(\lambda) \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) упрощается, если падающее излучение не поляризовано (случай естественного света):

$$R = \frac{1}{2}(R_H + R_E), \quad T = \frac{1}{2}(T_H + T_E).$$

### 3. Задача синтеза покрытий

Кроме прямой задачи расчета покрытия известной конструкции, для практики наибольший интерес представляет решение обратной задачи — задачи синтеза покрытия. В общем случае задача синтеза заключается в определении структуры покрытия (числа и комбинаций слоев, их оптических параметров). При этом обеспечивается получение требуемой спектральной характеристики с заданной точностью при ряде ограничений, накладываемых на значения показателей преломления и толщин слоев.

Решение задачи синтеза оптических покрытий сопряжено со значительными трудностями, характерными для обратных задач. Задачу синтеза не удастся сформулировать с помощью матричных уравнений, как это сделано для прямой задачи. Этим обстоятельством объясняется существование большого числа различных методов конструирования, ориентированных главным образом на решение частных задач.

Большую группу близких по характеру подходов, направленных на упрощение синтеза многослойной системы, образуют методы, основанные на применении аппроксимации спектральных характеристик покрытия. Однако при конструировании конкретных покрытий не всегда удается учесть ограничения на дисперсию оптических постоянных реальных слоев, в результате чего рассчитанные конструкции часто оказываются сложными для практической реализации.

Для расчета часто используют приближенный метод, основанный на разложении в ряд Тейлора коэффициента отражения или пропускания по показателям преломления  $n_i$  и  $z$  координатам границ  $\zeta_j$ . Рассмотрим более детально данный метод на примере коэффициента пропускания  $T$ .

Будем считать, что для системы возможен ограниченный (заданный) набор используемых материалов, то есть существует конечное число возможных показателей преломления. В этом случае остается возможность варьировать координату границы  $\zeta_j$ :

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \zeta_j} \Delta \zeta_j = \alpha_j \Delta \zeta_j. \quad (9)$$

Вспоминая (см. (4), (5)) связь коэффициента пропускания  $T$  и компонентов матрицы пропускания  $\hat{T}$

$$T = \operatorname{Re} \left( \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) \left| \frac{1}{\hat{T}_{11}} \right|^2,$$

можно записать в явном виде компоненту матрицы  $\alpha_j$  — производную коэффициента пропускания  $T$  по  $\zeta_j$ :

$$\alpha_j = \frac{\partial T}{\partial \zeta_j} = \operatorname{Re} \left( \frac{k_{z2}}{k_{z1}} \right) (-2) \left| \frac{1}{\hat{T}_{11}} \right|^3 \frac{\partial \hat{T}_{11}}{\partial \zeta_j}.$$

Производная  $\partial \hat{T} / \partial \zeta_j$  по координате границы  $j$  вычисляется путем введения дополнительных множителей — диагональных матриц, составленных из волновых векторов для материалов  $j$  и  $(j + 1)$ :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \zeta_j} = \hat{T}_{1 \leftrightarrow 2} \dots \hat{T}_{(j-1) \leftrightarrow j} \times \\ \times \left[ \begin{pmatrix} -ik_{z,j} & 0 \\ 0 & ik_{z,j} \end{pmatrix} \hat{T}_{j \leftrightarrow (j+1)} \begin{pmatrix} ik_{z,j+1} & 0 \\ 0 & -ik_{z,j+1} \end{pmatrix} \right] \hat{T}_{(j+1) \leftrightarrow (j+2)} \dots \hat{T}_{u \leftrightarrow (u+1)},$$

где  $i$  – комплексная единица. Такой способ вычисления производной следует из результатов дифференцирования множителя  $\hat{T}_{j \leftrightarrow (j+1)}$  - трансфер-матрицы для  $j$  границы:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \hat{T}_{j \leftrightarrow (j+1)} = \\ = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left[ \begin{pmatrix} e^{-ik_{z,j}\zeta_j} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z,j}\zeta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k_{z1} + k_{z2}}{2k_{z1}} & \frac{k_{z1} - k_{z2}}{2k_{z1}} \\ \frac{k_{z1} - k_{z2}}{2k_{z1}} & \frac{k_{z1} + k_{z2}}{2k_{z1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_{z,j+1}\zeta_j} & 0 \\ 0 & e^{ik_{z,j+1}\zeta_j} \end{pmatrix} \right] \\ = \begin{pmatrix} -ik_{z,j} & 0 \\ 0 & ik_{z,j} \end{pmatrix} \hat{T}_{j \leftrightarrow (j+1)} \begin{pmatrix} ik_{z,j+1} & 0 \\ 0 & -ik_{z,j+1} \end{pmatrix}.$$

Оптимизация покрытия всегда выполняется для определенного диапазона длин волн. Для этого интересующий диапазон дискретизируется множеством  $\{\lambda_m\}$ , выражение (9) модифицируется следующим образом

$$\Delta T_m = \frac{\partial T(\lambda_m)}{\partial \zeta_j} \Delta \zeta_j = \alpha_{jm} \Delta \zeta_j.$$

Можно сразу записать решение данной системы уравнений относительно приращения координат границ  $\Delta \zeta_j$ :

$$\Delta Z = A^{-1} \Delta T, \quad (10)$$

где  $A$  – матрица размером  $d \times c$ , элементами которой являются частные производные  $\alpha_{jm}$ ,  $d$  и  $c$  — длины векторов длин волн  $\{\lambda_m\}$  и координат границ материалов  $\{\zeta_j\}$  соответственно.

У такого элегантного решения есть ограничение, а именно в таком виде оно возможно лишь для случая, когда матрица  $A$  квадратна. В более общем случае необходимо применять метод наименьших квадратов (МНК), смысл которого заключается в минимизации квадрата нормы невязки  $\|A\Delta Z - \Delta T\|^2$  или нормализации системы линейных уравнений [9].

Рассмотрим матрицу  $A$ , для которой  $d > c$  (вектор длин волн длиннее количества границ или ранг матрицы больше количества переменных). Тогда решение может быть получено в виде [10]

$$A^* A \Delta Z = A^* \Delta T, \\ \Delta Z = (A^* A)^{-1} A^* \Delta T, \quad (11)$$

где  $A^* = \bar{A}^T$  – сопряженно-транспонированная матрица к матрице  $A$ . Такое решение справедливо, так как для квадратной матрицы  $A^*A$  существует обратная матрица  $(A^*A)^{-1}$ .

На практике из-за того, что приращения координат границ  $\Delta\zeta_j$  малы, процедура вычисления  $\Delta Z$  повторяется многократно, причем каждый раз в качестве нулевого приближения в разложении в ряд Тейлора используется полученное на предыдущем шаге решение, причем часто применяется метод обобщенных наименьших квадратов, в котором минимизируется функция [11]

$$f = (\alpha_{jm}\Delta\zeta_j - \Delta T_m)^2 + pq_{mu}\Delta T_m\Delta T_u,$$

$$q_{mu} = \delta_{mu}\alpha_{mu}^2,$$

и для которой решение принимает вид

$$A^T A \Delta Z + p^2 Q \Delta Z = A^T \Delta T,$$

где  $Q$  – диагональная матрица,  $p$  – произвольное положительное число, от выбора которого зависит скорость сходимости решения. Часто при выборе  $p \rightarrow \infty$  скорость схождения решения становится низкой. Однако правильный выбор  $p$  позволяет существенным образом повысить сходимость решения. При выборе  $p = 0$  уравнение принимает вид (11).

В ситуации, когда обратима матрица  $AA^*$ , что соответствует ситуации  $d < c$  (вектор длин волн короче количества границ), решением является

$$\Delta Z = A^*(AA^*)^{-1}\Delta T. \quad (12)$$

Как хорошо известно, общее решение *неоднородной* системы  $A\Delta Z = \Delta T$  есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей *однородной* системы  $A\Delta Z = 0$ . Поэтому общее представляется в виде

$$\Delta Z = A^*(AA^*)^{-1}\Delta T + (E - A^*(AA^*)^{-1}A)Y,$$

где  $Y$  – произвольный вектор размера  $\Delta T$ ,  $E$  – единичная матрица. Справедливость решения, написанного выше легко доказать, подействовав  $A$  на обе части выражения.

Основным недостатком алгоритмов, реализующих данный метод, является необходимость нахождения обратных матриц. Процедура их обращения, особенно когда детерминант близок к нулю, может оказаться численно неустойчивой. Так же операции, такие как умножение, со слабо обусловленными матрицами предъявляют весьма высокие требования к точности вычислений, что, в конечном счете, затрудняет реализацию метода.

Все вышесказанное справедливо лишь для малых значений  $\Delta\zeta$ , причем условие сходимости требует, чтобы нулевое приближение было выбрано из достаточно малой окрестности минимума целевой функции. Поэтому существенно улучшить характеристику покрытия трудно, и успех зависит от выбора исходной конструкции покрытия.

На сегодняшний момент известно много моделей покрытий, рассчитанных в общем виде для определенного диапазона длин волн. Они могут быть применены в качестве базовых, отправных моделей конструкций

покрытий. Рассмотрим два наиболее распространенных типа покрытий: зеркало и просветляющие покрытие.

С технологической точки зрения зеркала удобнее выполнять в виде чередующихся пар четвертьволновых слоев ( $\lambda_0/4$ ) с высоким и низким показателями преломления. Формула такого покрытия следующая:

$$P(HB)^p,$$

где  $B$  и  $H$  – высокопреломляющий и низкопреломляющий слои соответственно,  $P$  – подложка,  $p$  указывает количество повторений. Основная область отражения (stop-band) такого зеркала приходится на  $\lambda_0$ , однако будет также наблюдаться серия спектрально более узких и коротковолновых областей отражения в нечетных порядках интерференции (см. (6) и рис. 8).

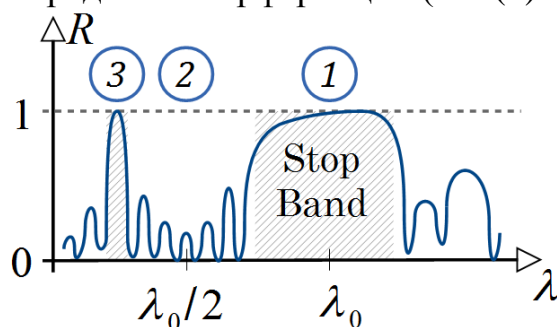


Рис. 8. Спектр отражения интерференционного зеркала; цифрами указан порядок интерференции

Создание просветляющих покрытий является более сложной задачей. Просветляющее покрытие в один слой позволяет уменьшить отражение на какой-то одной определенной длине волны. Двухслойные и трехслойные покрытия применяются для создания ахроматического просветления. На рис. 9 приведены примеры трехслойных и четырехслойных просветляющих покрытий для стекла в видимом диапазоне.

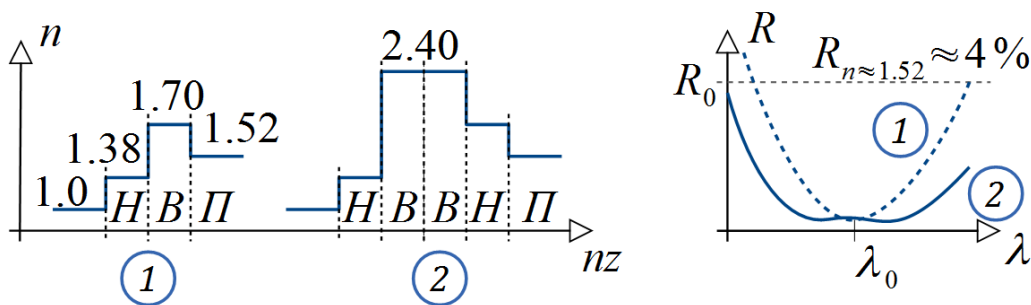


Рис. 9. Примеры двухслойного и трехслойного просветляющего покрытия для стекла и их спектры

Трехслойные четвертьволновые покрытия ( $\lambda_0/4$ ) рассчитываются по формуле [11]:

$$\lambda_0 = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – границы диапазона просветления, связанные соотношением  $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ .



Эти формулы также подходят для описания двухслойного покрытия с оптическими толщинами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Ахроматичность просветления достигается за счет близкого расположения двух минимумов отражения.

Отметим, что экспериментальное воспроизведение смоделированных зеркал сталкивается с рядом проблем, приводящих к различию в спектральных характеристиках. К ним можно отнести неоднородность толщины слоев, изменение показателя преломления материала в процессе напыления, химическую стабильность и т.д. В частности, для пленок толщиной более 1–2 мкм изготовление зеркал затруднено из-за их низкой адгезии, потери сплошности и разрушения покрытий в целом под действием внутренних механических напряжений, возникающих из-за разности в коэффициентах термического расширения подложки и материалов сочетаемых в покрытии слоев.

#### 4. Алгоритмизация решений задач анализа и синтеза

Предлагаем рассмотреть частный алгоритм расчета характеристик покрытия. Входными данными задачи являются:

- массив расчетных длин волн  $\Lambda = \{\lambda: \lambda = \lambda_i, i = 1..steps\}$ ;
- геометрические координаты границ  $Z = \{z: z = z_j, j = 1..counts\}$ ;
- показатели преломления  $N_i = \{n_i: n_i = n_{ij}(\lambda_i), j = 1..counts + 1\}$ ,  $\lambda_i \in \Lambda$ , для расчетных длин волн  $\Lambda$  всех материалов (количество сред на единицу больше числа границ).

Проиллюстрировать работу алгоритма можно рисунком 10. Алгоритм в общем случае представляет собой два вложенных цикла. Внешний цикл организован путем перебора всех длин волн  $\lambda_i$ , а внутренний – организован по всем границам структуры  $z_j$ .

На каждом  $j$ -том шаге производится вычисление матрицы распространения  $\hat{T}_{j \leftrightarrow (j+1)}(\lambda_i)$  для  $j$  границы материалов  $n_j$  и  $n_{j+1}$ . На выходе внутреннего цикла имеется матрица распространения всей структуры  $\hat{T}(\lambda_i)$  для длины волны  $\lambda_i$ . Из нее потом и определяется коэффициент отражения  $R(\lambda_i)$ . Выполнив данную операцию для всех длин волн, внешний цикл завершается. Программа возвращает массив коэффициентов отражения  $R = \{R: R = R(\lambda_i), \lambda_i \in \Lambda\}$  в расчетном диапазоне длин волн.

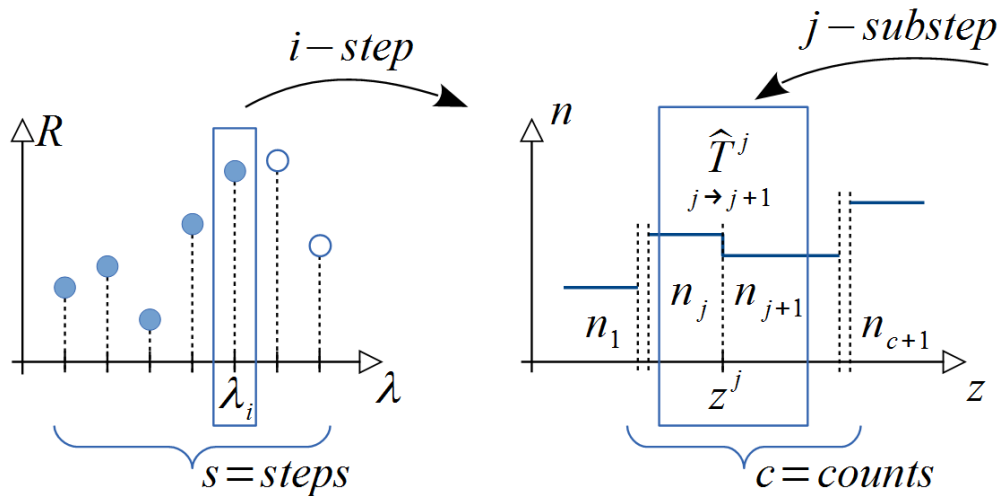


Рис. 10. Иллюстрация алгоритма вычисления коэффициентов отражения

Заметим, что приведенный алгоритм не учитывает поляризацию  $\beta$  и угол падения излучения  $\theta$ . Они опущены для простоты и наглядности восприятия алгоритма. Программно учет этих параметров производится на каждом шаге внешнего цикла (по  $\lambda_i$ ), где формируется массив волновых векторов  $K^i = \{k^i: k^i = f(\lambda_i, n_{ij}, \theta, \beta), n_{ij} \in N_i\}$ ,  $\lambda_i \in \Lambda$ , необходимый для расчета матрицы распространения (см. (5)).

Алгоритм в нотации псевдокода может быть представлен в следующем виде:

```

procedure RAnalyze( $\Lambda, Z, N$ ):
   $\Lambda = \{\lambda: \lambda = \lambda_i, i = 1..steps\}$  // array of real
   $Z = \{z: z = z_j, j = 1..counts\}$  // array of real
   $N = \{N: N = n_{ij}(\lambda_i), j = 1..counts + 1\}$  // matrix of complex
  determine  $R$  // array of real
  for all  $\lambda_i \in \Lambda$  do
    determine  $K^i \leftarrow K^i(\lambda_i, N_i)$  // array of complex
    determine  $\hat{T}^i \leftarrow E$  // 2x2 matrix of complex
    for all  $z_j \in Z$  do
       $\hat{T}^i \leftarrow \hat{T}^i \times \hat{T}_j^i(\lambda_i, z_j, n_j^i, n_{j+1}^i, k_j^i, k_{j+1}^i)$ 
     $R^i \leftarrow f(\hat{T}^i)$ 
  return  $R$ 

```

Обращаясь к задаче синтеза, напомним, что задача не имеет четкого алгоритма действий. Это объясняется тем, что обратная задача заключается в минимизации многопараметрической степенной функции, в то же время получаемое решение может быть технологически сложно выполнимым.

Рассмотрим один из вариантов алгоритма синтеза, проиллюстрировав его на рис. 11. Как уже было сказано, основная идея программы заключается в последовательном приближении к заданному спектру  $T^{fin}$  или  $R^{fin}$ .

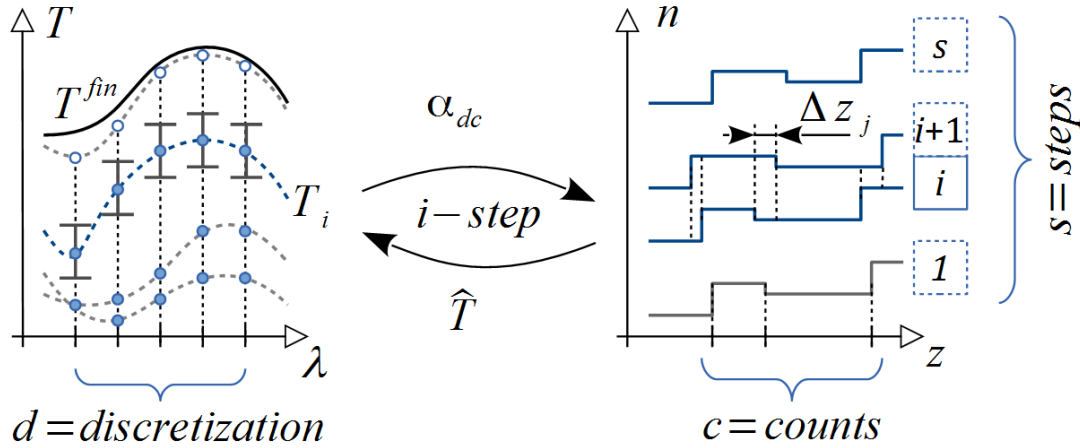


Рис. 11. Иллюстрация алгоритма синтеза структуры с определенными спектральными характеристиками

Задача считается решенной, если рассчитанный спектр  $T$  равен  $T^{fin}$  с погрешностью  $\Delta T$ . Однако в качестве окончания поиска может быть также выбран другой критерий — длина шага  $\Delta Z$  становится меньше заданного значения. Стоит также помнить, что задача может не иметь решения в рамках данного метода решения, поэтому следует ограничить количество  $i$  шагов алгоритма.

Входными данными алгоритма являются следующие параметры:

- массив длин волн  $\Lambda = \{\lambda: \lambda = \lambda_i, i = 1..steps\}$ ;
- геометрические координаты границ  $Z = \{z: z = z_j, j = 1..counts\}$ ;

- показатели преломления  $N_i = \{n_i: n_i = n_{ij}(\lambda_i), j = 1..counts + 1\}, \lambda_i \in \Lambda$ ,
- желаемый спектр пропускания  $T^{fin} = \{T^{fin}: T^{fin} = T_i^{fin}(\lambda_i), \lambda_i \in \Lambda\}$ ;
- погрешность спектра пропускания  $\Delta T = \{\Delta T: \Delta T = \Delta T_i(\lambda_i), \lambda_i \in \Lambda\}$ , часто константа, малое число, определяющее точность одномерного поиска.

В теле основного цикла выполняется расчет изменений положения границ между слоями на величину  $\Delta Z$  на основании разности  $T^{fin} - T$  и матрицы  $\alpha_{dc}$  по формулам (10), (11) или (12) в зависимости от условий задачи. Повторимся, если количество значений длин волн  $d$ , в которых производится расчет, совпадает с числом границ структуры  $s$ , то для решения используется формула (10). Если  $d > s$ , то (11), и в противном случае следует руководствоваться формулой (12).

К пояснению рис. 11 можно добавить, что на старте задается начальное, нулевое приближение положения границ  $Z^0$  и желаемый спектр  $T^{fin} \pm \Delta T$ . На каждом шаге  $i$  на основании профиля  $Z^i$  вычисляется спектр пропускания  $T^i$  структуры, из которого будет установлен  $Z^{i+1}$  профиль для шага  $(i + 1)$ . Результатом работы алгоритма является набор значений координат границ слоев  $Z^s$ . Предполагается, что решение сходится за  $s$  итераций, в противном случае необходимо сообщить о невозможности достичь условия  $|T - T^{fin}| > \Delta T$  при данных параметрах. Ниже также приведем псевдокод алгоритма синтеза.

```

procedure TSyntheses( $\Lambda, Z, N, T^{fin}, \Delta T$ ):
     $\Lambda = \{\lambda: \lambda = \lambda_i, i = 1..steps\}$  // array of real
     $Z = \{z: z = z_j, j = 1..counts\}$  // array of real
     $N = \{N: N = n_{ij}(\lambda_i), j = 1..counts + 1\}$  // matrix of complex
     $T^{fin} = \{T^{fin}: T^{fin} = T_i^{fin}(\lambda_i)\}$  // array of real
     $\Delta T = \{\Delta T: \Delta T = \Delta T_i(\lambda_i)\}$  // array of real
    determine  $T \leftarrow$  TAnalyze( $\Lambda, Z, N$ ) // array of real
    determine Step  $\leftarrow$  1 // integer
    while (  $|T - T^{fin}| > \Delta T$  ) and ( Step  $\leq s$  ) do
         $Z \leftarrow Z + \Delta Z[B(T, T^{fin}, Z, N, \Lambda)]$ 
         $T \leftarrow$  TAnalyze( $\Lambda, Z, N$ )
        increment Step
    return if (Step  $< s$  ) then  $Z, T$ 
           else False // solution is not reached

```

Заметим, что псевдокод содержит обращение к ранее не описанной функции TAnalyze(), которая по аналогии с функцией RAnalyze() возвращает спектр пропускания. В целом же вышеприведенный алгоритм синтеза может быть модифицирован для расчета спектра отражения.

## 5. Виды многослойных покрытий

### 5.1 Просветляющие покрытия

Просветляющие покрытия объединяют широкий класс покрытий, служащих для уменьшения отражения света, падающего на границу раздела двух сред. Просветление выполняет двойную роль: увеличивает светопропускание в оптических системах, что особенно важно в случае большого числа преломляющих поверхностей, и уменьшает фоновый свет, возникающий в результате многократного отражения на границах раздела сред [12, 13]. На практике наиболее часто возникает потребность просветления границы оптической среды с воздухом (рис. 12 а). В этом случае интенсивность отраженного света определяется формулой

$$R = \left( \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right)^2,$$

где  $\tilde{n} = n + i\kappa = \sqrt{\varepsilon\mu}$  для среды, на которую свет падает по нормали к поверхности. Чаще всего рассматриваются прозрачные среды, поэтому вместо  $\tilde{n}$  далее будем использовать  $n$ .

Нетрудно вычислить, что коэффициент отражения  $R$  от одной грани оптических стекол, показатель преломления большинства которых находится в интервале 1.45–1.9, будет составлять 3.5–10 %. Коэффициент отражения полупроводниковых материалов, имеющих показатель преломления в пределах 3.5–1.9, равен приблизительно 30–45 %.

Наиболее простым способом уменьшения коэффициента отражения является нанесение на границу раздела пленки с показателем преломления меньшим, чем у просветляемого вещества (рис. 12 б). Коэффициент отражения от системы «воздух–пленка–подложка» на длине волны  $\lambda = 4nd$  ( $d = z - z_0$  - геометрическая толщина слоя,  $nd$  – его оптическая толщина) равен

$$R = \left( \frac{n - n_f^2}{n + n_f^2} \right)^2, \quad (12)$$

где  $n_f$  и  $n$  – показатели преломления пленки и подложки. Это выражение равносильно рассмотренному выше условию  $2\phi = \pi$  (см. (7)).

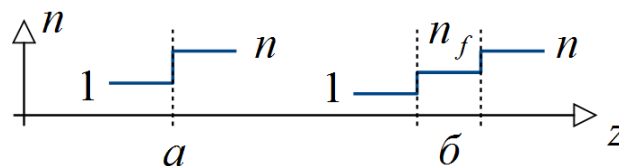


Рис. 12. Профили показателя преломления для границы «воздух–подложка» (а) и комбинации «воздух–пленка–подложка» (б).

Возвращаясь к выражению (12), следует отметить, что достичь ситуации  $R \cong 0$  возможно, при условии  $n_f \cong \sqrt{n}$ . Для этого случая на практике получить нулевое отражение можно лишь для материалов с большим показателем преломления. Выполнение этого условия для большинства стекол требует изготовления пленки с показателем преломления 1.2-1.3. Работы в этом

направлении ведутся, однако в настоящее время достаточно стабильных слоев с такими показателями преломления не получено.

Другим недостатком однослойного просветления является узкая область низкого отражения, в то время как часто возникает задача просветления широкого спектрального диапазона. В работе [14] предлагается использовать для ахроматического просветления простые двух- и трехслойные конструкции (рис. 13) на основе четвертьволновых и полуволновых слоев, обеспечивающих зону низкого отражения с  $R = 0.4\%$  в диапазоне длин волн от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2 \approx 1.6 \lambda_1$  для стекол с показателем преломления 1.46–1.8. Данные покрытия изготавливаются с целью применения в видимой области спектра. На основе неравнотолщинных слоев (не кратных четвертьволновому слою) можно получить коэффициенты отражения, не превышающие 0.2–0.3 % в видимой части спектра. Примером такого покрытия может служить покрытие  $\text{SiO}_2\text{:ZrO}_2\text{-ZrO}_2\text{-MgF}_2$  [15], где показатели преломления соответствующих материалов равнялись 1.90, 2.02 и 1.38. Оптическая толщина каждого слоя выбрана  $\lambda/4$ . Стоит заметить, что недостатком использования  $\text{MgF}_2$  является его низкая механическая прочность и высокая гигроскопичность [11].

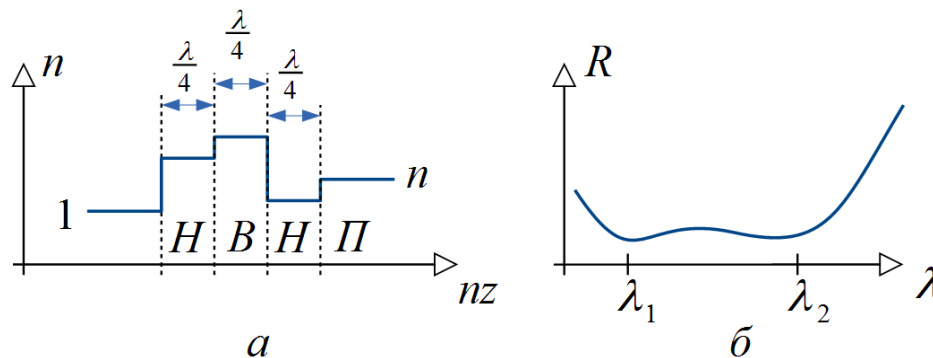


Рис. 13. Модель трехслойного просветляющего покрытия

Существуют конструкции, основанные на применении неравнотолщинных просветляющих покрытий, а также с градиентом показателя преломления. В отдельных случаях, например в различных схемах генерации гармоник основного излучения, возникает потребность в просветляющих покрытиях, рассчитанных на две длины волны. В [16] показано, что можно получить коэффициенты отражения  $R(\lambda_1)$  и  $R(\lambda_2)$ , не превышающие 0.1–0.3 % и с соотношением  $\lambda_2/\lambda_1$  в интервале значений 1.2–2.5 для стекол с различными показателями преломления.

## 5.2 Зеркальные покрытия

Как видно из названия, этот класс покрытий объединяет интерференционные покрытия, применяемые с целью увеличения коэффициента отражения. Конструктивно они менее разнообразны, чем просветляющие покрытия. Как правило, зеркала состоят из четвертьволновых (или кратных им) по толщине чередующихся пленок с высоким ( $n_B$ ) и низким ( $n_H$ ) показателями преломления. Максимальный коэффициент отражения  $R$  такой многослойной системы (см. (12)) зависит от разницы величин показателей преломления смежных слоев, а также от их общего числа, и может превышать значения в 99.5 %.

$$R_{max} = \left[ \frac{1 - \frac{n_{\Pi}}{n_0} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}}{1 + \frac{n_{\Pi}}{n_0} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}} \right]^2, \quad (13)$$

где  $n_{\Pi}$  и  $n_0$  - показатели преломления подложки и внешней среды (воздуха),  $p$  - число периодов (в качестве примера см. рис. 14). Ширина полосы заграждения (stop-band) периодической системы  $\lambda_1/\lambda_2$  монотонно увеличивается с ростом величины отношения  $n_B/n_H$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{n_B - n_H}{n_B + n_H}.$$

Диэлектрические зеркала, имеющие пренебрежимо малый коэффициент поглощения, успешно конкурируют с металлическими зеркалами, у которых поглощение может достигать 25-30 %. Кроме того, многослойные покрытия на основе таких материалов, как тугоплавкие оксиды, обладают более высокой химической устойчивостью и механической прочностью по сравнению с широко применяемыми пленками алюминия и серебра.

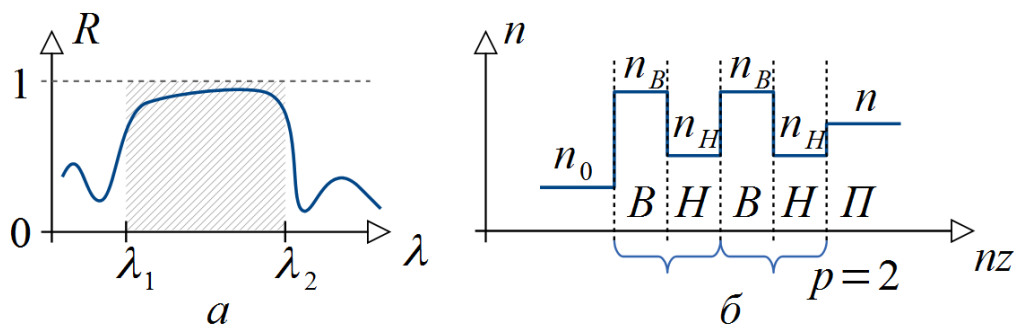


Рис. 14. Спектры модели интерференционного зеркального покрытия

Определенные трудности возникают при практическом изготовлении широкополосных зеркал, т.е. покрытий с широкой областью высокого отражения. В этом случае можно использовать набор зеркал, нанесенных на одну подложку со смежными полосами высокого отражения. Недостатком такого метода является необходимость нанесения большого числа слоев. Другой путь изготовления широкополосных зеркал заключается в нанесении большого числа чередующихся слоев, оптическая толщина которых монотонно изменяется по определенному закону. Такие покрытия очень чувствительны к

точности нанесения слоев, поэтому при их реализации предъявляются высокие требования к методу контроля толщины.

Некоторого увеличения области высокого отражения можно достичь, увеличивая разницу в показателях преломления слоев, составляющих покрытие, но этот метод ограничен выбором материалов с необходимыми параметрами. Существуют работы, в которых решается проблема расчета и изготовления зеркал, имеющих две области высокого отражения. И если конструирование и реализация большинства описанных покрытий сравнительно несложны, то их применение в качестве зеркал для лазерного резонатора может вызвать значительные трудности. В этом случае к ним предъявляются, кроме высокого отражения, такие требования, как низкие потери (т. е. потери на поглощение и рассеяние света) для лазеров с небольшим коэффициентом усиления, высокая лучевая прочность для мощных лазеров и ряд других требований, которые определяют в конечном счете КПД и долговечность лазеров. Эти задачи решаются в каждом конкретном случае выбором материала слоев и оптимальной технологии их нанесения.

Так, например, высокоотражающие покрытия на излучающих гранях полупроводниковых лазеров играют важную роль в уменьшении величины порогового тока накачки. Причем диэлектрические зеркала имеют преимущество перед металлическими зеркалами, т. к. они не разрушаются в процессе пайки кристалла к держателю и не шунтируют  $p$ - $n$ -переход полупроводниковой структуры. Вследствие этого интерференционные зеркала изготавливают на основе пленок  $\text{Si-Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Si-SiO}_2$  и  $\text{ZnS-MgF}_2$ . Но перечисленные конструкции лазерных зеркал также не свободны от недостатков. Пленки  $\text{Si}$  обладают поглощением на длинах волн менее 1 мкм, а их оптические свойства сильно зависят от условий напыления. Зеркала на основе  $\text{ZnS-MgF}_2$ , изготовленные для ИК-области спектра, подвержены растрескиванию из-за высоких растягивающих напряжений в пленках  $\text{MgF}_2$ . Из всего сказанного видно, что выбор той или иной конструкции не всегда однозначен и может явиться непростой технологической задачей.

### 5.3 Светоделители

Та часть света, которая не отражается от интерференционного зеркала, беспрепятственно проходит сквозь него, так как потери в слоях диэлектрика пренебрежимо малы. Таким образом, зеркало, коэффициент отражения которого менее 100 %, может использоваться как простейшее светоделительное устройство, разделяющее падающее на него излучение на прошедшее и отраженное в определенной пропорции. Конструкции светоделительных покрытий чрезвычайно разнообразны. Они зависят от требований, предъявляемых к светоделителям, – ахроматичности светоделителя (ширины области спектра, в которой излучение делится в заданной пропорции), от угла падения излучения на светоделитель, от отношения прошедшего и отраженного лучей, которое необходимо получить. Отражение света от покрытия под углом, отличным от нормального, приводит к его частичной или полной поляризации.



В связи с этим от светоделителей может потребоваться также сохранение поляризации падающего излучения. Такие светоделители называются неполяризующими.

Светоделительное покрытие наносится либо на гипотенузную грань одной из призм, и призмы с покрытием и без покрытия склеиваются – «светоделительный кубик» (рис. 15 а), либо на одну или обе стороны плоскопараллельной пластины (рис. 15 б). Если покрытие наносится на одну сторону пластины, вторую сторону, как правило, просветляют, особенно в случае неполяризующих светоделителей, с целью исключить паразитное отражение на границе «стекло–воздух».

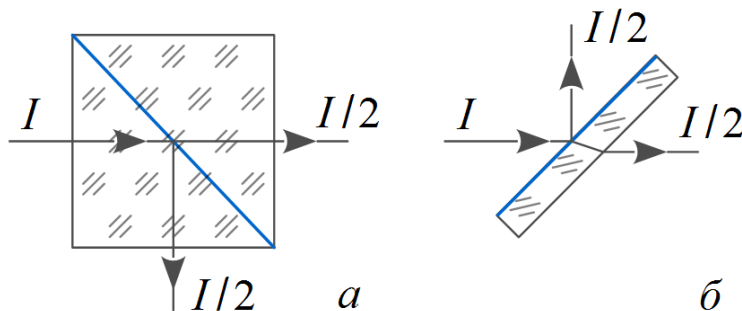


Рис. 15. Модель «светоделительного кубика»

Рассмотрим некоторые конструкции светоделителей подробнее для падения света под углом  $45^\circ$  и без учета поляризации разделяемого излучения. Хорошо известны трехслойные покрытия, у которых оптическая толщина слоя, прилегающего к подложке, в два раза больше двух других слоев толщинами  $\lambda/4$ . Формула такого покрытия  $\Pi(B)^2(HB)^1$  (рис. 16), в котором заглавными буквами  $B$  и  $H$  обозначены высокопреломляющий и низкопреломляющий слой, а буквой  $\Pi$  – подложка; цифры обозначают количество слоев. Например, для покрытия  $ZnS-MgF_2$  на стекле марки КВ показатели преломления равны  $n_B = 2.3-2.4$ ,  $n_H = 1.32-1.38$  и  $n_{\Pi} = 1.5-1.6$ . Для данной системы отражение половины интенсивности (условие  $R/T \approx 1$ ) выполняется в диапазоне от  $0.72\lambda$  до  $2.3\lambda$ , где  $\lambda$  – расчетная длина волны. Отступление  $R$  и  $T$  от среднего значения в этом случае не превышает 10 %.

Более ахроматичные светоделители с отношением  $R/T \approx 1$  можно получить, увеличивая число слоев в покрытии. Например, конструкции  $\Pi(H)^2VHVN$  и  $\Pi(B)^2HVNHN\Pi$  на основе тех же материалов, что и предыдущая конструкция, имеют в области  $\lambda_2/\lambda_1=1.7$  отступления от среднего значения по абсолютной величине, составляющие 1 и 4 % соответственно. Необходимо отметить, что синтезированные делители такого типа на основе пяти- и девятислойных покрытий, состоящих из слоев неравной оптической толщины, по своим характеристикам близки к описанным выше конструкциям, но значительно сложнее их в изготовлении.

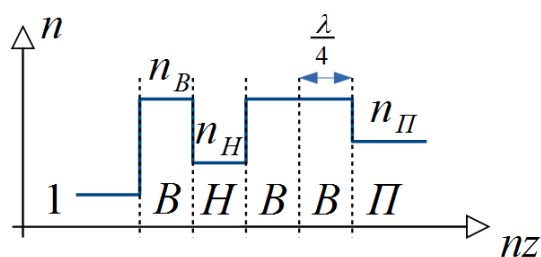


Рис. 16. Пример светоделителя

При использовании в волоконной оптике светоделительные покрытия могут наноситься непосредственно на скошенный торец оптического волокна. Потери в такой конструкции составляют 30-37%. В качестве основных достоинств светоделителей на торце волокна отмечают относительную простоту изготовления, надежность и возможность применения групповой технологии по сравнению со светоделителями, изготовленными по сплавной технологии или методом механической обработки.

#### 5.4 Ослабители

Очень широк и своеобразен класс оптических элементов, предназначенных для внесения в оптические системы фиксированного или регулируемого оптического затухания. Ослабители (аттенюаторы, нейтральные или «серые» фильтры) используются для улучшения условий работы приемников при больших потоках, а также для настройки и регулировки аппаратуры, измерения нелинейности различных фотоэлектрических устройств и т. п. Основные требования, предъявляемые к ослабителям, - максимальная зависимость ослабления от характеристик излучения (длины волны, степени поляризации, пространственного распределения, мощности и расходимости), а также от условий и времени их эксплуатации.

В настоящее время существует множество типов ослабителей, отличающихся методами ослабления: диафрагмирование луча, применение поляризаторов, рассеивающих и поглощающих сред, использование электрооптических свойств жидких кристаллов и электрохромных свойств пленок оксида ванадия и т.д. Волоконная оптика имеет, кроме того, свои специфические методы ослабления: изменение расстояния между световодами, осевое смещение и микроизгиб световодов. Последние отличаются простотой конструкции и технологичностью, однако в этих методах трудно обеспечить воспроизводимость установки заданных коэффициентов ослабления и нечувствительность к внешним воздействиям. Большое распространение получили плавные ослабители (с непрерывно изменяющимся законом ослабления), изготовленные на основе тонких пленок металла переменной толщины, напыляемых на прозрачные подложки. Полупрозрачные слои металла на прозрачной подложке широко используются также в качестве дискретных ослабителей (имеющих фиксированный коэффициент ослабления).

Своеобразие ослабителей на основе пленок металлов в отличие от перечисленных выше типов оптических покрытий заключается в

использовании потерь, в частности поглощения в пленках. Интерференционные эффекты вследствие большого поглощения в металлических слоях, как правило, отсутствуют.

### 5.5 Поляризаторы

Поляризаторы служат для разделения падающего на них излучения на отраженный и прошедший пучки, поляризованные во взаимноперпендикулярных плоскостях.

Конструктивно поляризаторы подразделяются на призмные и пластинчатые. Призмные состоят из двух склеенных призм, на гипотенузные грани одной из которых или сразу обеих предварительно нанесено интерференционное покрытие (рис. 17). Интерференционное покрытие состоит из двухкомпонентной системы чередующихся слоев с высоким и низким показателями преломления. Катетные грани призм при этом обычно просветляют.

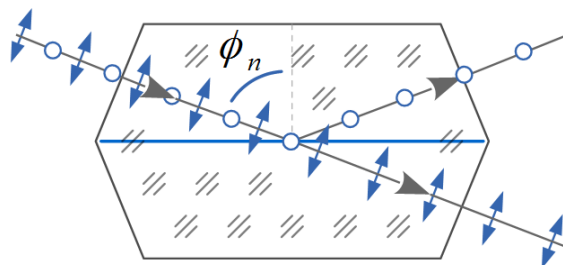


Рис. 17. Пример призмного поляризатора

Принцип работы поляризатора основан на том, что излучение, отраженное под углом от границы раздела двух сред, частично поляризуется. Степень поляризации в этом случае зависит от угла падения света, и имеется угол, при котором степень поляризации достигает своего максимального значения, – угол Брюстера. Высокой степени поляризации можно добиться, обеспечивая условия, при которых отражение излучения для всех границ раздела в покрытии происходит под углом Брюстера:

$$\varphi_B = \arctg \frac{n_H}{n_B}, \quad \varphi_H = \arctg \frac{n_B}{n_H},$$

где  $\varphi_B$  и  $\varphi_H$  – углы отражения на границах раздела слоев. Оптические толщины слоев для прозрачных сред при этом определяются из выражения

$$n_i d_i \cos \varphi_i = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Здесь  $n_i d_i$  и  $\varphi_i$  – оптическая толщина  $i$ -го слоя и угол, определяющий направление распространения излучения в  $i$ -м слое. С целью получения оптимального поляризационного эффекта показатель преломления материала призм рассчитывается по формуле

$$n_{\Pi} = \frac{n_B \sin \varphi_B}{\sin \varphi_{\Pi}} = \frac{n_H \sin \varphi_H}{\sin \varphi_{\Pi}},$$

где  $\varphi_{\Pi}$  – угол призмы.

При изготовлении призмных поляризаторов с учетом приведенных расчетов можно получить степень поляризации близкую к 100 % как в прошедшем, так и в отраженном лучах. К достоинствам описанной конструкции относится довольно широкая спектральная область поляризации света, которую можно расширить, нанося на гипотенузные грани интерференционные покрытия со смещенными друг относительно друга областями высокой поляризации, и возможность изготовления поляризаторов с углом между прошедшим и отраженным лучами  $90^\circ$ . Последний параметр может иметь большое значение для упрощения оптических систем с использованием линейно поляризованного света.

Пластинчатый поляризатор представляет собой прозрачную пластинку с нанесенным на нее интерференционным покрытием. Поляризационный эффект при этом достигается за счет разницы в ширине области высокого отражения различных поляризованных составляющих света при определенных углах отражения. При такой конструкции поляризатора можно так же добиться высокой степени поляризации, но в более узком спектральном диапазоне по сравнению с призмными поляризаторами. Достоинствами в этом случае являются простота конструкции, отсутствие клееных соединений, что позволяет использовать пластинчатые поляризаторы в мощных лазерных системах.

Интерференционные поляризаторы обоих типов успешно конкурируют с кристаллическими поляризаторами и поляроидами благодаря большому светопропусканию и относительной дешевизне. Относительно узкая область с высокой степенью поляризации и резкая зависимость поляризации от угла падения света на покрытие не имеет существенного значения для монохроматического и узконаправленного лазерного излучения.

## 5.6 Фильтры

Узкополосные пропускающие интерференционные фильтры (УПИФ) предназначены для выделения из спектра зоны различной ширины, начиная с десятков нанометров и заканчивая ангстремами. Конструкция фильтрующего покрытия состоит из двух или большего числа зеркал, между которыми находятся разделительные слои. В качестве зеркал могут быть использованы металлические, металлодиэлектрические и диэлектрические зеркала. Последние предпочтительнее, так как позволяют получать большее отражение при меньших потерях.

В случае применения диэлектрических зеркал оптическая толщина  $n_s d_s$  разделительного слоя (показана штриховкой на рис. 18 а) связана с оптической толщиной слоев  $nd$  зеркал (показаны фигурными скобками на рис. 18 а) соотношением

$$n_s d_s = (2p) nd, \quad p \in \mathbb{Z},$$

а длина волны максимума пропускания фильтра (см. (6) и рис. 18 б) будет

$$\lambda_{max} = \frac{\lambda}{p} = 2 \frac{nd}{p}.$$

На положение  $\lambda_{max}$  и другие характеристики фильтров большое влияние оказывают ошибки в толщинах слоев покрытия. Поскольку покрытие фильтра состоит из довольно большого числа слоев, то к способу контроля их толщин в процессе нанесения должны предъявляться высокие требования и изготовление УПИФ является достаточно сложной технологической задачей.

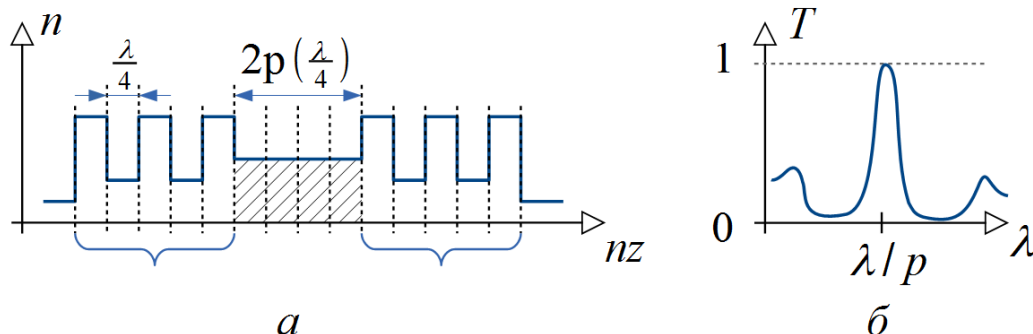


Рис. 18. Модель узкополосного интерференционного фильтра и спектр его пропускания; штриховкой обозначен разделительный слой, зеркала показаны фигурными скобками

Одной из проблем, возникающих в процессе производства и при эксплуатации фильтров, является нестабильность их оптических характеристик во времени. Это обусловлено главным образом необратимыми структурными изменениями в покрытии и заполнением микропор слоев водой. Поэтому для получения стабильных фильтров применяется их герметизация путем припекания защитного стекла, что также необходимо учитывать при выборе материалов слоев покрытия.

Узкополосные фильтры часто применяются в сочетании с длинноволновым и коротковолновым отрезающими фильтрами – спектроделителями. Они обладают высоким пропусканием в заданном

интервале спектра и высоким отражением в прилегающей к нему длинноволновой или коротковолновой области соответственно.

Коротковолновые отрезающие фильтры обычно имеют вид

$$P(B)^1(HB)^p(H)^{0.5} \text{ или } P[(B)^2(H)^1]^p(B)^2,$$

а длинноволновые –

$$P(B)^{0.5}(HB)^p(H)^1(B)^{0.5}.$$

Область минимального пропускания отрезающих фильтров таких конструкций относительно невелика. Она может быть расширена за счет изготовления нескольких фильтров со смежными областями высокого отражения или за счет использования материалов с селективным пропусканием. Представляет интерес конструкция фильтра, синтезированная из четвертьволновых слоев. Такое покрытие может служить как коротковолновым, так и длинноволновым отрезающим фильтром.

## 6. Описание лабораторной работы

Данный практикум имеет целью практическое освоение машинного проектирования интерференционного покрытия, рассмотрение подходов решения задач анализа и синтеза многослойных оптических покрытий. Для этого предлагается рассмотреть конкретные конструкции зеркал, фильтров и просветляющих покрытий, освоить методику расчета их спектров отражения и пропускания; смоделировать новое покрытие оптического диапазона.

### 6.1 Постановка задачи

Для прохождения практики предлагается разработать 3 типа покрытий:

1. Четырехслойное зеркало на кремниевой подложке;
2. Узкополосный фильтр в диапазоне 550–600 нм на кварцевой подложке;
3. Трехслойное просветляющее покрытие в видимом диапазоне на кварцевой подложке.

Для всех трех покрытий необходимо рассчитать спектры отражения и преломления в случае падения света под разными углами (получить угловую зависимость).

Для выполнения заданий предлагается получить от преподавателя диапазон работы покрытий (область видимого и инфракрасного диапазонов). Самостоятельно выбрать материалы компонентов покрытий, руководствуясь принципом минимальности используемых слоев. Проверить полученные результаты с использованием разработанных и апробированных на кафедре программных продуктов.

В приложении приведены усредненные характеристики материалов без учета дисперсии показателя преломления. Они могут быть использованы для получения предварительных, приблизительных характеристик покрытий.

Достоверные (сравнимые экспериментально) параметры структур получаются, если учитывать в расчете дисперсию по длине волны как показателя преломления, так и коэффициента поглощения материала. К примеру, в справочнике [17] приведены зависимости оптических постоянных для ряда диэлектрических материалов, используемых в оптических покрытиях.

### 6.2 Контрольные вопросы

1. Распространение электромагнитной волны в изотропной и анизотропной диэлектрических средах.
2. Падение волны под углом на плоскую границу двух изотропных диэлектрических сред. Формулы Френеля в представлении волновых векторов.
3. Характерный вид коэффициентов отражения и пропускания в зависимости от угла падения на границу поглощающего материала для случаев  $E$  и  $H$  поляризации. Угол Брюстера.
4. Эффект полного внутреннего отражения, критерии наблюдения.

5. Отражение падающей волны от многослойного оптического интерференционного покрытия: связь длины волны и толщин покрытий.
6. Поведение спектра отражения многослойного покрытия при вариации угла падения волны.
7. Типы покрытий по функциональному назначению с указанием характерных спектров отражения и пропускания (для случая произвольной поляризации).
8. Примеры конкретных зеркал и просветляющих покрытий (указывать как формулы покрытий, так и профиль показателя преломления).
9. Как изменится спектр отражения и пропускания структуры, если заменить какой либо один диэлектрический материал металлом?
10. Как необходимо модифицировать приведенный выше алгоритм анализа покрытий, чтобы он учитывал наклон и поляризацию падающей волны?
11. Как необходимо модифицировать приведенный выше алгоритм синтеза покрытий для случая высокой дискретизации диапазона длин волн?

### *6.3 Указания к отчету*

Отчет по лабораторной работе должен носить аналитический характер и состоять из двух частей. Первая часть должна отражать краткие теоретические основы, позволяющие произвести анализ многослойного покрытия.

Вторая часть должна содержать описание исследованных покрытий. Описание включает в себя формульное описание покрытия, спектры отражения и пропускания в целевом диапазоне длин волн. Здесь же должны быть даны рекомендации по совершенствованию покрытия.



## Приложение

Таблица 1. Параметры пленочных материалов оптических покрытий [12]

Пленочный материал	Область прозрачности, мкм	Показатель преломления $n$ в интервале длин волн от $\lambda_1$ до $\lambda_2$ , мкм		Коэффициент поглощения $\kappa$ на длине волны $\lambda$ , мкм	
		$n = Re(\tilde{n})$	$\lambda_1 - \lambda_2$	$\kappa = Im(\tilde{n})$	$\lambda_1 - \lambda_2$
Na <sub>3</sub> AlF <sub>6</sub>	0.20–14	1.37–1.32	0.20–2	—	—
MgF <sub>2</sub>	0.11–10	1.40–1.32	0.25–2	6.0·10 <sup>-6</sup> – 9.0·10 <sup>-5</sup>	1.06– 0.52
ThF <sub>4</sub>	0.20–15	0.57–1.5	0.25–2	2.0·10 <sup>-6</sup> – 5.0·10 <sup>-6</sup>	1.06– 0.52
CeF <sub>3</sub>	0.30–5	1.69–1.59	0.25–2	—	—
LaF <sub>3</sub>	0.22–2	1.65–1.57	0.25–2	1.0·10 <sup>-3</sup>	0.25
NaF <sub>3</sub>	0.22–2	1.68–1.58	0.25–2	—	—
PbF <sub>2</sub>	0.24–20	1.75–1.7	0.55–1	—	—
SiO <sub>2</sub>	0.20–8	1.46–1.44	0.40–1.6	2.0·10 <sup>-6</sup> – 1.5·10 <sup>-5</sup>	1.06– 0.52
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.20–11	1.65–1.57	0.50–1.6	8.0·10 <sup>-6</sup> – 2.3·10 <sup>-5</sup>	1.06 – 0.52
U <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	—	1.95–1.77	0.25–2	4.0·10 <sup>-3</sup>	0.25
HfO <sub>2</sub>	0.25–9	2.31–1.97	0.25–2	1.6·10 <sup>-3</sup>	0.25
ZrO <sub>2</sub>	0.25–9	2.32–1.98	0.25–2	1.0·10 <sup>-2</sup>	0.25
CeO <sub>2</sub>	0.46–2	2.52–1.92	0.40–2	—	—
Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0.30–2	2.50–2.06	0.25–2	8.0·10 <sup>-3</sup>	0.3
TiO <sub>2</sub>	0.40–3	2.55–2.1	0.40–1.5	2.5·10 <sup>-4</sup> – 7.5·10 <sup>-1</sup>	1.06– 0.52
ZnS	0.38–25	2.35–2.2	0.40–5	3.0·10 <sup>-6</sup> – 2.7·10 <sup>-4</sup>	1.06– 0.52
ZnSe	0.60–15	2.60–2.3	0.50–2	—	—
Si	1,10–9	3.4	3	—	—
Ge	1.70–23	4.4	2	—	—
PbTe	3.50–20	5.6	1–8	—	—
CdTe	0.96–28	2.7	1–8	—	—
MoO <sub>2</sub>	0.50–>1	2.01–2.04	0.5–0.9	1.5·10 <sup>-3</sup> – 2.0·10 <sup>-4</sup>	0.5– 0.7
WO <sub>3</sub>	0.40–>1	2.2	0.5–0.9	5.0·10 <sup>-4</sup>	0.6
Sc <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.20–10	1.96–1.99	0.4–1	—	—
Y <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.20–10	1.75	0.4–1	—	—
Eu <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.26–>1	1.82	0.4–1	—	—
La <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.20–10	2.03	0.4–1	—	—
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.22–>1	1.98	0.4–1	—	—
Tb <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	—	1.96	0.4–1	—	—

Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.21–10	1.97	0.4–1	—	—
Ln <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.22–10	1.93	0.4–1	—	—
Sm <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.23–>1	2.09	0.4–1	—	—
Ho <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.22–>1	1.96	0.4–1	—	—
Yb <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	—	1.95	0.4–1	—	—
Pr <sub>6</sub> O <sub>11</sub>	—	1.94	0.4–1	—	—
Er <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.26–>1	1.96	0.4–1	—	—

## Используемая литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. – Т. 8. – М.: ФизМатЛит, 2005. – С. 421–472.
2. Demtröder W. Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 515 s.
3. Rancourt J.D. Optical Thin Films: User Handbook. - The International Society for Optical Engineering, Washington, 1996. – 297 p.
4. Hecht E. Optik. – San Francisco: Addison Wesley, 2002. – 698 p.
5. Schaefer Cl., Bergmann L. Optik. – Berlin: Walter de Gruyter, 2004. – 1430 s.
6. Кард П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. – Таллин: Валгус, 1971. – 235 с.
7. Бурштейн Э., Лундквиста С. Туннельные явления в твердых телах. – М.: Мир, 1973. – С. 9–35.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
9. Фаддеев М.А., Марков К.А. Численные методы. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2005. – 156 с.
10. Кокс Дж.Т., Хасс Г. Просветляющие покрытия для видимой и инфракрасной областей спектра // В кн.: Физика тонких пленок. – Т. 5. – М.: Мир, 1967. – С. 46–83.
11. Яковлев П.П., Мешков Б.Б. Проектирование интерференционных покрытий. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
12. Крылова Т.Н. Интерференционные покрытия. – Л.: Машиностроение, 1973. – 224 с.
13. Кокс Дж.Т., Хасс Г. Просветляющие покрытия для видимой и инфракрасной областей спектра // В кн.: Физика тонких пленок. – Т. 2. – М.: Мир, 1967. – С. 186–253.
14. Введенский В.Д., Метельников А.А., Фурман Ш.А. Ахроматические просветляющие покрытия для материалов с показателем преломления 1.46–1.8 // Оптико-механическая промышленность. – 1980. – N 3. – С. 32.
15. Macleod H. A. Thin-Film Optical Filters. Fourth Edition. – New York: Taylor & Francis Group, 2010. – 772 p.
16. Колодный Т.Я., Левчук Е.А., Порядин Ю.Д., Яковлев П.П. // Электронная промышленность. – 1981. – В. 5–6. – С. 93-101.
17. Золоторев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. Оптические постоянные природных и технических сред. Справочник. – Л.: Химия, 1984. – 216 с.