МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практикум

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
010400 "Прикладная математика и информатика"

Нижний Новгород
2014

УДК 517
ББК В161.6
К-65

К-65 Контрольные работы по теории функций комплексного переменного. Составители: Медведев Т.В., Сизова Н.А.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 81 с.

Рецензент: к. ф-м. н., доц. **Л.Г. Киселева**

Методическая разработка содержит комплекс тестовых контрольных заданий, предлагавшихся авторами в течение ряда лет при проведении зачетов и контрольных работ по теории функций комплексного переменного для студентов факультета ВМК, обучающихся по направлению “Прикладная математика и информатика”, а также для студентов ВШОПФ. Задания сгруппированы в две контрольные работы, каждая из которых предназначена для контроля освоения студентами материала в течение одного учебного семестра в соответствии с учебным планом факультета ВМК.

Ответственный за выпуск: председатель методической комиссии факультета ВМК ННГУ, к.т.н., доцент В.М. Сморкалова

УДК 517
ББК В161.6

Содержание

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Вариант 1

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$.
2. Найти угол между векторами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = (-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$.
3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[5]{-32i^4}$.
4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = (-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$.
5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = z \cdot |z|$.
6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$; $f(0) = 1$.
7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y^2 = c$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$.
8. Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z = 0$, а одна из вершин z_1 известна.
9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z-1}{z-2}$ отображает а) мнимую ось; б) окружность $|z| = 1$.
10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| > 1\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(2) = i$; $\arg \omega'(2) = \pi/2$.

    Найти образы а) прямой $x + y = 2$; б) окружности $|z - 1| = 1$.
11. Конформно отобразить область $\{|z - i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.
12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; \operatorname{Im} z < 0\}$ с разрезом по отрезку $[-i; -\frac{i}{3}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.
13. Конформно отобразить область $\{3x^2 - 6y^2 > 2,\ x > 0\}$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ на правую полуплоскость.
14. Конформно отобразить область $\{|z - 1| > 1; \operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}; |z-2|<2\}$ с разрезами по отрезкам $[1;\frac{4}{3}]$ и $[\frac{8}{5};4]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

16. Найти образ комплексной плоскости с разрезами по лучам $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$ при отображении $\omega=\operatorname{Arcsin} z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезкам $[-1,1]$ и $[-i,i]$ (внешность креста) на внешность единичного круга $\{|\omega|>1\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z|<1,\ |z+1|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ на внешность круга $|\omega|>2$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\,dz$, где C – отрезок прямой, от точки $-1+i$ до точки $1+i$.

20. $\int\limits_C (z^9+1)\,dz$, где C – парабола $y=x^2$, от точки 0 до точки $1+i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+4)(z-3)}\,dz$, где C – окружность а) $|z|=\frac{5}{2}$; б) $|z-2|=2$.

22. $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{z^2+1}{(z-2)^2(z+3)}\,dz$.

Вариант 2

1. Представить в алгебраической форме $\left(\frac{4}{\sqrt{3}i-1}\right)^{12}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=1-i$ и $z_2=5+3i$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[8]{256\,i^8}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1-i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\frac{x^3}{3}+x^2yi$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $|f(z)|=e^{x^2-y^2}$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $y = cx$ сохраняет своё значение $\operatorname{Re} f(z)$.

8. Точки z_1 и z_2 – смежные вершины правильного n-угольника с центром в точке $z = 0$. Найти вершину z_3, смежную с z_2 ($z_3 \neq z_2$).

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z-i}{z+i}$ отображает а) прямую $y - x = 1$; б) окружность $|z - i| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на область $\{|\omega| > 2\}$ так, чтобы $\omega(i) = 4$; $\arg \omega'(i) = 0$.

    Найти образы а) прямой $y = 1$; б) мнимой оси; в) окружности $|z| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z - i| > \sqrt{2},\ |z + i| < \sqrt{2}\}$ на область $\{|\omega| > 4\}$.

12. Конформно отобразить область $\{\operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z| = 1$; $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{4x^2 + y^2 > 4,\ z \notin [2i, 3i]\}$ на единичный круг $\{|\omega| < 1\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z - 1| > 1; |z - 2| < 2; \operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - 2| > 2; |z + 2| > 2\}$ с разрезом по отрезку $[0; 2i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $\omega = \operatorname{tg} \pi z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по лучам $[-\infty, -1]$, $[1, +\infty]$, $[-i\infty, -i]$ и $[i, +i\infty]$ на внешность единичного круга $\{|\omega| > 1\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z| < 2,\ |z - 5/2| > 3/2\}$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z| \arg z \, dz$, где C – контур, состоящий из дуги окружности $z = 4e^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi$ и отрезка действительной оси $-4 \leq x \leq 4$.

20. $\int\limits_C (z^5 + \sin z)\, dz$, где C – левая дуга окружности $|z - i| = 1$, от точки 0 до $2i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+5)(z+1)}\, dz$, где C – окружность а) $|z - 5i| = 1$; б) $|z + 1 - 5i| = 6$.

22. $\int\limits_{|z-3|=1} \frac{z^2+2}{(z-3)^2(z+4)}\, dz$.

Вариант 3

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(\sqrt{3}+i)^{1000}}{(1-i\sqrt{3})^{56}-i(\sqrt{3}-i)^{73}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = (1 - 2\sqrt{3}) + i(2 + \sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[6]{729\ i^6}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z) = r \ln r \cos\varphi - \varphi r \sin\varphi$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y^2 = cx$ сохраняет своё значение $\operatorname{Re} f(z)$.

8. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

9. Найти образ а) прямой $\operatorname{Re} z = 1$; б) окружности $|z - 3| = 2$ при отображении $\omega = \frac{z-3+i}{z+1+i}$

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| < 2\}$ на область $\{|\omega| > 1\}$ так, чтобы $\omega(1) = 2$; $\arg\omega'(1) = \pi/2$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z-i|<\sqrt{2}; \operatorname{Im} z>0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z|<1; \operatorname{Im} z>0\}$ с разрезом по отрезку $[0; \frac{i}{3}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2-y^2<1\}$ на область $\{0<\arg\omega<\pi/4\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z-2|>2; |z+2|>2; \operatorname{Im} z>0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-2i|>2; |z+2i|>2\}$ с разрезом по отрезку $[-2;2]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

16. Найти образ области $\{\operatorname{Re} z>0,\ 0<\operatorname{Im} z<1,\ z\notin[\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}]\}$ при отображении $\omega=\operatorname{ch}\pi z$.

17. Конформно отобразить внешность единичного круга с разрезами по отрезкам $1\le|z|\le\alpha$, $\arg z=2k\pi/n$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ на внешность единичного круга $\{|\omega|>1\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z|<1,\ |z-5/4|<3/4,\ \operatorname{Im} z>0\}$ на внешность единичного круга $|\omega|>1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re}\frac{\bar z}{z}\,dz$, где C – лежащая в первом квадранте дуга единичной окружности от точки 1 до точки i.

20. $\int\limits_C (z^2+3z+1)\,dz$, где C – дуга параболы $y=x^2$, от точки 0 до $1+i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+3)(z-4)}\,dz$, где C – окружность а) $|z-4|=1$; б) $|z-4-3i|=5$.

22. $\int\limits_{|z-4|=1} \frac{z^2}{(z-4)^2(z+1)}\,dz$.

Вариант 4

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i)^5(i^9-\sqrt{3})^9}{(1-i)^{69}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = 1-i$ и $z_2 = (1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[6]{-343\, i^6}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме
$z = (1-i)^{4+5i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = x^2y + y^2xi$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если
$\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 1;\ f(0) = 1$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y^2 = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. При каком условии три попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3 не лежат на одной прямой?

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z-2}{z+1}$ отображает а) прямую $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$; б) окружность $|z-i| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$ так, чтобы
$\omega(i) = i;\ \arg \omega'(i) = \pi/2$.

    Найти образы а) прямой $y = 1$; б) луча $x = 0,\ y \geq 0$; в) окружности $|z - i/2| = 1/2$.

11. Конформно отобразить область $\{|z-i| > \sqrt{2}; |z+i| > \sqrt{2}\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ с разрезом по отрезку $[e^{\frac{\pi}{6}i}; 2e^{\frac{\pi}{6}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область
$\{x^2/9 + y^2/16 > 1,\ z \notin [3,6],\ z \notin [-6,-3]\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z-1-i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-2|>2; |z+2|>2; \operatorname{Im} z>0\}$ с разрезом по отрезку $[0; 2i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

16. Найти образ области $\{|z|<2,\ |z-1|>1\}$ при отображении $\omega=\sin\frac{\pi z}{z-2}$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по лучу $[-a,+\infty],\ (a\ge 0)$ и отрезку $[-ci, ci],\ (c>0)$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega>0\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z|>2,\ |z-5/2|<3/2\}$ с разрезом по отрезку $[5/2, 4]$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\,dz$, где C – отрезок прямой, от точки $-2+2i$ до точки $2+2i$.

20. $\int\limits_C e^{iz}\cos 2z\,dz$, где C – правая дуга окружности $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{2}$ от точки 0 до точки i.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2-4)(z+5)}\,dz$, где C – окружность а) $|z+2|=1$; б) $|z+5|=4$.

22. $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{z^2+3}{(z+2)^2(z+4)}\,dz$.

Вариант 5

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(\sqrt{3}+i)^6(1-i\sqrt{3})^9}{(1-i)^{12}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=1-3i$ и $z_2=(3+\sqrt{3})+i(1-3\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{125\,i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=(\bar{z})^2$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $|f(z)| = e^{r^2 \cos 2\varphi}$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y^2 = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Im} f(z)$.

8. При каком условии четыре попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой?

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{2iz}{z+3}$ отображает а) прямую $x - y = 1$; б) окружность $|z + i| = \sqrt{2}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| < 1\}$ на область $\{\operatorname{Re}\omega + \operatorname{Im}\omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(0) = 1 + i;\ \omega'(0) > 0$.

    Найти образы а) вертикального диаметра; б) окружности $|z + 1/2| = 1/2$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; |z - 1| < 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезами по отрезкам $[0; \frac{i}{3}]$ и $[\frac{i}{2}; i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2 - y^2 > 1/2,\ y > 0, x > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{|z - i| > 1; |z - 2i| < 2\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}; \operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z - 1| = 1$; $0 \le \arg(z - 1) \le \frac{\pi}{2}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ первого квадранта при отображении $\omega = \operatorname{Arsh} z$.

17. Конформно отобразить на внешность единичного круга плоскость с разрезами по отрицательной части мнимой оси и по нижней половине единичной окружности.

18. Конформно отобразить область $\{|z| > 1,\ |z + 1| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z^2\,dz$, где C – отрезок прямой от точки 0 до точки $1+i$.

20. $\int\limits_C e^z\,dz$, где C – отрезок прямой от точки $3+i$ до точки $1+2i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2-1)(z+5)}\,dz$, где C – окружность а) $|z+5|=1$; б) $|z+3|=3$.

22. $\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2+2}{(z+3)^2(z^2+4)}\,dz$.

Вариант 6

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i^{123})(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^5}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=1+3i$ и $z_2=(1-3\sqrt{3})+i(3-3\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[6]{-64\,i^{12}}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=(-3+4i)^{1+i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=2xy-i(x^2-y^2)$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\mathrm{Im}\,f(z)=2\varphi\ln r$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $\varphi\cdot r=c$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$.

8. Найти $\sin z-\sin 2z+\cdots+(-1)^{n+1}\sin nz$.

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega=\frac{z}{z+1}$ отображает а) окружность $|z-i|=1$; б) прямую $\mathrm{Re}\,z=1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ на область $\{|\omega|<1\}$ так, чтобы $\omega(5i/4)=1/2;\ \omega'(5i/4)>0$.

    Найти образы а) луча $\{x=0,\ y\geq 1\}$; б) окружности $|z|=5/4$.

11. Конформно отобразить область $\{|z-1|<\sqrt{2};\mathrm{Re}\,z<0\}$ на полуплоскость $\mathrm{Im}\,\omega>0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; \operatorname{Re} z > 0; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0; \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/9 - y^2/16 < 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{|z-i| > 1; |z+i| > 1; \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-1| > 1; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[2; 3]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ круга $|z| < 1$ при отображении $\omega = \frac{z}{z^2+1}$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезку $[-\alpha i, 0]$, $(\alpha > 1)$ и по нижней половине единичной окружности $|z| = 1$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$.

18. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с выкинутым кругом $|z-h| < 1$ $(h > 1)$ конформно отобразить на кольцо $1 < |\omega| < 2$. Найти h.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z|\,dz$, где C – контур, состоящий из верхней дуги окружности $|z-1| = 1$ и отрезка действительной оси $0 \leq x \leq 2$.

20. $\int\limits_C (\cos z + z^5)\,dz$, где C – парабола $y = x^2 + 1$ от точки i до точки $1 + 2i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+3)(z+2)}\,dz$, где C – окружность а) $|z+2| = 1$; б) $|z + 2 + 3i| = 4$.

22. $\int\limits_{|z+4|=1} \frac{z^2+4}{(z+4)^2(z^2+1)}\,dz$.

Вариант 7

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(i^6+i\sqrt{3})^{100}}{(1+i)^{12}} \cdot \left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^4$.

2. Найти угол между векторами
$z_1 = 1 + 3i, z_2 = (-1 - 3\sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 3)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{216\, i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме
$z = (-3 + 4i)^{1+i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если
$\operatorname{Re} f(z) = \ln^2 r - \varphi^2$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $y = cx$ сохраняет своё значение $\operatorname{Im} f(z)$.

8. Доказать, что $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z-i}{z+2}$ отображает а) прямую $y = x$; б) окружность $|z + i| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{\operatorname{Re} z < 1\}$ на область $|\omega| > 1$ так, чтобы $\omega(0) = 2;\ \arg \omega'(0) = 0$

    Найти образы а) мнимой оси; б) окружности $|z - 1| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; |z + 1| > 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ с разрезом по лучу $\arg z = \frac{\pi}{6}$; $2 \leq |z| < +\infty$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{x^2 - y^2 < 1\}$ на круг $\{|\omega| < 1\}$ так, чтобы $\omega(0) = 0;\ \omega(1) = 1$.

14. Конформно отобразить область $\{|z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}; |z - i| < 1; \operatorname{Re} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - 2| > 2; |z + 2| > 2\}$ с разрезами по отрезкам $[4; 5]$ и $[-5; -4]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{\operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$ при отображении $\omega = \operatorname{ch} \pi z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезку $[-1, b]$, $(b > -1)$ и по дуге окружности с концами в точках $e^{\pm i\alpha}$ $(\pi/2 < \alpha < \pi)$, проходящей через точку $z = -1$, на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$.

18. Расширенную комплексную плоскость с выкинутым полукругом $\{|z| \le 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$ и разрезом по отрезку $[-i, 0]$ конформно отобразить на единичный круг $|\omega| < 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z|\bar{z}\,dz$, где C – проходимая против часовой стрелки дуга окружности $|z| = 4,\ \operatorname{Re} z \ge 0$.

20. $\int\limits_C (\cos z + z^7)\,dz$, где C – отрезок прямой, от точки 1 до точки $-1 - i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+5)(z^2+49)}\,dz$, где C – окружность а) $|z - \sqrt{5}i| = 1$; б) $|z + 4i| = 4$.

22. $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{z^2+5}{(z-2i)^2(z^2+4)}\,dz$.

Вариант 8

1. Представить в алгебраической форме $\frac{i^{999}}{(\sqrt{3}+i)^{13}+(1+i)^6(1+i\sqrt{3})^{10}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = 1 + 3i$ и $z_2 = (1 - 3\sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$.

3. Найти все значения $\sqrt[4]{81\, i^4}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = (-1 - i\sqrt{3})^{3+2i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = xy^2 + \frac{y^3}{3}i$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}$; $f(1) = 1 + i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y^2 = cx$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. При каких z все значения функции $\operatorname{Arcsin} z$ действительны?

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{4z}{z+1}$ отображает а) прямую $\operatorname{Re} z = 1$; б) окружность $|z + i| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Re} z > -1\}$ на область $\{|\omega| < 1\}$ так, чтобы $\omega(0) = 0;\ \arg \omega'(0) = \pi$.

    Найти образы а) луча $y = 0,\ x \geq -1$; б) окружности $|z - 1| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| < 2,\ |z - 5/2| > 3/2\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; \operatorname{Im} z < 0\}$ с разрезом по лучу мнимой оси $[-i\infty; -3i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{3x^2 - 6y^2 > 2,\ x > 0\}$ с разрезом по отрезку $[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1]$ на правую полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{|z - i| > 1; \operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ с разрезами по отрезкам $[0, \pi i]$ и $[-\pi i, -\frac{\pi}{2} i]$ на область $\{|\omega| < 1\}$.

16. Найти образ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении $\omega = \operatorname{Arcsin} z$.

17. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внешность единичного круга с разрезами по отрезкам $[i, bi]$, $[-bi, -i]$, $[1, a]$, $[-a, -1]$ $(a > 1,\ b > 1)$.

18. Расширенную комплексную плоскость с выкинутым полукругом $\{|z| \leq 1,\ \operatorname{Re} z \leq 0\}$ и разрезом по лучу $[0, +\infty]$ конформно отобразить на единичный круг $|\omega| < 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z| \operatorname{Re} z^2\, dz$, где C – дуга окружности $|z| = 2,\ \operatorname{Im} z \leq 0$, начальная точка $z = 2$.

20. $\int\limits_C (e^z + e^{2z})\, dz$, где C – отрезок прямой от точки $-i$ до точки $1+i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+1)(z^2-1)}\, dz$, где C – окружность а) $|z-1-i| = \sqrt{2}$; б) $|z+i| = 1$.

22. $\int\limits_{|z+3i|=2} \frac{z^2+1}{(z+3i)^2(z^2+4)}\, dz$.

Вариант 9

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(\sqrt{3}+i)^{10}(1-i)^6+i(1+i\sqrt{3})^{13}}{(1+i)^{26}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = 1+3i$ и $z_2 = (1+3\sqrt{3}) + i(3-\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[8]{-8i^2}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = (1-i\sqrt{3})^{3i-2}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = x^2 - y^2 + 2xy^2 i$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\arg f(z) = x \cdot y$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $(x^2+y^2)\, e^x = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Решить уравнение $\sin z - \cos z = i$

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z+2}{z-i}$ отображает а) прямую $y = 2x$; б) окружность $|z+i| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ на область $\{|\omega| > 1\}$ так, чтобы $\omega(-2i) = 2i;\ \arg \omega'(-2i) = \pi/2$.

    Найти образы а) прямой $y = -2$; б) мнимой оси; в) окружности $|z+i| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| > 2,\ |z - 5/2| < 3/2\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

12. Конформно отобразить комплексную плоскость с выкинутым первым квадрантом и разрезом по дуге окружности $|z| = 1; \pi/2 \leq \arg z \leq \pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{2x^2 - 2y^2 < 1,\ y > 0,\ z \notin [0, 2i]\}$ на внешность единичного круга.

14. Конформно отобразить область $\{|z| > 2; |z - 3| > 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{\operatorname{Re} z > 0;\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$ с разрезом по лучу $[1 + i, +\infty + i)$ на полосу $\{0 < \operatorname{Im} \omega < 2\}$.

16. Найти образ первого квадранта при отображении $\omega = \operatorname{Arcsin} z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезкам $[-1, 1]$ и $[-i, 0]$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$.

18. Верхнюю полуплоскость с выкинутой четвертью круга $\{|z| \leq 1,\ \pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/4\}$ конформно отобразить на единичный круг $|\omega| < 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C z \operatorname{Im} z^{10}\, dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки 0 и $-1 - i$.

20. $\int\limits_C (e^z + z^3)\, dz$, где C – парабола $y = x^2$, от точки $-1 + i$ до точки $1 + i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z(z+1)}{(z^2+9)(z^2-4)}\, dz$, где C – окружность а) $|z - 3(1 + i)| = 3\sqrt{2}$; б) $|z| = \frac{5}{2}$.

22. $\int\limits_{|z-4i|=1} \frac{z^2+5}{(z-4i)^2(z^2+1)}\, dz$.

Вариант 10

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i)^9+2(\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^7+(i\sqrt{3}-1)^3}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = -1 - 3i$ и $z_2 = (-1 - 3\sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 3)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{-16\,i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = (1 - i\sqrt{3})^{7i+2}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = z \cdot \bar{z}$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cdot \cos x;\ f(0) = 1$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x + \ln(x^2 + y^2) = c$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$

8. Решить уравнение $\sin z - \cos z = 3$.

9. Записать уравнение кривой, на которую функция $\omega = \frac{z+2}{z-i}$ отображает а) прямую $x/2 + y = 1$; б) окружность $|z - 1| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(1 + i) = i;\ \arg \omega'(1 + i) = \pi/2$.

    Найти образы а) луча $x = 1,\ y \geq 0$; б) окружности $|z - i| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| < 1,\ |z + 5/4| < 3/4\}$ на внешность единичного круга $|\omega| > 1$.

12. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую круг $\{|z| < 1\}$ с разрезами по отрезкам $[1/2, 1]$ и $[-1, -1/2]$ на круг $\{|\omega| < 1\}$ так, чтобы $\omega(0) = 0;\ \omega'(0) > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{3x^2 - 6y^2 > 2,\ y > 0, x > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{|z| > 2; |z + 3| > 1; \operatorname{Im} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - 1| > 1;\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезами по отрезку $[2; 4]$ и лучу $[8, +\infty)$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $\omega = \sin z$.

17. Конформно отобразить внешность единичного круга с разрезами по отрезкам $[-2,-1]$, $[-2i,-i]$ и $[i,2i]$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z|<1,\ |z-\sqrt{2}|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ на единичный круг $|\omega|<1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z|\,dz$, где $C: |z|=\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4} \le \arg z \le \frac{5\pi}{4}$.

20. $\int\limits_C (e^z+\sin z)\,dz$, где C – отрезок прямой от точки $1+i$ до точки $2+4i$.

21. $\int\limits_{|z|=a} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}\,dz$ (для всех действительных $a>0,\ a\ne 1,\ a\ne 3$).

22. $\int\limits_{|z+2i|=1} \frac{z^2+7}{(z+2i)^2(z+7)}\,dz$.

Вариант 11

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i\sqrt{3})^{51}}{(1+i)^{12}+64\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right)^3}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=(\sqrt{5}+1)+i(3\sqrt{5}+2)$ и $z_2=(4\sqrt{5}+3)+i(2\sqrt{5}+1)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{-256\,i^4}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=(\sqrt{3}-i)^{5i-7}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=x+y^2i$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z)=2xy;\ f(0)=1$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $r=c\cos\varphi$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$.

8. Найти $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$.

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z-1}{3z+1}$ отображает а) мнимую ось; б) окружность $|z| = 1$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую круг $\{|z| < 1\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(1/2) = i;\ \arg\omega'(1/2) = \pi/2$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z - 3/4| = 1/4$.

11. Конформно отобразить область $\{|z-1| > \sqrt{2}; \operatorname{Re} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ с разрезом по отрезку $[\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i}; e^{\frac{\pi}{6}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/9 - y^2/16 > 1,\ y < 0, x > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

14. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| > 1; \operatorname{Im} z < 1\}$ на круг $\{|\omega| < 1\}$ так, чтобы $\omega(-3i) = 0;\ \arg\omega'(-3i) = \pi/3$.

15. Конформно отобразить область $\{\operatorname{Re} z > 0,\ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$ с разрезом по отрезку $[0, 2]$ на область $\{|\omega| < 1\}$.

16. Найти образ области $\{0 < \arg z < \pi/n\}$ при отображении $\omega = \frac{2z^n}{1+z^{2n}}$.

17. Конформно отобразить круг $|z| < 2$ с разрезами по отрезкам $[-1, 2]$ и $[-i, i]$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z| < 1,\ |z - 1 + 2i| > 2,\ |z + 1 + 2i| > 2\}$ на внешность круга $|\omega| > 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = -2$ и $z_3 = 1$ через точку $z_2 = i$.

20. $\int\limits_C (z^2 + 1)\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = -2$ и $z_3 = 1$ через точку $z_2 = i$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin 2z}{(z^2+4)(z-1)}\,dz$, где C – окружность а) $|z| = \frac{3}{2}$; б) $|z-1+2i| = 3$.

22. $\int\limits_{|z+3|=3} \frac{e^z}{(z+3)^2(z-4)}\,dz$.

Вариант 12

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-\sqrt{3}+i)^{33}}{(-1-i)^{11}+32\left(\sin\frac{5\pi}{12}-i\cos\frac{19\pi}{12}\right)^3}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (\sqrt{7}-3)+i(2\sqrt{7}-1)$ и $z_2 = (\sqrt{7}+\sqrt{3}-3-2\sqrt{21})+i(2\sqrt{7}+\sqrt{21}-1-3\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[8]{-256\,i^8}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = (i-1)^{3+2i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\arg f(z) = \varphi + r\sin\varphi$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $\varphi \ln r = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Re} f(z)$.

8. Найти все z, для которых $|\operatorname{tg} z| = 1$.

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{2iz}{z+3}$ отображает а) прямую $x+y=2$; б) окружность $|z-1| = 2$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z|<2\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Re}\omega > -1\}$ так, чтобы $\omega(1) = 1;\ \arg\omega'(1) = 0$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z-5/2| = 3/2$.

11. Конформно отобразить область $\{|z|>1,\ |z+5/4|>3/4\}$ на внешность единичного круга $|\omega|>1$.

12. Конформно отобразить область $|z|>1$ с разрезом по отрезку $[-2,-1]$ на область $|\omega|>1$.

13. Конформно отобразить область $\{4x^2 + y^2 > 4\}$ на область $\{0 < \operatorname{Im}\omega < 1\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z - 1 - i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0; \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - i| > 1; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[2i, 4i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ при отображении $\omega = \operatorname{Arcsin} z$.

17. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ и по правой половине единичной окружности.

18. Найти общий вид дробно-линейного отображения области $\{|z - 3| > 9,\ |z - 8| < 16\}$ на кольцо $1 < |\omega| < R$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}\, dz$, где $C: |z - 1| = 2,\ 0 \le \arg(z - 1) \le \pi$.

20. $\int\limits_C \cos^2 z\, dz$, где $C: |z - 1| = 2,\ 0 \le \arg(z - 1) \le \pi$.

21. $\int\limits_{|z|=a} \frac{z^2-1}{z(z+2)}\, dz$ (для всех действительных $a > 0,\ a \ne 2$).

22. $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}\, dz$.

Вариант 13

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(i-1)^{99}}{(\sqrt{3}+i)^7 + 128\left(-\cos\frac{2\pi}{21} + i\sin\frac{19\pi}{21}\right)^{14}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (\sqrt{7} - \sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ и $z_2 = (3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21}) + i(\sqrt{3} - \sqrt{21} - \sqrt{7} - 6)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{256\, i^4}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме
   $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2i+4}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = y^3 + ix^3$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если
   $\operatorname{Re} f(z) = \frac{e^{2x}+1}{e^x} \cdot \cos y;\ f(0) = 2$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $\operatorname{ch} x \cos y = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Доказать, что $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$.

9. Найти симметричный образ окружности $|z| = 1/2$ относительно единичной окружности.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ на область $\{|\omega| > 2\}$ так, чтобы $\omega(1) = 4;\ \arg \omega'(1) = 0$.
    Найти образы а) луча $x = 1,\ y \geq 0$; б) окружности $|z - 1/2| = 1/2$.

11. Конформно отобразить область, которая является объединением двух кругов $K_1 : |z| < 1$ и $K_2 : |z + 5/4| < 3/4$, на внешность единичного круга $|\omega| > 1$.

12. Конформно отобразить комплексную плоскость с выкинутым первым квадрантом и разрезом по дуге окружности
    $|z| = 1; -\pi/2 \leq \arg z \leq 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{3x^2 - 6y^2 < 2,\ y < 0\}$ на круг $|z| < 1$.

14. Конформно отобразить область $\{|z| > 2; |z + 3i| > 1; \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; \operatorname{Re} z < 1\}$ с разрезом по лучу $[-\infty; -3]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ при отображении $\omega = \operatorname{ch} z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезку $[-1, 1]$,по дуге окружности с концами в точках $e^{\pm i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, проходящей через точку $z = 1$, и по дуге окружности с концами в точках $-e^{\pm i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, проходящей через точку $z = -1$, на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$.

18. Найти общий вид дробно-линейного отображения области $\{|z-5|>4,\ \operatorname{Re} z>0\}$ на кольцо $1<|\omega|<R$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1=-1$ и $z_3=1$ через точку $z_2=2i$.

20. $\int\limits_C e^{2z}\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1=-1$ и $z_3=1$ через точку $z_2=2i$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin 2z}{z(z-1)}\, dz$, где C – окружность а) $|z|=2$; б) $|z-2|=\frac{3}{2}$.

22. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z-1}{(z^2+4)z^2}\, dz$.

Вариант 14

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(\sqrt{3}+i)^7}{(-\sqrt{3}-i)^5+i\left(-\sin\frac{\pi}{18}+i\cos\frac{\pi}{18}\right)^{33}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=(\sqrt{10}+1)+i(1-\sqrt{10})$ и $z_2=2\sqrt{10}+2i$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{-8i}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=\left(\frac{3-3i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{4i+3}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z)=1-\sin y\cdot e^x;\ f(0)=1+i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $\ln^2 r-\varphi^2=c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Найти все значения z, для которых все значения функции $\operatorname{Arccos} z$ действительны.

9. Найти симметричный образ окружности $|z-1|=1$ относительно единичной окружности.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z>0\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega<0\}$ так, чтобы $\omega(2i)=-2i;\ \arg\omega'(2i)=\pi/2$.

    Найти образы а) луча $x=0,\ y\geq 0$; б) окружности $|z-i|=1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z|>1; |z+1|<1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

12. Конформно отобразить правую полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ с разрезом по дуге окружности $|z|=1; \pi/3\leq\arg z\leq\pi/2$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

13. Конформно отобразить область $\{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}<1\}$ с разрезом по отрезку $[-3,0]$ на верхнюю полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{-1<\operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>0,\ z\notin[i,+i\infty)\}$ на полосу $0<\operatorname{Im} z<\pi$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-1|>1;\ |z+1|>1,\ z\notin[-4,-2],\ z\notin[2,+\infty)\}$ на область $\pi/4<\arg z<3\pi/4$.

16. Найти образ области $\{0<\operatorname{Im} z<\pi, \operatorname{Re} z<0\}$ при отображении $\omega=\operatorname{ch} z$.

17. Конформно отобразить верхнюю полуплоскость с разрезами по отрезку $[0,i]$,по дуге окружности $|z|=1,\ 0\leq\arg z\leq\pi/4$ и по дуге окружности $|z|=1,\ 3\pi/4\leq\arg z\leq\pi$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega>0\}$.

18. Найти общий вид дробно-линейного отображения области $\{|z-i|>2,\ |z+i|<5\}$ на кольцо $\rho<|\omega|<1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z|\,dz$, где $C: |z-1|=1,\ \operatorname{Im} z<0$, начальная точка $z=0$.

20. $\int\limits_C \sin^2 z\,dz$, $C: |z-1|=1,\ \operatorname{Im} z<0$, начальная точка $z=2$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin z^2}{(z^2+1)(z-2)}\, dz$, где C – окружность а) $|z| = 3$; б) $|z-2| = 2$.

22. $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z^2+4)z^2}\, dz$.

Вариант 15

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-1-i)^{15}}{(i\sqrt{3}-1)^{10}-\left(-\sin\frac{7\pi}{18}-i\cos\frac{11\pi}{18}\right)^{30}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (-\sqrt{6}+3) + i(-2-\sqrt{6})$ и $z_2 = (\sqrt{6}-3+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) + i(-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2+\sqrt{6})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{16\, i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{5i-3}{2+8i}\right)^{3+2i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = x^3 + i3x^2y$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 1;\; f(0) = i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $r^2\cos 2\varphi = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Im} f(z)$.

8. Решить уравнение $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$.

9. Найти симметричный образ прямой $\operatorname{Im} z = 2$ относительно единичной окружности.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| > 2\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega < 0\}$ так, чтобы $\omega(4) = -i;\; \arg\omega'(4) = \pi/2$.

    Найти образы а) луча $y = 0,\; x > 2$; б) окружности $|z - 5/2| = 3/2$.

11. Конформно отобразить область, которая является объединением двух кругов $K_1 : |z| < 1$ и $K_2 : |z-1| < 1$, на единичный круг $|\omega| < 1$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[i; 2i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2 - y^2 < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$ на область $|\omega| < 1$.

14. Конформно отобразить область $\{|z + i| > 1; \mathrm{Im}\, z > 0; \mathrm{Re}\, z > 0\}$ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}; |z + 2| < 2\}$ с разрезом по отрезку $[-\frac{8}{5}; -1]$ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, \omega > 0$.

16. Найти образ комплексной плоскости с разрезами по мнимой оси вдоль лучей $(-\infty i, -i]$ и $[i, +\infty i)$ при отображении $\omega = \mathrm{Arsh}\, z$.

17. Конформно отобразить верхнюю полуплоскость с разрезами по отрезку $[0, i]$ и по дуге окружности $|z| = 1,\ \pi/4 \le \arg z \le 3\pi/4$ на верхнюю полуплоскость $\{\mathrm{Im}\, \omega > 0\}$.

18. Найти общий вид дробно-линейного отображения области $\{|z| > 2,\ |z - 5| > 2\}$ на кольцо $1 < |\omega| < R$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = i$ и $z_3 = 2 + i$ через точку $z_2 = 1$.

20. $\int\limits_C \cos^2 z\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = i$ и $z_3 = 2 + i$ через точку $z_2 = 1$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{z(z^2+4)}\, dz$, где C – окружность а) $|z| = 1$; б) $|z - 2i| = 3$.

22. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\, dz$.

Вариант 16

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{17}}{(1-i)^{23}+\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{62}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (5\sqrt{3} + 7) + i(2 - \sqrt{3})$ и $z_2 = (17 + 6\sqrt{3}) + i(-3\sqrt{3} - 10)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{-27\, i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)^{7i-1}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z) = r\varphi \cos\varphi + r \ln r \sin\varphi$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 + y = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Найти все значения z, для которых $|\operatorname{th} z| = 1$.

9. Найти симметричный образ окружности $|z - z_0| = |z_0|$ относительно единичной окружности.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z+1| < 1\}$ на область $\{|\omega| < 1\}$ так, чтобы $\omega(-1/2) = i/2;\ \arg \omega'(-1/2) = 0$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z - 1/4| = 3/4$.

11. Конформно отобразить область $\{|z - i| < \sqrt{2},\ |z + i| < \sqrt{2}\}$ на область $\{|\omega| > 4\}$.

12. Конформно отобразить область $\{\operatorname{Im} z < 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z| = 2; -\frac{\pi}{6} \le \arg z \le 0$ на область $\{\operatorname{Im} \omega < 0,\ \operatorname{Re} \omega > 0\}$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2 + 4y^2 > 4\}$ с разрезом по отрезку $[-3, -2]$ на область $\{\operatorname{Im} \omega > 0,\ \operatorname{Re} \omega > 0\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z+1| > 1; \operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - \frac{1}{3}| > \frac{1}{3}; |z+1| > 1\}$ с разрезом по дуге окружности $|z - 1| = 1;\ 0 \le \arg(z-1) \le \pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ при отображении $\omega = \operatorname{tg} z$.

17. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность правой ветки гиперболы $\{\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1,\ x > 0\}$.

18. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на себя.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, где C – дуга окружности $|z-1|=1,\ 0 \le \arg(z-1) \le \pi$.

20. $\int\limits_C \operatorname{ch}^2 z\,dz$, где C – дуга окружности $|z-1|=1,\ 0 \le \arg(z-1) \le \pi$.

21. $\int\limits_{|z|=a} \frac{e^z}{(z^2+1)z}\,dz$ (для всех действительных $a>0,\ a\ne 1$).

22. $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin 2z}{(z^2+3)(z-\frac{1}{2})^2}\,dz$.

Вариант 17

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-1-i)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{17}-2^{17}i\left(-\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)^{35}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=(2\sqrt{11}+3)-i(2-\sqrt{11})$ и $z_2=(-1-3\sqrt{11})+i(\sqrt{11}+5)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[9]{-512\,i^7}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=\left(\frac{1-5i}{6-4i}\right)^{7+i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\bar{z}\cdot\operatorname{Im} z$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z)=\cos y\cdot e^x;\ f(0)=1$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $(x+1)^2+y^2=cy$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$.

8. Найти все значения z, для которых функция $\operatorname{tg} z$ принимает действительные значения.

9. Найти симметричный образ окружности $|z - z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$, $(|z_0| > 1)$ относительно единичной окружности.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| > 1\}$ на область $\{|\omega| < 2\}$ так, чтобы $\omega(2) = i;\ \arg \omega'(2) = \pi$.

    Найти образы а) луча $\{x \geq 1,\ y = 0\}$; б) окружности $|z - 5/4| = 3/4$.

11. Конформно отобразить область, которая является объединением двух кругов $K_1 : |z - i| < \sqrt{2}$ и $K_2 : |z + i| < \sqrt{2}$, на единичный круг $|\omega| < 1$.

12. Конформно отобразить комплексную плоскость с выкинутым четвертым квадрантом и разрезом по дуге окружности $|z| = 1; \pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2 + 4y^2 > 4,\ y > 0\}$ с разрезом по отрезку $[i, 2i]$ на область $\operatorname{Im} \omega > 0$.

14. Конформно отобразить область $\{|z + 1 - i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0; \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - 2| < 3; |z| > 1\}$ с разрезом по дуге окружности $|z - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$; $-\pi \leq \arg (z - \frac{1}{2}) \leq 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ при отображении $\omega = \operatorname{tg} z$.

17. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внешность правой ветки гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. Конформно отобразить область $\{|z| > 1,\ |z - \sqrt{2}| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $|\omega| < 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C |z - 1|, dz$, где $C : |z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \pi$.

20. $\int\limits_C \sin^2 z \, dz$, где $C : |z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \pi$.

21. $\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z(z-1)} \, dz$, где C – окружность а) $|z| = 2$; б) $|z - 2| = \frac{3}{2}$.

22. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+9)}\, dz.$

Вариант 18

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1-i)^5}{(-\sqrt{3}-i)^{21}+(1+i)\left(-\sin\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)^{68}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (7\sqrt{3}-5) - i(4-\sqrt{3})$ и $z_2 = (4\sqrt{3}-17) + i(11\sqrt{3}-8)$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[5]{32\, i^5}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{4-i}{3-5i}\right)^{3-i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = y^2 + x^2 i$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = x + \sqrt{x^2+y^2};\ f(1) = 1+2i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $e^{\frac{2}{r}\cos\varphi} = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Доказать, что $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

9. Найти центр и радиус окружности, на которую функция $\omega = \frac{z+1}{z-2}$ отображает а) прямую $\operatorname{Re} z = 1$; б) окружность $|z-1| = 2$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z-1| < 1\}$ на область $\{|\omega| < 2\}$ так, чтобы $\omega(1/2) = i;\ \arg\omega'(1/2) = \pi$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z + 1/4| = 3/4$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| > 2,\ |z-\sqrt{2}| > \sqrt{2}\}$ на область $\{|\omega| > 4\}$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; -\frac{\pi}{3} < \arg z < 0\}$ с разрезом по отрезку $[e^{-\frac{\pi}{6}i}; 2e^{-\frac{\pi}{6}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{2x^2 - 2y^2 > 1,\ y > 0, x < 0\}$ на область $|\omega| < 1$.

14. Конформно отобразить область $\{|z-2| < 3; |z| > 1; \operatorname{Im} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z+\frac{4}{3}| > \frac{1}{3}; |z| > 1\}$ с разрезом по дуге окружности $|z+2| = 1$; $0 \leq \arg(z+2) \leq \pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ при отображении $\omega = \operatorname{tg} z$.

17. Конформно отобразить полосу $\{-2 < \operatorname{Im} z < 2\}$ с разрезами по лучам $\{\operatorname{Im} z = \pm 1,\ \operatorname{Re} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$.

18. Конформно отобразить область $\{|z| < 1,\ |z-5/4| < 3/4,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ на внешность единичного круга $|\omega| > 1$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = -2$ и $z_3 = 1$ через точку $z_2 = i$.

20. $\int\limits_C \sin^2 z\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = -2$ и $z_3 = 1$ через точку $z_2 = i$.

21. $\int\limits_C \frac{z+1}{(z^2+4)(z-1)}\, dz$, где C – окружность а) $|z| = 3$; б) $|z-1| = 1$.

22. $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z+1}{(z^2+3)(z-1)^2}\, dz$.

Вариант 19

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-1+i)^{21}}{(\sqrt{3}-i)^{13}+i\left(-\sin\frac{5\pi}{12}-i\cos\frac{7\pi}{12}\right)^{20}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (5-2\sqrt{13}) + i(\sqrt{13}-7)$ и $z_2 = (12-3\sqrt{13}) + i(-2-\sqrt{13})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{-256\, i^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме
$z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{5i-3}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если
$\arg f(z) = \varphi \ln r;\ f(1) = 2$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2 - y^2 + 2x = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Re} f(z)$.

8. Найти все z, для которых функция $\operatorname{tg} z$ принимает чисто мнимые значения.

9. Записать уравнение кривой, на которую функция $\omega = \frac{z-1}{2z-6}$ отображает а) прямую $x - y = 1$; б) окружность $|z - 1| = 2$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z - i| < 1\}$ на область $\{|\omega| < 2\}$ так, чтобы
$\omega(i/2) = -1;\ \arg \omega'(i/2) = 0$.

    Найти образы а) вертикального диаметра; б) окружности $|z - 5/4i| = 3/4$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| > 2,\ |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ на область $\{|\omega| < 2\}$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1; \operatorname{Re} z < 0; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[e^{\frac{3\pi}{4}i}; 2e^{\frac{3\pi}{4}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/9 - y^2/16 > 1,\ x < 0\}$ с разрезом по отрезку $[-5, -3]$ на нижнюю полуплоскость.

14. Конформно отобразить область $\{|z + \frac{4}{3}| > \frac{1}{3}; |z| > 1; \operatorname{Im} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z - 1| = 1$; $0 \le \arg(z - 1) \le \pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ при отображении $\omega = \operatorname{tg} z$.

17. Конформно отобразить область $\{-2 < \operatorname{Im} z < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезами по лучу $\{\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > 1\}$ и отрезкам $\{\operatorname{Im} z = \pm 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$.

18. Отобразить круг $|z| < 1$ на себя так, чтобы заданные точки $z_1,\ z_2$ внутри круга перешли в точки $\pm a$ $(0 < a < 1)$. Найти a.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_3 = 2$ через точку $z_2 = 1 + i$.

20. $\int\limits_C \sin^2 z\, dz$, где C – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_3 = 2$ через точку $z_2 = 1 + i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z+2)(z-1)}\, dz$, где C – окружность а) $|z| = 3$; б) $|z + 2| = 2$.

22. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^2(z+4)}\, dz$.

Вариант 20

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-\sqrt{3}-i)^{17}}{(1-i)^{29}+(1+i)\left(\sin\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (1 - 5\sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} + 1)$ и $z_2 = (14 - 4\sqrt{3}) - i(8 + 6\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[5]{243\, i^5}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{1+4i}{-3+5i}\right)^{2i-1}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = xy - i(x^2 - y^2)$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\arg f(z) = r^2 \cos 2\varphi;\ f(1) = 2$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x + \sqrt{x^2 + y^2} = c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Решить уравнение $\sin z = i \operatorname{sh} z$.

9. Найти образ области $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $\omega = \frac{z+i}{2i-z}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega + \operatorname{Re}\omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(2i) = 1 + i;\ \arg\omega'(2i) = 0$.

    Найти образы а) луча $x = 0,\ y \geq 0$; б) окружности $|z - i| = 1$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| < 2,\ |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ на область $\{|\omega| > 1\}$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; \operatorname{Re} z > 0; \operatorname{Im} z < 0\}$ с разрезом по отрезку $[0; \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

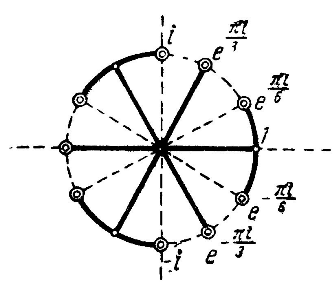
13. Конформно отобразить область $\{x^2/9 - y^2/16 > 1,\ x < 0\}$ с разрезом по лучу $(-\infty, -5]$ на единичный круг.

14. Конформно отобразить область $\{|z + 1 - i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - 2| > 2; |z + 2| > 2; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по лучу $[2i; +\infty i]$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ при отображении $\omega = \operatorname{cth} z$.

17. Конформно отобразить плоскость с разрезами, показанными на рисунке, на верхнюю полуплоскость.



18. Отобразить круг $|z| < 1$ на себя так, чтобы отрезок действительной оси: $y = 0,\ 0 \leq x \leq a\ (a < 1)$ перешел в отрезок

действительной оси, симметричный относительно начала координат. Найти длину преобразованного отрезка.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}\,dz$, где $C: |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0$, начальная точка $z = 1$.

20. $\int\limits_C \frac{z^2+1}{z}\,dz$, где $C: |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0$, начальная точка $z = -1$.

21. $\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{(z-2)(z+1)}\,dz$, где C – окружность а) $|z| = 3$; б) $|z + 1 - i| = 2$.

22. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4+1}{z^3(z^2+1)}\,dz$,

Вариант 21

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(\sqrt{3}-i)^{71}}{(1-i)^{19}+512\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8}\right)^{42}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (1 - 2\sqrt{5}) - i(2 - 3\sqrt{5})$ и $z_2 = (5\sqrt{5} - 3) + i(1 - \sqrt{5})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[6]{-16i\,(1+i)^4}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(i - \sqrt{3}\right)^{5i+4}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = r\sin\varphi;\ f(i) = i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $\operatorname{ch} x \sin y = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Re} f(z)$.

8. Доказать $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha}$.

9. Найти образ области $\{|z - i| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $\omega = \frac{z+i}{2i-z}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z|>1\}$ на область $\{|\omega+1|>1\}$ так, чтобы $\omega(2i)=1;\ \arg\omega'(2i)=\pi$.

    Найти образы а) луча $\{x=0,\ y\geq 1\}$; б) окружности $|z-5/4i|=3/4$.

11. Конформно отобразить область, которая является объединением двух кругов $K_1 : |z|<2$ и $K_2 : |z+\sqrt{2}|<\sqrt{2}$, на единичный круг $|\omega|<1$.

12. Конформно отобразить комплексную плоскость с выкинутым вторым квадрантом и разрезом по дуге окружности $|z|=1; \pi/4\leq\arg z\leq\pi/2$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/9+y^2/25>1,\ z\notin[5i,6i]\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega>0\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z-2|<3; |z|>1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-\frac{1}{3}|>\frac{1}{3}; |z+1|>1; \operatorname{Im}z>0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z-1|=1$; $0\leq\arg(z-1)\leq\frac{\pi}{2}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

16. Найти образ области $\{0<\operatorname{Im}z<\pi,\ \operatorname{Re}z<0\}$ при отображении $\omega=\operatorname{cth}z$.

17. Конформно отобразить всю плоскость с разрезами по отрезкам $[0,1]$, $[0,e^{\frac{2\pi i}{3}}]$, $[0,e^{\frac{-2\pi i}{3}}]$ и дугам окружности $|z|=1$, $-\pi/6\leq\arg z\leq\pi/6$, $\pi/2\leq\arg z\leq 5\pi/6$, $-5\pi/6\leq\arg z\leq-\pi/2$ на единичный круг $|\omega|<1$.

18. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C z\operatorname{Re}z^7\,dz$, где C – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

20. $\int\limits_C z^2\sin z^3\,dz$, где C – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^4+1}\,dz$, где C – окружность а) $|z-1|=1$; б) $|z+1+i|=\sqrt{2}$.

22. $\int\limits_{|z|=5} \frac{z^3+1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$.

Вариант 22

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(-i-\sqrt{3})^{29}}{(-1+i)^{13}+i\left(-\cos\frac{3\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{22}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=(4\sqrt{7}+5)+i(3+\sqrt{7})$ и $z_2=(-8-5\sqrt{7})+i(2+3\sqrt{7})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{-8\,(1-i)^6}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=\left(\frac{3+5i}{-8-2i}\right)^{i+2}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=|z|^2\cdot\bar{z}$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Re} f(z)=x^3+y^2;\ f(1)=1+i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^2-y^2=c$ сохраняет своё значение $|f(z)|$.

8. Доказать $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

9. Найти образ области $\{1<|z|<2\}$ при отображении $\omega=\frac{2}{z-1}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\operatorname{Re} z<1$ на область $|\omega|<1$ так, чтобы $\omega(0)=-1/2$; $\arg\omega'(0)=\pi/2$.

    Найти образы а) действительной оси; б) окружности $|z-1|=1$.

11. Конформно отобразить область $D: z\notin\{|z|\le 1; |z-1|\le 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z|>1,\ |z-5/4|>3/4\}$ с разрезом по лучу $[-\infty,-1]$ на единичный круг $|\omega|<1$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/9+y^2/25>1,\ y<0\}$ на полосу $\{0<\operatorname{Im}\omega<1\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z+\frac{1}{3}|>\frac{1}{3}; |z-1|>1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z-2|<3; |z|>1; \operatorname{Im}z<0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}$; $-\pi/2\le\arg(z-\frac{1}{2})\le 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega>0$.

16. Найти образ области $\{|z-1|>1,\ \operatorname{Re}z>0\}$ при отображении $\omega=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}$.

17. Конформно отобразить плоскость с разрезами по лучам действительной оси $(-\infty,-\pi/2]$, $[\pi/2,+\infty)$ и по отрезкам $\{-1\le y\le a,\ x=\pi/2+k\pi\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ на внешность единичного круга.

18. Построить конформное отображение единичного круга на себя, при котором прообраз центра находится на действительной оси, а дуга $0\le\varphi\le\pi/2$ переходит в дугу $\pi/2\le\varphi\le 7\pi/6$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \bar{z}\,dz$, где C – кусок дуги кривой $y=\sin x$ от точки $z_1=-\pi$ до точки $z_2=\pi$.

20. $\int\limits_C \cos z\,dz$, где C – кусок дуги кривой $y=\sin x$ от точки $z_1=-\pi$ до точки $z_2=\pi$.

21. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^4-1}\,dz$, где C – окружность а) $|z-1|=\frac{1}{2}$; б) $|z-1-i|=\sqrt{2}$.

22. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin^2 z}{(z^2+1)^2}\,dz$.

Вариант 23

1. Представить в алгебраической форме $\frac{(1-i)^{19}}{(-\sqrt{3}+i)^{26}+\left(-\sin\frac{5\pi}{21}+i\cos\frac{5\pi}{21}\right)^{28}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1 = (2 - 7\sqrt{3}) + i(4\sqrt{3} - 1)$ и $z_2 = (14 - 8\sqrt{3}) + i(20 + 2\sqrt{3})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[3]{4\,(1-i)^2}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z = \left(\frac{-i-\sqrt{3}}{i+1}\right)^{4+3i}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = x^2 + y^2 - 2ixy$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $|f(z)| = \operatorname{ch}(x-1)\sin y;\ f(1 + \frac{\pi i}{2}) = 1$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $r \sin\varphi = c$ сохраняет своё значение $\operatorname{Im} f(z)$.

8. Пусть ε – произвольный корень степени n из единицы, отличный от единицы. Доказать $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1} = \frac{n}{\varepsilon - 1}$.

9. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении $\omega = \frac{z+i}{2-iz}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую полуплоскость $\{\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0\}$ на полуплоскость $\{\operatorname{Im}\omega > 0\}$ так, чтобы $\omega(1+i) = 2i;\ \arg\omega'(1+i) = 0$.

    Найти образы а) прямой $y = x,\ y \geq 0$; б) окружности $|z - \frac{1+i}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Конформно отобразить область $\{|z| < 1; |z-1| > 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| > 1,\ |z - 5/4| < 3/4\}$ с разрезом по отрезку $[3/2, 2]$ на полосу $0 < \operatorname{Im}\omega < \pi/2$.

13. Конформно отобразить область $\{4x^2 + y^2 > 4,\ x < 0,\ y > 0\}$ на область $\{0 < \operatorname{Im}\omega < 1\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z - 1 + i| > \sqrt{2}; \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z + \frac{4}{3}| > \frac{1}{3}; |z| > 1; \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z+2| = 1;\ 0 \leq \arg(z+2) \leq \pi/2$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$.

16. Найти образ области $\{|z-1|>1,\ \operatorname{Re} z>0\}$ при отображении $\omega=\cos\frac{\pi}{z}$.

17. Конформно отобразить на внешность единичного круга всю плоскость с разрезами по отрезкам $[-1-i,1+i]$, $[-1+i,1-i]$ и $[-1,1]$.

18. Построить конформное отображение единичного круга на себя, при котором прообраз центра находится на действительной оси, а дуга $0\le\varphi\le\pi/2$ переходит в дугу $0\le\varphi\le\pi/3$.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Re}\bar{z}\,dz$, C – кусок дуги кривой $x=\sin y$ от точки $z_1=-\pi i$ до точки $z_2=\pi i$.

20. $\int\limits_C \sin z\,dz$, C – кусок дуги кривой $x=\sin y$ от точки $z_1=-\pi i$ до точки $z_2=\pi i$.

21. $\int\limits_C \frac{z^7+1}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz$, где C – окружность а) $|z-i|=1$; б) $|z+1|=\sqrt{3}$.

22. $\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-1)^2}\,dz$.

Вариант 24

1. Представить в алгебраической форме $\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{5\pi}{4}\right)^{15}}{(1+i)^{10}-32\left(-\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}\right)^{21}}$.

2. Найти угол между векторами $z_1=(5-3\sqrt{14})-i(2\sqrt{14}+1)$ и $z_2=(6-\sqrt{14})+i(4-5\sqrt{14})$.

3. Представить в алгебраической форме $\sqrt[4]{-4\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+i)^3}$.

4. Представить в алгебраической и показательной форме $z=(i+1)^{5i+7}$.

5. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\frac{|z|^4}{(z^2)}$.

6. Найти дифференцируемую функцию $f(z)$, если $\operatorname{Im} f(z) = y^2 - x^2;\ f(1) = -1 - i$.

7. Найти все дифференцируемые функции, у которых вдоль любой линии семейства $x^5 - y^3 = c$ сохраняет своё значение $\arg f(z)$.

8. Пусть ε – произвольный корень степени n из единицы, отличный от единицы. Доказать $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \cdots + n^2\varepsilon^{n-1} = -\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(\varepsilon-1)^2}$.

9. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ при отображении $\omega = \frac{z+1}{z-2}$.

10. Найти функцию $\omega(z)$, конформно отображающую область $\{|z| < 1\}$ на область $\{|\omega| > 1\}$ так, чтобы $\omega(-1/2) = 2;\ \arg \omega'(-1/2) = \pi/2$.

    Найти образы а) горизонтального диаметра; б) окружности $|z + 5/4| = 3/4$.

11. Конформно отобразить плоскость с выкинутой часть круга $\{|z - 1| \leq \sqrt{2}; \operatorname{Re} z \geq 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

12. Конформно отобразить область $\{|z| < 1,\ |z - 5/4| > 3/4\}$ с разрезом по отрезку $[-1, -1/2]$ на единичный круг $|\omega| < 1$.

13. Конформно отобразить область $\{x^2/25 + y^2/9 > 1,\ z \notin [5, 6]\}$ на правую полуплоскость $\{\operatorname{Re} \omega > 0\}$.

14. Конформно отобразить область $\{|z + 3i| > 2; |z| > 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

15. Конформно отобразить область $\{|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}; \operatorname{Im} z > 0; \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $|z - 1| = 1;\ \pi/2 \leq \arg(z - 1) \leq \pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$.

16. Найти образ области $\{-\pi/n < \arg z < \pi/n,\ |z| < 1\}$ при отображении $\omega = \frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$, ($\omega(z) > 0$ при $z > 0$).

17. Конформно отобразить плоскость с разрезами по лучам $[k\pi i, k\pi i + \infty)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} \omega > 0\}$.

18. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с выкинутым кругом $|z - h| < R$ $(h > R)$ дробно-линейно отобразить на кольцо $\rho < |\omega| < 1$ так, чтобы мнимая ось перешла в окружность $|\omega| = 1$. Найти ρ.

Найти интегралы

19. $\int\limits_C \operatorname{Im}(z^3+1)\,dz$, где C – отрезок от точки $z_1 = 1-i$ до точки $z_2 = 1+i$.

20. $\int\limits_C \operatorname{tg} z\,dz$, где C – отрезок от точки $z_1 = 1-i$ до точки $z_2 = 1+i$.

21. $\int\limits_C \frac{\operatorname{sh} z}{(z-3)(z+1)}\,dz$, где C – окружность а) $|z| = 2$; б) $|z| = 5$.

22. $\int\limits_{|z+1+i|=\sqrt{2}} \frac{z^5+1}{(z-1)(z^4-1)}\,dz$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Вариант 1

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \left|\sin\frac{1}{n}\right|$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{2\sin^2 z}$.

3. $f(z) = \frac{\sqrt{\sin z}\, e^z\, (z-\pi)}{e^{iz}-1}$.

4. $f(z) = \sqrt{z+\sqrt{z}}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{\cos\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ $(|z| < 2)$ можно аналитически продолжить на область $|z| < \infty$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z+3}{4\pi i - \mathrm{Ln}(1+z)}$ распадается в окрестности точки $z = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке $z = 0$ каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$ с центром в точке $z = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = ze^{\frac{1}{z-4}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 4$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[3]{z(1-z)^2}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[0,\,1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0,\ 0 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}(\sin z)|z|dz,\ AB$ - отрезок прямой $z_A = 0,\ z_B = 1+i$.

11. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + \frac{9}{2}z^2}{z^4 \sin\frac{9}{4}z}\, dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^4+16}\,dx$.

15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p\,dx}{(1+x^2)^2}$ $(-1 < p < 3)$.

16. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\frac{dx}{x+1}$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cdot\sin x\,dx}{x^2-3x+2}$.

18. $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{(2+\sqrt{z-1})\sin z}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции
$f(t) = e^{5(t-5)}\sin(t-5)\,\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x' = 4\sin^2 t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0,\ x'(0) = -1$.

Вариант 2

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = n\sin\left(\frac{1}{n} + \pi n\right)$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{e^z-1}{\sin\pi z}$.

3. $f(z) = \frac{z\sqrt{z}}{e^z-1}$.

4. $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z+1}}$.

5. Доказать, что следующую функцию
$f(z) = \int\limits_{|\zeta|=1} e^{a\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ $(|z| > 1)$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |z| > 0$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \mathrm{Ln}\,\frac{z-4}{z+4}$ распадается в окрестности точки $z_0 = \infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке $z_0 = \infty$ каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции с центром $f(z) = \frac{1}{(z^2-4)^2}$ в точке $z = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \operatorname{Ln} \frac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z+2)}$ допускает выделение регулярных ветвей в области $D : \{1 < |z| < 2\}$ и разложить ветвь, заданную условием $\operatorname{Im} f(\frac{3}{2}) = -3\pi$ в ряд Лорана в области D. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} \overline{z}^2\, dz$, AB - отрезок прямой $z_A = 0$, $z_B = -1 - i$.

11. $\int\limits_{|z|=0.3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\, dz$.

12. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi\, d\varphi}{10-6\cos\varphi}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^3}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+13x^2+36}\, dx$.

15. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx$.

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}\,(x+2)}\, dx$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^3}\, dx,\ t > 0$

18. $\int\limits_{|z|=2} \sqrt[4]{z^4+1}\, dz$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \frac{1-e^{3t}}{te^t}\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{p(p^2+4)^2}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = te^t + 4\sin t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 3

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z\,(1-\cos z)}$.

3. $f(z) = \frac{\sqrt{\cos z - 1}}{\sqrt{\sin z}}$.

4. $f(z) = \mathrm{Ln}(1 - \sqrt[4]{z})$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{\cos\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2+1} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$ $(|z| < 2)$ можно аналитически продолжить на область $D: \ |z| < \infty$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z}{3+\sqrt{10-z}}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 1$ на регулярные ветви и найти вычет в точке $z_0 = 1$ каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z-1}{z^2+2}$ с центром в точке $z = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z\cos\pi\frac{z+3}{z+4}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -4$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[0,\,1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0,\ 0 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L |z|\,\mathrm{Re}\,z^2\,dz, \quad L : \{|z| = 2,\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\}$.

11. $\int\limits_{|z|=0.2} \frac{e^{8z} - \mathrm{ch}\,4z}{z\sin 4\pi z}\,dz$.

12. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi+2}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}\, dx$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\, dx$

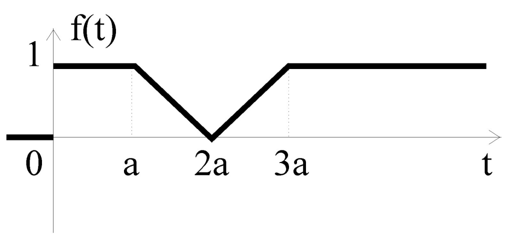
15. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^p\, dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$ $(-1 < p < 1;\ -\pi < \lambda < \pi)$.

16. $\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\, \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$.

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3+x}\, dx$.

18. $\int\limits_{|z-2|=5/2} \frac{(z+2)\, dz}{2\pi i-\mathrm{Ln}(1+z)}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = \operatorname{sh} t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2,\ x'(0) = 1$

Вариант 4

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n^2}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{\sin\pi z}{z^4-1}\, e^{\frac{1}{z}}$.

3. $f(z) = \frac{\sqrt{e^z-1}\, e^{\frac{1}{z}}}{\cos z-1}$

4. $f(z) = \cos(i\,\mathrm{Ln}\, z)$

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{|\zeta|=1} \operatorname{sh}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2+z^2}$ $(|z|<1)$ можно аналитически продолжить на область $D: \ |z| < \infty$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z}{\sqrt{9-z^2}+3}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке $z_0 = 0$ каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z^3 \cos\frac{3z}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \operatorname{Ln}\frac{(z+1)^2}{z^2+4}$ допускает выделение регулярных ветвей в области $D: \{|z| > 2\}$ и разложить ветвь, заданную условием $f(\infty) = 2\pi i$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z^2\, dz,\ AB$ - отрезок прямой $z_A = 0,\ z_B = -1+i$.

11. $\int\limits_{|z|=0.5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z}\, dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{2+\cos x}\, dx$.

13. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}\, dx$.

14. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+9)^2}\, dx$.

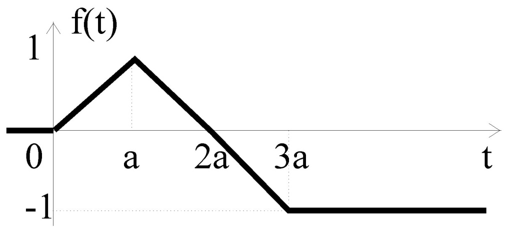
15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$.

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{(x^2+4)(x-1)}$.

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|} \sqrt{(z-a)(z-b)}\, dz$.

19. Найти изображение по Лапласу функции.



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{(p^2+1)(p^2+4)}$

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x' = t^2 + 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0,\ x'(0) = -2$.

Вариант 5

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

3. $f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(\operatorname{ch} z-1)}{z\sqrt{z}}$.

4. $f(z) = \sqrt{z + \sqrt{z^2 - 1}}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{-\frac{1}{\zeta}}}{\operatorname{ch}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2+z^2}$ $(|z| < 1)$ можно аналитически продолжить на область $D:\ z \neq \pm\frac{\pi i}{2}, \pm\frac{3\pi i}{2}, \ldots$

6. Доказать, что функция $f(z) = z^2 \,\mathrm{Ln}\, \frac{z-4}{z+4}$ распадается в окрестности точки $z_0 = \infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = (z-3)\,\sin \pi \frac{z-3}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1-z^2)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\,1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0\ -1 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L |z|\cdot \overline{z}\,dz,\ L:\{|z|=4,\ \pi/2 \leq \arg z \leq \pi\}$.

11. $\int\limits_{|z|=0.5} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2\,4iz}\,dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

15. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)(1+x)^2}}$.

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{1-x^4}\,dx$.

18. $\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{z+2}{\mathrm{Ln}(z+2)+2\pi i}\,dz$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \frac{\sin 7t \sin 5t}{t}\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''' - 3x' + 2x = (4t^2+4t-10)\,e^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Вариант 6

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z=0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n-1}}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{\cos\frac{\pi}{4}z}{z^4-16}$.

3. $f(z) = \sqrt{\sin z}\sqrt{e^z - 1}$.

4. $f(z) = z\,\mathrm{tg}(i\,\mathrm{Ln}\,z)$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ $(\mathrm{Im}\,z > 0)$ можно аналитически продолжить на область $D:\ \mathrm{Im}\,z > -1$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z+2}{8\pi i - \mathrm{Ln}(1+z)}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = e^{\frac{2z-z^2}{(z-1)^2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[4]{z^2(3-z)^2}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[0,\,3]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0,\ 0 < x < 3$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\,z\,dz$, AB - отрезок прямой $z_A = -1-i,\ z_B = 0$.

11. $\int\limits_{|z+6|=2} \left(ze^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\sin\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)}\right) dz$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+2}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx$.

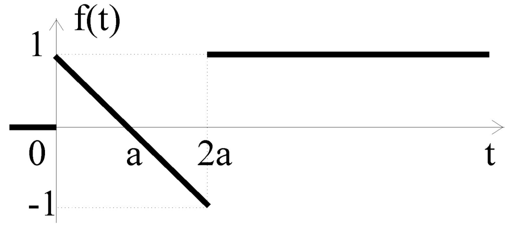
15. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{(1+x)(1-x^2)}}{2-x}\,dx$.

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx$.

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax\,dx}{x\,(x^2+b^2)}$.

18. $\int\limits_{|z-2|=3/2} \frac{e^z\,dz}{\sin(1+\sqrt{z})}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1+t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 7

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+(-1)^n}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = z \operatorname{tg} z \, e^{\frac{1}{z}}$.

3. $f(z) = \operatorname{Ln} \cos z$.

4. $f(z) = \sqrt[3]{\pi i + \operatorname{Ln} z}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2 \operatorname{ch} \zeta}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$ можно аналитически продолжить на область $DD:\ \operatorname{Im} z > -\frac{\pi}{2}$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z+1}{\sqrt{16-4z^2}+4}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2+2z-3}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = \sin \frac{2z-7}{z+2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -2$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \operatorname{Ln} \frac{z\,(z+3)}{(z+2)(z-1)}$ допускает выделение регулярных ветвей в области $D : \{1 < |z+1| < 2\}$ и разложить ветвь, заданную условием $\operatorname{Im} f\left(-\frac{5}{2}\right) = \pi$, в ряд Лорана в области D. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} \frac{\overline{z}}{z}\, dz,\ \ AB : \{|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$.

11. $\int\limits_{|z|=0.2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z}\, dz$.

12. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{1+\sin^2 \varphi}\, d\varphi$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-1)\, dx}{(x^2-8x+17)^2}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10}\, dx$.

15. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{x^2+1}\, dx$.

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x^2+1)(x+1)}$.

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax\, dx}{x\,(x^2+b^2)^2}$.

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \arcsin(\sin t)\, \eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12t^2 e^{3t} - e^{2t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Вариант 8

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = n \sin\frac{1}{n+1}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{1}{z^2} - \sin\frac{1}{z^2}$.

3. $f(z) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}\,(e^z-1)}{\sqrt{\sin z}}$.

4. $f(z) = \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z + \pi)$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^4}$ $(\operatorname{Im} z > 0)$ можно аналитически продолжить на область $D: \ |z| < \infty$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{\sqrt{(z-2)(z-3)}}{z^3}\, e^{\frac{1}{z}}$ распадается в окрестности точки $z_0 = \infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{1}{z\,(z-4)^2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = (z^2 - 4)\cos\frac{z}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[3]{\frac{z^2}{(1-z)^2}}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[0,\, 1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x + i0) > 0, \ 0 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L |z| \arg z\, dz, \ L: \{z = 4e^{i\varphi}, \ 0 < \varphi < \pi\}$.

11. $\int\limits_{|z+4|=2} \left(z\cos\frac{1}{z+4} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)}\right) dz$.

12. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{5-4\cos\varphi}\,d\varphi.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}\,dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx.$

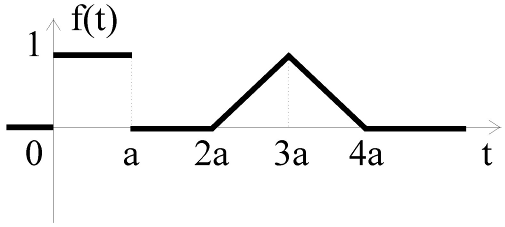
15. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{3x-x^2-2}}.$

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x\cdot\cos x}{x+x^3}\,dx.$

18. $\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\cos z\,dz}{\mathrm{Ln}\,z+\pi i}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''+2x'+x=\frac{te^t}{t+1}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Вариант 9

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z=0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{n+\cos\pi n}}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{z\,(\sin z-z)}$.

3. $f(z)=\frac{\sqrt{\sin z}}{\sqrt{\cos z-1}}$.

4. $\mathrm{Ln}(z+\sqrt{1+z^2})$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia\zeta^2}}{\zeta - z}\, d\zeta,\ a > 0\ (\operatorname{Im} z > 0)$ можно аналитически продолжить на область $D: \ |z| < \infty$

6. Доказать, что функция $f(z)\frac{z^2+3}{\sqrt{8+z^2}-3}$ распадается в окрестности точки $z_0 = -1$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{1}{z^2\,(z-2)^2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = (z^2 - 4)\cos\frac{z^2}{z-5}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 5$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \operatorname{Ln}\frac{(z-1)^2}{(z+2)(z+3)}$ допускает выделение регулярных ветвей в области $D: \{|z+1| > 2\}$ и разложить ветвь, заданную условием $f(5) < 0$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L z \operatorname{Re} z\, dz,\ \ L: \{|z| = 3,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$.

11. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}\, dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}\, dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}\, dx.$

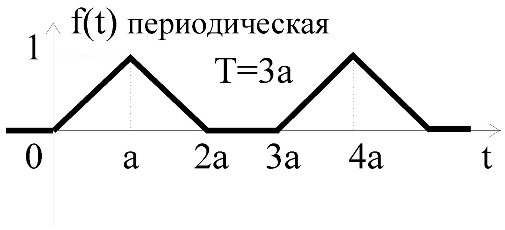
15. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x+2}\, dx.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2+2x+2}.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|} \frac{z\, dz}{\sqrt[3]{(z-a)^2(z-b)}}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = e^{-t} + 2$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 10

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \sin \frac{1}{n + \cos \pi n}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}$.

3. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{\sqrt{e^z - 1}} \sin \frac{1}{z}$.

4. $f(z) = \sqrt{\pi + \operatorname{Ln} z}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2 \operatorname{ch} \zeta}$ $(\operatorname{Im} z < 0)$ можно аналитически продолжить на область $D:\ \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{4z^2}{\sqrt{5 + z^2} + 3}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 2$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z^4 + 1}{(z-1)(z+2)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z\sin\frac{z-1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt{(z-4)(z-1)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[1,\ 4]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(0) = 2$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z\, dz$, AB - отрезок прямой $z_A = 0,\ z_B = 1+i$.

11. $\int\limits_{|z|=3} \left(z \operatorname{ch}\frac{1}{z+2} - \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)} \right) dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}\, dx.$

15. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}}.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{x^2}\, dx.$

18. $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\operatorname{Ln}(z+1)}{\sin\pi z}\, dz.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} - \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x' = t\operatorname{sh} t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 1$.

Вариант 11

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{n}{n+(-1)^n}}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z)=\frac{\sin^2 z\,(e^z-1)}{(\cos z-1)^3}$.

3. $f(z)=(\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}\sin z)\sin z$. 4. $f(z)=\sqrt{\operatorname{Ln}(1+z)}$.

5. Доказать, что функцию $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)\operatorname{ch}\zeta}$ $(\operatorname{Im} z>0)$ можно аналитически продолжить на область $D:\ z\neq-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},\ldots$.

6. Доказать, что функция $f(z)=\frac{2z}{(6\pi i-\operatorname{Ln}(1+z))^2}$ распадается в окрестности точки $z_0=0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ с центром в точке $z_0=0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z)f(z)=z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z)=\sqrt{\frac{z-16}{z-4}}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[4,\,16]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(0)=2$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L z\operatorname{Im} z^2dz,\ L:\{|z|=2,\ -\pi\leq \arg z\leq 0\}$

11. $\int\limits_{|z|=3}\frac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+1)(z^6-1)}\,dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{5-4\sin\varphi}\,d\varphi$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

15. $\int\limits_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^p\frac{dx}{x+a},\ -1<p<1,\ a>0.$

16. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}}$. 17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx$.

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|+1} \frac{z\,dz}{\sqrt[4]{(z-a)^3(z-b)}}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,2t\sin t\,\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{p}{p^2+9}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = \cos t + \cos 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 12

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{n^2+1}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{e^{\sin\frac{1}{z}}}{e^z-1}$.

3. $f(z) = \frac{\sin(i\,\mathrm{Ln}\,z)}{\sin z}$. 4. $f(z) = \sqrt[3]{\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^2}\,d\zeta$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg z| < \pi$

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z^2-16}{(\sqrt{20+z}+4)\sin(z+4)}$ распадается в окрестности точки $z_0 = -4$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z\sin\frac{5z}{z-2i}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2i$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[4]{z^2(3-z)^2}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку [0, 3] и разложить ветвь, заданную условием $f(-1) = -2$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} z\sin z\,dz,\ AB$ - отрезок прямой $z_A = 0,\ z_B = 3i$.

11. $\int\limits_{|z+2i|=2} \left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1} + \frac{4\cos\frac{\pi z}{z-2i}}{(z-4)^2(z-2)}\right) dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}\,dx.$

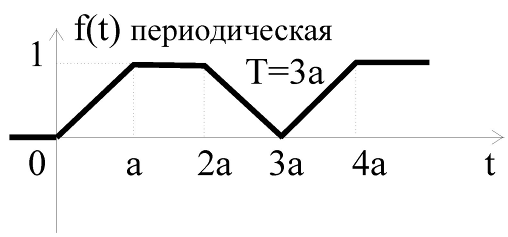
15. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}}.$

16. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}\,dx.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1-\cos\alpha x)\,dx}{x^2(x^2+1)}.$

18. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{Arctg} z\,dz}{z}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

Вариант 13

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z=0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1-n\cdot e^{\frac{1}{n}}}{1+n\cdot e^{\frac{1}{n}}}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z)=\frac{e^z\sin z}{z^4(\cos 3z-1)}$.

3. $f(z)=\sqrt{\operatorname{Ln} z}\,(z-1)e^{z+\frac{1}{z}}$.

4. $f(z)=\sqrt[3]{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}}$.

5. Доказать, что функцию $f(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^4}\,d\zeta$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg z|<\frac{3\pi}{4}$.

6. Доказать, что функция $f(z)=\operatorname{Ln}\frac{(z+2)^2}{z^2+16}$ распадается в окрестности точки $z_0=\infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ с центром в точке $z_0=0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z)=z^2e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\pi$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\,1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(2)<0$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L z\operatorname{Re}\cos z\,dz$, $L\ :\ \{|\operatorname{Im} z|\ \le 1,\ \operatorname{Re} z=\frac{\pi}{3}\}$, начальная точка $z_0=\frac{\pi}{3}+i$.

11. $\int\limits_{|z|=1}\frac{6z-\sin 6z}{z^2\sin^2 2z}\,dz$.

12. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{17-8\cos\varphi}\,d\varphi.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}\,dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}\,dx.$

15. $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx.$

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}.$

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 3x\cdot\sin x}{x^2+x^4}\,dx.$

18. $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{7-z+4\sqrt{3-z}}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \frac{e^{-2t}\sin 4t}{t}\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $tx'' + 2x' - tx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$.

Вариант 14

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(e^{\frac{1}{n^2}} + (-1)^n\right)$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$.

3. $f(z) = \frac{z\,\mathrm{Arcsin}\,z\sin\pi z}{\sin^2 z}$.

4. $f(z) = \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{\mathrm{ch}\,a\zeta}\,d\zeta,\ a > 0$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg(z+a)| < \pi$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{2z+1}{8\pi i - \mathrm{Ln}(z+1)}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z)=\frac{z}{(z^2+4)(z+3)}$ с центром в точке $z_0=0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z)=z\sin\frac{5}{z-2i}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2i$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z)=\sqrt[3]{z^2(1+z)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\,0]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0)>0,\ -1<x<0$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L \sin z\,\mathrm{Im}\cos z\,dz,\ \ L:\{|\,\mathrm{Im}\,z|\le 2,\ \mathrm{Re}\,z=-\frac{\pi}{4}\}$.

11. $\int\limits_{|z|=4}\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{(z-2)(z+3)}\,dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(4+\cos\varphi)^2}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

15. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx,\ -1<p<2.$

16. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\,dx,\ 0<\alpha<1.$

17. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}\,dx,\ a>0,\ \mathrm{Re}\,b>0.$

18. $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t)=|\sin t|\,\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p)=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''+x=f(t),\ f(t)=\left\{\begin{array}{cc} t, & 0<t<1\\ 2-t, & 1<t<2\\ 0, & t\ge 2\end{array}\right.$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

Вариант 15

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} + (-1)^n} - n$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{2\sin\frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z-3)}$.

3. $f(z) = \frac{(\mathrm{Ln}(e^z-1) - \mathrm{Ln}\, z)\, e^{\frac{1}{z}} \sin z}{\cos z - 1}$.

4. $f(z) = \sin\sqrt{z}(\sqrt{z} + \sqrt{z-1})$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-z\zeta^2}}{1+\zeta^4}\, d\zeta$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg z| < \pi$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z^2}{\sqrt{17+z}+4}$ распадается в окрестности точки $z_0 = -1$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z^3+1}{(z-3)(z+4)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z\cos\frac{z}{z+2i}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -2i$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскость с разрезом по отрезку $[0,\, 1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x + i0) > 0$ при $0 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} e^z \,\mathrm{Im}\, \overline{z}\, dz$, AB - отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = i$ и $z_B = 1 + i$.

11. $\int\limits_{|z-5|=2} \left(z\,\mathrm{ch}\,\frac{2}{z-5} + \frac{4\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)}\right) dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\, dx.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}\, dx.$

15. $\int\limits_0^{3} \frac{\sqrt[4]{x^3(3-x)}}{5-x}\, dx.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\, \ln^2 x}{1+x^2}\, dx |\alpha| < 1.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x\, dx}{x\,(x^2+a^2)}.$

18. $\int\limits_{|z-3|=0.99} \frac{dz}{1+\mathrm{Ln}(z-2)}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \frac{e^{-2t}\sin^2 t}{t}\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x' = 4\sin^2 t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0,\ x'(0) = -2$.

Вариант 16

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\sin n+1}{n}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\sin 5\pi z}$.

3. $f(z) = \frac{\sin z}{\mathrm{Ln}\, z-\mathrm{Ln}\sin z}$.

4. $f(z) = \sqrt[3]{\mathrm{Ln}\, z}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-z\zeta^m}\, \mathrm{ch}\, \zeta\, d\zeta,\ m = 2, 3, \ldots$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg z| < \pi$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{z^2}{\sqrt[3]{7-z}-2}$ распадается в окрестности точки $z_0 = -1$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = f(z) = \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \frac{\pi}{4}$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt{z\,(1+z)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\, 0]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(1) > 0,\ -1 < x < 0$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L z \operatorname{Im} e^z\, dz$, $L : \{\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{6},\ -2 \le \operatorname{Re} z \le 2\}$, начальная точка $z_0 = 2 + \frac{\pi}{6}i$.

11. $\int\limits_{|z|=0.3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}\, dz.$

12. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{17-8\cos\varphi}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

14. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{1+x^2}\, dx.$

15. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ $0 < \alpha < 3.$

16. $\int\limits_{0}^{1} \ln\frac{1-x}{x}\, \frac{dx}{1+x^2}.$

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cdot\cos 2x}{x^2}\, dx.$

18. $\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{(z^2+1)\, dz}{\operatorname{Ln} z+3\pi i}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \operatorname{ch} t \sin 3t \cos 5t\, \eta(t).$

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}.$

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0.$

Вариант 17

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z=0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}-n$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^4-16}\cos\frac{1}{z}$.

3. $f(z)=\frac{\sqrt{\sin z}}{\operatorname{tg}\sqrt{z}\,(e^z-1)}$.

4. $f(z)=\operatorname{Ln}\sin z$.

5. Доказать, что функцию $f(z)=\int\limits_0^\infty \frac{\cos\zeta}{1+\zeta^2}e^{-z\zeta}\,d\zeta$ можно аналитически продолжить на область $D:\ z\notin\{\operatorname{Re}z\le 0,\ |\operatorname{Im}z|\le 1\}$.

6. Доказать, что функция $f(z)=\frac{\sqrt[4]{(1-z)(1+z)^3}}{1+z^3}$ распадается в окрестности точки $z_0=\infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ с центром в точке $z_0=0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z)=(z^2+6z)\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z)=\sqrt{1+z^2}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-i,\,i]$ и разложить ветвь, заданную условием $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\,dz$, $L:\{|\operatorname{Im} z|\le 1,\ \operatorname{Re} z=\frac{\pi}{4}\}$, начальная точка $z_0=\frac{\pi}{4}-i$.

11. $\int\limits_{|z-3|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-3}-\frac{2\cos\frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz$.

12. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos x}{5-4\sin x}\,dx$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 2x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

15. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$.

16. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\ \ln x}{1+x^2}\,dx\ |\alpha|<1$.

17. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$.

18. $\int\limits_{|z|=3/2}\frac{(z+1)\,dz}{\operatorname{Ln}(z+2)-2\pi i}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t)=\operatorname{ch} t\sin 3t\cos 5t\,\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p)=\frac{pe^{-2p}}{p^2+16}+\frac{e^{-3p}}{p^2-2p+5}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''-4x=\sin\frac{3}{2}t\sin\frac{t}{2}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1,\ x'(0)=0$.

Вариант 18

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z=0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n\sin\pi n}{n^2+1}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z-z}{(1-\cos z)^2}$.

3. $f(z)=\frac{\sqrt{\operatorname{Ln}(z-1)}\operatorname{sh}\pi z}{z^4-1}$.

4. $f(z)=\operatorname{Arccos} z$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)(1+e^{z\zeta})}$ можно аналитически продолжить на область $D: \ |\arg z| < \pi$

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{\sqrt[3]{(1+z)(1-z^2)}}{2-z}$ распадается в окрестности точки $z_0 = \infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z^2 \sin \frac{z+5}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt{(z-9)(z-1)}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[1,\, 9]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(0) = 3$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z\, e^{z^2} dz$, AB - отрезок прямой, соединяющей точки $z_A = 0,\ z_B = 1 - i$.

11. $\int\limits_{|z-5|=2} \left(z \operatorname{sh} \frac{1}{z-5} + \frac{4 \sin \frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)} \right) dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{13 + 12 \cos \varphi}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+5)}{x^4+7x^2+12}\, dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\, dx.$

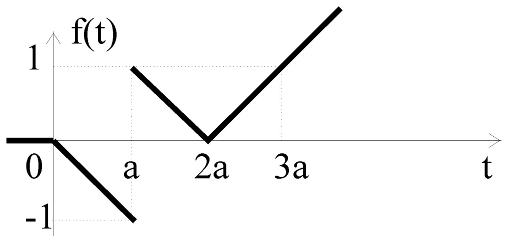
15. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x\,(1-x)^3}}{(x+1)^3}\, dx.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x \, dx}{(x^2+1)^2}.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx.$

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|} \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b}\, dz.$

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению
$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x''' + x = \frac{1}{2}e^t t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Вариант 19

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию
$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{\sin \pi n}}{n^2+1}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{\sin 3z^2}{z\,(z^3+1)}\, e^{\frac{1}{z}}$.

3. $f(z) = \frac{\sqrt{\cos z}\, e^{-z}}{\sqrt{z-\frac{\pi}{2}}\,(e^z-i)}$.

4. $f(z) = \operatorname{Arcsin} z$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\zeta^2} d\zeta}{1+e^{z\zeta}}$ можно аналитически продолжить на область $D:\ |\arg z| < \frac{3\pi}{4}$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{e^{z+1}-1}{(z^2-1)(\sqrt{5-z^2}+2)}$ распадается в окрестности точки $z_0 = -1$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{1}{z\,(z-2)^2}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = z^2\, e^{\frac{z}{z-4}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 4$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt[4]{(1-z)(1+z)^3}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\, 1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0,\ -1 < x < 1$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} e^z\, dz$, AB - прямолинейный отрезок $z_A = -1+\frac{\pi}{4}i$, $z_B = 1+\frac{\pi}{4}i$.

11. $\int\limits_{|z-1|=2} \left(ze^{\frac{2}{z-1}} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)} \right) dx.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{10-6\cos\varphi}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+5x^2+4}\, dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\, dx.$

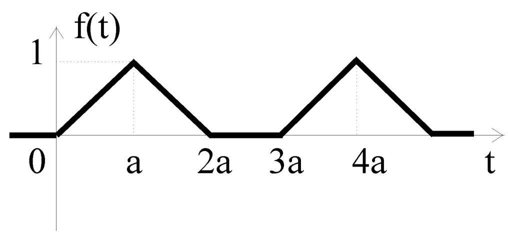
15. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p\, dx}{(1+x)^2} \quad -1 < p < 2.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\, dx.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx.$

18. $\int\limits_{|z|=|a|+|b|} z\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\, \operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}\, dz.$

19. Найти изображение по Лапласу функции



20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{4}}}{p(p+3)(p^2+16)}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = t\cos 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 20

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{n+(-1)^n}$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{4z-\sin 4z}{z^2(z^2+1)}$.

3. $f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z}\,\sqrt[4]{e^z-1}}\sin z$.

4. $f(z) = \sqrt{z(e^z-1)}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z\zeta}}{(1+\zeta^2)\operatorname{ch}\zeta}\,d\zeta$ можно аналитически продолжить на область $D:\ z \notin [-\infty, -1],\, z \notin [1, +\infty])$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \frac{e^z - \sin z - 1}{(6\pi i - \operatorname{Ln}(z+1)))\,z^2}$ распадается в окрестности точки $z_0 = 0$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z\,(z+3)}{(z+2)(z+4)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z+\frac{\pi}{4}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -\frac{\pi}{4}$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \sqrt{\frac{z^4(1-z)}{1+z}}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,\, 1]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(x+i0) > 0,\ 0 < x < 1$, в

ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_{AB} |z| \operatorname{Im} z \, dz$, AB - прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A = -1 - i$, $z_B = 1 + i$.

11. $\int\limits_{|z+7i|=2} \left(\frac{\pi z}{e^{\frac{\pi z}{7}} + i} - \frac{8 \operatorname{ch} \frac{\pi z i}{z-7i}}{(z-1+7i)(z-3+7i)} \right) dz.$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4\cos\varphi}.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+10x^2+9} \, dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2} \, dx.$

15. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} \, dx.$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \ln x \, dx}{1+x^3}.$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3 \, (x^2+a^2)} \, dx, \ a > 0.$

18. $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{\pi + \operatorname{Arctg} z}.$

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = |\cos t| \, \eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Вариант 21

1. Найти функцию комплексного переменного $f(z)$, регулярную в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую условию $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = n\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$, или доказать, что ее не существует.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

2. $f(z) = \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}.$

3. $f(z) = \operatorname{Arctg} z$.

4. $f(z) = \frac{z\,(z^4-1)\,e^{1/z}}{\sqrt{z \sin z}}$.

5. Доказать, что функцию $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia\zeta^2}}{\operatorname{ch}\zeta} e^{-z\zeta}\,d\zeta,\ a > 0$ можно аналитически продолжить на область
$D:\ z \notin \{\operatorname{Re} z \geq 1,\, \operatorname{Im} z \geq 0\},\ z \notin \{\operatorname{Re} z \leq -1,\, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

6. Доказать, что функция $f(z) = \sqrt{(z-1)(z-2)}\,e^{\frac{1}{z^2}}$ распадается в окрестности точки $z_0 = \infty$ на регулярные ветви и найти вычет в точке z_0 каждой регулярной в некоторой окрестности указанной точки ветви функции.

7. Рассмотреть все кольца регулярности функции $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ с центром в точке $z_0 = 0$ и записать в них разложение в ряд Лорана.

8. Разложить функцию $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$ и указать область сходимости полученного ряда.

9. Убедиться, что функция $f(z) = \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$ допускает выделение регулярных ветвей в плоскости с разрезом по отрезку $[-i; i]$ и разложить ветвь, заданную условием $f(1) = \frac{\pi i}{2}$, в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -1$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вычислить интегралы (в смысле главного значения там, где это необходимо).

10. $\int\limits_L z\, \operatorname{Re}(\sin z)\,dz,\ L\ :\ \{|\operatorname{Re} z| \leq 1,\, \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}\}$.

11. $\int\limits_{|z|=2} \left(z\, \sin\frac{z}{z+1} - \frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{z^{10}-2} \right) dz$.

12. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos 3x}{x^2-2x+5}\,dx$.

15. $\int\limits_0^{1} \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^3}\,dx\ \ -1 < \alpha < 2$.

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \ln x\, dx}{(x^2+1)^2}$.

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x\, dx}{x^3(x^2+a^2)}\ a > 0$.

18. $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+\sqrt{1-z^2}}$.

19. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = \arccos(\cos t)\,\eta(t)$.

20. Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\,e^{-p}$.

21. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = 2\cos t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.** *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, М., ФИЗМАТЛИТ, **2002**.

2. **Евграфов М.А, Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.** *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, М., Наука, **1972**.

3. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.** *Лекции по теории функций комплексного переменного*, М., Наука, **1989**.

4. **Евграфов М.А.** *Аналитические функции*, М., Наука, **1991**.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Составители
Тимур Владиславович **Медведев**
Наталья Алексеевна **Сизова**