КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

В данном разделе рассматриваются колебательные и волновые процессы в различных системах, независимо от природы движения в этих системах. Т.е. в один раздел объединяются колебательные и волновые процессы, как в механических, так и в электромагнитных системах. Целесообразность такого объединения обусловлена тем, что волновые и колебательные процессы независимо от их природы подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются совершенно одинаковыми уравнениями и характеризуются одинаковыми параметрами.

Колебания.

Среди разнообразных видов движения, существующих в природе, встречаются движения, повторяющиеся или почти повторяющиеся через равные или почти равные промежутки времени. Такие движения называются колебаниями, или колебательными движениями.

Строго повторяющиеся через равные промежутки времени колебательные движения называются периодическими колебаниями. Именно о них главным образом будет идти речь в дальнейшем.

Колебательные системы. Гармонические колебания.

Совершать колебания может в принципе любая система. Если, например, дергать дверь за ручку то туда, то обратно, то дверь будет совершать колебания под действием внешней вынуждающей силы. Но если перестать дергать, то колебания двери немедленно прекратятся.

С другой стороны, если раскачивать качели, то и они будут совершать колебания под действием внешней силы. Но если перестать раскачивать качели, то они все равно будут совершать колебания уже самостоятельно, без внешней силы.

Таким образом, каждая система может совершать колебания, но не каждая система может совершать самостоятельные колебания.

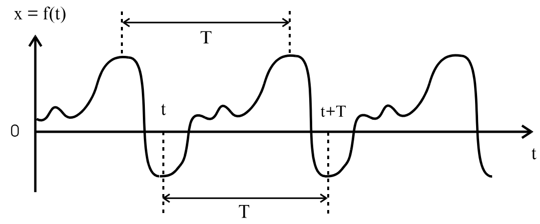
Система, способная совершать колебания в отсутствие внешней периодической силы, называется колебательной системой. Колебания в отсутствие внешней силы называются свободными. Колебания под действием внешней силы называются вынужденными.

Вынужденные колебания может совершать любая система, свободные колебания - только колебательная система.

Дальнейшее рассмотрение будет относиться только к колебательным системам.

Наименьший промежуток времени, через который характеристики движения повторяются, называется периодом. Обозначается чаще всего буквой Т.

Зависимость характеристик движения (координаты, скорость, сила и т.д.) от времени в течение периода может быть произвольной. Требуется только повторяемость через период, т.е. периодичность движения.



Строгая формулировка периодичности:

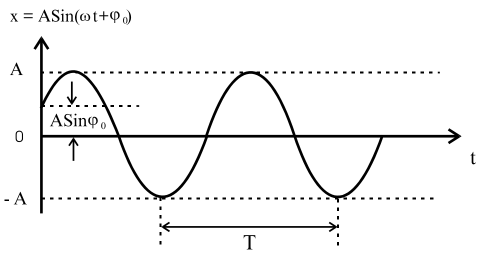
$$f(t) = f(t+T).$$

Здесь $x = f(t)$ - произвольная, но периодическая функция времени. Произвольная - означает в данном случае, что зависимость от времени в течение одного периода произвольна.

Наиболее простая периодическая функция времени - это синусоида:

$$x(t) = A \cdot Sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_0\right) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Колебания, совершающиеся по синусоидальному закону, называются гармоническими колебаниями.



Параметры гармонического колебания:

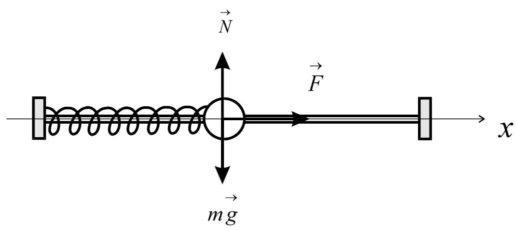
Т - период, А - амплитуда (максимальное отклонение от положения равновесия), $\omega \cdot t + \varphi_0$ - фаза, φ_0 - начальная фаза, $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ - круговая частота (рад/с).

Колебательные системы, в которых возможны гармонические колебания, называются гармоническими осцилляторами.

Рассмотрим некоторые конкретные колебательные системы.

1. Пружинный маятник.

Пусть шарик массой m надет на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить без трения. К шарику прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно.



При отклонении шарика в любую сторону от положения, соответствующего недеформированной пружине, появляется сила, возвращающая его обратно. Это характерная особенность любой колебательной системы - при отклонении от равновесия появляется сила, возвращающая систему в состояние равновесия.

Расставим все силы, действующие на шарик. Со стороны гравитационного поля земли действует сила $m\vec{g}$, направленная вниз, со стороны опоры (стержня) действует сила нормального давления $\vec{N}$, направленная вверх, со стороны пружины - сила упругой деформации пружины $\vec{F}$, направленная горизонтально. Трение по условию задачи отсутствует.

Запишем второй закон Ньютона для шарика:

$$m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\,.$$

Выбираем горизонтальную ось x, направленную вдоль стержня. Начало координат совмещаем с положением шарика при недеформированной пружине, т.е. с положением равновесия. Проектируем уравнение, представляющее собой второй закон Ньютона, на ось x и получаем:

$$m\cdot a_x = F\,.$$

Здесь $a_x = \ddot{x}$ - проекция ускорения на ось x, вторая производная от координаты x по времени, что и означают две точки над x.

Сила упругой деформации со стороны пружины определяется на основании закона Гука:

$$F = -k\cdot x\,,$$

где k - коэффициент жесткости пружины.

В результате получаем:

$$m\cdot\ddot{x} = -k\cdot x \qquad \text{или} \qquad m\cdot\ddot{x} + k\cdot x = 0.$$

Разделим обе части последнего равенства на m:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\cdot x = 0.$$

Введем обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

и окончательно получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\cdot x = 0.$$

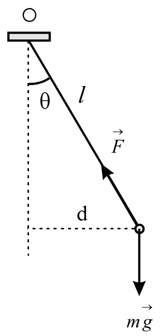
Это и есть уравнение, описывающее движение пружинного маятника.

Аналогичное уравнение получится и в случае, когда шарик свободно висит на пружине. Вывод уравнения будет несколько усложнен второстепенными деталями, но вид уравнения будет таким же (только уже для вертикальной координаты).

2. Математический маятник.

Математический маятник - это материальная точка массой m, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити (стержне) длиной l.

На эту материальную точку действуют две силы - сила $m\vec{g}$ со стороны гравитационного поля земли, направленная вниз, и сила натяжения нити $\vec{F}$, направленная вдоль нити.



Материальная точка движется по дуге окружности радиуса l, поэтому можно записать для нее основное уравнение динамики движения по окружности:

$$J\cdot\varepsilon = -M_{mg} + M_F.$$

Здесь $J = m\cdot l^2$ - момент инерции материальной точки относительно оси вращения (т.е. точки подвеса O), ε - угловое ускорение материальной точки,

M_{mg} и M_F - моменты сил $\vec{mg}$ и $\vec{F}$ соответственно относительно оси O. Момент M_{mg} взят со знаком минус, что обусловлено тем, что сила $\vec{mg}$ сообщает ускорение, противоположное направлению отклонения.

Величины моментов равны:

$M_{mg} = mg \cdot d = mg \cdot l \cdot Sin\theta$, где θ - угол отклонения от равновесия,

$M_F = 0$, т.к. линия действия силы $\vec{F}$ проходит через ось O (плечо силы $\vec{F}$ равно нулю).

В результате получаем:

$$m \cdot l^2 \cdot \varepsilon = -m \cdot g \cdot l \cdot Sin\theta .$$

Сокращаем массу и длину:

$$l \cdot \varepsilon = -g \cdot Sin\theta .$$

Делим обе части равенства на l и учитываем, что угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\theta}$ (вторая производная по времени от угла). В результате получаем:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot Sin\theta .$$

Предполагаем теперь, что углы отклонения малы, что позволяет воспользоваться равенством:

$$Sin\theta = \theta .$$

Тогда получим:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot \theta \quad \text{или} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0 .$$

Вводим обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

и окончательно получаем:

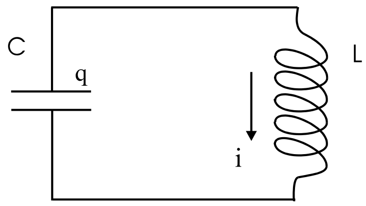
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0 .$$

Это выражение представляет собой уравнение, описывающее движение математического маятника.

3. Колебательный контур.

Колебательный контур - это замкнутый контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности.

Электрическим сопротивлением проводов катушки и соединительных проводов пренебрегаем.



Верхняя обкладка конденсатора и верхний конец катушки имеют одинаковый потенциал, т.к. соединены эквипотенциальным проводником. Аналогично нижняя обкладка конденсатора и нижний конец катушки имеют одинаковый потенциал. Поэтому разности потенциалов между обкладками конденсатора и концами катушки одинаковы:

$$U_C = U_L .$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора определяется через заряд q на обкладках и емкость конденсатора C:

$$U_C = \frac{q}{C} .$$

Разность потенциалов на концах катушки равна ЭДС самоиндукции катушки:

$$U_L = -L \cdot \frac{di}{dt} .$$

Здесь L - индуктивность катушки, i - ток в катушке (и во всем контуре).

Приравниваем правые части двух последних выражений:

$$\frac{q}{C} = -L \cdot \frac{di}{dt} .$$

По определению ток $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$. Следовательно, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q}$.

Подставляем это и получаем:

$$\frac{q}{C} = -L \cdot \ddot{q} \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = 0 .$$

Вводим обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

и окончательно получаем:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0 .$$

Это уравнение, которому подчиняется движение заряда в колебательном контуре.

Если теперь сравнить уравнения пружинного и математического маятников и уравнение колебательного контура, то можно заметить, что с точностью до обозначений эти уравнения совершенно одинаковы, хотя описываемые ими объекты различны.

Следовательно, при изучении колебательных процессов можно отвлечься от конкретной природы этих процессов и рассматривать их свойства с помощью единого уравнения. Полученные выводы будут в равной степени справедливы для любой системы, описываемой этим уравнением.

Итак, уравнение, описывающее все три рассмотренные конкретные колебательные системы, имеет вид:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 \cdot s = 0.$$

Это уравнение описывает не только рассмотренные колебательные системы, но и любой гармонический осциллятор. Это уравнение гармонических колебаний. Его решение:

$$s = A \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \quad \text{(или косинус).}$$

Вывод решения здесь приводить не будем. Справедливость этого решения легко проверяется подстановкой. Действительно:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = A \cdot \omega_0 \cdot Cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$ - скорость изменения величины s,

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A \cdot \omega_0^2 \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$ - ускорение величины s.

Подставляя выражения для s и $\ddot{s}$ в уравнение гармонических колебаний, получим тождество.

Период колебаний во всех случаях выражается через круговую частоту ω_0 :

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}.$$

Для рассмотренных трех конкретных колебательных систем из этого выражения получаем:

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega_0}=\begin{cases} 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} & \text{пруж. маятник} \quad \left(\omega_0^2=\dfrac{k}{m}\right) \\ 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}} & \text{матем. маятник} \quad \left(\omega_0^2=\dfrac{g}{l}\right) \\ 2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C} & \text{кол. контур} \quad \left(\omega_0^2=\dfrac{1}{L\cdot C}\right) \end{cases}$$

Последнее выражение ($T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}$) называется формулой Томсона для периода колебательного контура.

Амплитуда А и начальная фаза φ_0 гармонических колебаний не зависят от свойств гармонического осциллятора. Это следует из того, что решение уравнения гармонического осциллятора справедливо при любых значениях амплитуды А и начальной фазы φ_0. Эти величины определяются величиной начального отклонения и начальной скорости - начальными условиями колебаний.

Энергия гармонического колебания.

С помощью общего уравнения гармонических колебаний путем несложных формальных математических преобразований можно вывести одно из основных свойств любого гармонического осциллятора.

$$\ddot{s} + \omega_0^2\cdot s = 0.$$

Умножим обе части этого уравнения на $\dot{s}$:

$$\dot{s}\cdot\ddot{s} + \omega_0^2\cdot\dot{s}\cdot s = 0.$$

Из этого уравнения получается:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{s}^2}{2} + \omega_0^2\cdot\frac{s^2}{2}\right) = 0.$$

Действительно, выполнив дифференцирование в последнем уравнении, получим предыдущее.

Равенство нулю производной по времени от некоторой величины означает, что сама величина не меняется со временем:

$$\frac{\dot{s}^2}{2} + \omega_0^2\cdot\frac{s^2}{2} = const.$$

Это выражение представляет собой закон сохранения энергии для гармонического осциллятора.

Например, для пружинного маятника:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{m}\cdot\frac{x^2}{2} = const,$$

т.е.

$$\frac{m\cdot\dot{x}^2}{2} + \frac{k\cdot x^2}{2} = const \qquad \text{или} \qquad W_K + W_П = const$$

Для колебательного контура:

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{L\cdot C}\cdot\frac{q^2}{2} = const.$$

Умножаем обе части равенства на L, учитываем, что $\dot{q} = i$ (ток) и получаем:

$$\frac{L\cdot i^2}{2} + \frac{q^2}{2\cdot C} = const \qquad \text{или} \qquad W_М + W_{ЭЛ} = const.$$

Таким образом, полная энергия гармонического осциллятора сохраняется.

Меняться может только каждый из видов энергии в отдельности. Например, для пружинного маятника кинетическая энергия движения груза переходит в потенциальную энергию пружины и обратно. В колебательном контуре энергия магнитного поля катушки переходит в энергию электрического поля конденсатора и обратно.

Сумма обоих видов энергии гармонического осциллятора остается неизменной.

Для любого гармонического осциллятора в этом можно убедиться непосредственно. Например, для пружинного маятника:

$$x = A\cdot Sin(\omega_0\cdot t + \varphi_0), \qquad \dot{x} = A\cdot\omega_0\cdot Cos(\omega_0\cdot t + \varphi_0).$$

$$W_П = \frac{k\cdot x^2}{2} = \frac{k}{2}\cdot A^2\cdot Sin^2(\omega_0\cdot t + \varphi_0)$$

$$W_K = \frac{m\cdot\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot A^2\cdot\omega_0^2\cdot Cos^2(\omega_0\cdot t + \varphi_0)$$

Складываем потенциальную и кинетическую энергии:

$$W_П + W_K = \frac{A^2}{2}\cdot\left[k\cdot Sin^2(\omega_0\cdot t + \varphi_0) + m\cdot\omega_0^2\cdot Cos^2(\omega_0\cdot t + \varphi_0)\right].$$

Учитываем, что $m \cdot \omega_0^2 = k$, подставляем это во второе слагаемое в квадратных скобках, выносим за скобки k и получаем:

$$W_П + W_К = \frac{A^2 \cdot k}{2} \cdot \left[Sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + Cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \right].$$

Сумма квадратов синуса и косинуса равна единице, следовательно, полная энергия пружинного маятника:

$$W_П + W_К = \frac{k \cdot A^2}{2} = const.$$

Аналогично можно непосредственно убедиться в том, что полная энергия любого гармонического осциллятора постоянна.

Сложение колебаний, происходящих вдоль одной прямой. Векторные диаграммы.

Пусть некоторая система участвует одновременно в двух колебательных процессах, происходящих с одинаковой частотой вдоль одной прямой. Тогда согласно принципу суперпозиции результирующее движение определяется как сумма его составляющих:

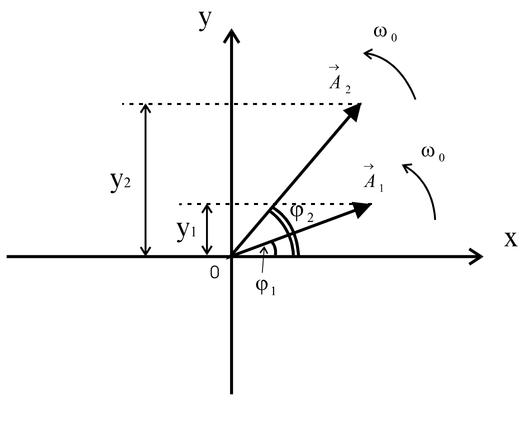
$$s = s_1 + s_2.$$

Здесь s_1 и s_2 - два гармонических колебания:

$$s_1 = A_1 \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{01}), \qquad s_2 = A_2 \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{02})$$

Гармонические колебания вдоль одной прямой с одинаковыми частотами удобно складывать с помощью векторных диаграмм.

Предположим, что радиус-вектор длиной A_1 равномерно вращается с угловой скоростью ω_0.



Проекция этого вектора на ось у в этом случае совершает гармонические колебания с частотой ω_0. Действительно:

$$y_1 = A_1 \cdot Sin\varphi_1 \ .$$

При равномерном вращении $\varphi_1 = \omega_0 \cdot t + \varphi_{01}$, следовательно:

$$y_1 = A_1 \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{01}) = s_1 \ ,$$

т.е. изменение проекции y_1 происходит по тому же закону, что и s_1.

Аналогично можно записать для вектора $\vec{A}_2$:

$$y_2 = A_2 \cdot Sin\varphi_2 = A_2 \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_{02}) = s_2 \ .$$

Следовательно:

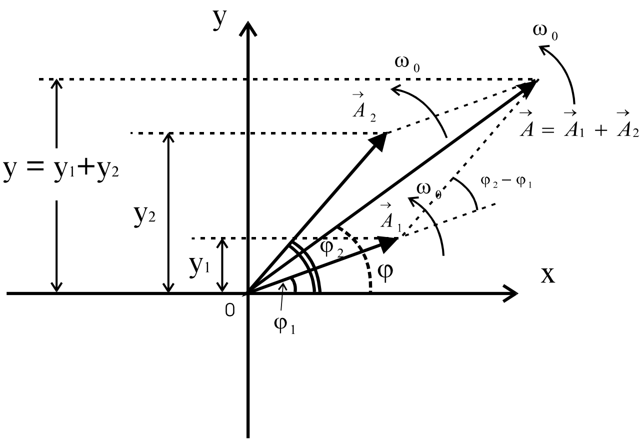
$$s_1 + s_2 = y_1 + y_2 \ ,$$

причем колебания y_1 и y_2 происходят вдоль одной прямой - оси у.

Сумма $y_1 + y_2$ представляет собой проекцию суммарного вектора $\vec{A}_1 + \vec{A}_2$ на ось у:

$$y_1 + y_2 = \left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)_y \ .$$

Таким образом, для определения результирующего колебания необходимо найти вектор, равный векторной сумме векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Построим этот вектор с помощью правила параллелограмма:



Векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0, поэтому угол между ними не меняется. Следовательно, суммарный вектор

$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ также вращается с той же угловой скоростью ω_0, оставаясь постоянным по величине (весь параллелограмм вращается как одно целое с угловой скоростью ω_0). Это означает, что суммарное колебание также является гармоническим с той же частотой, что и его составляющие. Амплитуда этого колебания равна длине суммарного вектора А, фаза равна углу наклона φ этого вектора к оси х.

Длину суммарного вектора А выразим через длины составляющих векторов A_1 , A_2 и угол между ними $\varphi_2 - \varphi_1$ с помощью теоремы косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot Cos(\varphi_2 - \varphi_1) .$$

Углы наклона первого и второго векторов равны:

$$\varphi_1 = \omega_0 \cdot t + \varphi_{01} , \qquad \varphi_2 = \omega_0 \cdot t + \varphi_{02} .$$

Следовательно:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

и

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) .$$

Фазу результирующего колебания φ найдем из соотношений, выражающих то обстоятельство, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых:

$$y = y_1 + y_2 , \qquad x = x_1 + x_2$$

или:

$$A \cdot Sin\varphi = A_1 \cdot Sin\varphi_1 + A_2 \cdot Sin\varphi_2$$

$$A \cdot Cos\varphi = A_1 \cdot Cos\varphi_1 + A_2 \cdot Cos\varphi_2 .$$

Делим первое из этих уравнений на второе и получаем:

$$tg\varphi = \frac{A_1 \cdot Sin\varphi_1 + A_2 \cdot Sin\varphi_2}{A_1 \cdot Cos\varphi_1 + A_2 \cdot Cos\varphi_2}$$

В частности, для начальной фазы φ_0 (при t = 0):

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \cdot Sin\varphi_{01} + A_2 \cdot Sin\varphi_{02}}{A_1 \cdot Cos\varphi_{01} + A_2 \cdot Cos\varphi_{02}} .$$

Таким образом, в результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой, получается вновь гармоническое колебание той же частоты:

$$s = s_1 + s_2 = A \cdot Sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0).$$

Амплитуда А и начальная фаза φ_0 выражаются через амплитуды A_1, A_2 и начальные фазы φ_{01} и φ_{02} с помощью приведенных выше формул и существенно зависят от соотношения начальных фаз складываемых колебаний.

В частности, если $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ (такие колебания называются синфазными), то

$$A = A_1 + A_2 , \quad \text{т.к.} \quad Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 1 .$$

На векторной диаграмме этому случаю соответствует направление складываемых векторов вдоль одной линии в одну сторону.

При синфазных колебаниях амплитуда суммарного колебания максимальна.

Если при этом амплитуды складывающихся колебаний равны ($A_1 = A_2$), то

$$A = 2 \cdot A_1 .$$

Второй частный случай получается, если начальные фазы отличаются на $\pm \pi$.

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \pi .$$

Такие колебания называются противофазными.

В этом случае получаем:

$$A = |A_1 - A_2| , \quad \text{т.к.} \quad Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = -1 .$$

На векторной диаграмме этому случаю соответствует направление складываемых векторов вдоль одной линии в противоположные стороны.

Амплитуда суммарного колебания в этом случае минимальна. Если при этом амплитуды складываемых колебаний равны, то суммарная амплитуда равна нулю:

$A_1 = A_2 \rightarrow A = 0$ - полное взаимное гашение противофазных колебаний.

Наконец, третий частный случай, когда начальные фазы колебаний отличаются на $\pm \frac{\pi}{2}$:

$\varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \frac{\pi}{2}$ - колебания в квадратуре.

В этом случае получаем:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad , \qquad \text{т.к.} \quad Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0 .$$

На векторной диаграмме в этом случае складываемые вектора располагаются взаимно перпендикулярно.

Последовательно складывая много гармонических колебаний одинаковой частоты, в результате всегда будем получать опять гармоническое колебание той же частоты.

Но если частоты двух складываемых гармонических колебаний не равны, то результирующее колебание уже не будет гармоническим.

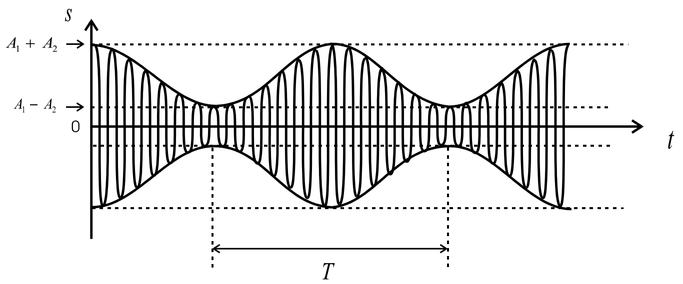
Рассмотрим один из таких случаев.

Биения.

Биениями называется колебательный процесс, получающийся при сложении двух гармонических колебаний, происходящих вдоль одной прямой с почти одинаковыми частотами. Математически близость частот формулируется таким образом:

$$\left| \frac{\omega_{01} - \omega_{02}}{\omega_{01}} \right| << 1 .$$

Результирующее колебание в этом случае имеет такой характерный вид:



Колебания происходят с частотой $\omega_0 \approx \omega_{01} \approx \omega_{02}$, но амплитуда этих колебаний периодически меняется от минимальной, равной разности амплитуд складывающихся колебаний $|A_1 - A_2|$ до максимальной, равной сумме амплитуд $A_1 + A_2$:

$$|A_1 - A_2| \le A \le A_1 + A_2 .$$

Если $A_1 = A_2$ (амплитуды складывающихся колебаний равны), то в некоторые моменты времени суммарная амплитуда уменьшается до нуля:

$$0 \le A \le 2 \cdot A_1 \ , \qquad \text{если} \quad A_1 = A_2 .$$

Частота изменения амплитуды, т.е. частота биений, равна разности частот складываемых колебаний:

$$\Omega = |\omega_{01} - \omega_{02}|,$$

а период биений определяется этой частотой:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega}.$$

Биения происходят из-за того, что разность фаз двух складывающихся колебаний непрерывно меняется из-за различия частот. На векторной диаграмме это изображалось бы двумя векторами, вращающимися с разными угловыми скоростями и поэтому непрерывно меняющими свое взаимное расположение (как стрелки часов).

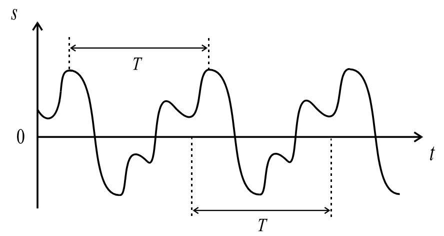
Когда разность фаз близка к нулю (векторы направлены в одну сторону), колебания усиливаются, когда разность фаз близка к π (векторы направлены в противоположные стороны), колебания ослабляют друг друга или даже полностью гасят друг друга (при равенстве амплитуд).

Теорема Фурье.

Простейшим периодическим колебанием является гармоническое колебание.

В общем случае периодическое колебание не обязательно является гармоническим, синусоидальным. Зависимость от времени может быть сложной, не синусоидальной. Требуется только повторяемость через равные промежутки времени - периодичность:

$$s(t) = s(t + T) \quad \text{для любого } t.$$



Теорема Фурье: Любое периодическое колебание с периодом T можно представить как суперпозицию гармонических колебаний с частотами, кратными частоте $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + A_1 \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot Sin(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_2) + \cdots + A_n \cdot Sin(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_n) + \cdots,$$ или:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot Sin(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_n)$$ - ряд Фурье.

Слагаемые, соответствующие частотам ω, 2ω, 3ω и т.д., называются 1-й, 2-й, 3-й и т.д. гармониками колебания.

1-я (основная) гармоника определяется периодом колебаний:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются следующим образом (без вывода):

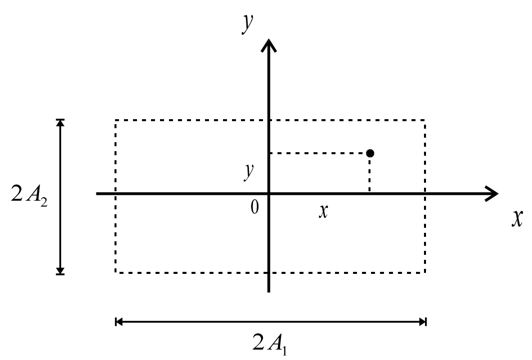
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \varphi_n = arctg \frac{a_n}{b_n}.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot Cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot Sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

Предположим, что материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях x и y.



$$x = A_1 \cdot Sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01}),$$

$$y = A_2 \cdot Sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02}).$$

Траектория движения материальной точки, получающаяся в результате сложения этих двух колебаний, не выходит за пределы прямоугольника со сторонами $2A_1$ и $2A_2$. Вид этой траектории в произвольном случае очень сложен.

Если отношение частот складываемых колебаний равно отношению целых чисел, то траектории, вычерчиваемые материальной точкой в результате сложения таких колебаний, являются замкнутыми и называются фигурами Лиссажу.

Если $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$, n, m - целые числа (1, 2, 3, . . .),

то траектории - фигуры Лиссажу.

Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на экране осциллографа, если на горизонтально отклоняющие пластины подать синусоидальное напряжение одной частоты, а на вертикально отклоняющие пластины - другой частоты.

Наиболее удобны для наблюдения фигуры Лиссажу, получающиеся при условии, что n и m - малые и близкие друг другу числа, т.е. для отношений

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}.$$

В противном случае получается слишком мелкий узор - почти равномерная засветка всего прямоугольника.

Фигур Лиссажу существует бесконечное множество. Рассмотрим подробнее только один вариант - простейший, когда частоты обоих колебаний равны:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

Пусть движение материальной точки по взаимно перпендикулярным осям x и y описывается уравнениями:

$$x = A_1 \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_{01}),$$

$$y = A_2 \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_{02}).$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения траектории движения материальной точки, заданные в параметрическом виде. Параметром является время t.

Чтобы определить вид траектории, необходимо получить явную зависимость, связывающую x и y, исключив из уравнений параметр t.

Это можно сделать в данном случае с помощью несложных алгебраических и тригонометрических преобразований.

Разделим первое уравнение на A_1, второе - на A_2, после чего правые части раскроем по формуле синуса суммы:

1

2

$$\frac{x}{A_1} = Sin\omega t \cdot Cos\,\varphi_{01} + Cos\omega t \cdot Sin\,\varphi_{01}\,, \qquad \Big|\ \cdot Sin\varphi_{02} \qquad \cdot Cos\varphi_{02}$$

--

$$\frac{y}{A_2} = Sin\omega t \cdot Cos\varphi_{02} + Cos\omega t \cdot Sin\varphi_{02} \qquad \Big|\ \cdot Sin\varphi_{01} \qquad \cdot Cos\varphi_{01}$$

Теперь с этими уравнениями выполним две последовательности действий.

Последовательность 1 - умножим первое уравнение на $Sin\varphi_{02}$, второе - на $Sin\varphi_{01}$, после чего вычтем из первого второе. В результате получим:

$$\frac{x}{A_1}\cdot Sin\varphi_{02} - \frac{y}{A_2}\cdot Sin\varphi_{01} = Sin\omega t\cdot(Sin\varphi_{02}\cdot Cos\varphi_{01} - Cos\varphi_{02}\cdot Sin\varphi_{01}) =$$

$$= Sin\omega t\cdot Sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Последовательность 2 - умножим первое уравнение на $Cos\varphi_{02}$, второе - на $Cos\varphi_{01}$, после чего вычтем из первого второе. В результате получим:

$$\frac{x}{A_1}\cdot Cos\varphi_{02} - \frac{y}{A_2}\cdot Cos\varphi_{01} = Cos\omega t\cdot(Sin\varphi_{01}\cdot Cos\varphi_{02} - Cos\varphi_{01}\cdot Sin\varphi_{02}) =$$

$$= Cos\omega t\cdot Sin(\varphi_{01} - \varphi_{02}).$$

В этих выражениях использовалась формула синуса разности.

Оба получившихся уравнения возводим в квадрат, после чего складываем друг с другом:

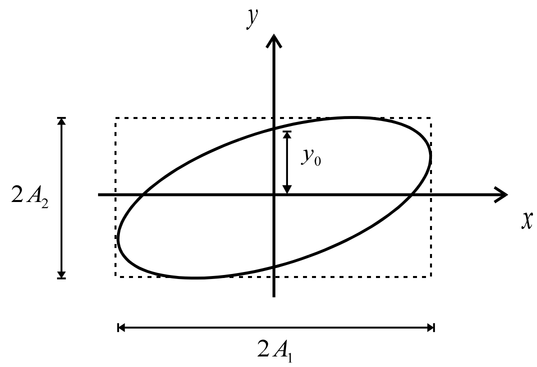
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\cdot\frac{x}{A_1}\cdot\frac{y}{A_2}\cdot(Sin\varphi_{01}\cdot Sin\varphi_{02} + Cos\varphi_{01}\cdot Cos\varphi_{02}) =$$

$$= Sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01})\cdot(Sin^2\omega t + Cos^2\omega t).$$

Сумма квадратов синуса и косинуса в правой части равна единице, а выражение в скобках в левой части представляет собой косинус разности двух аргументов. В результате окончательно получаем:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \cdot \frac{x}{A_1} \cdot \frac{y}{A_2} \cdot Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = Sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Это уравнение эллипса с произвольной ориентацией главных осей.



Таким образом, фигура Лиссажу при равенстве частот складываемых взаимно перпендикулярных колебаний представляет собой эллипс.

Ориентация и вид эллипса (степень его сжатости) зависят от разности фаз складываемых колебаний. Разность фаз можно определить экспериментально как величину, синус которой равен отношению координаты пересечения вертикальной оси к вертикальной полуоси эллипса. Действительно, из формулы эллипса получаем для координаты y_0 при $x = 0$:

$$\frac{y_0^2}{A_2^2} = Sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Отсюда:

$$\frac{y_0}{A_2} = \pm Sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Окончательно:

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm \arcsin\frac{y_0}{A_2} .$$

Разные знаки соответствуют разным направлениям движения точки по эллипсу.

Рассмотрим вид эллипса в некоторых частных случаях.

1. Разность фаз равна нулю – синфазные колебания.

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0.$$

В этом случае $Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 1$, $Sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0$ и из уравнения эллипса получаем:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \cdot \frac{x}{A_1} \cdot \frac{y}{A_2} = 0.$$

Это выражение представляет собой полный квадрат разности:

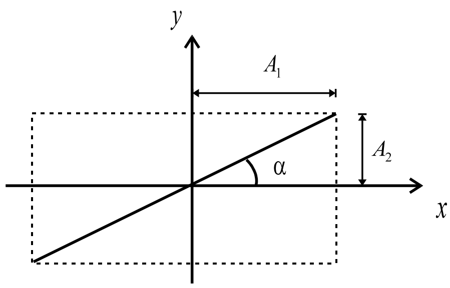
$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x$$

Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат под острым углом к оси x. Тангенс этого угла равен отношению полуосей эллипса.

$$tg\,\alpha = \frac{A_2}{A_1} > 0.$$



2. Разность фаз равна $\pm\pi$ - противофазные колебания.

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm\pi.$$

В этом случае Cos $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = -1$, $\mathrm{Sin}(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0$ и уравнение эллипса приобретает следующий вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + 2 \cdot \frac{x}{A_1} \cdot \frac{y}{A_2} = 0.$$

Это полный квадрат суммы:

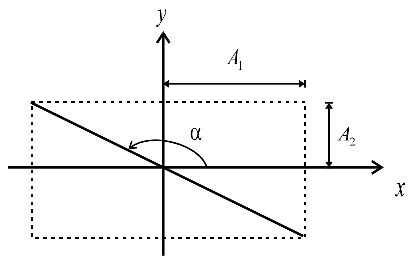
$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x$$

Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат под тупым углом к оси x. Тангенс угла наклона равен отношению полуосей эллипса со знаком минус.

$$tg\,\alpha = -\frac{A_2}{A_1} < 0.$$



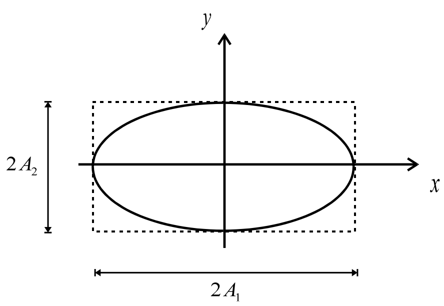
3. Разность фаз колебаний равна $\pm\frac{\pi}{2}$.

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

В этом случае $Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0,\quad Sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 1$ и уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, главные оси которого совпадают с координатными осями.



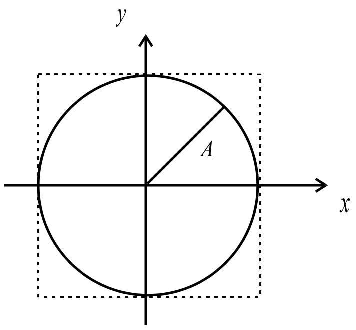
4. Разность фаз колебаний равна $\pm\frac{\pi}{2}$ и к тому же еще и амплитуды складываемых колебаний одинаковы:

$$A_1 = A_2 = A.$$

В этом случае из предыдущего уравнения получаем:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом A.



Затухающие колебания.

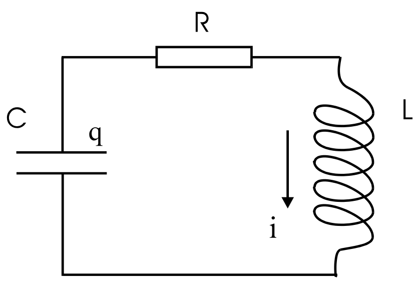
Синусоида, описывающая гармонические колебания, является решением уравнения гармонического осциллятора:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 \cdot s = 0.$$

Это уравнение получено без учета трения для механических систем и без учета сопротивления для колебательного контура. Получающиеся при этом колебания являются незатухающими, существуют бесконечно долго. Полная энергия этих колебаний сохраняется.

В реальных системах свободные колебания всегда затухают рано или поздно, т.е. свободные колебания не являются строго гармоническими. Наличие трения или сопротивления меняет характер колебаний, следовательно, исходное уравнение колебаний должно быть также другим.

Выведем уравнение, описывающее колебательный контур, но с учетом сопротивления. Даже если сопротивление не включено в контур в явном виде, оно всегда там присутствует в виде сопротивления проводов катушки и соединительных проводов. Все эти сопротивления объединим в одном - сопротивлении R. Тогда схема колебательного контура, включающего в себя конденсатор C, катушку индуктивности L и сопротивление R, будет выглядеть таким образом:



Применяем к этому замкнутому контуру 2-е правило Кирхгофа и получаем:

$$u_C + u_R = \mathcal{E} .$$

Здесь $u_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $u_R = i \cdot R$ - напряжение на сопротивлении, $\mathcal{E}$ - ЭДС источника тока в контуре. В данном случае это ЭДС самоиндукции катушки:

$$\mathcal{E} = -L \cdot \frac{d\,i}{d\,t} .$$

Подставляем это все и получаем:

$$\frac{q}{C} + i \cdot R = -L \cdot \frac{d\,i}{d\,t} .$$

Учитываем, что ток - это скорость изменения заряда:

$$i = \frac{d\,q}{d\,t} , \text{ тогда } \frac{d\,i}{d\,t} = \frac{d^2 q}{d\,t^2} .$$

Подставляем это и переносим все в левую часть равенства:

$$L \cdot \frac{d^2 q}{d\,t^2} + R \cdot \frac{d\,q}{d\,t} + \frac{q}{C} = 0 .$$

Разделим это уравнение на L:

$$\frac{d^2 q}{d\,t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{d\,q}{d\,t} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = 0 .$$

Введем обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} , \qquad 2 \cdot \delta = \frac{R}{L} .$$

С учетом этих обозначений, а также применяя точку для обозначения производной по времени, окончательно получим:

$$\ddot{q} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0 .$$

Это и есть уравнение, описывающее свободные колебания в колебательном контуре с учетом сопротивления в нем.

Предположим теперь, что в горизонтальном пружинном маятнике есть трение, причем сила трения пропорциональна скорости движения.

$$F_{\text{тр}} = -h \cdot \dot{x} .$$

Здесь h - коэффициент пропорциональности, знак минус показывает, что сила трения направлена против скорости.

Тогда 2-й закон Ньютона для такого маятника должен быть записан в проекции на горизонтальное направление x таким образом:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - h \cdot \dot{x} .$$

Первое слагаемое справа - сила упругой деформации со стороны пружины, второе слагаемое - сила трения.

Переносим все в левую часть равенства и делим на m:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\cdot\dot{x} + \frac{k}{m}\cdot x = 0 \ .$$

Вводим обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \ , \qquad 2\cdot\delta = \frac{h}{m}$$

и получаем окончательно:

$$\ddot{x} + 2\cdot\delta\cdot\dot{x} + \omega_0^2\cdot x = 0 \ .$$

Это уравнение, описывающее свободные колебания пружинного маятника с учетом трения.

Аналогичное уравнение можно получить и для математического маятника, если предположить наличие силы трения, пропорциональной угловой скорости.

Таким образом, получается единое для всех колебательных систем уравнение, описывающее свободные колебания с учетом трения или сопротивления:

$$\ddot{s} + 2\cdot\delta\cdot\dot{s} + \omega_0^2\cdot s = 0 \ .$$

Это уравнение отличается от уравнения гармонических колебаний наличием дополнительного слагаемого, пропорционального скорости $\dot{s}$.

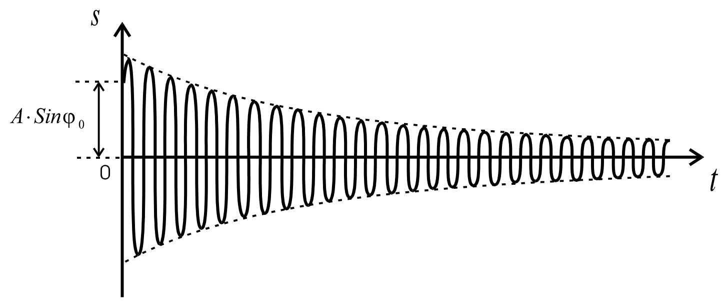
Решение этого уравнения для случая $\omega_0 > \delta$ имеет вид (без вывода):

$$s(t) = A\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot Sin(\omega\cdot t + \varphi_0) \ .$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, а величины A и φ_0 - произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Правильность этого решения легко проверяется непосредственной подстановкой.

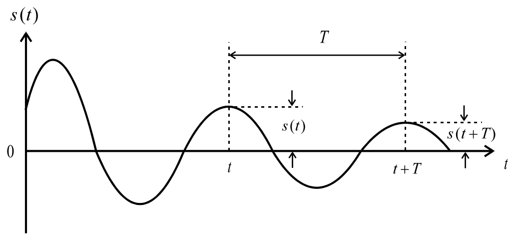
Функция $s(t)$ уже не является гармонической, она не является даже строго периодической и имеет следующий характерный вид:



Это затухающие колебания. Их можно представить как синусоидальные колебания, амплитуда которых убывает со временем по экспоненциальному закону. Величина δ называется коэффициентом затухания.

Хотя эти колебания не являются, строго говоря, периодическими, их можно характеризовать периодом T:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$ - интервал времени между двумя ближайшими максимумами.



Запишем для двух различных моментов времени, отличающихся на величину T, соответствующие значения переменной s:

$$s(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$s(t + T) = A \cdot e^{-\delta \cdot t - \delta \cdot T} \cdot Sin[\omega \cdot (t + T) + \varphi_0] .$$

Разделим второе из этих выражений на первое:

$$\frac{s(t + T)}{s(t)} = \frac{A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot T} Sin[\omega \cdot (t + T) + \varphi_0]}{A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi_0)} .$$

Здесь учтено, что $e^{-\delta \cdot t - \delta \cdot T} = e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot T}$.

Так как T есть период синуса, то оба синуса в числителе и знаменателе одинаковы и их можно сократить. Можно сократить и $A \cdot e^{-\delta \cdot t}$. В результате получаем:

$$\frac{s(t + T)}{s(t)} = e^{-\delta \cdot T}$$ - затухание за один период.

Безразмерная величина $d = \delta \cdot T$ называется логарифмическим декрементом затухания, или просто декрементом. Логарифмическим потому, что эта величина выражается через логарифм отношения величин s :

$$d = -\ln \frac{s(t + T)}{s(t)} .$$

Безразмерная величина $Q = \frac{\pi}{d}$ называется добротностью колебательной системы. Чем меньше логарифмический декремент затухания, тем больше добротность, тем медленнее затухают колебания.

Например, для колебательного контура с малым затуханием (т.е. для $\delta \ll \omega_0$):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$ - круговая частота колебаний ,

$$d = \delta \cdot T \approx \delta \cdot T_0 = \delta \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \pi \cdot \frac{R}{\omega_0 \cdot L} = \pi \cdot R \cdot \omega_0 \cdot C$$ - логарифмический декремент затухания,

$$Q = \frac{\pi}{d} \approx \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{R \cdot \omega_0 \cdot C} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$ - добротность колебательного контура.

В этих выражениях C, L и R - емкость конденсатора, индуктивность катушки и сопротивление контура. Чем больше индуктивность и чем меньше емкость и сопротивление, тем больше добротность контура.

Таким образом, свободные колебания реальных колебательных систем всегда являются затухающими. Амплитуда колебаний и вместе с ней полная энергия колебательной системы со временем убывают до нуля.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Вынужденные колебания - это колебания под действием внешней вынуждающей силы.

Наиболее простым для теоретического рассмотрения является случай, когда на колебательную систему действует внешняя сила, меняющаяся со временем по синусоидальному закону - гармоническое внешнее воздействие:

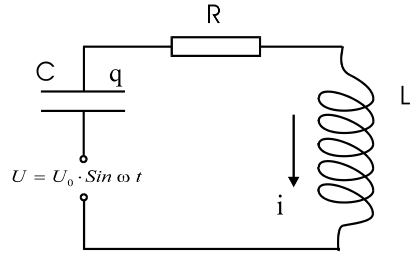
$$f(t) = F_0 \cdot Sin\, \omega \cdot t \ .$$

В этом случае уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$\ddot{s} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{s} + \omega_0^2 \cdot s = F_0 \cdot Sin\, \omega t \ .$$

Например, для колебательного контура это уравнение получается в том случае, если предположить, что в контур включен внешний источник тока с синусоидальной ЭДС U:

$$U = U_0 \cdot Sin\,\omega t \ .$$



Применяя 2-е правило Кирхгофа к этому замкнутому контуру, получим:

$$u_C + u_R = U + \mathcal{E} \ .$$

Здесь $u_C = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе,

$u_R = i \cdot R$ - напряжение на сопротивлении R,

$\mathcal{E} = -L \cdot \dfrac{d\,i}{d\,t}$ - ЭДС самоиндукции катушки индуктивности.

Подставляем это и получаем:

$$\frac{q}{C} + i \cdot R = U_0 \cdot Sin\,\omega t - L \cdot \frac{d\,i}{d\,t} \ .$$

Учитываем, что $i = \dot{q}$, а $\dfrac{d\,i}{d\,t} = \ddot{q}$, переносим второе слагаемое из правой части уравнения в левую с противоположным знаком и делим все уравнение на L:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \cdot \dot{q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q = \frac{U_0}{L} \cdot Sin\,\omega t \ .$$

Вводим обозначения:

$$2 \cdot \delta = \frac{R}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}, \qquad F_0 = \frac{U_0}{L}$$

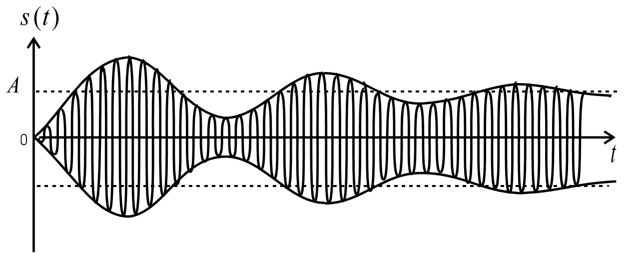
и окончательно получаем:

$$\ddot{q} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = F_0 \cdot Sin\,\omega t \ .$$

Аналогичным образом можно получить уравнения для механических колебательных систем, если добавить в уравнения движения (2-й закон Ньютона) внешнюю гармоническую силу.

В произвольном случае решение уравнения вынужденных колебаний имеет достаточно сложный характер. С момента начала действия внешней силы происходит некоторый переходный процесс, или процесс установления, который длится тем дольше, чем больше добротность колебательной системы, т.е. чем меньше затухание в ней. После окончания переходного процесса устанавливаются стационарные колебания, т.е. колебания с постоянной амплитудой.

Если первоначально система находилась в состоянии покоя, то процесс установления вынужденных колебаний может иметь примерно такой вид (при условии, что $\omega \neq \omega_0$):



Здесь А - амплитуда стационарных колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний в течение переходного процесса сама совершает затухающие колебания, постепенно устанавливаясь равной стационарному значению.

Переходный процесс обусловлен тем, что начальный толчок, обусловленный началом действия вынуждающей силы, приводит к появлению в системе собственных свободных колебаний, которые, складываясь с вынужденными колебаниями, дают в начальный период сложное результирующее колебание. Стационарные вынужденные колебания устанавливаются после затухания собственных колебаний.

Таким образом, переходный процесс - это процесс затухания собственных свободных колебаний системы. Затухание собственных колебаний тем дольше, чем больше добротность системы.

В дальнейшем будем рассматривать только стационарные, установившиеся колебания.

Запишем без вывода результаты, относящиеся к стационарным вынужденным колебаниям.

1. Стационарные вынужденные колебания представляют собой незатухающие гармонические колебания с частотой вынуждающей силы:

$$s(t) = A \cdot Sin(\omega t + \varphi).$$

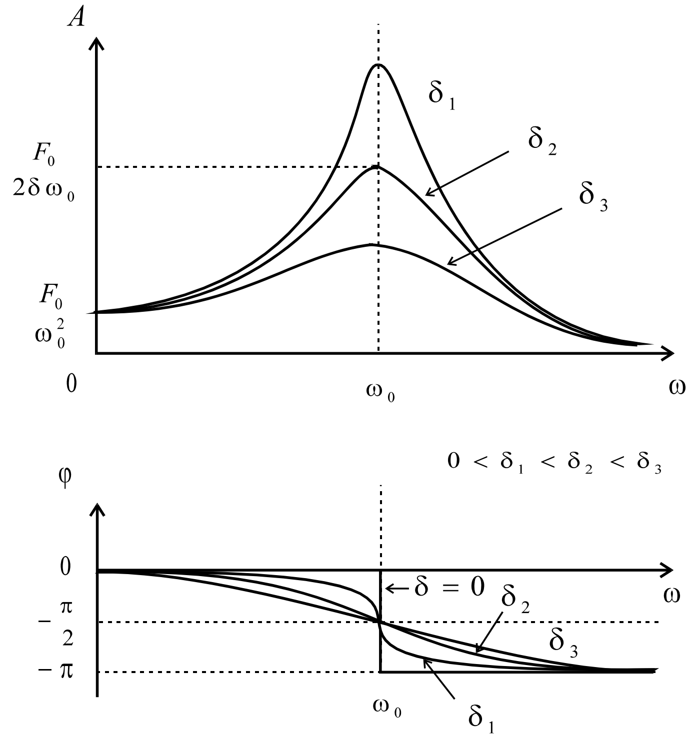
2. Амплитуда вынужденных стационарных колебаний определяется главным образом частотой вынуждающей силы:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \cdot$$

3. Фаза вынужденных колебаний относительно фазы вынуждающей силы также определяется частотой внешней силы:

$$tg\,\varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\ .$$

Зависимости амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты внешней силы имеют следующий характерный вид:



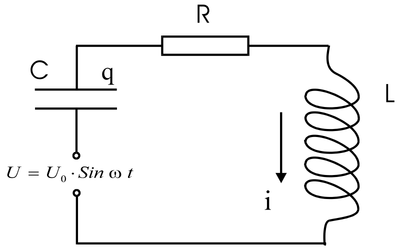
Чем меньше коэффициент затухания δ, тем выше график зависимости амплитуды от частоты и тем круче зависимость фазы от частоты вблизи собственной частоты системы ω_0. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы. Максимумы графиков зависимости амплитуды от частоты приходятся на частоту, несколько меньшую, чем ω_0, но это отличие практически незначительно и можно считать, что максимумы соответствуют частоте ω_0.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы ω к собственной частоте системы ω_0 называется резонансом.

Представленные здесь зависимости называются резонансными кривыми. Эти кривые отображают свойства любой колебательной системы, независимо от природы колебательного процесса.

Более подробно свойства вынужденных колебаний рассмотрим на примере конкретной колебательной системы - колебательного контура.

Вынужденные электромагнитные колебания.



В этом случае уравнение вынужденных колебаний имеет вид ($s = q$):

$$\ddot{q} + 2\cdot\delta\cdot\dot{q} + \omega_0^2\cdot q = F_0\cdot Sin\,\omega t\ .$$

Здесь

$$2\cdot\delta = \frac{R}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{L\cdot C}, \qquad F_0 = \frac{U_0}{L}\ .$$

Воспользовавшись общим видом решения для стационарных колебаний, получим:

$q = A\cdot Sin(\omega t + \varphi) = q_0\cdot Sin(\omega t + \varphi)$ - закон изменения заряда конденсатора,

$A = q_0 = \dfrac{U_0}{L\cdot\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$ - амплитуда заряда на конденсаторе.

$i = \dot{q} = q_0\cdot\omega\cdot Cos(\omega t + \varphi) = i_0\cdot Cos(\omega t + \varphi)$ - закон изменения тока в контуре,

$i_0 = \omega\cdot q_0 = \dfrac{\omega\cdot U_0}{L\cdot\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$ - амплитуда тока в контуре.

Подставим сюда $\omega_0^2 = \dfrac{1}{L\cdot C}$ и $4\cdot\delta^2 = \dfrac{R^2}{L^2}$:

$$i_0 = \frac{\omega\cdot U_0}{L\cdot\sqrt{\left(\dfrac{1}{L\cdot C} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\cdot\dfrac{R^2}{L^2}}}\ .$$

Внесем в знаменателе L под корень, затем разделим числитель и знаменатель на ω и получим:

$$i_0 = \frac{\omega\cdot U_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{C} - L\cdot\omega^2\right)^2 + \omega^2\cdot R^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}\ .$$

Обозначим:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} \ .$$

Эта величина называется импедансом колебательного контура. Импеданс - это сопротивление переменному току.

Окончательно получаем:

$$i_0 = \frac{U_0}{Z}$$ - закон Ома для переменного тока.

Закон Ома для переменного тока выражает соотношение между амплитудами тока и напряжения, а не между их мгновенными значениями.

Таким образом, общее решение для стационарных вынужденных колебаний произвольной колебательной системы, примененное к колебательному контуру, позволило получить выражения для закона изменения заряда на конденсаторе контура и тока в контуре, а также вывести закон Ома для переменного тока в контуре и формулу для импеданса колебательного контура.

Понятие “импеданс” применимо не только к колебательному контуру, но и к его отдельным элементам - сопротивлению, конденсатору, катушке индуктивности, а также к любой цепи из этих элементов.

Импеданс активного сопротивления, емкости и индуктивности. Импеданс последовательной цепи из этих элементов.

Пусть в некотором участке цепи заряд, проходящий по этому участку, меняется по закону:

$$q = q_0 \cdot Sin(\omega t + \varphi).$$

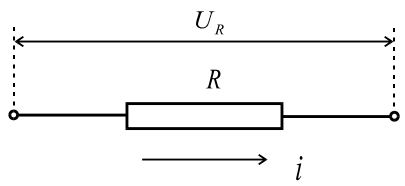
Тогда ток в этом участке цепи :

$$i = \dot{q} = \omega \cdot q_0 \cdot Cos(\omega t + \varphi) = i_0 \cdot Cos(\omega t + \varphi).$$

В этих выражениях q_0 и $i_0 = \omega \cdot q_0$ - амплитуды заряда и тока.

Рассмотрим по отдельности в качестве участков цепи активное сопротивление R, емкость C, индуктивность L.

1. Активное сопротивление R.



Для мгновенных значений тока i через активное сопротивление R и напряжения U_R на нем можно записать такое же соотношение, как и для постоянных значений (закон Ома):

$$U_R = i \cdot R = i_0 \cdot R \cdot Cos(\omega t + \varphi) = U_{R0} \cdot Cos(\omega t + \varphi) \ .$$

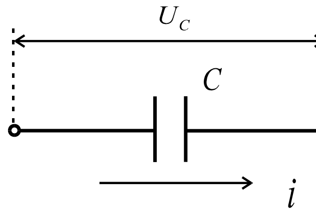
Здесь $U_{R0} = i_0 \cdot R$ - амплитуда переменного напряжения на сопротивлении.

Отсюда следует, что импеданс активного сопротивления, равный отношению амплитуд напряжения и тока, равен самому сопротивлению:

$$Z_R = \frac{U_{R0}}{i_0} = R \ .$$

Ток через сопротивление меняется по закону косинуса и напряжение на сопротивлении меняется по закону косинуса, следовательно, ток через активное сопротивление и напряжение на нем колеблются в одинаковой фазе.

2. Емкость С.



Для мгновенных значений напряжения на конденсаторе U_C и заряда на его обкладках q можно записать такое же соотношение, как и для постоянных значений:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot Sin(\omega t + \varphi) = U_{C0} \cdot Sin(\omega t + \varphi) \ .$$

Здесь $U_{C0} = \frac{q_0}{C}$ - амплитуда переменного напряжения на конденсаторе.

Учитываем, что $q_0 = \frac{i_0}{\omega}$ и получаем:

$$U_{C0} = \frac{i_0}{\omega C} \ .$$

Отсюда определяем импеданс емкости, как отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока:

$$Z_C = \frac{U_{C0}}{i_0} = \frac{1}{\omega C} \ .$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$ - импеданс емкости.

Мгновенное значение переменного тока через емкость меняется по закону косинуса:

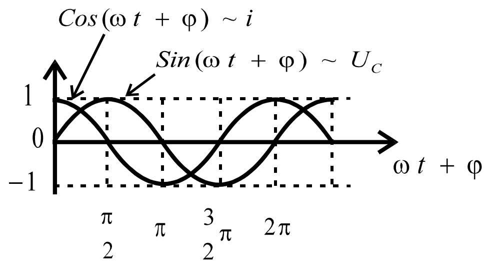
$$i = i_0 \cdot Cos(\omega t + \varphi) \ ,$$

а мгновенное значение напряжения на емкости меняется по закону синуса:

$$U_C = U_{C0} \cdot Sin(\omega t + \varphi) \ ,$$

следовательно, ток и напряжение конденсатора сдвинуты относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$, т.е. на четверть периода колебаний.

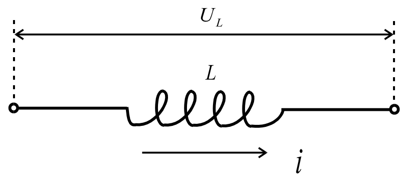
Синус отстает от косинуса на четверть периода. Это можно увидеть из их графиков:



Действительно, косинус достигает своего максимума при нулевом значении аргумента, а синус - спустя четверть периода, спустя $\frac{\pi}{2}$ по фазе, т.е. синус отстает от косинуса на $\frac{\pi}{2}$, следовательно:

напряжение на конденсаторе отстает от тока через конденсатор на $\frac{\pi}{2}$, или на четверть периода колебаний.

3. Индуктивность L.



Запишем закон Ома для мгновенных значений напряжения для участка цепи, содержащего идеальный источник (без внутреннего сопротивления):

$$U_L = - \mathcal{E} \ .$$

Здесь ЭДС $\mathcal{E}$ - это ЭДС самоиндукции катушки:

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{d\,i}{d\,t}.$$

Таким образом:

$$U_L = L \cdot \frac{d\,i}{d\,t}.$$

Ток зависит от времени по закону:

$$i = i_0 \cdot Cos(\omega t + \varphi),$$

следовательно:

$$\frac{d\,i}{d\,t} = -i_0 \cdot \omega \cdot Sin(\omega t + \varphi).$$

В результате получаем:

$$U_L = -i_0 \cdot \omega L \cdot Sin(\omega t + \varphi) = -U_{L0} \cdot Sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь $U_{L0} = i_0 \cdot \omega L$ - амплитуда напряжения на индуктивности.

Отсюда определяем импеданс индуктивности, как отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока:

$$Z_L = \frac{U_{L0}}{i_0} = \omega L.$$

$Z_L = \omega L$ - импеданс индуктивности.

Мгновенное значение переменного тока через индуктивность меняется по закону косинуса:

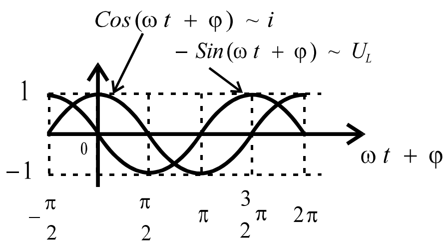
$$i = i_0 \cdot Cos(\omega t + \varphi),$$

а мгновенное значение напряжения на индуктивности меняется по закону синуса со знаком минус:

$$U_L = -U_{L0} \cdot Sin(\omega t + \varphi),$$

следовательно, ток и напряжение индуктивности сдвинуты относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$, т.е. на четверть периода колебаний.

Косинус отстает от синуса со знаком минус на четверть периода. Это можно увидеть из их графиков:



Действительно, косинус достигает максимума при нулевом значении своего аргумента, а синус со знаком минус - на четверть периода раньше, при $-\frac{\pi}{2}$, т.е. косинус отстает от синуса со знаком минус на $\frac{\pi}{2}$, следовательно:

ток через индуктивность отстает от напряжения на индуктивности по фазе на $\frac{\pi}{2}$, или на четверть периода колебаний.

В итоге получаем для трех рассмотренных элементов цепи переменного тока:

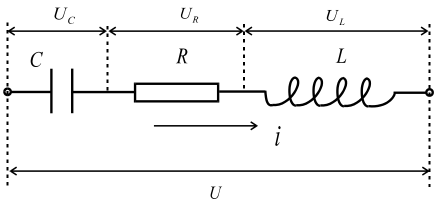
1. Сопротивление R. Импеданс $Z_R = R$, ток и напряжение в одинаковой фазе.
2. Емкость C. Импеданс $Z_C = \frac{1}{\omega C}$, напряжение отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$.
3. Индуктивность L. Импеданс $Z_L = \omega L$, ток отстает от напряжения на $\frac{\pi}{2}$.

Из этих выражений следует, что импеданс активного (еще говорят - омического) сопротивления не зависит от частоты переменного тока, импеданс емкости уменьшается с увеличением частоты, импеданс индуктивности увеличивается с увеличением частоты.

Таким образом, одна и та же емкость представляет собой большое сопротивление переменному току малой частоты и малое сопротивление току большой частоты. Индуктивность представляет собой малое сопротивление переменному току малой частоты и большое сопротивление току большой частоты.

Зная импедансы сопротивления, емкости и индуктивности, а также соответствующие фазовые сдвиги между током и напряжением, можно определить импеданс любой цепи из этих элементов с помощью метода векторных диаграмм.

Определим для примера импеданс цепи, состоящей из всех трех этих элементов, включенных последовательно друг другу. Эта цепь приведена на рисунке и представляет собой последовательный колебательный контур с подключенным к нему внешним источником тока, рассматривавшийся раньше, только несколько иначе изображенный (в развернутом виде):



Так как все три элемента цепи соединены последовательно, то мгновенное напряжение U на всей цепи из этих элементов равно сумме мгновенных напряжений на каждом из них:

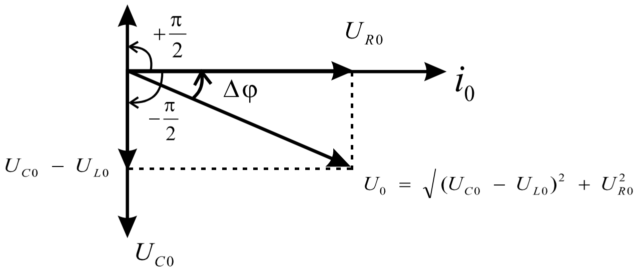
$$U = U_C + U_R + U_L \ .$$

Каждое из этих трех напряжений зависит от времени по синусоидальному закону, т.е. представляет собой гармоническое колебание. Таким образом, требуется сложить три гармонических колебания, происходящих вдоль одного направления. В результате снова получится гармоническое колебание, представляющее собой синусоидальную зависимость суммарного напряжения U от времени. Такое сложение может быть выполнено с помощью метода векторных диаграмм. Для этого следует сложить три вектора, изображающих три гармонических колебания, т.е. три напряжения.

Предполагаем, что каждое из гармонических колебаний представляется вектором, вращающимся с угловой скоростью ω. Длина вектора равна амплитуде соответствующего колебания. Углы между векторами равны разности фаз соответствующих колебаний. Предполагаем, что положительное направление вращения векторов - против часовой стрелки. Это означает, что отставание по фазе означает поворот вектора по часовой стрелке, опережение - против часовой стрелки.

В качестве исходного, опорного вектора возьмем вектор, изображающий колебания тока в цепи. Этот выбор не случаен. Он обусловлен тем, что для последовательной цепи мгновенное значение тока во всех ее элементах одинаково, т.е. фаза тока во всех элементах цепи одинакова. Поэтому удобнее отсчитывать фазы всех остальных колебаний именно относительно фазы тока.

Изображаем колебания тока в цепи вектором, ориентированным в некоторый момент времени горизонтально слева направо. Его длина равна амплитуде тока i_0 .



Напряжение на сопротивлении R в фазе с током в этом сопротивлении, следовательно, вектор, представляющий колебания напряжения на сопротивлении, направлен в ту же сторону, что и вектор тока. Длина этого вектора равна амплитуде U_{R0} .

Напряжение на конденсаторе отстает от тока конденсатора на $\frac{\pi}{2}$, поэтому это напряжение изображается вектором, повернутым относительно вектора тока по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{2}$. Длина этого вектора равна амплитуде U_{C0} .

Напряжение на индуктивности опережает ток индуктивности на $\frac{\pi}{2}$, поэтому это напряжение изображается вектором, повернутым относительно вектора тока против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$. Длина этого вектора равна амплитуде U_{L0} .

Теперь осталось сложить все три вектора, изображающих колебания напряжений на сопротивлении, емкости и индуктивности. Сначала сложим два вектора, изображающих колебания напряжений на емкости и индуктивности. Эти два вектора направлены по одной линии в противоположные стороны, длина вектора, изображающего их векторную сумму, равна разности длин этих двух векторов $U_{C0} - U_{L0}$.

Затем в соответствии с теоремой Пифагора находим длину вектора, представляющего сумму этого суммарного вектора и вектора, изображающего колебания напряжения на сопротивлении:

$$U_0 = \sqrt{(U_{C0} - U_{L0})^2 + U_{R0}^2} \,.$$

Это и есть длина вектора, изображающего векторную сумму трех складываемых векторов, это и есть амплитуда суммарного напряжения на всей цепи из трех элементов.

Учитывая, что $U_{R0} = i_0 \cdot R$, $U_{C0} = i_0 \cdot \frac{1}{\omega C}$, $U_{L0} = i_0 \cdot \omega L$,

получим:

$$U_0 = i_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} \,.$$

Определяем импеданс всей цепи, как отношение амплитуды напряжения на этой цепи к амплитуде тока в ней:

$$Z = \frac{U_0}{i_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} \,.$$

Угол $\Delta\varphi$, изображающий разность фаз между током в цепи и суммарным напряжением на ней (фаза тока относительно напряжения), определяется, как это видно из рисунка, по формуле:

$$tg\Delta\varphi = \frac{U_{C0} - U_{L0}}{U_{R0}} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} .$$

Результаты, полученные с помощью метода векторных диаграмм для импеданса последовательного колебательного контура и для фазового соотношения тока в контуре и напряжения внешнего источника, полностью совпадают с соответствующими результатами, полученными из общего решения для стационарных вынужденных колебаний.

При резонансе $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$, $Z = R$, $\Delta\varphi = 0$, т.е. при резонансе импеданс последовательного контура минимален, ток максимален и в одинаковой фазе с напряжением, последовательный колебательный контур при резонансе представляет собой активное сопротивление величиной R.

Если частота ниже резонансной, то $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, импеданс емкости преобладает над импедансом индуктивности (этот случай изображен на рисунке), напряжение на контуре отстает от тока, контур представляет собой емкостное сопротивление.

Если частота выше резонансной, то $\frac{1}{\omega C} < \omega L$, импеданс индуктивности преобладает над импедансом емкости, ток в контуре отстает от напряжения на нем, контур представляет собой индуктивное сопротивление.

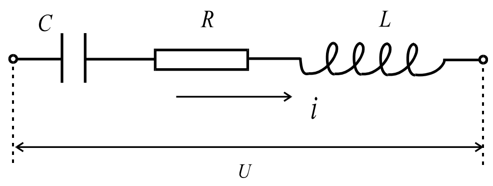
Мощность в цепи переменного тока. Эффективные значения тока и напряжения.

Пусть к цепи, состоящей из последовательно включенных емкости, сопротивления и индуктивности, приложено напряжение, зависящее от времени по синусоидальному закону:

$$U = U_0 \cdot Sin\omega t .$$

Тогда ток в этой цепи также будет синусоидальным:

$$i = i_0 \cdot Sin(\omega t + \Delta\varphi) .$$



Разность фаз $\Delta\varphi$ между током и напряжением определяется величинами емкости и индуктивности и частотой тока ω .

Для мгновенных значений тока и напряжения в соответствии с общим определением мощности тока можно записать:

$$N_t = i \cdot U = i_0 \cdot U_0 \cdot Sin(\omega t + \Delta\varphi) \cdot Sin\omega t .$$

Это мгновенное значение мощности переменного синусоидального тока в произвольный момент времени t.

Умножив эту мощность на малый интервал времени dt, получим работу, совершаемую переменным током за время от t до t + dt:

$$N_t \cdot dt = i \cdot U \cdot dt = i_0 \cdot U_0 \cdot Sin(\omega t + \Delta\varphi) \cdot Sin\omega t \cdot dt .$$

Теперь можно вычислить работу, совершаемую переменным током за один период колебаний. Для этого нужно просуммировать работы за все интервалы времени в течение периода, т.е. вычислить интеграл:

$$A_T = \int_0^T N_t \cdot dt = i_0 \cdot U_0 \cdot \int_0^T Sin(\omega t + \Delta\varphi) \cdot Sin\omega t \cdot dt .$$

Чтобы вычислить этот интеграл, раскроем произведение синусов как половина разности косинусов разности и суммы аргументов:

$$Sin(\omega t + \Delta\varphi) \cdot Sin\omega t = \frac{1}{2} \cdot [Cos(\omega t + \Delta\varphi - \omega t) - Cos(\omega t + \Delta\varphi + \omega t)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [Cos\Delta\varphi - Cos(2\omega t + \Delta\varphi)].$$

Второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой синусоидальную функцию с периодом $\frac{T}{2}$, поэтому интеграл от этой функции за период T (т.е. за удвоенный период этой функции) равен нулю.

Первое слагаемое не зависит от времени, его можно вынести за знак интеграла и в результате получаем:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot i_0 \cdot U_0 \cdot T \cdot Cos\Delta\varphi .$$

Это работа, совершаемая переменным синусоидальным током за один период колебаний T.

Разделив эту работу на период, получим среднюю мощность переменного тока за период, или просто среднюю мощность переменного тока:

$$N = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} i_0 U_0 Cos\Delta\varphi \cdot$$

Из этого выражения следует, что средняя мощность переменного тока зависит не только от амплитуд тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними.

Например, если разность фаз $\Delta\varphi$ равна нулю, то средняя мощность максимальна при прочих равных условиях:

$$N = \frac{1}{2} i_0 U_0 \cdot$$

Такой случай будет, если в цепи нет ни конденсатора, ни индуктивности, т.е. это мощность, выделяемая на чисто активном сопротивлении (емкость и индуктивность называют в противоположность ему реактивными сопротивлениями).

Аналогичный результат может получиться и для последовательной цепи из емкости, сопротивления и индуктивности при резонансе, когда эта цепь представляет собой для переменного тока чисто активное сопротивление.

На чисто активном сопротивлении мощность может выделять и постоянный ток, что позволяет ввести понятия эффективных значений тока и напряжения для переменного тока.

Это сила и напряжение такого постоянного тока, который выделяет на активном сопротивлении такую же мощность, что и переменный ток, т.е. можно записать:

$$i_e U_e = \frac{1}{2} i_0 U_0 \cdot$$

Здесь i_e и U_e - сила и напряжение постоянного тока, выделяющего такую же мощность, что и переменный ток. Эти величины и называются эффективная сила тока и эффективное напряжение переменного тока.

На основании закона Ома $U_0 = i_0 \cdot R$, $U_e = i_e \cdot R$, следовательно:

$$i_e^2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot i_0^2 \cdot R \quad \text{откуда} \quad i_e = \frac{i_0}{\sqrt{2}} ,$$

или

$$\frac{U_e^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R} \quad \text{откуда} \quad U_e = \frac{U_0}{\sqrt{2}} .$$

Эффективные значения тока и напряжения в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем соответствующие амплитудные значения.

Если выразить мощность переменного тока, выделяемую на активном сопротивлении, через эффективные значения тока и напряжения, то получится такое же выражение, как для мощности постоянного тока:

$$N = i_e U_e \ .$$

Предположим теперь, что в цепи нет активного сопротивления, R = 0. В этом случае разность фаз между током и напряжением $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Cos}\,\Delta\varphi = 0$ и мощность, выделяемая переменным током в такой цепи, состоящей только из реактивных сопротивлений, равна нулю:

$$N = 0 \ .$$

В реальных цепях переменного тока обычно реализуется некоторый промежуточный случай между рассмотренными двумя предельными. В цепи переменного тока обычно имеются и активные, и реактивные сопротивления (емкости, индуктивности). Средняя мощность переменного тока пропорциональна косинусу разности фаз между током и напряжением. Чем больше суммарный вклад реактивных элементов цепи, тем больше разность фаз по величине, тем меньше выделяемая мощность.

Волны в упругой среде.

Волна - это распространяющееся в пространстве колебательное движение.

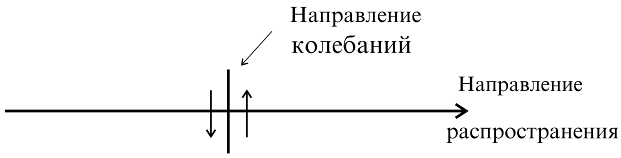
В механических системах распространение колебаний обусловлено силами деформации. Смещение частицы приводит к появлению силы деформации, действующей на соседнюю частицу. Эта сила заставляет смещаться и соседнюю частицу. Это смещение вызывает силу, действующую на более далекую частицу, и заставляет и ее смещаться и т.д.

В результате колебательный процесс, возникший первоначально в одной точке, называемой источником волны, распространяется в пространстве, а это и означает по определению, что в пространстве распространяется, или, как часто говорят, бежит волна.

Упорядоченный перенос вещества при распространении волны не происходит. Каждая частица среды совершает колебания около некоторого положения равновесия. В пространстве перемещается не вещество, а колебательный процесс.

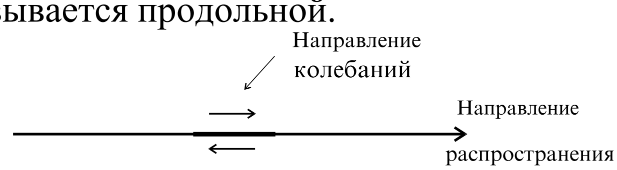
Поперечные и продольные волны.

Если направление колебаний перпендикулярно направлению распространения волны, то волна называется поперечной.



Поперечная волна

Если направление колебаний и направление распространения волны совпадают, то волна называется продольной.



Продольная волна

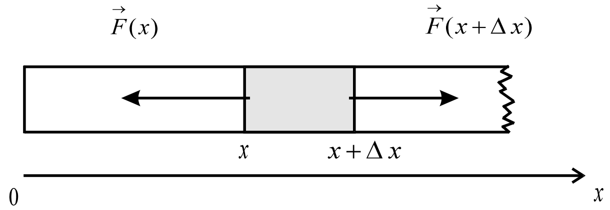
В жидкостях и газах не существует силы деформации сдвига. Поэтому в жидкостях и газах поперечные волны невозможны, могут быть только продольные волны - волны сжатия и разрежения.

В твердых телах любая деформация приводит к появлению силы деформации, поэтому в твердых телах могут быть и продольные, и поперечные волны.

Волновое уравнение.

Основные закономерности волнового процесса в упругой среде рассмотрим на примере продольных волн в длинном упругом жестком стержне.

Изобразим полубесконечный стержень, вдоль которого направим ось x, начало которой совместим с концом стержня.



Обозначим ξ (греческая буква кси) - продольное смещение произвольной точки стержня относительно некоторого среднего положения, соответствующего неподвижному недеформированному стержню.

Смещение ξ обусловлено деформацией, в данном случае деформацией сжатия или растяжения.

Рассмотрим небольшой участок стержня длиной Δx. Со стороны соседних участков стержня на этот участок действуют силы деформации. Слева действует сила $\vec{F}(x)$, справа - сила $\vec{F}(x+\Delta x)$.

Под действием этих сил участок Δx будет смещаться в соответствии со 2-м законом Ньютона, который в проекции на ось x будет иметь вид:

$$m\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F(x+\Delta x) - F(x)\ .$$

Здесь ускорение участка $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ представлено в виде частной производной. Этим подчеркивается то обстоятельство, что эта производная берется для фиксированного значения координаты x.

Масса участка:

$$m = \rho\cdot S\cdot\Delta x\ .$$

Здесь ρ - плотность материала стержня, S - площадь поперечного сечения стержня.

Подставляя это во 2-й закон Ньютона, получим:

$$\rho\cdot S\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F(x+\Delta x) - F(x)\cdot$$

Разделим обе части этого равенства на $S\cdot\Delta x$:

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{S\cdot\Delta x}\ .$$

Сила, приходящаяся на единицу поверхности, называется напряжением или давлением и обозначается греческой буквой σ (сигма):

$\sigma(x) = \frac{F(x)}{S}$ – напряжение при растяжении или давление при сжатии.

Таким образом, можно записать:

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}\ .$$

Переходим к пределу при $\Delta x \to 0$ и получаем:

$$\rho\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\ .$$

Справа записана частная производная по x. Этим подчеркивается то обстоятельство, что эта производная берется при фиксированном значении времени t.

При малых деформациях сила упругой деформации определяется из закона Гука:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon\ .$$

Здесь E - модуль упругости. При одномерной продольной деформации, как в данном случае, эта величина называется модулем Юнга.

$\varepsilon = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ - относительная деформация (ε - греческая буква эпсилен).

Таким образом, получаем:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \qquad \text{или} \qquad \rho \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \ .$$

Разделим обе части последнего равенства на ρ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \ .$$

Введем обозначение:

$\mathrm{v}^2 = \dfrac{E}{\rho}$ и окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \ .$$

Это и есть волновое уравнение. Для различных одномерных волновых процессов в различных средах вывод этого уравнения будет различным, но окончательный формальный вид волнового уравнения будет во всех случаях одинаков (с точностью до обозначений). Более сложным будет вид волнового уравнения для не одномерных волновых процессов, но формальный вид этого уравнения и в этом случае всегда будет одинаковым (здесь не приводится уравнение для не одномерных процессов).

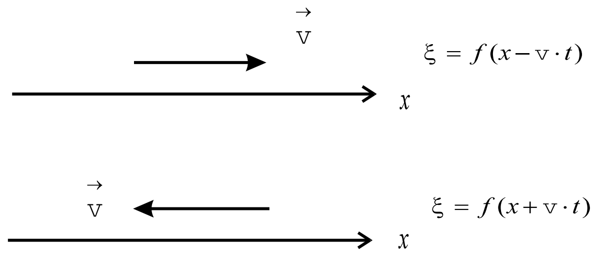
Решением одномерного волнового уравнения является любая функция вида:

$$\xi = f(x \mp \mathrm{v} \cdot t) \ ,$$

а также любая линейная комбинация таких функций (без вывода). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

Решение

$\xi = f(x - \mathrm{v} \cdot t)$ описывает волну, распространяющуюся вдоль x, решение $\xi = f(x + \mathrm{v} \cdot t)$ описывает волну, распространяющуюся в обратном направлении.

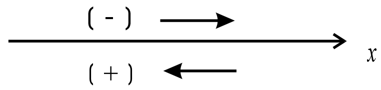


$v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ - скорость волны, т.е. скорость распространения колебательного процесса. Ее не следует путать со скоростью колебаний частиц среды $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$. Для каждого конкретного волнового процесса выражение для скорости волны будет своим.

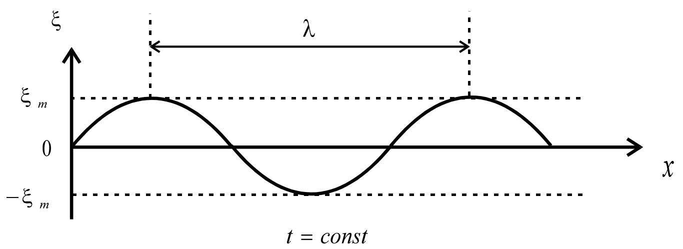
Из всех возможных решений будем в дальнейшем рассматривать только синусоидальные волны, для которых смещение зависит от координаты x и времени t по закону синуса:

$$\xi = \xi_m \cdot Sin\,\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right) .$$

Это уравнение синусоидальной бегущей волны (не следует путать с волновым уравнением). Знак минус соответствует волне вдоль x, плюс - в обратном направлении. ξ_m - амплитуда волны.



Зависимость величины ξ от координаты x при фиксированном значении времени t называется мгновенным снимком волны. Для синусоидальной волны - это синусоида.



Синусоидальное колебание с частотой ω распространяется на расстояние x за время

$$t = \frac{x}{v} .$$

Расстояние, на которое волна распространится за период колебаний Т, называется длиной волны. Обозначается обычно греческой буквой λ (лямбда).

Согласно этому определению:

$$\lambda = \mathrm{v} \cdot T = \frac{\mathrm{v}}{f} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{v}}{\omega} \qquad (\text{т.к. } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}) .$$

Длина волны λ обозначает также наименьшее расстояние между точками с одинаковой фазой колебаний.

Еще раз подчеркнем, что общий вид волнового уравнения и его решения, а также все основные свойства этого решения не зависят от конкретного вида распространяющегося колебательного процесса.

Стоячие волны.

Решением волнового уравнения будет любая линейная комбинация синусоидальных бегущих волн.

В частности, решением будет суперпозиция двух встречных одинаковых по скорости, частоте и амплитуде синусоидальных волн:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_m \cdot Sin\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right) + \xi_m \cdot Sin\omega\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\right) .$$

В результате сложения двух одинаковых волн, бегущих в противоположных направлениях, получится волна, которая не бежит ни в ту, ни в другую сторону. Такая волна называется стоячей волной. Ее характерные особенности следуют из формулы, описывающей эту волну.

Учитывая, что $Sin\alpha + Sin\beta = 2 \cdot Sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot Cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получим:

$$\xi = 2 \cdot \xi_m \cdot Cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}} \cdot Sin\omega t = \xi_C \cdot Sin\omega t \cdot$$

Здесь $$\xi_C = 2 \cdot \xi_m \cdot Cos\omega\frac{x}{\mathrm{v}} = 2 \cdot \xi_m \cdot Cos\frac{2\pi}{T}\frac{x}{\mathrm{v}} = 2 \cdot \xi_m \cdot Cos\frac{2\pi x}{\lambda} .$$

$$(\text{т.к. } \omega = \frac{2\pi}{T}, \ \lambda = \mathrm{v} \cdot T)$$

ξ_C - амплитуда стоячей волны.

В стоячей волне, как и в бегущей, каждая точка среды совершает синусоидальные колебания. Отличия стоячей волны от бегущей следующие:

1. Амплитуды колебаний различных точек различны. Амплитуда зависит от координаты х по синусоидальному закону, принимая значения от 0 до $2\xi_m$:

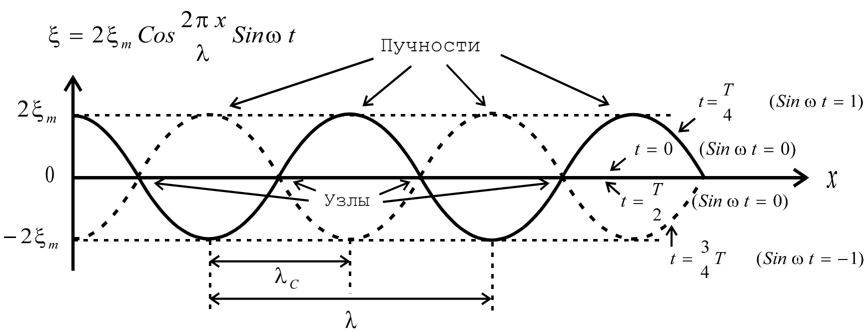
$$0 \le |\xi_C| \le 2\xi_m .$$

В бегущей волне амплитуды колебаний всех точек одинаковы.

2. Фаза колебаний меняется лишь в определенных точках. В бегущей волне фаза колебаний меняется непрерывно при переходе от точки к точке.

3. Бегущая волна переносит энергию, стоячая нет.

Изобразим мгновенные снимки стоячей волны для нескольких моментов времени в течение одного периода колебаний T с интервалом в четверть периода.



В точках, для которых выполняется условие $Cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$, амплитуда стоячей волны $\xi_C = 0$. Такие точки называются узлами стоячей волны. Эти точки всегда неподвижны.

$$Cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_C = 0 \quad \text{- узлы стоячей волны.}$$

Точки, в которых амплитуда максимальна, называются пучностями стоячей волны.

$$Cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \xi_C = \pm 2\xi_m \quad \text{- пучности стоячей волны.}$$

Длина стоячей волны - это расстояние между соседними узлами (или пучностями). Это расстояние вдвое меньше длины бегущей волны.

$$\lambda_C = \frac{\lambda}{2}\,.$$

Все точки среды между двумя соседними узлами совершают колебания в одинаковой фазе. При переходе через узел фаза колебаний меняется на противоположную, т.е. на π.

Обобщая свойства бегущих и стоячих волн, можно сказать следующее:

1. Бегущая волна - это распространение в пространстве колебательного движения.

Перенос вещества при этом не происходит, но имеет место перенос энергии.

2. При распространении синусоидальной волны все точки среды совершают колебания одинаковой частоты и одинаковой амплитуды, но фазы колебаний разных точек различны. Чем дальше точка от источника волны, тем больше запаздывание по фазе.

3. Сложение двух встречных бегущих волн одинаковой частоты и амплитуды дает в результате стоячую волну.

Стоячая волна не переносит энергию. Частоты колебаний всех точек среды в стоячей волне одинаковы, но амплитуды колебаний различных точек различны.

Фазы колебаний всех точек, расположенных между двумя соседними узлами стоячей волны, одинаковы. Фазы колебаний точек, расположенных по разные стороны от ближайшего узла, отличаются на π.

Длина стоячей волны (т.е. расстояние между двумя соседними узлами или пучностями) в два раза меньше длины каждой из встречных бегущих волн, образующих стоячую волну.

* * * * *

ПОЛНЫЙ ТЕКСТ ЛЕКЦИЙ С ИЛЛЮСТРАЦИЯМИ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ПО РАЗДЕЛАМ «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО», «МАГНЕТИЗМ», «КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

Валентин Иванович **Чередник**

Электронное учебное пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23