МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.9
ББК 22.161.6
М-54

М-54 Методы приближённого решения интегральных уравнений второго рода. Составитель: Калашников А.Л. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 52 с.

Рецензент: канд.физ.-мат.наук, доцент **О.Е Галкин**

В пособии излагаются численные методы решения интегральных уравнений второго рода Фредгольма с постоянными пределами интегрирования для функции одной и двух переменных, а также систем уравнений. Наряду с конечными методами рассматриваются итерационные и проекционный метод Галеркина, а также метод квадратурных формул. Используя функции Грина, показано применение интегральных уравнений к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнеий в частных производных. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов ИИТММ ННГУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики и поможет увеличить знания в применении численных методов.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Оглавление стр.

Введение

Одним из наиболее важных условий прогресса в области решения различных исследовательских задач является освоение и внедрение в практику прикладных разделов современной математики. К этим разделам, прежде всего, относятся приближенные, численные и машинные методы решения интегральных уравнений, применение которых позволяет получить эффективные математические описания многих прикладных задач. Интегральными уравнениями называются такие функциональные уравнения, которые содержат интегральное преобразование над искомой функцией. Аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и в прикладной математике.

Интегральные уравнения позволяют понижать размерность некоторых задач исследования и более компактно, чем дифференциальные уравнения, формулировать краевые задачи, приводят к устойчивым вычислительным процедурам. Применительно к решению современных практических задач полезность приближенных методов определяется их реализацией на ЭВМ. Применение современных математических пакетов позволяет значительно упростить составление алгоритмов. В частности, вполне доступный свободно распространяемый математический пакет SCILAB вполне подходит для реализации численных методов. Так в [1] имеется достаточно подробное описание SCILAB и его применение к различным разделам численных методов. Здесь рассмотрены интегральные уравнения Фредгольма второго рода с постоянными пределами интегрирования, которые достаточно широко применяются в прикладной математике. В частности, к ним сводятся многие краевые задачи математической физики. Например, задача Штурма-Лиувиля, граничные задачи.

В первой главе приводятся предварительные сведения о интегральных уравнениях Фредгольма второго рода функции одной и двух переменных, а также о системах интегральных уравнений второго рода. Приводятся математические модели физических примеров, которые сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Вторая глава посвящена методам решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода функции одной и двух переменных, системам уравнений с вырожденным ядром.

В третьей главе изложены методы, связанные с аппроксимацией ядра вырожденным для интегральных уравнений второго рода с постоянными пределами интегрирования, как одномерных, так и двухмерных. Изложен также метод Галеркина для одномерного уравнения Фредгольма второго рода. Эти методы называют [2] еще аппроксимационными. Рассмотрены также итерационные методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода для функции одной переменной. Здесь рассмотрены метод простой итерации и Положего Г.Н., как её модификации, а также итерационное построение резольвенты.

В четвёртой главе рассмотрены методы квадратурных формул для приближенного решения уравнения Фредгольма 2-го рода и систем уравнений 2-го рода. Также представлено применение кубатурных формул для двухмерного интегрального уравнения 2-го рода.

В пятой главе приводятся сведения о функции Грина для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнения. Приведены примеры ее построения для конкретных краевых задач. Изложен способ сведения краевых задач к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода и системам этих уравнений.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов ИИТММ ННГУ, специализирующихся в области прикладной математики и информатики и позполяет углубить знания в применении численных методов.

ГЛАВА 1. Интегральное уравнения Фредгольма 2-го рода

§1.1. *Свойства интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода*

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.1.1}$$

где $\varphi(x)$ − неизвестная функция, а $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, x и t – действительные переменные, изменяющиеся в $[a,b]$, λ-числовой множитель. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения (1.1.1) и предполагается, что ядро определено в квадрате $P=\{a \le x \le b, a \le t \le b\}$ на плоскости (x,t) и непрерывно в P, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл $\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt$ имеет конечное значение. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной или имеющей разрывы 1-го рода. Если $f(x)\neq 0,$ то уравнение (1.1.1) называется неоднородным; если же $f(x)\equiv 0,$ то уравнение (1.1.1) принимает вид $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0,$ и называется однородным. Пределы интегрирования a и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Решением называется любая функция $\varphi(x)$, при подстановке, которой в уравнения последние обращаются в тождества относительно $x\in[a,b]$.

Имеют место альтернативы Фредгольма [2].

Теорема 1 . Или неоднородное линейное уравнение 2-го рода $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$ имеет единственное решение при любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2.1.1}$$

имеет по крайней мере одно. не равное тождественно нулю, решение.

Теорема 2. Если для уравнения (1.1.1) верен первый случай альтернативы, то он верен и для сопряженного: $\psi(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt = g(x).$ Однородное интегральное уравнение (2.1.1) и сопряженное к нему уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt=0 \qquad (3.1.1)$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений. Если функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ являются решениями уравнения (2.1.1), то

$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x)$, где C_k $(k=1,2,..,n)$ – произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения (2.1.1).

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием существования решения $\varphi(x)$ неоднородного уравнения (1.1.1) во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения, т.е. функции $f(x)$, к любому решению $\psi(x)$ сопряженного к уравнению (2.1.1) однородного уравнения (3.1.1):

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=0. \qquad (4.1.1)$$

При выполнении условия (4.1.1) уравнение (1.1.1) будет иметь бесконечное множество решений, так как этому уравнению будет удовлетворять любая функция вида $\varphi(x)+\widetilde{\varphi}(x)$, где $\varphi(x)$ - какое-нибудь решение уравнения (1.1.1), а $\widetilde{\varphi}(x)$ - любое решение соответствующего однородного уравнения (2.1.1). Кроме того, если уравнению (1.1.1) удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то в силу линейности уравнения их разность есть решение соответствующего однородного уравнения (2.1.1).

На практике имеет значение альтернатива Фредгольма. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1.1.1) имеет решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (2.1.1) или сопряженное к нему уравнение (3.1.1) имеет только тривиальные решения. Отсюда в силу альтернативы следует, что уравнение (1.1.1) действительно имеет решение. Если ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1.1.1) симметрично, т.е. $K(x,t)=K(t,x)$ то однородное сопряженное уравнение (3.1.1) совпадает с однородным уравнением (2.1.1), соответствующим уравнению (1.1.1). Отметим, что в случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром $\varphi(x)-\lambda\int_a^b[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)]\varphi(t)dt=f(x)$ условие (4.1.1) ортогональности правой части уравнения дает n равенств:

$$\int_a^b f(t)b_k(t)dt=0,\ (k=1,2,\ldots,n).$$

Пример 1. Решить $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(5x^2-3)t^2\varphi(t)dt=e^x$.

Решение. Положим $\varphi(x)=C\lambda(5x^2-3)+e^x$, где $C=\int_0^1 t^2\varphi(t)dt.$ Подставляя C в уравнение, получим $C=C\lambda\int_0^1(5t^4-3t^2)dt+\int_0^1 t^2e^t dt=e\text{-}2$. Таким образом, данное уравнение при всех λ имеет единственное решение равное $\varphi(x)=\lambda(e-2)(5x^2-3)+e^x$, а соответствующее однородное уравнение $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(5x^2-3)t^2\varphi(t)dt=0$ имеет единственное решение: $\varphi(x)\equiv 0$.

Кроме уравнений на отрезке рассматриваются уравнения Фредгольма 2-го рода на плоскости вида:

$$z(x,y)-\lambda\int_a^b\int_c^d K(x,y,s,t)z(s,t)dsdt=f(x,y),$$

где $(x,y)\in[a,b;c,d]$ и λ– числовой параметр. Ядро $K(x,y,s,t)$ определено в области Q = $[a,b;c,d;a,b;c,d]$ и предполагается его непрерывность или квадратичную интегрируемость в Q. От функций $f(x,y)$ и $z(x,y)$ также требуется непрерывность или квадратичную интегрируемость на прямоугольнике $[a,b;c,d]$. Отметим, что вместо прямоугольника может рассматривается любая квадрируемая область.

Система интегральных уравнений 2-го рода имеет вид:

$$y_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}K_{ij}(x,t)y_j(t)\,dt=f_i(x)\ ,$$

где $a\le x\le b$,($i=1,....,n$) и λ_{ij}– числовве параметры. Предполагается, что ядра $K_{ij}(x,t)$ непрерывны или квадратично интегрируемы в квадрате P=$\{a\le x\le b, a\le t\le b\}$, а $f_i(x)$ непрерывны или квадратично интегрируемы на отрезке [a; b] . От функций $y_j(x)$ также потребуем либо непрерывность или квадратичную интегрируемость на отрезке [a; b]. Отметим, что на уравнения в двумерной области и системы полностью распространяется [3] теория, которая развита для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

§1.2. *Примеры интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода*

1. Рассмотрим: ***задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны***. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = b$ внешнее воздействие представляет собой гармоническую функцию $f(x,t) = \varphi(x)\cos\omega t$, а искомой является функция $u(x,t)$, определяющая вынужденные колебания той же частоты ω, т.е. $u(x,t) = v(x)\cos\omega t$, где $t-$ время, $v(x)-$неизвестная функция. Подстановка [2] приведенных выражений в уравнение вынужденных поперечных колебаний струны

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

приводит к краевой задаче

$$pv''(x) = -\rho\omega^2 v(x) - \varphi(x), \quad v(0) = 0,\ v(b) = 0,\ 0 \le x \le b,$$

где p и $\rho -$заданные постоянные. Пусть $G(x,s)$ − функция Грина краевой задачи $v''(x) = 0, v(0) = 0, v(b) = 0, 0 \le x \le b$. Тогда [2] получаем уравнение

$$v(x) = -\frac{\rho\omega^2}{p}\int_0^b G(x,s)v(s)ds - \frac{1}{p}\int_0^b G(x,s)\varphi(s)ds,$$

которое в качестве неизвестной функции содержит $v(x)$ и поэтому является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

2. Рассмотрим двухмерное **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta U(x,y) + \lambda U(x,y) = f(x,y)\ ,$$

где $(x,y) \in [a,b;c,d]$ с однородными краевыми условиями. К этому уравнению при $\lambda > 0$ приводят широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, тепловыми, электрическими и др.). При $\lambda < 0$ уравнение описывает процессы массопереноса с объёмной химической реакцией первого порядка. К уравнению Гельмгольца при замене переменных приводится любое уравнение эллиптического типа. Пусть $G(x,y,s,t)$ функция Грина однородной 1-ой краевой задачи для оператора Лапласа: $\Delta U(x,y) = 0$ в прямоугольнике $P = [a,b;c,d]$. Тогда уравнение Гельмгольца сводится к двумерному интегральному уравнения 2-го рода:

$$U(x,y) + \lambda\iint_P G(x,y,s,t)U(s,t)\,dsdt = \iint_P G(x,y,s,t)f(s,t)\,dsdt$$

Отметим, что в [2], [4], [5], [6] имеются и другие физические примеры задач, решение которых сводится к интегральным уравнениям 2-го рода.

ГЛАВА 2. Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

§2.1. *Случай функции одной переменной*

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \tag{1.2.1}$$

называется вырожденным [2], если $K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)$. Здесь $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а функции $a_k(x)$ и $b_k(t)$ (k=1,2,…,n) будем считать непрерывными в основном квадрате $a\le x,t\le b$ и линейно независимыми между собой. Интегральное уравнение (1.2.1) с вырожденным ядром

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)]\varphi(t)dt=f(x) \tag{2.2.1}$$

решается следующим образом. Перепишем (2.2.1) в виде

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt \tag{3.2.1}$$

и введем обозначения

$$\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt=C_k\ ,\ (k=1,2,\ldots,n)\ . \tag{4.2.1}$$

Тогда из (3.2.1) получаем $\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$ где C_k- неизвестные постоянные (так как функция $\varphi(x)$ неизвестна). Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_k (k=1,2,…,n). Подставляя $\varphi(x)$ в интегральное уравнение (2.2.1), после несложных выкладок получим

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m-\int_a^b b_m(t)[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)]dt\right\}a_m(x)=0\,.$$

Из линейной независимости функций $a_m(x)$ (m=1, 2,…, n) следует, что

$$C_m-\int_a^b b_m(t)[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)]dt=0,$$

или после преобразований имеем

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt \quad .$$

Вводя для краткости записи обозначения

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt, \ (m=1,2,\ldots,n), \quad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt,$$

получим, что $C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} C_k = f_m$, $(m=1,2,\ldots,n)$. Таким образом для C_k имеем линейную систему из n алгебраических уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta(\lambda) \neq 0,$ то система имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаемое, например, по формулам Крамера (k=1,2,…,n):

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1k-1} f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{2k-1} f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & \ldots & -\lambda a_{nk-1} f_n & -\lambda a_{nk+1} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.2.1}$$

Решением интегрального уравнения (2.2.1) будет функция $\varphi(x)$, определенная равенством $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$ где C_k находятся по (5.2.1).

Однородное уравнение $\varphi(x) - \lambda \int_a^b [\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)] \varphi(t) dt = 0,$ когда параметр λ не является его собственным числом (т.е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), имеет единственное нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$. Если же λ есть собственное число (т.е. $\Delta(\lambda) = 0$), то кроме нулевого решения уравнение (1.2.1) имеет и ненулевые решения, которыми являются собственные функции, соответствующие этому собственному числу. Общее решение однородного уравнения (1.2.1) есть линейная комбинация собственных функций. Если $\Delta(\lambda) = 0,$ то решений может и не быть, если ранг расширенной матрицы не равен рангу матрицы системы.

Пример 1. Уравнение $\varphi(x) - \int_0^1 (1 + 2xs) \varphi(s) ds = -\frac{1}{6} x - \frac{1}{2}$ содержит вырожденное ядро, что позволяет представить решение в виде

$$\varphi(x) = C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}, \quad C_1 = \int_0^1 \varphi(s)ds, \quad C_2 = \int_0^1 s\varphi(s)ds.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 составляется система уравнений

$$C_1 = \int_0^1 (C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2})dx, \quad C_2 = \int_0^1 x(C_1 + 2xC_2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2})dx,$$

из которой получаем $C_1 = 1, C_2 = \frac{7}{12}$. Тогда решение $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}$.

Замечание. Отметим, что метод нахождения решения интегрального уравнения с вырожденным ядром можно назвать конечным. Это следует из конечного числа действий: интегрирование, решение системы по правилу Крамера или Гаусса при точных вычислениях. Тем самым погрешность метода здесь нулевая. Однако на практике получаем некоторую погрешность. Она возникает, если a_{mk} и f_m как интегралы вычисляются приближенно по квадратурам или кубатурам. Кроме того, система линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_k может тоже решаться каким-либо приближенным методом. Такое возникает, например, в случае большого числа неизвестных, где точные методы сложно применить. Имеется также и погрешность округления. Все это наблюдается при числовых расчетах на ЭВМ.

§2.2. *Случай функции двух переменных*

Рассмотрим двухмерное уравнение с вырожденным ядром:

$$z(x,y) - \lambda \int_a^b \int_c^d K(x,y,s,t) z(s,t) ds dt = f(x,y), \ (x,y) \in [a,b;c,d], \qquad (1.2.2)$$

где ядро $K(x,y,s,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,y) b_j(s,t)$. Функции $a_k(x,y)$ и $b_k(s,t)$ при k=1,2,…, n будем считать непрерывными в $[a,b;c,d]$ и линейно независимыми между собой, а $f(x,y)$ интегрируемой. Отсюда получаем уравнение

$$z(x,y) - \lambda \int_a^b \int_c^d \sum_{j=1}^{n} a_j(x,y) b_j(s,t) z(s,t) ds dt = f(x,y), \qquad (2.2.2)$$

решаемое следующим образом. Перепишем (2.2.2) в виде

$$z(x,y) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x,y) \int_a^b \int_c^d b_j(s,t) z(s,t) ds dt + f(x,y) \qquad (3.2.2)$$

и введем обозначения

$$\int_a^b\int_c^d b_j(s,t)z(s,t)dsdt = C_j\ , \quad (j=1,2,\ldots,n)\ . \tag{4.2.2}$$

Тогда из (3.2.2) получаем $z(x,y) = \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x,y) + f(x,y)$, где C_k − неизвестные постоянные, поскольку функция $z(x,y)$ неизвестна. Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_k , (k=1,2,…,n). Подставляя $z(x,y)$ в уравнение (2.2.2), после несложных выкладок, имеем

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m - \int_a^b\int_c^d b_m(s,t)[f(s,t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s,t)]dsdt\right\}a_m(x,y) = 0\ .$$

По линейной независимости функций $a_m(x,y)$ получаем равенства

$$C_m - \int_a^b\int_c^d b_m(s,t)[f(s,t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s,t)]dsdt = 0,$$

или после преобразований

$$C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k\int_a^b\int_c^d a_k(s,t)b_m(s,t)dsdt = \int_a^b\int_c^d b_m(s,t)f(s,t)dsdt\ .$$

Вводя обозначения

$$a_{mk} = \int_a^b\int_c^d a_k(s,t)b_m(s,t)dsdt, \quad f_m = \int_a^b\int_c^d b_m(s,t)f(s,t)dsdt,$$

получим $C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{mk}C_k = f_m$, (m=1,2,…,n) и для C_k имеем линейную систему из n уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta(\lambda) \neq 0,$ то система имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаемое, например, по формулам Крамера (k=1,2,…,n) или иным способом:

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1k-1} f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{2k-1} f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & \ldots & -\lambda a_{nk-1} f_n & -\lambda a_{nk+1} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.2.2}$$

Решением уравнения (1.2.2) будет $z(x,y)$, однозначно определенная равенством $z(x,y) = f(x,y) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x,y)$, где C_k, *(k=1,...,n)* , вычисляются по формулам (5.2.2). Однородное уравнение:

$$z(x,y) - \lambda\int_a^b\int_c^d [\sum_{k=1}^{n} a_k(x,y)b_k(s,t)]z(s,t)dsdt = 0, \qquad (6.2.2)$$

когда параметр λ не является его собственным числом (т.е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), имеет единственное нулевое решение: $z(x,y) \equiv 0$. Если λ есть собственное число (т.е. $\Delta(\lambda) = 0$), то кроме нулевого решения уравнение (6.2.2) имеет и ненулевые решения, которыми являются собственные функции, соответствующие этому собственному числу. Общее решение однородного уравнения (6.2.2) есть линейная комбинация собственных функций. Если $\Delta(\lambda) = 0$, то решений может и не быть при ранге расширенной матрицы не равный рангу матрицы системы.

§2.3. *Случай системы интегральных уравнений*

1. Система интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода имеет вид:

$$y_i(x) - \lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(x,t)y_j(t)\,dt = f_i(x)\ , \quad a \le x \le b\ ,\ i = 1,....,n. \quad (1.2.3)$$

Предположим, что в квадрате $P=\{a \le x \le b, a \le t \le b\}$ ядра $K_{ij}(x,t)$ непрерывны, а $f_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\ b]$. Пусть ядра системы вырожденные: $K_{ij}(x,t) = \sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)}(x)b_{ij}^{(s)}(t)$, где функции $a_{ij}^{(s)}(x), b_{ij}^{(s)}(t)$ непрерывны при $a \le x,t \le b$ и $i,j = 1,2,...,n$, а $s = 1,2,...,m$. Тогда для (1.2.3) получаем

$$y_i(x) - \lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b\sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)}(x)b_{ij}^{(s)}(t)y_j(t)\,dt = f_i(x),\ i = 1,2,...,n. \qquad (2.2.3)$$

Введем числа $c_{ij}^{(s)} = \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t)y_j(t)dt$, где $i,j = 1,2,...,n$ и $s = 1,2,...,m$. Будем искать решение в виде

$$y_i(x) = \lambda\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} c_{ij}^{(s)}a_{ij}^{(s)}(x) + f_i(x),\ \ i = 1,2,...,n. \qquad (3.2.3)$$

Подставляя (3.2.3) в (2.2.3), после преобразований получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} c_{ij}^{(s)} a_{ij}^{(s)}(x) - \sum_{j=1}^{n}\int_a^b \sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)}(x) b_{ij}^{(s)}(t)[\lambda \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{(k)} a_{ij}^{(k)}(t) + f_i(t)]dt = 0 .$$

Собирая коэффициенты при функциях $a_{ij}^{(s)}(x)$, получаем для $i = 1,2,..,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{(s)}(x)[c_{ij}^{(s)} - \lambda \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{(k)} \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) a_{ij}^{(k)}(t)dt - \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) f_i(t)dt] = 0 . \quad (4.2.3)$$

Пусть для любого фиксированного $i = 1,2,..,n$ система функций $\{a_{ij}^{(s)}(x)\}$ при $j = 1,2,...,n$ и $s = 1,2,...,m$ линейно независима. Тогда из (4.2.3) имеем

$$c_{ij}^{(s)} - \lambda \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{(k)} \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) a_{ij}^{(k)}(t)dt - \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) f_i(t)dt = 0 ,\ i, j = 1,2,..,n , \quad (5.2.3)$$

систему mn^2 линейных алгебраических уравнения с таким же числом неизвестных $c_{ij}^{(s)}$. Введем обозначения

$$d_{ij}^{(s)} = \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) a_{ij}^{(k)}(t)dt \ , \ \ u_{ij}^{(s)} = \int_a^b b_{ij}^{(s)}(t) f_i(t)dt \ .$$

Тогда система (5.2.3) будет иметь вид:

$$c_{ij}^{(s)} - \lambda \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{(k)} d_{ij}^{(s)} = u_{ij}^{(s)},\ i, j = 1,2,..,n ,\ s = 1,2,...,m . \quad (6.2.3)$$

Обозначим решение системы (6.2.3) как $C_{ij}^{*(s)}$. Отсюда решение системы интегральных уравнений (2.2.3) будет $y_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} C_{ij}^{*(s)} a_{ij}^{(s)}(x) + f_i(x)$.

ГЛАВА 3. Приближённые методы решения уравнений 2-го рода

§3.1. *Замена ядра на вырожденное для функции одной переменной*

1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода при аргументах $x, t \in [a, b]$:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt = f(x) \ .$$

Аппроксимируем ядро $K(x,t)$ вырожденным. Тогда оно является суммой конечного числа произведений функций только от x на функции только от t и имеет вид, где $R_n(x,t)$ − погрешность:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) + R_n(x,t) \ .$$

Функции $a_k(x)$ и $b_k(t)$ (k=1,2,…,n) будем считать непрерывными в основном квадрате $a \le x, t \le b$ и линейно независимыми между собой, а $f(x)$ − непрерывной.

Введём новое интегральное уравнение с вырожденным ядром $K_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)$, которое будет иметь вид:

$$y_n(x) - \lambda \int_a^b [\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)] y_n(t) dt = f(x) \qquad (1.3.1)$$

и решается как в §2.1. Тогда получаем, что

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

где числа C_k находятся из системы уравнений

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} C_k = f_m \ , \quad (m=1,2,\ldots,n). \qquad (2.3.1)$$

Здесь как и в §2.1 числа $a_{mk} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt$ − элементы матрицы системы

а $f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$ – её правые части. Определитель $\Delta(\lambda)$ имеет вид:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Если $\Delta(\lambda)\neq 0,$ то система (2.3.1) имеет единственное решение $C_1, C_2, ..., C_n$, получаемое, например, по формулам Крамера (*k=1,2,…,n*) или иным способом:

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1} f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1} f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1} f_n & -\lambda a_{nk+1} & \dots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}$$

Тогда решением уравнения (1.3.1) будет $y_n(x)$, однозначно определенная равенством $y_n(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x)$ и являющаяся приближением к точному решению исходного уравнения**.** Погрешность метода здесь определяется степенью близости вырожденного ядра к точному [7] .

Если λ есть собственное число (т.е. $\Delta(\lambda)=0$), то решений может и не быть, если ранг расширенной матрицы не равен рангу матрицы системы.

2. Рассмотрим возможность замены ядра вырожденным. Удобным способом аппроксимации является разложение ядра по формуле Тейлора в дифференциальной форме в окрестности точки $(x_0, t_0)\in[a,b]$.Тогда имеем

$$K(x,t)=K(x_0,t_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{d^k K(x_0,t_0)}{k!}+R_n(x,t).$$

Здесь $R_n(x,t)$ её остаток (погрешность). Определим ядро

$$K_n(x,t)=K(x_0,t_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{d^k K(x_0,t_0)}{k!}=\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)$$

и представляя его в виде суммы, получаем вырожденное ядро $K_n(x,t)$. Далее введём уравнение, приближенное к исходному:

$$y_n(x)-\lambda\int_a^b K_n(x,t) y_n(t)dt=f(x)$$

и решаем его как показано выше в §2.1. Отметим, что в каждой конкретной задаче разложение ядра можно осуществить по разному. Например, можно использовать основные разложения от элементарных функций, что часто упрощает нахождение вырожденного ядра.

Погрешность приближённого решения здесь зависит от погрешности формулы Тейлора. На основе [7] погрешность равномерно на [*a,b*] оценивается как $| y_n(x) - y(x) | \le \dfrac{C}{(n+1)!}$, поскольку остаток $| R_n(x,t) | \le \dfrac{H}{(n+1)!}$, где *C,H >0* − некоторые постоянные. Представить ядро через аппроксимацию его вырожденным [8] возможно также и через ряды Фурье. Тогда погрешность решения будет среднеквадратичная.

Пример 1. Для $z(t) - 4\int_0^1 t^2 e^{t^2 s^4} z(s)ds = t^3 - (e^{t^2} - 1)$ при $s,t \in [0,1]$

используя формулу Тейлора, составить аппроксимационное интегральное уравнение с вырожденным ядром. Здесь точное решение $z(t)=t^3$.

Решение. Используем разложение функции e^u по формуле Тейлора в окрестности $u_0 = 0$. Тогда $e^u = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{u^k}{k!} + O(u^n)$ и для $|u| \le 1$, как известно из курса математического анализа, остаток $O(u^n) \le 3/(n+1)!$. Вместо степени *u* подставим $t^2 s^4$ в это разложение и получим для ядра

$$K(t,s) = t^2 e^{t^2 s^4} = t^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2(k+1)} s^{4k}}{k!} + O(t^{2(n+1)} s^{4n}),$$

где остаток $O(t^{2(n+1)} s^{4n}) \le \dfrac{3}{(n+1)!}$. Отсюда нетрудно найти слагаемые вырожденного ядра $K_n(x,t)$. Очевидно, для $k = 1,2,...,n$ получаем функции

$$a_k(t) = t^{2k}, \quad b_k(s) = \frac{s^{4(k-1)}}{(k-1)!} \quad .$$

Далее решаем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$z_n(t) - 4\int_0^1 K_n(t,s) z_n(s)ds = t^3 - (e^{t^2} - 1)$$

с вырожденным ядром $K_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)$ как рассмотрено выше. Получаем приближенное решение $z_n(t) = t^3 - (e^{t^2} - 1) + 4\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)$.

Теоретическая погрешность $|z_n(t)-z(t)| \le C/n!$, где $C>0$ − некоторая постоянная.

§3.2. *Замена ядра на вырожденное для функции двух переменных*

1. Рассмотрим уравнение

$$z(x,y)-\lambda\int_a^b\int_c^d K(x,y,s,t)z(s,t)dsdt = f(x,y),\ \ (x,y)\in[a,b;c,d]\ ,$$

Аппроксимируем ядро $K(x,y,s,t)$ вырожденным. Тогда оно имеет вид:

$$K(x,y,s,t)=\sum_{j=1}^{n} a_j(x,y)b_j(s,t)+R_n(x,y,s,t),$$

где $R_n(x,y,s,t)$ - погрешность. Функции $a_k(x,y)$ и $b_k(s,t)$ *(k=1,2,...,n)* будем считать непрерывными в $[a,b;c,d]$ и линейно независимыми между собой, а $f(x,y)$ непрерывной.

Введём новое двухмерное интегральное уравнение второго рода с вырожденным ядром $K_n(x,y,s,t)=\sum_{j=1}^{n} a_j(x,y)b_j(s,t)$:

$$z_n(x,y)-\lambda\int_a^b\int_c^d \sum_{j=1}^{n} a_j(x,y)b_j(s,t)z_n(s,t)dsdt = f(x,y),$$

решаемое как и в §2.2. Тогда его решение находится как

$$z_n(x,y)=\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x,y)+f(x,y)\ ,$$

где C_k находятся из системы

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{mk}C_k = f_m\ \ ,(m=1,2,\ldots,n)\ .$$

Здесь числа

$$a_{mk}=\int_a^b\int_c^d a_k(s,t)b_m(s,t)dsdt,\quad f_m=\int_a^b\int_c^d b_m(s,t)f(s,t)dsdt\ .$$

Таким образом для C_k имеем линейную систему из *n* уравнений с *n* неизвестными. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Если $\Delta(\lambda)\neq 0,$ то система имеет единственное решение и $C_1,C_2,\dots,C_n$, получаемое, например, по формулам Крамера или иным способом. Если же λ есть собственное число, то $\Delta(\lambda)=0$, то решений может и не быть, если ранг расширенной матрицы не равен рангу матрицы системы.

2. Рассмотрим аппроксимацию ядра вырожденным. Удобным способом аппроксимации это разложение ядра по формуле Тейлора [8] в дифференциальной форме :

$$K(x,y,s,t)=K(x_0,y_0,s_0,t_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kK(x_0,y_0,s_0,t_0)}{k!}+R_n(x,y,s,t),$$

в окрестности (x_0,y_0,s_0,t_0). Здесь функция $R_n(x,y,s,t)$ − погрешность. Введем новое ядро и представим его в виде суммы:

$$K_n(x,y,s,t)=K(x_0,y_0,s_0,t_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kK(x_0,y_0,s_0,t_0)}{k!}=\sum_{k=1}^{n}a_k(x,y)b_k(s,t).$$

Тогда получаем вырожденное ядро $K_n(x,y,s,t)$ и уравнение

$$z_n(x,y)-\lambda\int_a^b\int_c^d\sum_{j=1}^{n}a_j(x,y)b_j(s,t)z_n(s,t)dsdt=f(x,y).$$

Далее решаем его как указано в **§3.1.** Погрешность же приближенного решения зависит от погрешности формулы Тейлора и на основе [7] оценивается как $|z_n(x,y)-z(x,y)|\le\dfrac{C}{(n+1)!}$, поскольку $|R_n(x,y,s,t)|\le\dfrac{H}{(n+1)!}$. Здесь $C,H>0$ − некоторые постоянные. Отметим, что разложение по Тейлору можно упростить, используя основные разложения. Представить ядро через аппроксимацию его вырожденным возможно также через ряды Фурье. Тогда оценка будет среднеквадратичная.

Пример 1. Для уравнения

$$z(x,y)-\lambda\int_0^1\int_0^1 x^2y^2e^{xys^2t^2}z(s,t)dsdt=xy^3-\lambda(e^{xy}-xy-1)/4,$$

где $(x,y)\in[0,1;0,1]$ построить интегральное уравнение с вырожденным ядром. Здесь точное решение $z(x,y)=xy^3$. Требуется найти аппроксимирующее ядро.

Решение. Раскладывая ядро по формуле Тейлора в окрестности нуля, получим функцию:

$$K_n(x,y,s,t)=K(0,0,0,0)+\sum_{k=1}^{N}\frac{d^k K(0,0,0,0)}{k!}=\sum_{k=1}^{N}a_k(x,y)b_k(s,t).$$

Также как и в §3.1 для упрощения можно использовать разложение функции e^u и далее положить $u=xys^2t^2$. Тогда погрешность ядра будет порядка $C/(N+1)!$ с некоторой постоянной $C>0$. Функции вырожденного ядра $a_k(x,y)=(xy)^{k+1}$, $b_k(s,t)=(st)^{2(k-1)}/(k-1)!$, $k=\overline{1,N}$. Приближенное же решение ищется по способу §2.2 и имеет вид:

$$z_N(x,y)=\lambda\sum_{k=1}^{N}C_k a_k(x,y)+xy^3-\lambda(e^{xy}-xy-1)/4.$$

На основе [7] погрешность $|z_n(x,y)-z(x,y)|\le\dfrac{B}{N}$ с некоторым $B>0$.

§3.3. *Метод Галеркина для уравнения Фредгольма 2-го рода*

Рассмотрим интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt=f(x), \tag{1.3.3}$$

где ядро $K(x,t)$ непрерывно на [*a,b; a,b*] и $f(x)$ непрерывно на [*a,b*]. Приближенное решение методом Галёркина [2] заключается в том, что решение уравнения (1.3.3) ищется в виде суммы $f(x)$ и конечной линейной комбинации заранее выбранных линейно-независимых между собой координатных функций $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,\infty}$ из пространства $L_2[a,b]$. Пусть $\varphi_i(x)$ образуют полную и замкнутую систему, что означает следующее:

1)если некоторая функция $F(x)$ из $L_2[a,b]$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$, то $F(x)\equiv 0$ в $L_2[a,b]$;

2)для $\forall F\in L_2[a,b]$ и всякого числа $\varepsilon>0$ существует линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i=F_n$, для которой норма $\|F_n-F\|<\varepsilon$ в $L_2[a,b]$

Таким образом составляются функции

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x) \tag{2.3.3}$$

с неопределенными коэффициентами c_i, где $i=\overline{1,n}$, которые находятся определенным способом: в оператор U:

$$(Uy)(x)\equiv y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds-f(x),$$

вместо $y(x)$ подставляется функция (2.3.3), что приводит к выражению

$$(Uy_n)(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \{\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\} - \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)ds,$$

Далее потребуем ортогональность в $L_2[a,b]$ функции $(Uy_n)(x)$ к функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$. Тогда [2] приходим к условиям

$$\int_a^b (Uy_n)(x)\varphi_i(x)dx = 0,\ i = \overline{1,n} \quad .$$

Из них получают систему n линейных алгебраических уравнений для c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \{\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}\} = \lambda\gamma_i\ . \qquad (3.3.3)$$

Здесь коэффициенты после несложных выкладок имеют вид:

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \qquad \beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(x)ds\ ,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x) f(s)ds\,.$$

Решая систему (3.3.3), находим c_i и приближенное решение $y_n(x)$ интегрального уравнения (1.3.3). Условием однозначного решения системы (3.3.3) является неравенство нулю определителя $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})$. Отметим, что коэффициенты α_{ij}, β_{ij}, γ_i можно вычислять с применением квадратурных формул приближенного интегрирования.

Введём конечномерные подпространства Φ_n − линейная оболочка системы $\{\ \varphi_i(x)\ \}|_{k=1}^{n}$ с нормировкой пространства $L_2[a,b]$. Для любого элемента $u \in L_2[a,b]$ определим [7]_расстояние $E_{\Phi_n}(u) = \inf\limits_{\varphi\in\Phi_n} \| u - \varphi \|_{L_2}$ между u и подпространством Φ_n. Еще это называется наилучшим приближением элемента u элементами пространства Φ_n. Известно, что в Φ_n существует элемент наилучшего приближения – точка минимума. По части разрешимости системы (3.3.3) и сходимости $y_n(x)$ к точному решению интегрального уравнения применима [7]

Теорема. Пусть 1) ядро $K(x,t)$ уравнения (1.3.3) непрерывно в $[a,b;a,b]$ и функция $f \in L_2[a,b]$;

2) существует ограниченный обратный U^{-1} для оператора U;

3) система $\{\varphi_k\}\Big|_{k=1}^{\infty}$ полна и замкнута в $L_2[a,b]$;

Тогда а) система уравнений (3.3.3) однозначно разрешима относительно неизвестных c_i;

б) приближенные решения $y_n(x)$ сходятся к точному решению $y(x)$ в $L_2[a,b]$ (т.е. среднеквадратично) и погрешность $\| y_n - y \|_{L_2} \le CE_{\Phi_n}(y)$ для некоторой постоянной $C > 0$.

Замечание 1. Отметим, что при предположениях: непрерывность ядра $K(x,t)$ и непрерывность $f(x)$ условие 1) теоремы будет выполнено. Условие 2) теоремы, будет, например, выполнено при $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$, где число $B = \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,t)dxdt}.$ Условие 3) здесь выполнено в силу предположения о свойствах системы $\{\varphi_k\}\Big|_{k=1}^{\infty}$. Если система функций $\{\varphi_k\}\Big|_{k=1}^{\infty}$ ортонормальная, то коэффициенты $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ − символ Кронекера. В этом случае процесс отыскания каркасов c_i, где $i = \overline{1,n}$, и приближенных решений $y_n(x)$ будет устойчив [7]. За систему функций образующих полную и замкнутую систему можно взять алгебраическую $\varphi_k(x) = x^{k-1}$ для $k = 1,2,....$ или тригонометрическую. Ортонормальностью обладают, например, система полиномов Лежандра [7] и тригонометрическая.

Замечание 2. Если координатная система полиноминальная, а $K(x,t)$ и $f(x)$ достаточно гладкие функции (достаточно потребовать, чтобы они были непрерывно дифференцируемы (это требование в действительности можно существенно ослабить), то [7] приближенные решения, построенные по методу Галеркина, будут сходиться к точному не только в среднем, но и равномерно. Если же решение m раз непрерывно дифференцируемо, то быстрота сходимости характеризуется соотношением $\| y_n - y \|_{L_2} \le O(1/n^{m-1/2})$.Таким образом, если решение имеет много производных, то приближенные решения сходятся очень быстро.

Подчеркнем, что быстрота сходимости метода Галеркина определяется свойствами гладкости точного решения, но не ядра интегрального уравнения. Это свойство отличает метод Галеркина от метода механических квадратур, в котором для быстрой сходимости существенно, чтобы быстро убывала погрешность замены интеграла от функции $K(x,t)y(t)$ квадратурной суммой, а это обычно требует достаточной гладкости не только решения, но и ядра.

Отметим, что интегральные уравнения, которые при ядре малой гладкости (функции Грина) имеют очень гладкие решения, если такова правая часть, встречаются довольно часто. Так бывает при замене дифференциальных уравнений интегральными про помощи функций Грина. Поэтому указанное преимущество метода Галеркина в сравнении с методом механических квадратур является существенным. Основной недостаток метода Галеркина состоит в том, что система линейных алгебраических уравнений (3.3.3) строится сложно, т. к. требует вычисления ряда интегралов, в то время как метод механических квадратур обходится лишь вычислением значений ядра и правой части в ряде точек.

§3.4. *Метод простой итерации*

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad x,t\in[a,b],$$

где ядро $K(x,t)$ определено в $[a,b;a,b]$ и $f(x)$ в $[a,b]$. Предполагается также их непрерывность в области определения. Метод простой итераций на практике чаще всего реализуется с помощью рекуррентной формулы в виде:

$$y_{k+1}(x) = f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y_k(t)\,dt \tag{1.3.4}$$

для построения последовательности1 функций $y_k(x)$ являющихся приближениями к искомому решению уравнения. При этом начальное (нулевое) приближение $y_0(x)$ может быть выбрано произвольно, что и делается, если нет каких-либо сведений о характере искомой функции. Однако, исходя из физической постановки задачи, такие априорные (чаще всего качественные) данные можно определить, что позволяет удачным выбором начального приближения ускорить итерационный процесс (уменьшить количество приближений в процессе решения). Применение поиска решения, отражаемого формулой (1.3.4), означает, что за приближенное решение принимается $y_k(x)$ при достаточно большом k, если при этом все интегралы вычисляются точно.

Практически признаком близости получаемых приближений к искомой функции является достижение малой величины нормы разности двух следующих друг за другом приближений. Условиями применимости метода в случае непрерывного ядра и правой части является также неравенство:

$$q=\max_{x\in[a,b]}|\lambda|\int_a^b|K(x,t)|dt<1. \tag{2.3.4}$$

Если $|K(x,t)|\le C$ для всех $x,t\in[a,b]$, то при $q=|\lambda|(b-a)C<1$ выполнено (2.3.4) и метод простой итерации тоже применим. Тогда

$$\|y-y_k\|_c\le q^k\|y-y_0\|_c\,, \quad \|y-y_k\|_c\le\frac{q^k\|y_k-y_0\|_c}{(1-q^k)}\,. \tag{3.3.4}$$

Отсюда получаем сходимость $y_k\to y$ в пространстве непрерывных функций

$C[a,b]$, которая эквивалентна равномерной сходимости $y_k(x) \Rightarrow y(x)$ на отрезке $[a,b]$ при $k \to \infty$.

В случае же выполнения неравенства

$$q = |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \qquad (4.3.4)$$

получаем оценку в пространстве $L_2[a,b]$:

$$\| y - y_k \|_{L_2} \le q^k \| y - y_0 \|_{L_2}, \quad \| y - y_k \|_{L_2} \le \frac{q^k \| y_k - y_0 \|_{L_2}}{(1-q^k)}. \qquad (5.3.4)$$

Тогда получаем сходимость $y_k \to y$ в пространстве $L_2[a,b]$ − суммируемых с квадратом функций. Это означает: $[\int_a^b (y_k(x) - y(x))^2\,dx]^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $k \to \infty$ и более слабая по сравнению с равномерной.

Важным свойством простой итерации является независимость ее сходимости от $f(x)$ и начального приближения $y_0(x)$.

Пример 1. Решается уравнение $y(x) - \int_0^1 xt^2 y(t)dt = 1$. Для определения сходимости приближений вычисляем при $\lambda = 1$ число

$$q = |\lambda| \left(\int_0^1 \int_0^1 x^2 t^4\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{15} < 1.$$

Тогда метод простой итерации сходится среднеквадратично. Далее, полагая $y_0(x) = x$, вычисляем итерации $y_k(x)$. Здесь нетрудно проверить, что $y_1(x) = 1 + x/4$, $y_2(x) = 1 + 19x/48$, $y_3(x) = 1 + 83x/192$. Отсюда среднеквадратичная погрешность, согласно (5.3.4), будет вычисляться как

$$[\int_0^1 (y_3(x) - y(x))^2\,dx]^{\frac{1}{2}} \le [\int_0^1 (1 - \frac{109x}{192})^2\,dx]^{\frac{1}{2}} /(\sqrt{15^3} - 1) \approx 0.0674653$$

Отметим, что в данном примере сходимость будет и в пространстве $C[0,1]$, так как по (2.3.4) число $q = \max_{x\in[0,1]} |\lambda| \int_0^1 | x^2 t^4 |dt = \frac{1}{5} < 1$ при $\lambda = 1$. Тогда по неравенству (3.3.4) и норме в $C[a,b]$ имеем:

$$\| y_3 - y \|_c \le \frac{1}{15^3} \| y_3 - y_0 \|_c = \max_{x\in[0,1]} |1 - \frac{109x}{192}| /(15^3 - 1) = \frac{1}{3375} \approx 0.0002963.$$

Тем самым равномерно $| y_3(x) - y(x) | \le 0.0002963$ на отрезке $[0,1]$.

Из оценок погрешностей в $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$ видно, что выбор числа q по способу (2.3.4) дает меньшую погрешность.

Замечание 1. Отметим, что при численной реализации метода простой итерации необходимо вычислять приближенно интегралы методом квадратур. Это вносит дополнительную погрешность и довольно значительную при большом числе итераций. С этой целью интегрирование надо осуществлять с большой точностью.

§3.5. *Метод итераций Положего Г.Н.*

Область сходимости по λ в простой итерации при решении интегрального уравнения ограничена, что следует из условий (2.3.4), (3.3.4). Метод Положего Г.Н. [2], расширяющему область сходимости λ, состоит в следующем. В качестве исходного принимается эквивалентное уравнение

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = \mu y(x) + F(x) ,$$

где $\mu = 1/\lambda$ и $F(x) = \mu f(x)$. Далее определяется второе итерированное ядро

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt$$

и находится функция $P(x,s) = K_2(x,s) - 2\mu K(x,s)$.После этого вводится функция $u(x) = y(x) + f(x)$ относительно которой и строятся все последовательные приближения. Нулевое приближение выбирается по формуле $u_0(x) = \dfrac{2F^*(x)}{\sigma}$, где функция $F^*(x) = \int_a^b [K_2(x,s) - \mu K(x,s)] f(s)\,ds$ и

$$\sigma \ge \mu^2 + 2|\mu|(\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dxds)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dxds .$$

Все последующие приближения находятся по формуле

$$u_{k+1}(x) = u_0(x) + qu_k(x) - \frac{2}{\sigma}\int_a^b P(x,s)u_k(s)\,ds .$$

Здесь число $q = 1 - \dfrac{2\mu^2}{\sigma}$. При ограниченных функциях $K(x,t)$ и $f(x)$, в частности непрерывных, описанный процесс последовательных приближений сходится при любых λ, не являющихся характеристическими числами, что свидетельствует о значительно более широкой области сходимости метода по сравнению с простой итерацией.

§3.6. *Резольвента интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода*

1. Рассмотрим уравнение с непрерывными $K(x,t)$ и $f(x)$ вида:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x\in[a,b]. \tag{1.3.6}$$

Как известно [2], решение уравнения Фредгольма второго рода дается формулой $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt$, где функция $R(x,t;\lambda)$, называемая резольвентой Фредгольма [2], определяется равенством $R(x,t;\lambda)=\dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$ при условии, что $D(\lambda)\neq 0$. Здесь $D(x,t;\lambda)$ и $D(\lambda)$ − степенные ряды по λ:

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n, \qquad D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n \quad .$$

При этом коэффициенты в степенных рядах определяются формулами

$$B_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \ldots & K(t_n,t_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n,$$

и числами

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n)\\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \ldots & K(t_3,t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n.$$

Функция $D(x,t;\lambda)$ называется минором Фредгольма [1], а $D(\lambda)$− определителем Фредгольма. В случае, когда $\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt<\infty$ или ядро $K(x,t)$ ограничено, то ряды $D(x,t;\lambda)$ и $D(\lambda)$ сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ. Вычисление коэффициентов $B_n(x,t)$ и C_n практически возможно в редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)B_{n-1}(s,t)ds, \qquad C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)ds.$$

Здесь функция $B_0(x,t) = K(x,t)$ и число $C_0 = 1$.Отметим, что в случае вырожденного ядра резольвента находится за конечное число действий [7] и $R(x,t;\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj} a_k(x) b_j(t)$, а $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt$. Здесь d_{kj} есть элементы обратной матрицы A^{-1}, где $A = (\delta_{kj} - \lambda a_{kj})$ и получена для вырожденного ядра (см. §2.1.). В общем же случае нахождение резольвенты на основе приведённых формул осуществляется с применением численных методов. В частности, применения квадратурных формул [9], [10].

2. Резольвента может быть найдена методом итерированных ядер [2] . Введем функции $\psi_n(x)$ определяемые по формулам

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)dt, \qquad \psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\psi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t) f(t)dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x,t)\psi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t) f(t)dt$$

и т.д. Здесь функции $K_n(x,t)$ − итерированные ядра [2] и имеют вид:

$$K_1(x,t) = K(x,t) \ , \ \ldots\ldots, K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz, \quad n = 2,3,...$$

Для них верно соотношение: $K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s)K_{n-m}(s,t)ds$, где m – любое натуральное число, меньшее n. Резольвента интегрального уравнения (1.3.6) определяется как $R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}$ через итерированные ядра, где ряд, стоящий в правой части, называется [2] рядом Неймана ядра $K(x,t)$. Он сходится для всех $|\lambda| < \frac{1}{B}$, где число $B = \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt}.$ Тогда решение интегрального уравнения будет $\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\lambda^n$ и соответствует методу последовательных приближений. Для приближенного вычисления итерированных ядер обычно используются квадратурные формулы.

ГЛАВА 4. Метод квадратурных и кубатурных формул для уравнения Фредгольма 2-го рода

§4.1. *Применение квадратурных формул для одного уравнения*

1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$(Pu)(x) = u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x) \ , \quad x \in [a,b], \tag{1.4.1}$$

где λ − числовой параметр, а $K(x,s)$ ядро и $f(x)$ правая часть. Будем полагать их непрерывными функциями. Тогда оператор $P: C[a,b] \to C[a,b]$. При решении же интегрального уравнения (1.4.1) проблема заключается в том, что при сложном аналитическом задании подинтегральной функции непосредственное нахождение решения становится затруднительным. В подобных случаях используют приближенные методы. Одним из наиболее распространенных методов, применяемых для решения уравнения (1.4.1) и реализуемых на ЭВМ, является метод квадратур, состоящий в замене входящего в левую часть уравнения интеграла какой-либо формулой численного интегрирования [9], [10]. Рассмотрим квадратурную формулу:

$$\int_a^b g(s)ds = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g(s_j^n) + O\left(1/n^m\right), \tag{2.4.1}$$

где $A_j^{(n)}$ − квадратурные коэффициенты и $s_j^{(n)}$ − узлы квадратуры. Здесь число $\boldsymbol{m}$ − порядок погрешности квадратуры, которая равна $O(1/n^m)$. При отбрасывании остатка $O(1/n^m)$ интеграл заменяется на его приближение, вычисляемое по формуле $\int_a^b g(s)ds \approx \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g(s_j^n)$ с точностью $O(1/n^m)$. С целью удобства численной реализации наиболее распространены формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Для этого в уравнении (1.4.1) заменим интеграл по квадратурной формуле. Тогда получаем равенство

$$u(x) - \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x, s_j^{(n)}) u(s_j^{(n)}) = f(x) + R_n(x) \ , \quad x \in [a,b] \ .$$

Здесь по (2.4.1) погрешность $R_n(x) = O(1/n^m)$ и $\boldsymbol{n}$ количество узлов. Отбрасывая малую величину $R_n(x)$, получаем линейное уравнение:

$$u_n(x) - \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x, s_j^{(n)}) u_n(s_j^{(n)}) = f(x) \ , \quad x \in [a,b]. \tag{3.4.1}$$

Функцию $u_n(x)$, если она существует, примем за приближенное решение уравнения (1.4.1). Далее, процесс решения уравнения (3.4.1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений в узлах сетки:

$$u_n(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x_i, s_j^{(n)}) u_n(s_j^{(n)}) = f(x_i), \quad i = 1,2,...n. \tag{4.4.1}$$

при $x = x_i \in [a,b]$ и $x_i = s_i^{(n)}$. Введём, теперь, вектор $\overline{U}_n$ с компонентами $u_i^{(n)} = u_n(x_i)$ для $i = 1,2,...n$, а также матрицу M_n с элементами $a_{ij}^{(n)} = A_j^{(n)} K(x_i, s_j^{(n)})$ и вектор $\overline{F}_n$ с компонентами $f(x_i)$.Тогда из системы уравнений (4.4.1) получаем матричное уравнение $(E_n - \lambda A_n)\overline{U}_n = \overline{F}_n$, где E_n единичная матрица размера ***n***. Отсюда, при существовании обратной матрицы, его решение будет равно $\overline{U}_n = (E_n - \lambda M_n)^{-1} \overline{F}_n$. В результате этого получаем таблицу $u_i^{(n)}$ для приближенного решения, называемую еще его **каркасом** [7] .Таким образом, можно выделить следующие этапы алгоритма численного решения интегрального уравнения (1.4.1):
- выбирается квадратурная формула;
- строится и решается система линейных алгебраических уравнений;
- по ее решению находится приближенное решение исходного интегрального уравнения в виде таблицы – каркаса.

Согласно [7], можно найти приближенное решение и в аналитическом виде на основе формулы:

$$u_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(x, s_j^{(n)}) u_j^{(n)} + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{5.4.1}$$

Замечание. Преимущество представления (5.4.1) перед каркасом в том, что здесь приближенное решение находится для всех $x \in [a,b]$, а в каркасном виде только в узлах сетки интегрирования. В этом случае для подсчёта значения решения на отрезке требуется интерполяция. Но при больших ***n*** это не всегда удобно, особенно для многочленов Лагранжа или Ньютона. Отметим также, что погрешность каркасов и приближения на основе равенства (5.4.1) будет по отношению к точному решению, при существовании обратного оператора P^{-1} согласно [7], [11] пропорциональна погрешности выбранной квадратурной формулы, то есть остатку $R_n(x) = O(1/n^m)$.Кроме того, точность получаемых решений существенно зависит от гладкости ядра, свободного члена, а также самого решения. Поэтому при выборе квадратурной формулы необходимо учитывать, что чем более точную формулу предполагается применить, тем большие требования должны быть предъявлены к гладкости ядра, решения и правой части. Поэтому в [12] рекомендуется использовать формулы прямоугольников и трапеций, как имеющих меньшие требования к подинтегральному выражению чем, например, формула Симпсона. В [12] также имеется пример, когда формула Симпсона в методе квадратур для интегрального уравнения даёт погрешность больше чем прямоугольников и трапеций по отношению к точному решению.

2. Приведём значения квадратурных коэффициентов и соответствующие им узлы для формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, особенно удобных для расчётов на ЭВМ. Для этого рассмотрим по отдельности квадратурные формулы прямоугольников, которых имеется три: **правые, левые, центральные,** а также **трапеций и Симпсона**. Все они отличаются квадратурными коэффициентами, узлами интегрирования и $R_n(x) = O(1/n^m)$.

Так для квадратурной формулы **правых прямоугольников** имеем:

$A_j^{(n)} = (b-a)/n$, $s_j^{(n)} = a + jh$, где $h = (b-a)/n$ и $j = 1,...,n$.

Для формулы же **левых прямоугольников**

$A_j^{(n)} = (b-a)/n$, $s_j^{(n)} = a + (j-1)h$, где $h = (b-a)/n$ и $j = 1,...,n$.

В случае же **центральных прямоугольников**

$A_j^{(n)} = (b-a)/n$, $s_j^{(n)} = a + (j-0.5)h$, где $h = (b-a)/n$ и $j = 1,...,n$.

Отметим, что все эти три случая можно объединить **одной формулой:** $A_j^{(n)} = (b-a)/n$, где $h = (b-a)/n$ и $j = 1,...,n$, а параметр $\boldsymbol{p = 0}$ и узлы $s_j^{(n)} = a + (j-p)h$ для формулы **правых прямоугольников**, $\boldsymbol{p = 1}$ для ***левых*** **прямоугольнико*в*** и $\boldsymbol{p = 0.5}$ для **центральных прямоугольников.**

Для квадратурной формулы **трапеци*й*** $h = (b-a)/(n-1)$ и $A_j^{(n)} = h$ при $j = 2,...,(n-1)$, а $A_1^{(n)} = A_n^{(n)} = h/2$, а узлы $s_j^{(n)} = a + (j-1)h$ с $j = 1,...,n$.

Для квадратурной формулы **Симпсона** число $\boldsymbol{n = 2m+1}$, т.е. нечётное, $A_1^{(n)} = A_{2m+1}^{(n)} = h/3$, $A_2^{(n)} = ... = A_{2m}^{(n)} = 4h/3$, $A_3^{(n)} = ... = A_{2m-1}^{(n)} = 2h/3$, где $h = (b-a)/2m$, а узлы $s_j^{(n)} = a + (j-1)h$ при $j = 1,...,n$.

Приведём порядок погрешности для вышеприведённых квадратурных формул с подинтегральной функцией $g(s)$ согласно (2.4.1). Так для формул **правых и левых прямоугольников** $R_n = O(1/n)$ или $\boldsymbol{m = 1}$, а **центральны*х*** $R_n = O(1/n^2)$, т.е. $\boldsymbol{m = 2}$. Для формулы же **трапеций** имеем $R_n = O(1/n^2)$ или $\boldsymbol{m = 2}$, а **Симпсона** $R_n = O(1/n^4)$ или $\boldsymbol{m = 4}$.

3. **Формула Гаусса** для отрезка [-1;1] имеет вид:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = [c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + ... + c_n f(x_n)] .$$

Значения квадратурных коэффициентов c_i ,$i = 1,2,..,n,$ Гаусса [13] и узлов $x_i(i = 1,2,..,n)$ приведены в специальных таблицах [14]. Для интеграла на $[a,b]$ сделаем замену $s = (b + a + (b - a)x)/2$, где $x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\int_a^b f(s)ds = \frac{b-a}{2}[c_1 f(s_1) + c_2 f(s_2) + ... + c_n f(s_n)]$$

при узлах $s_k = (b + a + (b - a)x_k)/2$.Здесь $x_k \in [-1, 1]$ и являются узлами квадратуры Гаусса отрезка интегрирования $[-1, 1]$. Погрешность R_n формулы Гаусса для функции $f(x)$, имеющей непрерывную производную $f^{(2n)}(x)$ на (a,b), имеет вид: $R_n = \dfrac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi)$. Здесь $\xi \in (a,b)$. Как отсюда видно, её погрешность значительно меньше приведённых выше.

Точность получаемых решений существенно зависит от гладкости ядра и свободного члена. Поэтому при выборе квадратурной формулы необходимо учитывать, что чем более точную формулу предполагается применить, тем большие требования должны быть предъявлены к гладкости ядра, решения и правой части. В этом отношении формула Гаусса менее применима, чем квадратуры прямоугольников, трапеций, Симпсона у которых коэффициенты и узлы легко подсчитываются.

3. При числовых расчетах на ЭВМ для приближенного решения интегрального уравнения

$$(Pu)(x) = u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x) \ , \quad x \in [a,b].$$

с помощью квадратур используют метод двойного пересчета. Как было приведено ранее, заменим входящий в левую часть уравнения интеграл какой-либо квадратурной формулой численного интегрирования. В результате мы получаем приближенное линейное уравнение, решение которого сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Погрешность полученного таким образом приближенного решения будет по отношению к точному решению пропорциональна погрешности выбранной квадратурной формулы. Повысить точность приближенного решения можно с помощью использования метода двойного пересчета. Разберем этот метод на примере метода трапеций как наиболее удобного в численной реализации к решению интегрального уравнения 2-го рода .

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,n, x_0 = a, x_n = b$ с постоянным шагом $h = (b-a)/(n-1)$. Пусть $|\lambda(b-a)C| < 1$, где число $C \le \max|K(x,t)|$ на $[a,b;a,b]$. Тогда существует обратный P^{-1} и применимы [7], [11] теоремы о сходимости метода квадратур для интегрального уравнения и оценке погрешности каркасов и приближенных решений. Для каркасов $\overline{U}_n$ имеем в равномерной метрике оценку: $\| \overline{U}_n - [u]_n \| \le BR_n$, где число $B > 0$ и $R_n = O(1/n^2)$ − погрешность квадратур трапеций и $[u]_n$ − вектор точного решения в квадратурных узлах x_k, $k = 0,1,2,....,n$. Для приближенного же решения $u_n(x)$ на основе [7] имеем в $C[a,b]$ оценку: $\| u_n - u \| \le DR_n$, где $u(x)$ − точное решение и некоторое число $D > 0$. Вначале находим u_n каркас приближенного решения соответствующий шагу $h_n = (b-a)/(n-1)$. Далее берём шаг $h_{2n} = h_n / 2$, находим каркас u_{2n} и для $\forall \varepsilon > 0$ рассматриваем неравенство: $\| u_n - u_{2n} \| \le \varepsilon$. Если оно выполняется, то $u_{2n}(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j^{(2n)} K(x, s_j^{(2n)}) u_j^{(2n)} + f(x)$ полагаем приближенным решением. При невыполнении этого неравенства опять повторяем уменьшение шага вдвое. По сходимости метода квадратур это неравенство при достаточно мелком шаге будет выполнено, что и показывают числовые расчеты.

§4.2. *Применение квадратурных формул для систем уравнений*

1. Система интегральных уравнений второго рода имеет вид:

$$y_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} \int_a^b K_{ij}(x,t) y_j(t)\, dt = f_i(x) \ , a \le x \le b \ , (i, j = 1,....,n). \qquad (1.4.2)$$

Предполагается, что ядра $K_{ij}(x,t)$ непрерывны в $W = \{a \le x \le b, a \le t \le b\}$, а $f_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$. От функций $y_j(x)$ также потребуем непрерывность. Систему (1.4.2) можно представить в матричном виде с оператором $P(\overline{Y})$:

$$(P(\overline{Y}))(x) = \overline{Y}(x) - \int_a^b H(x,t) \overline{Y}(t) dt = \overline{F}(x) \ , \quad a \le x, t \le b \ .$$

Здесь $\overline{Y}(x)$, $\overline{F}(x)$ − вектор-функции, а $H(x,t) = \lfloor \lambda_{ij} K_{ij}(x,t) \rfloor$ − матрица, где $i, j = 1,....,n$. Для системы интегральных уравнений 2-го рода по части применения метода квадратур можно провести аналогичные рассуждения, как и для уравнения Фредгольма. Для приближенного решения этой системы интегральных уравнений интегралы заменяем какой-либо квадратурной формулой. Для этого делим отрезки на m равных частей и получаем:

$$\int_a^b \lambda_{ij} K_{ij}(x,t) y_j(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ij} K_{ij}(x, t_k) y_j(t_k) A_k + R_m \quad \text{для} \quad \forall x \in [a,b],$$

где t_k – узлы квадратурной формулы, а A_k – квадратурные коэффициенты и R_m – погрешность. Отбрасывая R_m, получаем систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$y_i^s - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{i,j} K_{ij}(x_s,t_k) y_j^k A_k = f_i(x_s) = f_i^s, \qquad (2.4.2)$$

с точностью до остатка R_m. Здесь узлы $x_s = t_s$ и $s,k = 1,2,...,m$.

С целью наглядности применения метода квадратур ограничимся случаем системой двух интегральных уравнений. Тогда из (2.4.2) имеем:

$$y_i^s - \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{i,j} K_{ij}(x_s,t_k) y_j^k A_k = f_i(x_s) = f_i^s, \ (i,j=1,2) \text{ и } s,k = 1,2,...,m.$$

Введём матрицы $M_{ij} = (a_{sk}^{ij})$, где элементы $a_{sk}^{ij} = \lambda_{i,j} K_{ij}(x_s,t_k) A_k$ и вектора неизвестных $\bar{y}_j = (y_j^k)|_{k=1}^m$, а также $\overline{F}_j = (f_j^s)|_{s=1}^m$ при $j = 1,2$. Тогда имеем систему $(E - M_m)\overline{Y}_m = \overline{F}_m$ с блочными матрицами и векторами

$$M_m = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \overline{F}_m = \begin{pmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{Y}_m = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \quad E_m = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

где $E_1 = (\delta_{sk})$, $E_2 = (\delta_{sk})$. Решая эту систему каким-либо образом, получим таблицу (каркас) приближенных значений $\overline{Y}_m$. По каркасу можно, как и для одного уравнения, построить приближённое решение

$$y_i^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{i,j} K_{ij}(x,t_k) y_j^k A_k + f_i(x), \quad i,j = 1,2.$$

Согласно [7], погрешность каркаса приближенного решения в конечномерном пространстве V_{2m} с равномерной метрикой будет порядка R_m: норма $\| \overline{Y}_m - [y]_m \| \le BR_m$. Здесь число $B > 0$ и $\| \overline{Z}_m \| = \max(|z_1^k|, |z_2^k|)|_{k=1}^m$ для вектора $\overline{Z}_m = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ из V_{2m}, а $[y]_m$ – вектор решения $\bar{y}(x)$ в узлах. Для приближенного же решения в пространстве вектор-функций $\overline{C}[a,b]$ имеем на основе [7] оценку: норма $\| \bar{y} - y^{(m)} \|_{\overline{C}} \le DR_m$ для некоторого числа $D > 0$.

Как и для одного уравнения для удобства счета на ЭВМ можно использовать квадратуры прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Также как и для одного уравнения при численном счете возможен метод двойного пересчета при квадратуре трапеций. Тогда сравниваем для каркасов и $\forall \varepsilon > 0$ по норме в дискретном L_{2m}: $\| \overline{Y}_h - \overline{Y}_{h/2} \| \le \varepsilon$. Если оно выполняется, то полагаем $y_i^{(2m)}(x)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2m}\lambda_{i,j}K_{ij}(x,t_k)y_j^k A_k+f_i(x)$ за приближенное решение . При невыполнении этого неравенства опять повторяем уменьшение шага вдвое. Пусть существует обратный P^{-1}. Тогда метод квадратур сходится [7] и $\|\overline{Y}_h-\overline{Y}_{h/2}\|\le\varepsilon$ при достаточно мелком шаге будет выполнено, что и показывают числовые расчеты.

На основе [3] приведем условия существования обратного P^{-1}для системы (1.4.2). Введем числа

$$D_{ij}=\int_a^b\int_a^b K_{ij}^2(x,t)dxdt\ ,\qquad D=(\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij})^{-\frac{1}{2}},\qquad \Lambda=\max_{i,j=1,2,..,n}|\lambda_{ij}|.$$

Тогда при $\Lambda\le D$ существует P^{-1}.

§4.3. *Метод кубатурных формул для интегрального уравнения*

1. Метод кубатур состоит в составлении и непосредственном использовании расчетных выражений, полученных путем замены интегральных операторов конечными суммами на основе применения различных квадратурных формул. Формулы для двойного интеграла называются **кубатурными.** Рассмотрим кратный интеграл по прямоугольной области [*a,b*; *c,d*]:

$$\iint_G f(x,y)dxdy\ =\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy\ .$$

Применим правило приближенной квадратуры к внешнему интегралу

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}a_i\int_c^d f(x_i,y)dy+R_n\ ,$$

где R_n − остаточный член, a_i − квадратурный коэффициент, x_i − узлы. Каждое слагаемое в правой части содержит интеграл, который можно вычислить при помощи численного интегрирования: $\int_c^d f(x_i,y)dy=\sum_{j=1}^{m}b_j f(x_i,y_j)+R_m^*$,

где b_j − квадратурные коэффициенты, а R_m^* − остаток. Тогда интеграл $\int_a^b\int_c^d f(x_i,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}f(x_i,y_j)+\overline{R_{mn}}$ с остатком $\overline{R_{mn}}=R_n+\sum_{i=1}^{n}a_iR_m^*$ и $C_{ij}=a_ib_j$. Здесь узлы (x_i,y_j) и квадратурные коэффициенты выбираются из удобства вычисления и точности. При решении интегральных уравнений достаточно широко применяются формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса и другие.

2. Рассмотрим двухмерное интегральное уравнение 2-го рода:

$$(P(z))(x,y)=z(x,y)-\lambda\int_a^b\int_c^d K(x,y,s,t)z(s,t)dsdt=u(x,y),\ (x,y)\in[a,b;c,d]$$

и λ – числовой параметр. Здесь предполагаем непрерывность ядра и правой части. Интеграл заменяется на кубатурные формулы при фиксированных x, y. Берется сетка узлов (s_i,t_j), где $i,j=1,2,...,N$. Получим:

$$z(x,y)-\lambda\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}K(x,y,s_i,t_j)z(s_i,t_j)C_{ij}+R_N=u(x,y),$$

где R_N − остаток кубатуры. Далее берем сетку узлов на [*a,b*; *c,d*] и разбивается на N^2 узлов (x_p,y_k) для $p,k=\overline{1,N}$. Для сведения задачи к разностной, описываемой системой линейных алгебраических уравнений, воспользуемся **квадратурной формулой прямоугольников (левых, правых, центральных) и трапеций**. Они удобны для счета на ЭВМ и требуют меньшей гладкости подынтегральных функций. Итак, получаем равенства

$$z(x_p,y_k)-\lambda\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}C_{ij}K(x_p,y_k,s_i,t_j)z(s_i,t_j)+R_N=u(x_p,y_k),$$

где $C_{ij}=A_iB_j$ при $A_i=hs=\dfrac{b-a}{N},\quad B_j=ht=\dfrac{d-c}{N},\ i,j=1,...,N$ и узлы

$$s_i=a+hs(i-p),\quad t_j=c+ht(j-p),$$

$$x_i=a+hs(i-p),\quad y_j=c+ht(j-p),$$

Здесь **p = 0** – для левых прямоугольников, **p = 1** – правых, **p = 0, 5** – центральных. Для квадратур трапеций $hs=\dfrac{b-a}{N-1},\quad ht=\dfrac{d-c}{N-1}$ и коэффициенты

$A_1=A_N=hs/2,\quad A_j=hs,\ B_1=B_N=ht/2,\quad B_j=ht,\quad j=2,N-1$

и $C_{ij}=A_iB_j$. Отбрасывая остаток, получаем систему линейных уравнений

$$z_{pk}-\lambda\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}C_{ij}K(x_p,y_k,s_i,t_j)z_{ij}=u_{pk}=u(x_p,y_k)\ ,$$

где $z_{ij}\approx z(s_i,t_j)$ в узлах. Здесь имеем 4-х индексную матрицу, которую разворачиваем в 2-х индексную и матрицы в вектор (для правой части). Матрицу (u_{pk}) разворачиваем в вектор столбец, приписывая к первому столбцу второй, ко второму третий и так далее при $p,k=\overline{1,N}$. Индексы (p,k) переходят соответственно в индексы $q=(p-1)N+k$. Тогда $q=\overline{1,N^2}$ и матрица $\left(u_{pk}\right)$ переходит в вектор $\overline{U}=(U_q)$, где $U_q=u(x_p,y_k)$.

Запишем двойную сумму как произведение строки матрицы на вектор неизвестных z_q, который представим как вектор разворота матрицы (z_{pk}) в вектор. Тем самым имеем вектор $\overline{z}=(z_q)$, где z_q его компонента и индекс $q=(p-1)N+k$. Здесь изменение индекса $q=\overline{1,N^2}$. Далее 4-х-индексную матрицу $K(x_p,y_k,s_i,t_j)$ разворачиваем в обычную матрицу так, чтобы индексы (i,j) соответствовали индексам q вектора $\overline{z}=(z_q)$. Отсюда получаем матрицу $M=\left(M_{qn}\right)$ размера ($N^2\times N^2$), где $M_{qn}=K(x_p,y_k,s_i,t_j)A_iB_j$ для индексов $q=(p-1)N+k$ и $n=(j-1)N+i$ при $i,j,p,k=\overline{1,N}$. Тогда имеем систему линейных алгебраических уравнений вида: $\overline{z}-\lambda M\overline{z}=\overline{U}$, где вектора $\overline{z}=(z_q)$ и $\overline{U}=(U_q)$.

Чтобы получить матрицу приближенных решений в узлах сетки, надо обратно вектор решения системы свернуть в матрицу. Это осуществляется по формулам $z_{ik}=z_p$, где индекс $p=k+(i-1)N$ при $i,k=\overline{1,N}$. Отсюда получаем приближенно $z_{ik}\approx z(x_i,y_k)$ для решения $z(x,y)$ в узлах сетки узлов. На основе [7] при существовании обратного P^{-1} погрешность каркаса и приближенного решения $z_p(x,y)=\lambda\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}K(x,y,s_i,t_j)z(s_i,t_j)C_{ij}+u(x,y)$ будет порядка R_N − погрешности кубатурной формулы.

ГЛАВА 5. Метод интегральных уравнений для краевых задач

§5.1. *Функция Грина линейной краевой задачи*

При аналитическом исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений во многих случаях удобнее рассматривать эквивалентные им интегральные уравнения, содержащие полную математическую постановку описываемой задачи и находящие эффективное применение при определении собственных значений и функций. Развитие численных методов позволяет использовать интегральные уравнения и для непосредственного численного решения краевых задач, не прибегая к дифференциальным уравнениям. Эквивалентное преобразование обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями к интегральным уравнениям осуществляется обычно посредством функции Грина [2]. Стоит отметить, что обратные переход не всегда возможен: известны многие случаи описания краевых задач в виде интегральных уравнений, не имеющих аналогов среди дифференциальных уравнений и поэтому не допускающих соответствующих преобразований без применения каких-либо приемов аппроксимации.

1.Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \quad x \in [a,b], \qquad (1.5.1)$$

где функции $p_0(x), p_1(x),\ldots, p_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, $p_0(x)\neq 0$ на $[a,b]$, и линейные формы краевых условий

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) +$$
$$+ \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0, \ (k = 1,2,\ldots,n), \qquad (2.5.1)$$

являются линейно независимыми от величин

$$y(a), y'(a),\ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b),\ldots, y^{(n-1)}(b).$$

Предположим, что однородная краевая задача (1.5.1),(2.5.1) имеет только одно решение $y(x) \equiv 0$. Функцией Грина [2] (функцией влияния) краевой задачи (1.5.1), (2.5.1) называется функция $G(x,\xi)$, построенная для любой точки ξ, $a<\xi<b$, и имеющая следующие 4 свойства:

1. $G(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$ порядка включительно при $a \le x \le b$.

2. Её $(n-1)$-я производная по x в точке $x=\xi$ имеет разрыв 1-го рода, со скачком $1/p_0(\xi)$:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)} \ ;$$

3. В каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения (1.5.1): $L[G]=0$.

4. $G(x,\xi)$ по от x удовлетворяет граничным условиям (2.5.1): $V_k(G)=0$.

Теорема 1. Если однородная краевая задача имеет лишь одно нулевое решение $y(x)\equiv 0$, то существует только одна функция Грина [2].

Доказательство. Рассмотрим функции $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ − линейно независимые решения уравнения (1).Тогда по свойству (3) при $a\le x\le s$

$$G(x,s)=a_1(s)y_1(x)+a_2(s)y_2(x)+\dots a_n(s)y_n(x),$$

а при $s\le x\le b$ получаем

$$G(x,s)=b_1(s)y_1(x)+b_2(s)y_2(x)+\dots b_n(s)y_n(x),$$

где $a_1(s),a_2(s),\dots,a_n(s)$, $b_1(s),b_2(s),\dots,b_n(s)$ − некоторые функции от переменной $s\in[a,b]$.Тогда функция Грина имеет вид:

$$G(x,s)=\begin{cases} a_1(s)y_1(x)+a_2(s)y_2(x)+\dots a_n(s)y_n(x), & a\le x\le s \\ b_1(s)y_1(x)+b_2(s)y_2(x)+\dots b_n(s)y_n(x), & s\le x\le b \end{cases},$$

По свойствам 1,2 для $G(x,s)$(непрерывности $G(x,s)$ и её производных до ($n-2$) порядка включительно при $a\le x\le b$) и скачка $(n-1)$ прозводной по свойству (3) получаем при $x=s$ систему равенств:

$$b_1(s)y_1(s)+b_2(s)y_2(s)+\dots b_n(s)y_n(s)-$$
$$-a_1(s)y_1(s)+a_2(s)y_2(s)+\dots a_n(s)y_n(s)=0,$$

....

$$b_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+b_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\dots b_n(s)y_n^{(n-2)}(s)-$$
$$-a_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+a_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\dots a_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0,$$

и также

$$b_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+b_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\dots b_n(s)y_n^{(n-1)}(s)-$$
$$-a_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+a_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\dots a_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=1/p_0(s).$$

Введем функции $C_k = C_k(s)=b_k(s)-a_k(s)$. Тогда получаем систему

$$\begin{aligned} &C_1y_1(s)+C_2y_2(s)+\dots+C_ny_n(s)=0 \\ &C_1y_1'(s)+C_2y_2'(s)+\dots+C_ny_n'(s)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_1y_1^{(n-2)}(s)+C_2y_2^{(n-2)}(s)+\dots+C_ny_n^{(n-2)}(s)=0 \\ &C_1y_1^{(n-1)}(s)+C_2y_2^{(n-1)}(s)+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(s)=1/p_0(s). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Определитель системы (3.5.1) есть определитель Вронского $W[\overline{y}(x)]=W(x)$, вычисленный в точке $x=s$ для $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ − линейно независимых решений уравнения (1.5.1). Тем самым $W(s)\ne 0$ и функции $C_k(s)$ для $k=\overline{1,n}$ определяются однозначным образом. Для нахождения функций $b_k(s)$, $a_k(s)$ используем краевые условия (2.5.1). Обозначим через

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a),$$
$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b).$$
Отсюда $V_k(y) = A_k(y) + B_k(y)$ при $k = \overline{1,n}$. Очевидно $A_k(y), B_k(y)$ являются линейными формами по переменной y.Тогда по свойству 4. функции Грина для $k = \overline{1,n}$ и линейности $A_k(y), B_k(y)$ имеем равенства:
$$V_k(G) = a_1(s)A_k(y_1) + a_2(s)A_k(y_2) + \ldots a_n(s)A_k(y_n) +$$
$$+ b_1(s)B_k(y_1) + b_2(s)B_k(y_2) + \ldots b_n(s)B_k(y_n) = 0.$$
Поскольку $a_k(s) = b_k(s) - C_k(s)$, то осуществляя в предыдущем равенстве эту замену и с учетом $A_k(y) + B_k(y) = V_k(y)$, получаем после несложных преобразований для $k = \overline{1,n}$ систему равенств:
$$\begin{aligned} &b_1(s)V_k(y_1) + b_2(s)V_k(y_2) + \ldots + b_n(s)V_k(y_n) = \\ &= C_1(s)A_k(y_1) + C_2(s)A_k(y_2) + \ldots + C_n(s)A_k(y_n). \end{aligned} \qquad (4.5.1)$$
Так как функции $C_k(s), k = \overline{1,n}$ найдены из системы (3.5.1), то $b_1(s), b_2(s), \ldots, b_n(s)$ есть единственное решение системы (4.5.1) с определителем $\det(M) \neq 0$, где матрица $M = \lfloor V_k(y_j) \rfloor$ при $k, j = \overline{1,n}$. Здесь определитель отличен от нуля вследствие линейной независимости форм $V_k(y)$ от величин $y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)$. Тогда функции $a_k(s) = b_k(s) - C_k(s)$, $k = \overline{1,n}$ и определяются однозначно. Тем самым существование и единственность функции Грина доказана. Кроме этого указан метод её построения. Теорема доказана.

Рассмотрим примеры нахождения функции Грина.

Пример 1. Построим функцию Грина для краевой задачи
$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad x \in [a,b], \quad y(a)=y(b)=0, \qquad (5.5.1)$$
где функция $q(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируемая функция $p(x) \neq 0$ на $[a,b]$, а задача (3.5.1) имеет лишь нулевое решение.

Решение. Пусть $y_1(x)$ есть решение уравнения (5.5.1), определяемое начальными условиями $y_1(a) = 0, y_1'(a) = \alpha \neq 0$. Это решение не обязано удовлетворять второму граничному условию, поэтому будем предполагать, что $y_1(b) \neq 0$. Но функции $C_1 y_1(x)$, где C_1 − произвольная постоянная, очевидно, являются решениями уравнения (5.5.1) и удовлетворяют граничному условию $y(a)=0$. Далее находим ненулевое решение $y_2(x)$ уравнения (5.5.1) такое, чтобы значение $y_2(b) = 0$. Покажем, что решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно независимыми. Действительно, если $a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ при некоторых числах $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то, полагая $x = b$, получаем $a_1 y_1(b) + a_2 y_2(b) = 0$. Но значения $y_2(b) = 0$ и $y_1(b) \neq 0$.

Отсюда $a_1 = 0$ и $a_2 y_2(x) \equiv 0$ на [*a,b*]. Поскольку же функция $y_2(x)$ не является тождественным нулём, то $a_2 = 0$. Итак, имеем противоречие с $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Следовательно, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми. Этому же условию будут удовлетворять все решения семейства $C_1 y\ (x)$ и $C_2 y_2(x)$, где $C_1, C_2 -$ произвольные постоянные.

Далее функцию Грина для задачи (3.5.1) ищем в виде:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi) y_1(x), a \le x \le \xi, \\ C_2(\xi) y_2(x), \xi \le x \le b, \end{cases}$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ зависят от ξ. Очевидно, функция $G(x,\xi)$ в этом виде удовлетворяет краевым условиям. Выберем теперь $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ таким образом, чтобы выполнялись свойства 1) и 2) для функции Грина. Тогда по свойству 1) функция $G(x,\xi)$ должна быть непрерывной по *x* при фиксированном ξ и, в частности, непрерывна в точке $x = \xi$. Поэтому

$$C_1(\xi) y_1(\xi) = C_2(\xi) y_2(\xi).$$

По свойству 2) производная $G_x'(x,\xi)$ при $x = \xi$ имеет скачок $1/p(\xi)$:

$$C_2(\xi) y_2'(\xi) - C_1(\xi) y_1'(\xi) = 1/p(\xi).$$

Таким образом, для нахождения функций $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) = 0 \\ -C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) = 1/p(\xi). \end{cases} \tag{6.5.1}$$

Определитель системы (6.5.1) будет $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$ − определитель Вронского, вычисленный в точке $x = \xi$ для линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (5.5.1). Тем самым $W(\xi) \neq 0$ и $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ находятся из системы (6.5.1) и имеют вид:

$$C_1(\xi) = y_2(\xi)/p(\xi)W(\xi), \quad C_2(\xi) = y_1(\xi)/p(\xi)W(\xi).$$

Подставляя выражение для C_1 и C_2 в $G(x,\xi)$, находим функцию Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) / p(\xi) W(\xi), a \le x \le \xi, \\ y_1(\xi) y_2(x) / p(\xi) W(\xi), \xi \le x \le b. \end{cases}$$

Отметим, что рассмотренную задачу путем раскрытиея производной нетрудно свести к краевой задачи вида: $p(x)y'' + p'(x)y + q(x)y = 0$.

Пример 2. Рассмотрим частный случай задачи (4.5.1): $p(x) \equiv 1$ и $q(x) \equiv 0$ на [*a,b*] . Тогда имеем задачу: $y'' = 0$ и *y*(*a*)=*y*(*b*)=0. Возьмем $y_1(x) = x - a$, а $y_2(x) = x - b$. Эти функции удовлетворяют требованиям примера 1. Здесь вронскиан $W(x) = b - a$ и тем самым

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(x-a)(\xi-b)/(b-a), & a\le x\le \xi,\\ (\xi-a)(x-b)/(b-a), & \xi\le x\le b.\end{cases}$$

Отметим, что функция Грина в примере 2 симетричная: $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу: $y^{(4)}(x)=0$, $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=y'(1)=0$. Здесь функция $p_0(x)=1$, а остальные коэффициенты нулевые. Построим для этой задачи функцию Грина. Сначала покажем, что краевая задача имеет лишь нулевое решение. Фундаментальная система решений здесь $y_1(x)=1, y_2(x)=x, y_3(x)=x^2, y_4(x)=x^3$. Тогда общее решение краевой задачи имеет вид: $y(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3$, где $A,B,C,D-$ произвольные постоянные. Краевые условия дают четыре соотношения для определения A,B,C,D: $y(0)=A=0$, $y'(0)=B=0$,

$$y(1)=A+B+C+D=0, \qquad y'(1)=B+2C+3D=0.$$

Отсюда $A=B=C=D=0$ и краевая задача имеет только нулевое решение $y(x)\equiv 0$. Тогда для нее можно построить функцию Грина. Используя фундаментальную систему решений, представим функцию Грина $G(x,\xi)$ в виде:

$$G(x,\xi)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+a_4\cdot x^3 \text{ при } 0\le x\le \xi, \tag{7.5.1}$$

$$G(x,\xi)=b_1\cdot 1+b_2\cdot x+b_3\cdot x^2+b_4\cdot x^3 \quad \text{при } \xi\le x\le 1,$$

где $a_k=a_k(\xi)$, $b_k=b_k(\xi)-$ пока еще неизвестные функции от ξ для $k=1,2,3,4$. Следуя теореме 1, положим

$$c_k=c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi), \ (k=1,2,3,4)$$

и выпишем систему линейных уравнений для нахождения функции $c_k(\xi)$:

$$c_1+c_2\xi+c_3\xi^2+c_4\xi^3=0,\ c_2+2c_3\xi+3c_4\xi^2=0,\ 2c_3+6c_4\xi=0,\ 6c_4=1.$$

Решая эту систему, получим:

$$c_1(\xi)=-\frac{1}{6}\xi^3,\ \ c_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2,\quad c_3(\xi)=-\frac{1}{2}\xi,\ \ c_4(\xi)=\frac{1}{6}.$$

По свойству функции Грина она должна удовлетворяет краевым условиям :

$$G(0,\xi)=0,\ \ G'_x(0,\xi)=0,\quad G(1,\xi)=0,\ \ G'_x(1,\xi)=0.$$

Из них получаем: $a_1=0, a_2=0,\ b_1+b_2+b_3+b_4=0, b_2+2b_3+3b_4=0.$

Используя равенство $c_k=b_k-a_k$, $(k=1,2,3,4)$, находим

$$a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3,\quad a_4=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\ ,$$

$$b_1=-\frac{1}{6}\xi^3,\qquad b_2=\frac{1}{2}\xi^2,\quad b_3=\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2,\quad b_4=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\ .$$

Подсталяя значения коэффициентов $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ в равенства (7.5.1), получим искомую функцию Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & 0\le x\le\xi,\\ -\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^2x+\left(\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Пример 4. Рассмотрим нахождение функции Грина для краевой задачи:

$$y^{(4)}(x)=0,\qquad y(0)=y''(0)=0,\quad y(1)=y''(1)=0\ .$$

Покажем, что краевая задача имеет лишь нулевое решение. Фундаментальная система решений здесь: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=x^2,\ y_4(x)=x^3$.Тогда его общее решение будет: $y(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3$, где A,B,C,D − произвольные постоянные. Из краевых условий имеем для определения A,B,C,D. четыре соотношения:

$y(0)=A=0,\ y''(0)=2C=0,\ y(1)=A+B+C+D=0,\ y''(1)=2C+6D=0.$

Отсюда $A=B=C=D=0$. Таким образом, у краевой задачи только нулевое решение $y(x)\equiv 0$ и для нее можно построить функцию Грина $G(x,\xi)$. Используя фундаментальную систему решений, представим $G(x,\xi)$ в виде

$$\begin{aligned}&G(x,\xi)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+a_4\cdot x^3 \ \text{ при } 0\le x\le\xi,\\ &G(x,\xi)=b_1\cdot 1+b_2\cdot x+b_3\cdot x^2+b_4\cdot x^3 \ \text{ при } \xi\le x\le 1,\end{aligned}\qquad (8.5.1)$$

где $a_k=a_k(\xi),\ b_k=b_k(\xi)$− пока еще неизвестные функции от ξ для $k=1,2,3,4$. Положим $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi),(k=1,2,3,4)$ и выпишем систему линейных уравнений для нахождения функции $c_k(\xi)$, имеющую вид:

$$c_1+c_2\xi+c_3\xi^2+c_4\xi^3=0,\ c_2+2c_3\xi+3c_4\xi^2=0,\ 2c_3+6c_4\xi=0,\ 6c_4=1.$$

Решая эту систему, получим:

$$c_1(\xi)=-\frac{1}{6}\xi^3,\ c_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2,\ c_3(\xi)=-\frac{1}{2}\xi,\ c_4(\xi)=\frac{1}{6}.$$

Далее воспользуемся тем свойством функции Грина, что она должна удовлетворять краевым условиям:

$$G(0,\xi)=0,\ \ G''_{x^2}(0,\xi)=0,\ G(1,\xi)=0,\ \ G''_{x^2}(1,\xi)=0.$$

Эти соотношения принимают вид:

$$a_1=0,\ a_3=0,\ b_1+b_2+b_3+b_4=0,\ 2b_3+6b_4=0.$$

Используя равенства $c_k=b_k-a_k$ при $k=1,2,3,4$ находим

$$a_1=0,\qquad a_2=\frac{1}{3}\xi-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{6}\xi^3,\quad a_3=0,\qquad a_4=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\xi\ \ ,$$

$$b_1=-\frac{1}{6}\xi^3,\quad b_2=\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{3}\xi,\qquad b_3=-\frac{1}{2}\xi,\qquad b_4=\frac{1}{6}\xi,$$

Подставив в (8.5.1) значения для $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$, получим

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\xi-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{6}\xi^3\right)x+\left(\frac{1}{6}\xi-\frac{1}{6}\right)x^3, & 0\le x\le\xi,\\ -\frac{1}{6}\xi^3+\left(\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{3}\xi\right)x-\frac{1}{2}\xi x^2+\frac{\xi}{6}x^3, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Отметим, что функция Грина в примерах 3,4 симетричная: $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

§5.2. *Решение краевых задач с помощью функции Грина*

Важным достоинством функций Грина является возможность их применения с целью представления краевых задач в виде интегральных уравнений. Применение функции Грина является одним из эффективных методов решения краевых задач. Рассмотрим краевую задачу:

$$L[y]=p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+p_n(x)y(x)=f(x),$$

$$V_1(y)=0,\ V_2(y)=0,...,V_n(y)=0,\ x\in[a,b].$$

Здесь функции $f(x)$, $p_0(x),p_1(x),...,p_n(x)$ предполагаются непрерывными на $[a,b]$ и $p_0(x)\neq 0$ на $[a,b]$, а линейные формы краевых условий

$$V_k(y)\equiv\alpha_k y(a)+\alpha_k{}^{(1)}y'(a)+...+\alpha_k{}^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+\beta_k y(b)+$$

$$+\beta_k{}^{(1)}y'(b)+...+\beta_k{}^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)=0,\ (k=1,2,...,n),$$

линейно-независимыми от величин

$$y(a),y'(a),...,y^{(n-1)}(a),y(b),y'(b),...,y^{(n-1)}(b).$$

Верна по [2]

Теорема 1. Если $G(x,s)$ есть функция Грина однородной краевой задачи $L[y]=0,V_k(y)=0,k=\overline{1,n}.$, то решение неоднородной краевой задачи будет: $y(x)=\int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds$.

Пример 1. Используя функцию Грина, решить краевую задачу

$$y''(x)-k^2y(x)=x,\quad y(0)=y(1)=0. \qquad (1.5.2)$$

Решение. Выясним сначала существование функция Грина краевой задачи: $y''(x)-k^2y(x)=0,\quad y(0)=y(1)=0.$ Здесь $y_1(x)=e^{kx},y_2(x)=e^{-kx}$ фундаментальная система решений уравнения $y''(x)-k^2y(x)=0$. Тогда его общее решение будет $y(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}$.

Краевые условия удовлетворяются тогда и только тогда, когда A=B=0. Тем самым $y(x)\equiv 0$ и функция Грина существует.По аналогии с предыдущими примерами нетрудно проверить, что

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sh}(kx)\mathrm{sh}(k(\xi-1))}{k\mathrm{sh}k}, & 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{\mathrm{sh}(k\xi)\mathrm{sh}(k(x-1))}{k\mathrm{sh}k}, & \xi\le x\le 1,\end{cases} \qquad (2.5.2)$$

является функцией Грина для краевой задачи (1.5.2). Тогда решение краевой задачи (1.5.2) будет $y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\xi d\xi$, где $G(x,\xi)$ определена формулой (2.5.2). Преобразовая, получим $y(x)=(\frac{\mathrm{sh}kx}{\mathrm{sh}k}-x)/k^2$. Проверяя, убеждаемся, что эта функция есть решение краевой задачи (1.5.2).

§5.3. ***Краевые задачи с параметром***

Во многих вопросах приходится рассматривать краевую задачу вида

$$L[y]=\lambda y+h(x),\quad x\in[a,b], \qquad (1.5.3)$$

$$V_k(y)=0,\ (k=1,2,\dots,n), \qquad (2.5.3)$$

где оператор $L[y]$ и краевые условия $V_k(y)=0$ заданы в виде:

$$L[y]=p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+p_n(x)y(x),$$

$$V_k(y)=\alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+...+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+\beta_k y(b)+$$

$$+\beta_k^{(1)}y'(b)+...+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b) \quad, k=1,2,...,n\,.$$

В этой задаче функции $h(x)$, $p_0(x), p_1(x),..., p_n(x)$ предполагаются непрерывными на $[a,b]$ и $p_0(x)\neq 0$ на $[a,b]$, а линейные формы краевых условий

$$V_k(y)\equiv\alpha_k y(a)+\alpha_k{}^{(1)}y'(a)+...+\alpha_k{}^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+\beta_k y(b)+$$

$$+\beta_k{}^{(1)}y'(b)+...+\beta_k{}^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)=0,\ (k=1,2,...,n),$$

линейно-независимыми от величин

$$y(a), y'(a),..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b),..., y^{(n-1)}(b).$$

Здесь $\lambda-$ некоторый числовой параметр. При $h(x)\equiv 0$ получается однородная краевая задача

$$L[y]=\lambda y,\quad V_k(y)=0,\ (k=1,2,..,n). \qquad (3.5.3)$$

Те значения λ, для которых краевая задача (3) имеет нетривиальные решения $y(x)$, называются собственными значениями краевой задачи (3.5.3), а эти решения – соответствующими собственными функциями. Верна [2]

Теорема 1. Если краевая задача $L[y]=0,\quad V_k(y)=0\quad(k=1,2,..,n)$ имеет функцию Грина $G(x,\xi)$, то краевая задача (1),(2) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi+f(x) \text{ при } f(x)=\int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi. \qquad (4.5.3)$$

Замечание 1. Уравнение (4.5.3) можно решать вышеизложенными методами. Здесь наиболее применимы метод квадратур и Галеркина.

Замечание 2. Так как $G(x,\xi)$ − непрерывное ядро, то к интегральному уравнению применима теория Фредгольма. Поэтому однородное интегральное уравнение может иметь не более счетного числа характеристических чисел $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...,$ не имеющих конечной предельной точки. Для всех значений λ, отличных от характеристических, неоднородное уравнение (4.5.3) имеет решение при любой непрерывной правой части $f(x)$ по формуле $y(x)=\lambda\int_a^b R(x,\xi;\lambda)f(\xi)d\xi+f(x),$ где $R(x,\xi;\lambda)-$ резольвента ядра $G(x,\xi)$.
При этом для любых фиксированных значений x и ξ из $[a,b]$ функция $R(x,\xi;\lambda)$ является мероморфной функцией от λ, полюсами которой могут быть лишь характеристические числа однородного интегрального уравнения

§5.4. *Системы краевых задач*

1. Рассмотрим систему краевых задач [15] при $\mu=1,...,m$ и $x\in[a,b]$

$$L_\mu[z_\mu]=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{\mu,\nu}B_{\mu,\nu}(x)z_\nu(x)+f_\mu(x), \qquad (1.5.4)$$

с дифференциальными операторами

$$L_\mu[z_\mu]=p_{0,\mu}(x)z_\mu{}^{(n)}(x)+p_{1,\mu}(x)z_\mu{}^{(n-1)}(x)+...+p_{n,\mu}(x)z_\mu(x)$$

и краевыми условиями линейно-независимых форм

$$\begin{aligned}V_{k,\mu}(z_\mu)&=\alpha_{k,\mu}z_\mu(a)+\alpha_{k,\mu}^{(1)}z_\mu{}'(a)+...+\alpha_{k,\mu}^{(n-1)}z_\mu{}^{(n-1)}(a)+\beta_{k,\mu}z_\mu(b)+\\&+\beta_{k,\mu}^{(1)}z_\mu{}'(b)+...+\beta_{k,\mu}^{(n-1)}z_\mu{}^{(n-1)}(b)=0, \quad k=1,2,...,n.\end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

Здесь $\lambda_{\mu,\nu}-$ числовые параметры. Предполагаем также непрерывность $p_{j,\mu}(x)$, $B_{\mu,\nu}(x)$, $f_\mu(x)$ на отрезке $[a,b]$ при $\mu,\nu=1,...,m$ и $j=0,1,...,n$.

Пусть существуют функции Грина $G_\mu(x,s)$ для краевых задач:
$L_\mu[z_\mu]=0,\ \ \mu=1,...,m\ ,\quad x\in[a,b]$ и $V_{k,\mu}(z_\mu)=0,\quad k=1,2,...,n.$
Тогда система задач (1.5.4), (2.5.4) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$z_\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{\mu,\nu}\int_a^b G_\mu(x,s)B_{\mu,\nu}(s)z_\nu(s)ds+\int_a^b G_\mu(x,s)f_\mu(s)ds,\ \mu=1,...,m \quad (3.5.4)$$

при $x \in [a,b]$. Решение системы (3.5.4) уравнений второго рода и будет решением краевых задач (1.5.4), (2.5.4). Отметим, что в случае неоднородных краевых условий путем линейной замены получаем для новой переменной однородные краевые условия и добавленные функции в правую часть (1.5.4).

2. Рассмотрим примеры системы краевых задач и сведение их к системе интегральных уравнений. Для наглядности ограничимся двумя уравнениями.

Пример 1. Пусть имеем на отрезке $[a,b]$ систему краевых задач:

$$\begin{cases} z_1''(x) = \lambda_{11}B_{11}(x)z_1(x) + \lambda_{12}B_{12}(x)z_2(x) + f_1(x) \\ z_2''(x) = \lambda_{21}B_{21}(x)z_1(x) + \lambda_{22}B_{22}(x)z_2(x) + f_2(x) \end{cases} \tag{4.5.4}$$

с краевыми условиями $z_1(a) = z_1(b) = 0, \quad z_2(a) = z_2(b) = 0$. Все функции $B_{ij}(x), \; f_i(x)$ при $i, j = 1{,}2$ непрерывны. Поскольку при $i, \; j = 1{,}2$ существует для однородной краевой задачи (4.5.4) функция Грина по примеру 2 §6.1, то получаем нижеследующую систему (5.5.4):

$$z_1(x) = \lambda_{11}\int_a^b G_1(x,s)B_{11}(s)z_1(s)ds + \lambda_{12}\int_a^b G_1(x,s)B_{12}(s)z_2(s)ds + \int_a^b G_1(x,s)f_1(s)ds$$

$$z_2(x) = \lambda_{21}\int_a^b G_2(x,s)B_{21}(s)z_1(s)ds + \lambda_{22}\int_a^b G_2(x,s)B_{22}(s)z_2(s)ds + \int_a^b G_2(x,s)f_2(s)ds$$

с функциями Грина $G_1(x,s) = G_2(x,s) = G(x,s)$, где

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-b)(x-a)}{b-a}, & a \le x \le s \\ \dfrac{(x-b)(s-a)}{b-a}, & s \le x \le b \;, \end{cases}$$

построенная для однородной краевой задачи: $z''(x) = 0, \; z(a) = z(b) = 0.$

Рассмотрим на [0,1] систему краевых задач 4-го порядка:

$$\begin{cases} z_1^{(4)}(x) = \lambda_{11}B_{11}(x)z_1(x) + \lambda_{12}B_{12}(x)z_2(x) + f_1(x) \\ z_2^{(4)}(x) = \lambda_{21}B_{21}(x)z_1(x) + \lambda_{22}B_{22}(x)z_2(x) + f_2(x). \end{cases} \tag{6.5.4}$$

Здесь предполагаем непрерывность функций $B_{\mu,\nu}(x), \;\; f_\mu(x)$, где $\mu, \nu = 1{,}2$.

Пример 2. Пусть для (6.5.4) имеем краевые условия
$z_1(0) = z_1(1) = 0, z_2(0) = z_2(1) = 0$ и $z_1'(0) = z_1'(1) = 0, z_2'(0) = z_2'(1) = 0$.
Используя пример 3 §6.1, получаем функцию Грина вида:

$$G(x,s) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}s - s^2 + \dfrac{1}{2}s^3\right)x^2 - \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}s^2 + \dfrac{1}{3}s^3\right)x^3, & 0 \le x \le s, \\ -\dfrac{1}{6}s^3 + \dfrac{1}{2}s^2x + \left(\dfrac{1}{2}s^3 - s^2\right)x^2 + \left(\dfrac{1}{2}s^2 - \dfrac{1}{3}s^3\right)x^3, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

По симметрии функции Грина $G(x,s) = G(s,x)$. Преобразуя, имеем

$$G(x,s)=\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)s^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)s^3 \quad \text{при} \quad s\le x\le 1.$$

Отсюда имеем систему интегральных уравнений вида (5.5.4) с $a=0, b=1$.

Пример 3. Рассмотрим систему краевых задач вида (6.5.4) с условиями $z_1(0)=z_1(1)=0,\ z_2(0)=z_2(1)=0$ и $z_1''(0)=z_1''(1)=0,\ z_2''(0)=z_2''(1)=0$.

Используя пример 4 §6.1, получаем функцию Грина :

$$G(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{6}s^3\right)x+\left(\frac{1}{6}s-\frac{1}{6}\right)x^3, & 0\le x\le s,\\ -\frac{1}{6}s^3+\left(\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{3}s\right)x-\frac{1}{2}sx^2+\frac{s}{6}x^3, & s\le x\le 1.\end{cases} \tag{7.5.4}$$

Тогда получаем систему интегральных уравнений того же вида, что и в примере 2 только с функцией Грина (7.5.4) .

Пример 4. Рассмотрим систему краевых задач вида (6.5.4) и условиями $z_1(0)=z_1(1)=0,\ z_2(0)=z_2(1)=0$ и $z_1'(0)=z_1'(1)=0$, $z_2''(0)=z_2''(1)=0$.

Для функции $z_1(x)$ с её краевыми условиями функция Грина имеет вид:

$$G_1(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}s-s^2+\frac{1}{2}s^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^3\right)x^3, & 0\le x\le s,\\ -\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2x+\left(\frac{1}{2}s^3-s^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{3}s^3\right)x^3, & s\le x\le 1.\end{cases}$$

Для функции $z_2(x)$ с ее краевыми условиями функция Грина будет

$$G_2(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{6}s^3\right)x+\left(\frac{1}{6}s-\frac{1}{6}\right)x^3, & 0\le x\le s,\\ -\frac{1}{6}s^3+\left(\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{3}s\right)x-\frac{1}{2}sx^2+\frac{s}{6}x^3, & s\le x\le 1.\end{cases}$$

Тогда получаем систему интегральных уравнений вида (5.5.4) с $a=0, b=1$. Отметим также, что если в краевых задачах $x\in[a,b]$, то делая линейную замену сводим её к задаче на $[0,1]$.

3. Рассмотрим систему в частных производных 4-го порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=a_1\,\dfrac{\partial^4 u_1(x,t)}{\partial x^4}-b_1u_2(x,t)+F_1(x,t)\\ \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=a_2\,\dfrac{\partial^4 u_2(x,t)}{\partial x^4}-b_2u_1(x,t)+F_2(x,t),\end{cases} \tag{8.5.4}$$

где $a_1, a_2. > 0$ и $F_1(x,t) = \varphi_1(x)\sin\omega t, \quad F_2(x,t) = \varphi_2(x)\sin\omega t$. Тогда ищем решение в виде: $u_1(x,t) = z_1(x)\sin\omega t, \quad u_2(x,t) = z_2(x)\sin\omega t$, где $z_1(x)$ и $z_2(x)$ некоторые функции. Подставляя $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в (7.5.4) и вычисляя производные при сокращении на $\sin\omega t$, получаем систему 4-го порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z_1^{(4)}(x) = (\lambda_{11} z_1(x) + \lambda_{12} z_2(x)) + f_1(x) \\ z_2^{(4)}(x) = (\lambda_{21} z_1(x) + \lambda_{22} z_2(x)) + f_2(x) \end{cases} \tag{9.5.4}$$

с параметрами $\lambda_{11} = -\omega^2 / a_1, \lambda_{21} = -\omega^2 / a_2, \quad \lambda_{12} = b_1 / a_1, \lambda_{22} = b_2 / a_2$ и функциями $f_1(x) = \varphi_1(x)/a_1,\ f_2(x) = \varphi_2(x)/a_2$.

Пример 5. Пусть для задачи (7.5.4) краевые условия на концах отрезка при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$ будут:

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0, \quad u'_{1,x}(0,t) = u'_{1,x}(1,t) = 0$$
$$u_2(0,t) = u_2(1,t) = 0, \quad u'_{2,x}(0,t) = u'_{2,x}(1,t) = 0$$

Тогда $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям:

$z_1(0) = z_1(1) = 0, z_2(0) = z_2(1) = 0$ и $z_1'(0) = z_1'(1) = 0, z'_2(0) = z'_2(1) = 0$.

Функция Грина здесь будет равна

$$G(x,s) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}s - s^2 + \frac{1}{2}s^3\right)x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3\right)x^3, & 0 \le x \le s, \\ -\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2 x + \left(\frac{1}{2}s^3 - s^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3\right)x^3, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

На основе примера 2 при $G_1(x,s) = G_2(x,s) = G(x,s)$ получаем систему:

$$z_1(x) - (\lambda_{11}\int_0^1 G_1(x,s) z_1(s)ds + \lambda_{12}\int_0^1 G_1(x,s) z_2(s)ds) = \int_0^1 G_1(x,s) f_1(s)ds$$
$$z_2(x) - (\lambda_{21}\int_0^1 G_2(x,s) z_1(s)ds + \lambda_{22}\int_0^1 G_2(x,s) z_2(s)ds) = \int_0^1 G_2(x,s) f_2(s)ds \tag{10.5.4}$$

Пример 6 . Пусть для задачи (8.5.4) краевые условия на концах отрезка при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$ будут

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0, \quad u'_{1,x}(0,t) = u'_{1,x}(1,t) = 0$$
$$u_2(0,t) = u_2(1,t) = 0, \quad u''_{2,x}(0,t) = u''_{2,x}(1,t) = 0$$

Тогда $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям:

$z_1(0) = z_1(1) = 0, z_2(0) = z_2(1) = 0$ и $z_1'(0) = z_1'(1) = 0, z''_2(0) = z''_2(1) = 0$.

Для функции $z_1(x)$ с функция Грина $G_1(x,s)$ имеет вид:

$$G_1(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}s-s^2+\frac{1}{2}s^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^3\right)x^3, & 0\le x\le s,\\ -\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2x+\left(\frac{1}{2}s^3-s^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{3}s^3\right)x^3, & s\le x\le 1.\end{cases} \tag{11.5.4}$$

Для функции же $z_2(x)$ с ее краевыми условиями функция Грина

$$G_2(x,s)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{6}s^3\right)x+\left(\frac{1}{6}s-\frac{1}{6}\right)x^3, & 0\le x\le s,\\ -\frac{1}{6}s^3+\left(\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{3}s\right)x-\frac{1}{2}sx^2+\frac{s}{6}x^3, & s\le x\le 1.\end{cases} \tag{12.5.4}$$

Тогда получаем систему вида (10.5.4) с функциями Грина (11.5.4), (12.5.4). Отметим, что в примерах 5 и 6 $B_{ij}(s)\equiv 1$ для $i,j=1,2$ и система (7.5.4) возникает, например, при колебании 2-х стержней в упругой среде.

Замечание 1. Для функции Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & 0\le x\le \xi,\\ -\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^2x+\left(\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, & \xi\le x\le 1,\end{cases}$$

по ее симметрии : $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, возможно преобразование

$$G(x,\xi)=\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\xi^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\xi^3 \quad \text{при} \quad \xi\le x\le 1.$$

Это возможно применить для функции Грина $G_1(x,s)$.

Отметим, что применение интегралных уравнений Фредгольма второго рода и их приближённое решение имеются в [16], [17], [18].

Список литературы

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. − М.: ALT Linux: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. − 260 с.

2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.− Киев: Наукова думка.,1986.− 543 с.

3.Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. − М.: Наука, 1968.− 448 с.

4. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. − М.: Физматлит, 2002. − 160 с.

5. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. − М.: ОГИЗ, 1947. − 304с.

6.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.− М.: Наука, 1972. − 735 с.

7. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. −СПб.: БХВ-Петербург, 2006. − 288 с.

8.Манжиров А.В., Полянин А.Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. − М.: Факториал, 1999. − 272 с.

9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. − М., Наука, 1989. − 432 с.

10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. − М.: Наука, 1987. −

11. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. − М., Наука,1971. − 248 с.

12. Поршнев С.В. Вычислительная математика. Курс лекций. − СП-б.: БХВ- Петербург, 2004. − 320 с.

13. Вержбицкий В.М. Основы численного анализа. − М.: Высшая школа, 2001. − 840 с.

14. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. − М.: Наука, 1967. − 500 с.

15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. − М.: Наука. 1971. − 584 с.

16. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения. − М., Наука, 1968. − 192 с.

17. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравненимм математической физики. −М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

18. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. − М.: Физматгиз, 1962. − 708 с.

Методы приближённого решения интегральных уравнений второго рода

Учебно-методическое пособие

Составитель: **Калашников Александр Львович**