МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)

Институт Информационных Технологий, Математики и Механики

С.Е.Власов, М.Х.Прилуцкий

Распределение ресурсов в двухстадийных стохастических системах. Задачи планирования

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений» направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03.

Нижний Новгород
2015 год

УДК 519.874

В-

В- Власов С.Е., Прилуцкий М.Х. Учебно-методическая разработка Распределение ресурсов в двухстадийных стохастических системах. Задачи планирования – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 16с.

Рецензент: д.т.н., профессор Федосенко Ю.С.

В учебно-методическом пособии рассматривается проблема распределения ресурсов в двухстадийных стохастических системах. Строится общая математическая модель, в рамках которой ставится задача оптимального планирования, проводится её исследование. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых как задачи распределения ресурсов в двухстадийных стохастических системах. Материал учебно-методического пособия предназначен для для магистров 1 курса направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений».

Рассматривается проблема оптимального планирования некоторым классом производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности. Строятся математические модели, даются постановки оптимизационных задач планирования, предлагаются эффективные алгоритмы их решения. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых в рамках построенной математической модели. Материал учебного пособия используется при чтении курса лекций «Модели и методы принятия решений в детерминированных и стохастических системах» базовой части общенаучного цикла для магистров 1 курса направления подготовки «Прикладная информатика» 09.04.03, обучающихся по магистерской программе «Прикладная информатика в области принятия решений».

1. Введение

Решение широкого класса прикладных задач связано с распределением ресурсов в стохастических системах ([1-4]). Стохастический подход позволяет описывать задачи оптимального планирования и управления для широкого класса производственных систем, для которых характерным является учет случайного характера изменений характеристик производственных процессов и преобразуемых системой ресурсов. В качестве примеров таких систем в работе рассматриваются системы по переработке газового конденсата в нефтепродукты, изготовления печатных схем и мартеновского производства стали.

2. Содержательное описание проблемы оптимального планирования двухстадийными стохастическими системами

Мы будем рассматривать производственные системы, функционирующие по следующей схеме. Под воздействием технологических режимов производятся полуфабрикаты, из которых изготавливаются продукты производства. Специфика производственных систем состоит в том, что применение технологического режима не определяет продукт, который будет изготовлен, а задает вероятности получения того или иного полуфабриката. Каждому полуфабрикату соответствует набор продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен. Предполагаются известными как затраты на использование технологических режимов, так и доходы от выпуска продуктов. Задачи, рассматриваемые для подобных систем, будем называть *двухстадийными*, принимая за первую стадию процесс изготовления полуфабрикатов, а за вторую – переработку полуфабрикатов в продукты производства. Предполагается, что искомый план состоит из обязательных продуктов и им сопутствующих. Если по обязательным продуктам известны их количества, подлежащие выполнению в планируемом периоде, то при определении сопутствующих продуктов необходимо стремиться к тому, чтобы вероятность выполнения плана была достаточно велика. При этом нужно учитывать производственные затраты, определяемые выбранными технологическими режимами, и доходы от выпуска включенных в план производства продуктов. Задача оптимального планирования заключается в нахождении среди возможных планов, вероятности выполнения которых достаточно велики, плана, удовлетворяющего требуемым экономическим показателям. Постановка и решение задач оптимизации, возникающих при планировании двухстадийными производственными системами, функционирующими в условиях неопределенности, в дальнейшем иллюстрируются задачами оптимального планирования и управления процессом переработки газового конденсата, процессом производства больших (сверхбольших) интегральных схем и процессом производства стали в мартеновских печах ([5-10]).

3. Примеры двухстадийных стохастических производственных систем

3.1 Задача оптимального планирования процессом переработки газового конденсата

Рассматривается производственная система, которая из сырья (газовый конденсат различного состава), используя различные технологические установки, производит готовую продукцию (бензин, дизельное топливо, газ пропан, газ бутан и др.). Процесс производства нефтепродуктов из газового конденсата можно условно разбить на две стадии: переработка газового конденсата (сырья) в полуфабрикат, и получение из полуфабриката нефтепродуктов (продуктов производства). Газовый конденсат через емкости для сырья поступает на установки стабилизации конденсата, на которых под воздействием технологических режимов он преобразуется в полуфабрикаты (широкая фракция легких углеводородов, стабилизированный конденсат, пентан-гексановая фракция и др.). Процесс преобразования конденсата в полуфабрикаты является стохастическим. В зависимости от выбора технологического режима на установке стабилизации конденсата, с разной вероятностью реализуются те или иные полуфабрикаты. Для каждого полуфабриката предполагается известным, какие продукты производства могут быть из него изготовлены. Особенностями рассматриваемой производственной системы является то, что сырье, поступающее на переработку, может принадлежать как собственнику производственной системы (собственное сырье), так и являться «давальческим» (не собственное сырье) – т.е. поступает в систему на основе договоров. Задача оптимального планирования для рассматриваемой производственной системы заключается в обеспечении переработки в полном объеме «собственного» сырья (выпуск обязательных продуктов), и лишь после этого в загрузке оставшихся мощностей «давальческим» сырьем (выпуск сопутствующих продуктов). Результатом решения задачи планирования является формирование плана производства продуктов из собственного и давальческого сырья (портфель заказов), вероятность выполнения которого достаточно велика, при экстремальных значениях экономических показателей, связанных с максимизацией дохода, максимизацией прибыли, максимизацией удельного дохода и др.

3.2 Задача оптимального планирования процессом изготовления интегральных схем

При производстве больших (сверхбольших) интегральных схем используется позаказная система планирования. Каждый заказ включает в себя наборы партий пластин, из которых изготавливаются интегральные схемы. Технологический процесс изготовления интегральных схем можно условно разбить на две стадии – от запуска пластин в производство (выбор технологического режима) до операции резки (получение полуфабриката), и от операции резки до изготовления схемы (продукта производства). К основным операциям первой стадии относятся операции формирования партии пластин, гидромеханическая обработка, окисление, экспонирование, плазмохимическое травление, ионное легирование, химическая обработка и формирование партии на резку. В зависимости от конкретной партии и особенностей производства операции повторятся в некоторой последовательности со своими специфическими особенностями. На второй стадии осуществляются операции лазерной подгонки номиналов, комплектование, операционный контроль, термообработка микросхем, нанесение защитного покрытия, герметизация, термоциклирование, опрессовка и приемочный контроль. Первая стадия процесса изготовления носит стохастический характер, и только после операции резки (вторая стадия) определяются основные характеристики полученного полуфабриката, что позволяет осуществить подгонку номиналов на требуемую схему. Решение задачи планирования для рассматриваемой производственной системы позволяет определять, какие технологические режимы будут применяться в планируемом периоде, тем самым заранее обеспечить производство необходимыми материально-технологическими ресурсами.

3.3. Задачи оптимального планирования процессом производства стали в мартеновских печах

Производственный процесс получения стали в мартеновском цехе обладает следующей особенностью: химический состав основной части шихты (материал, из которого выплавляют сталь), заваливаемой в мартеновскую печь, практически определить заранее невозможно. Процесс выплавки стали условно разбивается на две стадии: от завалки печи шихтой до полного расплавления шихты, и от расплавления шихты до выпуска готовой стали. Все различные завалки печи шихтой образуют конечное множество – дискретизация происходит с учетом количества передельного чугуна, содержащегося в завалке. После расплавления шихты, когда расплавленный метал становиться однородным, берется проба металла на химический состав. Все различные химические анализы расплавленного металла образуют конечное множество – дискредитация происходит с учетом содержания в пробе углерода, серы, хрома, меди и никеля. Выбор завалки не определяет марку стали, которая будет выпущена, а задает лишь вероятность получения того или иного химического состава расплавленной шихты. Каждому химическому составу расплавленной шихты соответствует множество марок стали, которые при этом химическом анализе можно выпускать. В начале планируемого месяца и планируемых суток в цех поступает план, в котором указаны какие марки стали и в каком количестве необходимо выпустить в месяц и в сутки. Учитывая различные стоимости завалок и то, что доходы от выпуска различных марок стали зависят от того, запланированы они в суточном или месячном плане, требуется так управлять процессом производства стали, чтобы за заданное число плавок получить максимальную прибыль.

4. Постановка задачи оптимального планирования двухстадийными стохастическими системами

Пусть $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ и $k=\overline{1,s}$ - соответственно номера технологических режимов, полуфабрикатов и продуктов производства (I, J, K - соответствующие множества). Применение i-го технологического режима определяет вероятности p_{ij} изготовления j-тых полуфабрикатов, $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i=\overline{1,m}$. Каждому полуфабрикату j соответствует множество $K(j)$ продуктов, любой из которых может быть изготовлен из j-го полуфабриката, $K(j) \in \{1,2,\ldots,s\}$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через N - количество продуктов, которые будут выпущены в планируемом периоде, c_i - затраты на применение i-го технологического режима, g_k - доход от изготовления k-того продукта, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$. Пусть $N\vec{x}$, $N\vec{y}$ и $N\vec{z}$ соответственно m, n и s-мерные наборы, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_i = 1$, $\sum_{k=1}^{s} z_i = 1$, где x_i - доля i-ых технологических режимов, которые будут применены в планируемом периоде, y_j - доля j-ых полуфабрикатов, которые будут изготовлены в планируемом периоде, z_k - доля k-тых продуктов, запланированных к выпуску в планируемом периоде, $x_i \geq 0, y_j \geq 0, z_k \geq 0,\ i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$. Обозначим через $N\vec{v}$ - s-мерный набор такой, что $\sum_{k=1}^{s} v_k \leq 1$, где v_k - доля k-тых обязательных продуктов, которые должны быть включены в план, $v_k \geq 0$, $k=\overline{1,s}$.

Нетрудно показать, что из набора полуфабрикатов $N\vec{y}$ можно выполнить план $N\vec{z}$ тогда и только тогда, если совместна система 1:

(1) $$\sum_{j=1}^{n} w_{jk} \geq N z_k,\ k=\overline{1,s},$$

$$\sum_{k=1}^{s} w_{jk} \le Ny_j, \; j=\overline{1,n},$$

$$w_{jk}=0, \text{ если } k\notin K(j), \; j=\overline{1,n}, \; k=\overline{1,s},$$

$$w_{jk}\ge 0, \; j=\overline{1,n}, \; k=\overline{1,s}.$$

Построим систему линейных алгебраических неравенств, связывающую координаты векторов $N\overline{z}$ и $N\overline{y}$, такую, что удовлетворение этой системы необходимо и достаточно для совместности системы 1. Построим транспортную сеть с числом узлов $n+s$. Все множество узлов S сети разобьем на два подмножества: $P=\{1,2,\ldots,n\}$ и $M=\{1,2,\ldots,s\}$. Элементу j из P поставим в соответствие величину Ny_j, а элементу k из M - величину Nz_k. Пропускную способность дуги (j,k), соединяющей узел j с узлом k, определим следующим образом: $v_{jk}=0,$ если $j,k\in P$; или $j,k\in M$; или $j\in P,\; k\in M$, но $k\notin K(j)$; или $j\in M,\; k\in P$. Если $j\in P,\; k\in M$ и $k\in K(j)$, то $v_{jk}=+\infty$. Пусть D - произвольное подмножество множества S. Определим величины $\sigma(D)$ и $\delta(D)$ следующим образом: если $D\subseteq P$, то $\sigma(D)=N\sum_{j\in D} y_j$; если $D\subseteq M$, то $\delta(D)=N\sum_{k\in D} z_k$. Тогда задача определения совместности системы (1) эквивалентна определению допустимости классической задачи о перевозках. Согласно теореме Д.Гейла о допустимости ([11]), задача о перевозках допустима тогда и только тогда, если для каждого множества узлов D, $D\subseteq S$, выполняется

(2) $$\delta(\overline{D}\cap M)-\sigma(\overline{D}\cap P)\le \sum_{j\in D}\sum_{k\in \overline{D}} v_{jk}.$$

Здесь $\overline{D}=S/D$.

На основании этой теоремы система (2) состоит из 2^{n+s} линейных алгебраических неравенств, удовлетворение которых необходимо и достаточно для совместности системы (1).

Замечание 1. Специфика рассматриваемой системы позволяет уменьшить число линейных неравенств, удовлетворение которых необходимо и достаточно для совместности системы 1 с 2^{n+s} до 2^s.

Замечание 2. Иногда предприятие имеет право отправить потребителю продукцию более высокого качества, чем требуемая продукция. В этом случае на первой стадии производится некоторая базовая продукция, которая на второй стадии маркируется. Для рассматриваемой математической модели это означает, что для любых $j,j'\in J$, либо $K(j)\subseteq K(j')$, либо $K(j')\subseteq K(j)$. Не уменьшая общности, будем считать, что $K(j)\subseteq K(j+1)$, $j,j+1\in J$. На основании этого свойства, на множестве K введем отношение нестрогого порядка φ: для любых $k,k'\in K$, $k\varphi k'$ тогда и только тогда, если для любого

$j \in J$ из того, что $k \in K(j)$ следует, что $k' \in K(j)$. С помощью введенного отношения φ разобьем множество K на классы эквивалентности: k и k' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, если из того, что $k\varphi k'$ следует, что $k'\varphi k$ (симметричность введенного отношения, а рефлексивность и транзитивность для отношения φ выполняются автоматически). Введенное отношение φ является отношением строгого линейного порядка φ' относительно классов эквивалентности: $k\varphi' k'$ тогда и только тогда, если существует такое j, $j \in J$, что $k \in K(j) \setminus K(j-1)$, $k' \notin K(j) \setminus K(j-1)$, $k, k' \in K(j)$. Каждый класс эквивалентности включает в себя такие продукты, любой из которых может быть изготовлен из любого полуфабриката, из которого может быть изготовлен хотя бы один продукт из этого класса. Не уменьшая общности можно отождествить элементы каждого класса эквивалентности, тогда $|J| = |K|$. В этом случае достаточно рассмотреть систему из $|J| = n$ (вместо 2^{n+s} - по теореме Д.Гейла) линейных алгебраических неравенств, удовлетворение которых необходимо и достаточно для совместности системы (1):

$$\sum_{j=1}^{i} y_{n-j+1} \geq \sum_{j=1}^{i} z_{n-j+1}, \quad i = \overline{1,n}.$$

В частности, если $K(j) = S,\ j = \overline{1,n}$, получается известное условие совместности транспортной системы $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Кроме того, в случае, когда $K(j) = \{1, j\},\ j = \overline{1,n},$ система 2 содержит 2^{n-1} неравенств.

Удалим из полученной системы 2 тривиально выполняющиеся неравенства, и представим систему в виде $A\vec{z} \leq B\vec{y}$, где $A = \|a_{rk}\|$ и $B = \|b_{rj}\|$ матрицы с компонентами из множества $\{0,1\}$, не содержащие нулевых строк, $r = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,n}$. Здесь $l \leq 2^s$.

Обозначим через $L(N\vec{z})$ - множество наборов $N\vec{y}$, из которых можно изготовить план $N\vec{z}$. Система 1, определяющая множество $L(N\vec{z})$, является системой линейных алгебраических ограничений транспортного типа, отсюда $L(N\vec{z})$ является выпуклым многогранным множеством, которое можно описать через систему линейных ограничений:

$$A\vec{z} \leq B\vec{y}; \quad \sum_{k=1}^{s} z_k = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \quad z_k \geq 0,\ y_j \geq 0,\ k = \overline{1,s},\ j = \overline{1,n}.$$

Пусть $p(N\vec{y} | N\vec{x})$ - вероятность изготовления полуфабрикатов из набора $N\vec{y}$ с использованием технологических режимов из набора $N\vec{x}$. Тогда

$p(N\vec{z}|N\vec{x}) = \sum_{N\vec{y}\in L(N\vec{z})} p(N\vec{y}|N\vec{x})$ - вероятность изготовления продуктов из набора $N\vec{z}$ с использованием технологических режимов из набора $N\vec{x}$.

Задача 1 оптимального планирования.

Требуется найти наборы $\vec{x}$ и $\vec{z}$, для которых:

$F(\vec{x},\vec{z}) \to extr$, при условиях:

$$\sum_{k=1}^{s} z_k = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$z_k \ge v_k, \; k = \overline{1,s},$$

$$x_i \ge 0, \; i = \overline{1,m},$$

$$\lim_{N\to\infty} p(N\vec{z}|N\vec{x}) = 1.$$

Ограничения задачи 1 включают в себя условия изготовления «обязательных» продуктов и требования, чтобы вероятность изготовления запланированных продуктов была достаточно велика. Функционал $F(\vec{x},\vec{z})$ определяет условия эффективного функционирования производственной системы – постановку оптимизационной задачи. Это может быть задача максимизации дохода, когда $F(\vec{x},\vec{z}) = \sum_{k=1}^{s} g_k z_k$; задача минимизации затрат, когда $F(\vec{x},\vec{z}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$; задача максимизации прибыли, когда $F(\vec{x},\vec{z}) = \sum_{k=1}^{s} g_k z_k - \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$; или задача максимизации удельного дохода, когда $F(\vec{x},\vec{z}) = (\sum_{k=1}^{s} g_k z_k)(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i)^{-1}$.

5. Вычислительные процедуры решения задачи оптимального планирования двухстадийными стохастическими системами

Обозначим через $\vec{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in})$ - векторную случайную величину с компонентами ξ_{ij}, $p(\xi_{ij} = 1) = p_{ij}$, $p(\xi_{ij} = 0) = 1 - p_{ij}$. Компонента ξ_{ij} принимает значение 1, если применив технологический режим i, будет получен полуфабрикат $j, i \in I, j \in J$. Тогда $E(\vec{\xi}_i) = \vec{p}_i$, где E - знак математического ожидания, $\vec{p}_i$ - вектор строка матрицы $\|p_{ij}\|$. Рассмотрим случайный вектор $\vec{\delta}(Nx_i, \vec{\xi}_i)$ - являющийся суммой из Nx_i одинаковых случайных векторов $\vec{\xi}_i, i = \overline{1,m}$, j -тая компонента которого определяет количество полуфабрикатов, которые будут получены после применения технологических режимов из набора

Nx_i. Тогда $\vec{\eta} = \sum_{i=1}^{m} \vec{\delta}(Nx_i, \vec{\xi}_i)$ - случайный вектор, j -тая компонента которого определяет количество j-ых полуфабрикатов, которые будут получены после применения технологических режимов из всех наборов Nx_i, $i \in I.$ Сделаем замену переменных $\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{N}}(\vec{\eta} - E\vec{\eta})$ и, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$, исключим переменную λ_n. Так как $\vec{\xi}_i$ являются независимыми равномерно ограниченными случайными векторами, то $\lim_{N\to\infty} D(\vec{t}, \vec{\lambda}') = \infty$, где $\vec{t}$ - произвольные $n-1$мерные векторы, $\vec{t} \neq \vec{0}$, $\lambda'_j = \lambda_j$, $j = \overline{1, n-1}$, $D(\vec{t}, \vec{\lambda}')$ - дисперсия скалярного произведения векторов $\vec{t}$ и $\vec{\lambda}'$. Это условие является необходимым и достаточным ([12]) для сходимости распределения случайного вектора $\vec{\lambda}'$ к невырожденному нормальному распределению. Из центральной предельной теоремы теории вероятностей ([13]) следует, что для неизвестных наборов $\vec{x}$ и $\vec{z}$

$$\lim_{N\to\infty} p(N\vec{z}|N\vec{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\gamma} \int\limits_{M(\vec{z},\vec{x},N)} \exp(-\frac{1}{2}q(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}) d\lambda'_1 d\lambda'_2 \ldots d\lambda'_{n-1},$$

где $q(\vec{\lambda}') = \vec{\lambda}' Q (\vec{\lambda}')^T$, Q - матрица размерности $(n-1)(n-1)$, $\gamma^2 = (2\pi)^{n-1} \det Q^{-1}$, $Q^{-1} = \operatorname{var} \vec{\lambda}'$, $\frac{1}{\gamma}\exp(-\frac{1}{2}q(\vec{\lambda}'))$- нормальная плотность в $n-1$мерном евклидовом пространстве с центром в начале координат. Область интегрирования $M(\vec{z}, \vec{x}, N)$, являясь выпуклым многогранным множеством в $n-1$мерном евклидовом пространстве, задается системой линейных ограничений относительно переменных $\vec{x}$ и $\vec{z}$:

$$\sqrt{N}(A\vec{z} - \sum_{i=1}^{m} x_i B'\vec{p}'_i) \leq B'\vec{\lambda}',$$

$$-\lambda'_j \leq \sqrt{N}\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij}, \ j = \overline{1, n-1},$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda'_j \leq \sqrt{N}(1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i p_{ij}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{s} z_k = 1,$$

$$x_i \geq 0, \ z_k \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \ k = \overline{1, s}.$$

Здесь B' - матрица размерности $l \times (n-1)$, получающаяся из матрицы B вычеркиванием столбца с номером n, $\vec{p}_i'$ - $(n-1)$-мерный вектор-строка, получающийся из вектора $\vec{p}_i$ удалением n компоненты. Отсюда следует, что задача 1 эквивалентна следующей **задаче 2**.

Требуется найти наборы $\vec{x}$ и $\vec{z}$, для которых

$F(\vec{x},\vec{z}) \to extr$, при условиях:

$$\sum_{k=1}^{s} z_k = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$z_k \ge v_k,\ k = \overline{1,s},$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\gamma} \int\limits_{M(\vec{z},\vec{x},N)} \exp(-\frac{1}{2} q(\lambda_1',\lambda_2',\ldots,\lambda_{n-1}') d\lambda_1' d\lambda_2' \ldots d\lambda_{n-1}' = 1.$$

Здесь возможны три варианта.

- Область ограничений задачи 2 пуста. Тогда задача 2 не имеет решения.
- Область ограничений задачи 2 непуста, но она не замкнута, а экстремум функционала $F(\vec{x},\vec{z})$, определенного на замыкании области ограничений, достигается на границе области. Тогда имеет смысл искать ε- оптимальное решение задачи 2, вписав в область ограничений некоторую замкнутую область, зависящую от параметра ε.
- Область ограничений задачи 2 непуста и оптимальное решение принадлежит этой области. Тогда задача 2 имеет решение.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования.

Задача 3. Требуется найти $\vec{x}$, $\vec{z}$ и μ, для которых:

$\mu \to \max$, при ограничениях:

$$A\vec{z} - \sum_{i=1}^{m} x_i B' \vec{p}_i \le \mu (\sum_{j=1}^{n} \vec{b}_j')^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \ge \mu,\ j = \overline{1,n},$$

$$1 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i \ge \mu (n-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{s} z_k = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$z_k \ge v_k,\ k = \overline{1,s},$$

$$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Решение этой задачи определяет такие векторы $\vec{x}$ и $\vec{z}$, при которых максимален радиус сферы с центром в начале координат, вписанный в область интегрирования $M(\vec{z},\vec{x},N)$.

Пусть $\vec{x}^0$, $\vec{z}^0$ и μ_0 - оптимальное решение задачи 3, тогда:

- если μ_0<0, то область интегрирования $M(\vec{z},\vec{x},N)$ не содержит начало координат и $\lim\limits_{N\to\infty} p(N\vec{z}|N\vec{x})=0$, т.е. область ограничений задачи 2 пуста и задача 2 не имеет решения;
- если μ_0=0, то область интегрирования $M(\vec{z},\vec{x},N)$ содержит начало координат, через которое проходит граница области интегрирования, т.е. $\lim\limits_{N\to\infty} p(N\vec{z}|N\vec{x})=0$ и область ограничений задачи 2 пуста и задача 2 не имеет решения;
- если μ_0>0, то в область интегрирования $M(\vec{z},\vec{x},N)$ может быть вписана сфера радиуса μ_0, и, так как $\lim\limits_{N\to\infty}\mu_0=\infty$, то $\lim\limits_{N\to\infty} p(N\vec{z}|N\vec{x})=1$, т.е. область ограничений задачи 2 не пуста.

Пусть μ_0>0. Рассмотрим следующую задачу линейного (дробно-линейного, если $F(\vec{x},\vec{z})=(\sum\limits_{k=1}^{s} g_k z_k)(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i)^{-1})$ программирования.

Задача 4. Требуется найти $\vec{x}$, $\vec{z}$ и μ, для которых:

$$F(\vec{x},\vec{z})=extr, \text{ при условиях:}$$

$$\sum_{k=1}^{s} z_k=1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i=1,$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{rk}z_k-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i b'_{rj} p_{ij} \geq \mu,\ r=\overline{1,l},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \geq \mu,\ j=\overline{1,n-1},$$

$$1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i p_{ij} \geq \mu,$$

$$z_k \geq v_k,\ k=\overline{1,s},$$

$$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Пусть $\vec{x}^0$, $\vec{z}^0$ и μ_0 - оптимальное решение задачи 4. Если μ_0>0, то $\vec{x}^0$, $\vec{z}^0$ являются оптимальным решением задачи 2. Задача 4 может иметь не единственное решение. Равенство нулю μ_0 не исключает существования другого оптимального решения задачи 4, для которого $\mu>0$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

Задача 5. Требуется найти $\vec{x}$, $\vec{z}$ и μ, для которых $\mu \to \max$, при условиях:

$$F(\vec{x},\vec{z}) = F(\vec{x}^0,\vec{z}^0),$$
$$\sum_{k=1}^{s} a_{rk} z_k - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i b'_{rj} p_{ij} \ge \mu,\ r=\overline{1,l},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \ge \mu,\ j=\overline{1,n-1},$$
$$1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i p_{ij} \ge \mu,$$
$$z_k \ge v_k,\ k=\overline{1,s},$$
$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Если в оптимальном решении задачи 5 $\vec{x}'$, $\vec{z}'$, μ' окажется, что $\mu'>0$, то $\vec{x}'$, $\vec{z}'$ - оптимальное решение задача 2. Если $\mu'=0$, то задача 2 не имеет решения, хотя область допустимых решений не пуста.

В этом случае можно рассматривать ε - оптимальные решения, получаемые для каждого конкретного ε, $0<\varepsilon\le v_0$ решением задачи линейного (дробно-линейного) программирования.

Задача 6. Требуется найти наборы $\vec{x}$ и $\vec{z}$ для которых $F(\vec{x},\vec{z}) \to \max$, при условиях:

$$\sum_{k=1}^{s} z_k = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$
$$\sum_{k=1}^{s} a_{rk} z_k - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i b'_{rj} p_{ij} \ge \varepsilon,\ r=\overline{1,l},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \ge \varepsilon,\ j=\overline{1,n-1},$$
$$1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_i p_{ij} \ge \varepsilon,$$
$$z_k \ge v_k,\ k=\overline{1,s},$$
$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Замечание 3. При решении задачи 4 линейного (дробно-линейного) программирования можно изменить симплекс - процедуры таким образом, что в оптимальном решении, если это возможно, переменная μ будет положительной. Тогда нет необходимости решать задачу 5.

Решение задачи оптимального планирования позволяет определять план производства продуктов с экстремальными свойствами, вероятность выполнения которого достаточно велика.

6. Выводы и практические рекомендации

Предложенный подход к исследованию двухстадийных стохастических систем позволяет для широкого класса практически важных прикладных задач применять хорошо разработанные эффективные методы решения задач линейного (дробно-линйного) программирования. Теоретические результаты работы легли в основу диалоговой программной системы, внедренной в постоянную эксплуатацию при планировании процесса производства изделий микроэлектроники в ФГУП «ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е.Седакова» ([14]), а так же были апробированы для решения задачи оптимального планирования (формирование портфеля заказов) для Сургутского завода стабилизации конденсата ООО Сургутгазпром ([15]).

Список литературы

1. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. — М.: Наука, 1971.
2. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
3. *Валтер Я.* Стохастические модели в экономике. М.: Статистика, 1976.
4. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. М.: Советское радио, 1979.
5. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С.139-146.
6. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. №1. С. 78-82.
7. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // АиТ. 2010. № 10. С. 148-155.
8. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции // Информационные технологии. 2007. № 10. С. 47-52.
9. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Оптимизационные задачи объёмно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 2.1(28). С. 188-192.
10. *Прилуцкий М.Х., Власов С.Е.* Многокритериальные задачи объёмного планирования. Лексикографические схемы // Информационные технологии. 2005. №7. С. 61-66.

11. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Иностранная литература, 1963.
12. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1964.
14. *Прилуцкий М.Х., Власов В.С.* Оптимизационные задачи распределения ресурсов при планировании производства микроэлектронных изделий // Системы управления и информационные технологии. 2009. №1 (35). С. 38-43.
15. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Оптимизационные задачи добычи газа и переработки газового конденсата // Автоматизация в промышленности. № 6. 2008. С. 20-23.