МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О. А. Кузенков,
Е. А. Рябова

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЛЕКЦИИ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.1
ББК В22.1
К89

К89 Кузенков О.А., Рябова Е.А. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЛЕКЦИИ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. 112 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор **В.З. Гринес**;
канд. физ.-мат. наук, доцент **А.В. Грезина**

Основу пособия составили лекции по дисциплине «Математический анализ», прочитанные студентам Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета. Цель пособия – обеспечить методическую поддержку самого трудного для студентов начального этапа изучения математического анализа, повторить школьный материал, привить навыки строгого абстрактного мышления. Материал пособия охватывает вводную часть математического анализа – теорию действительных чисел и числовых последовательностей. Изложение основано на аксиоматическом подходе. Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.1
ББК В22.1

Содержание

Лекция 1. Введение. Действительные числа 6
1.1. Предмет математического анализа 6
1.2. Используемые обозначения и символы 6
1.3. Числа 8
1.4. Аксиомы действительных чисел 10
1.5. Числовые множества 12
1.6. Аксиома непрерывности 13
1.7. Модуль числа и его свойства 14
1.8. Конечные промежутки, окрестность точки в $\mathbb{R}$ 15
Лекция 2. Расширенное множество действительных чисел. Ограниченные и неограниченные множества 17
2.1. Расширенное множество действительных чисел 17
2.2. Бесконечные промежутки, окрестность бесконечно удаленной точки 18
2.3. Ограниченные множества, точные грани множества 19
2.4. Связь ограниченности с наличием точных граней 20
2.5. Неограниченные множества 21
2.6. Принцип Архимеда 22
Лекция 3. Числовые функции 24
3.1. Понятие функции 24
3.2. Способы задания функции 26
3.3. Взаимно однозначные функции: понятие обратной функции . . 31
Лекция 4. Элементарные функции и их свойства 35
4.1. Свойства функций 35
4.2. Обзор основных элементарных функций 37
4.2.1. Степенная функция. 37
4.2.2. Показательная функция. 39
4.2.3. Логарифмическая функция. 40
4.2.4. Тригонометрические функции. 40
4.2.5. Обратные тригонометрические функции 44
4.3. Арифметические операции над функциями 45
4.4. Композиция функций 46
4.5. Элементарные функции 46
4.6. Классификация элементарных функций 46

Лекция 5. Полезные неравенства; гиперболические функции 48
5.1. Полезные неравенства . . . 48
5.2. Гиперболические функции . . . 49
5.3. Обратные гиперболические функции . . . 51
Лекция 6. Предел последовательности . . . 53
6.1. Числовая последовательность и ее предел . . . 53
6.2. Расходящиеся последовательности . . . 56
6.3. Бесконечно большие последовательности . . . 58
Лекция 7. Свойства пределов последовательности . . . 60
7.1. Единственность предела . . . 60
7.2. Теорема «о двух милиционерах» . . . 61
7.2.1. Для сходящихся последовательностей . . . 61
7.2.2. Аналог для бесконечно больших . . . 62
7.3. Предельные переходы в неравенствах . . . 63
7.4. Связь ограниченности и сходимости . . . 64
Лекция 8. Арифметические свойства пределов . . . 66
8.1. Арифметические операции над числовыми последовательностями 66
8.2. Свойства бесконечно малых . . . 66
8.3. Арифметические свойства пределов . . . 68
Лекция 9. Монотонные последовательности; число e . . . 71
9.1. Предел монотонной последовательности . . . 71
9.2. Число e . . . 73
Лекция 10. Принцип вложенных отрезков; критерий Коши . 76
10.1. Теоремы о вложенных отрезках . . . 76
10.2. Подпоследовательности; теорема Больцано - Вейерштрасса . . . 77
10.3. Критерий Коши . . . 79
Лекция 11. Частичные пределы; классификация точек множества . . . 82
11.1. Частичный предел . . . 82
11.2. Верхний и нижний предел . . . 83
11.3. Критерий сходимости последовательности . . . 85
11.4. Классификация точек множества . . . 86
11.5. Свойства предельной точки . . . 86
11.6. Открытые и замкнутые множества . . . 87
Дополнительный материал . . . 90
12.1. Сечения Дедекинда и аксиоматика Евдокса . . . 90
12.2. Конструктивная теория действительных чисел . . . 92
12.2.1. Необходимость конструктивного подхода . . . 92
12.2.2. Бесконечные десятичные дроби . . . 93
12.2.3. Действительные числа . . . 95
12.2.4. Другие конструктивные теории . . . 98
12.3. Счетные множества . . . 99

12.3.1. Сравнение конечных и бесконечных множеств 99
12.3.2. Теоремы о счетных множествах 101
12.3.3. Счетность множества рациональных чисел 102
12.4. Несчетные множества 104
12.4.1. Несчетность множества действительных чисел 104
12.4.2. Континуальные множества 105
12.4.3. Множество мощности больше континуума 108
Список литературы 111

Лекция 1. Введение. Действительные числа

1.1. Предмет математического анализа

Математический анализ – раздел математики, который в отличие от других математических дисциплин, таких как алгебра, геометрия, дискретная математика и т. п., связан с понятием бесконечности.

Название «Математический анализ» исторически восходит к первоначальному наименованию «Анализ бесконечно малых». Уже в нем проявляется связь с изучением бесконечности.

В современной теории анализа понятие бесконечности рассматривается сквозь призму четырех основополагающих понятий: предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость. Поэтому можно сказать, что математический анализ – это раздел математики, который изучает четыре основновные понятия: предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

1.2. Используемые обозначения и символы

Для математического анализа, как и для любого другого раздела математики, огромное значение имеет формальный язык, на котором формулируются его утверждения. Этот язык обеспечивает строгость формулировок и логических выводов. В дальнейшем изложении курса математического анализа мы будем использовать язык теории множеств и формальной логики.

Как правило, для обозначения множеств используют прописные буквы латинского алфавита: A, B, C, $\ldots$, X, Y, а для обозначения их элементов – строчные буквы латинского алфавита a, b, c, $\ldots$, x, y.

То, что элемент a принадлежит множеству A обозначается как $a \in A$. Запись $a \notin A$ говорит о том, что элемент a не принадлежит множеству A.

Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента, – принято обозначать символом $\varnothing$.

Множество можно описать путем перечисления всех его элементов. Но такой подход неконструктивен, если множество имеет большое или неограниченное количество элементов. В этом случае гораздо удобнее задать множество путем указания правила $P(x)$, по которому определяется, принадлежит ли некотрый элемент x этому множеству. Формальная запись такого задания имеет вид: $A = \{x : P(x)\}$.

Символ двоеточия «:» обозначает, что множество элементов x удовлетворяет условию $P(x)$, и читается как «таких, что» или «такое, что». Например, запись $A = \{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ читается так: «A есть множество элементов x таких, что $x = 2n$, где n принадлежит множеству $\mathbb{N}$».

В математике повсеместно используются символы для упрощения и сокращения текста. Приведём наиболее часто встречающиеся математические обозначения и примеры их использования.

Логические операции

$\Rightarrow$ – следование (импликация). $A \Rightarrow B$ означает «если верно A, то B также верно», или «из утверждения A следует утверждение B». Например, $(x = 2) \;\Rightarrow\; (x^2 = 4)$. Скобки, содержащие утверждения, в простейших случаях, таких как этот, можно опустить.

$\Leftrightarrow$ – равносильность. $A \Leftrightarrow B$ означает «A верно тогда и только тогда, когда B верно». Например, $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

$\wedge$ – логическое «и» (конъюнкция). Значение операции: $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны.
Например, $(x > -2) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow x^2 < 4$.

$\vee$ – логическое «или» (дизъюнкция). Значение операции: $A \vee B$ истинно, когда хотя бы одно из условий A и B истинно.
Например, $(x = 2) \vee (x = -2) \Leftrightarrow x^2 = 4$.

Кванторы

$\exists$ – квантор существования (перевернутая первая буква англ. «Exists» – существует). Запись $\exists x \in X,\ P(x)$ означает: «существует (найдется) хотя бы один элемент x из множества X такой, что верно предложение (утверждение)[1] $P(x)$».

$\forall$ – квантор всеобщности (перевернутая первая буква англ. «All» – все). Запись $\forall x \in X,\ P(x)$ означает: «для всех (любых) элементов x из множества X верно предложение $P(x)$».

Если некоторое утверждение записано с помощью кванторов, то для *записи отрицания* этого утверждения необходимо все кванторы и последнее высказывание заменить на противоположные.

Пример 1.1. Парадокс критянина. Этот парадокс упоминается в посланиях апостола Павла. "Из них же самих один стихотворец сказал: «Критяне всегда лжецы...». Свидетельство это справедливо. . . "(Тит. 1, 12-13).

Так правда ли то, что сказал о критянах стихотворец, сам принадлежащий к их числу? Нередко тот, кто не обладает навыками формальной логики, рассуждает следующим образом: если критский стихотворец прав, что все критяне лжецы, то он тоже лжец, и его утверждение ложно; если критский стихотворец неправ в своем высказывании, то, наоборот, все критяне говорят правду, а отсюда следует, что критский стихотворец, будучи критянином, также говорит правду. В результате получается, казалось бы, неразрешимое противоречие (парадокс).

[1] Всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называют высказыванием.

На самом деле это противоречие возникает только вследствие логической ошибки, устранить которую помогают кванторы.

Запишем утверждение «все критяне лжецы» на языке кванторов. Пусть x – человек, K – критяне, L – лжец, тогда $\forall x \in K$, $x = L$.

Согласно правилам работы с кванторами, отрицание этого утверждения будет иметь вид: $\exists x \in K$, $x \neq L$. Это означает, что существует хотя бы один критянин, который не лжет. И именно он может сказать : «Критяне всегда лжецы...». Никакого противоречия при правильном рассуждении и использовании кванторов не возникает.

Парадокс критянина демонстрирует расхождение разговорной речи с формальной логикой.

Некоторые операции над множествами

$A \subset B$ – множество A является подмножеством B. Это означает, что каждый элемент из A также является элементом из B, т. е.
$A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, a \in A \Rightarrow a \in B)$.

$A \not\subset B$ – множество A не является подмножеством B. Значит, существует элемент множества A, не принадлежащий множеству B, т. е.
$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists\, a, (a \in A) \wedge (a \notin B))$.

$A = B$ – равенство множеств. $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

$A \cup B$ – объединение множеств A и B. Элементы этого множества принадлежат или множеству A, или множеству B:
$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B. Элементы этого множества одновременно принадлежат и множеству A, и множеству B:
$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

$A \setminus B$ – разность множеств A и B. Элементы этого множества принадлежат только множеству A, и не принадлежат множеству B, т. е.
$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A.

1.3. Числа

Важнейшим понятием математики является число. На вопрос, что такое натуральное число, школьники чаще всего отвечают следующим образом: «Натуральные числа – это то, что используется при счете предметов». Однако, при счтете предметов русские говорят: «Один, два, три, ...», а англичане – «One, two, three...». Это ведь не числа, а лишь их названия на разных языках. При этом можно записывать «1, 2, 3, ...», а можно записывать «I, II, III, ...». И это тоже не числа, а лишь их обозначения в разных системах.

Кроме того, среди натуральных чисел есть такие, которые никогда не могут быть использованы при счете потому, что в мире нет такого количества предметов, нуждающихся в подсчете. Так, например, есть число 10 в степени 100. Оно называется "гугол". (Искаженное написание этого числа используется в названии известной компании "Google"). Это число не может быть использовано при счете потому, что во всем мире, по данным современной физики, нет такого количества элементарных частиц – самых мелких предметов, которые можно пересчитывать. (Их количество в известной части Вселенной, по разным оценкам, насчитывает лишь от 10 в 79 до 10 в 81 степени частиц.

Если же поставить перед собой задачу формально дойти до числа 10^{100} при счете, затрачивая на произношение одного числа одну секунду, то нам потребуется время, превышающее известный возраст вселенной.

Существует легенда, что в Индии, в городе Бенаресе, есть храм, в котором индусский бог Брама при сотворении мира установил три алмазные палочки и надел на одну из них 64 золотых кружка: самый большой внизу, а каждый следующий меньше предыдущего. Жрецы храма обязаны без устали, днем и ночью, перекладывать эти кружки с одной палочки на другую, пользуясь третьей, как вспомогательной, и соблюдая правила: переносить за один раз только один кружок и не класть большего на меньший. Легенда говорит, что когда будут перенесены все 64 кружка, наступит конец света. Можно подсчитать, что для переноса всех 64 кружков по указанным правилам понадобится 2 в 64 степени без одного перекладывания. Если тратить на одно перекладывание всего одну секунду, то для того, чтобы переложить все, нужно более 500 миллиардов лет. Это время значительно больше времени существования Земли, возраст которой оценивается в 3 миллиарда лет. И это всего лишь 2 в 64, а не 10 в 100!

Таким образом, наивное представление даже о натуральном числе является некорректным с точки зрения логики. Чтобы правильно определить понятие числа, попробуем сначала ответить на более простой вопрос: что такое шахматная фигура, например, шахматный конь? Будет ли правильным сказать, что это фигурка, вырезанная из дерева, формой напоминающая коня? Конечно, нет.

Фигуру можно выполнить не только из дерева, но и из слоновой кости или из золота. В компьютерных играх мы увидим на экране дисплея изображение этой фигуры, которое представляет собой совокупность электромагнитных импульсов, в компьютерных программах эта фигура будет кодироваться как некоторая последовательность нулей и единиц, но в любом случае это буде шахматный конь. Иногда бывает, что фигура коня теряется, и тогда для игры в шахматы вместо нее на доску кладут камешек, ластик или какой-нибудь другой предмет, имеющийся под рукой, который по форме нисколько не напоминает коня, но для игроков он, тем не менее, будет обладать все теми же признаками шахматной фигуры. Эти признаки состоят не в физическом материале, из которого изготовлена фигура коня и не в похожести на лошадь, а в том, что она «ходит» по определенным правилам (русской буквой «Г») и находится в предписанных отношениях с другими фигурами на шахматной доске (может перепрыгивать через свои и неприятельские фигуры). Таким образом, шахматные фигуры — это элементы некоторого множества, подчиняющиеся определенным правилам.

Аналогично определяют и числа, как элементы некоторого множества, подчиняющиеся установленному набору правил. Правила эти в математике называются аксиомами. Другого способа определения числа, кроме задания системы аксиом на некотором множестве, не существует. Таким образом, чтобы определить, что такое числа, необходимо сформулировать систему аксиом, которым они подчиняются. Мыслить о числе в отрыве от этой системы аксиом нельзя.

1.4. Аксиомы действительных чисел

I) На множестве $\mathbb{R}$ определим операцию сложения:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{R})\,(\exists\, d \in \mathbb{R}):\ d = a + b,$$

сопоставляющую каждой паре элементов a и b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $a+b$ из того же множества $\mathbb{R}$, называемый суммой a и b. При этом выполняются

аксиомы сложения:

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a + 0 = a$ — существование нуля — нейтрального элемента по сложению;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\, (-a) \in \mathbb{R}, \quad a + (-a) = 0$ — существование противоположного элемента.

II) Также на множестве $\mathbb{R}$ определим операцию умножения:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{R})\,(\exists\, d \in \mathbb{R}):\ d = ab,$$

сопоставляющую каждой паре элементов a и b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент ab из того же множества $\mathbb{R}$, называемый произведением a и b. При этом выполняются

аксиомы умножения:

5. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad ab = ba$ – коммутативность умножения;

6. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a(bc) = (ab)c$ – ассоциативность сложения;

7. $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 1 = a$ – существование единицы – нейтрального элемента по умножению;

8. $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}, \quad a \cdot a^{-1} = 1$ – существование обратного элемента a^{-1}, обозначаемого также $1/a$.

   III) Связь сложения и умножения определяет

   аксиома дистрибутивности:

9. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a(b + c) = ab + ac.$

   IV) Элементы множества $\mathbb{R}$ можно сравнивать с нулем. Для каждого элемента $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливо одно из двух соотношений: $a < 0$ или $a > 0$. При этом выполняются **аксиомы порядка:**

10. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad (a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow a + b > 0;$

11. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad (a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab > 0.$

    Аксиома непрерывности:

12. $\forall\, A, B \subset \mathbb{R},\ (A, B \neq \varnothing) \wedge (\forall\, a \in A\ \forall\, b \in B,\ a \leq b)\, \exists\, c \in \mathbb{R} :\ \forall\, a \in A\, \forall\, b \in B,$ $a \leq c \leq b.$

Символическая запись последней аксиомы означает: каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, такие, что для любых их элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leq c \leq b$.

Если трактовать действительные числа как точки на прямой, то эта аксиома постулирует существование элемента $c \in \mathbb{R}$, разделяющего любые два множества из $\mathbb{R}$, одно из которых лежит на прямой левее другого.

Отметим, что для тривиального множества $\{0\}$, состоящего из одного элемента, все аксиомы выполняются. В тривиальном множестве элемент 0 является нейтральным и по сложению, и по умножению.

Определение 1.4.1. Ели элементы некоторого непустого нетривиального множества подчиняются приведенной системе аксиом, то они называются действительными числами.

Из первых одиннадцати аксиом как следствие получаются все другие алгебраические свойства действительных чисел, относящиеся к арифметическим действиям, а также правило сравнения чисел. Так, операция вычитания (разность двух чисел) определяется как сложение положительного числа и отрицательного числа; деление a/b есть умножение числа a на число, обратное числу b.

Правило сравнения двух чисел получается из сравнения разности этих чисел с нулем.

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Число a строго больше числа b тогда и только тогда, когда $a - b$ строго больше нуля:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Число a больше или равно числу b (говорят «a не меньше b» или «b не больше a») тогда и только тогда, когда выполняется одно из соотношений $a > b$ или $a = b$:

$$a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b).$$

Математические выражения, содержащие знаки «$>$» (больше) или «$<$» (меньше), называются строгими неравенствами; содержащие знаки «$\geq$» или «$\leq$», называются нестрогими неравенствами.

Из аксиом вытекает часто используемое свойство, позволяющее почленно складывать неравенства одного знака:

$$\text{если } a > b \text{ и } c > d, \text{то } a + c > b + d.$$

Действительно, из $a > b$, $c > d$ следуют неравенства $a - b > 0$, $c - d > 0$. Тогда согласно аксиоме 10 выполняется неравенство $(a - b) + (c - d) > 0$, которое, используя аксиомы 1,2,7 и 9, преобразуется к виду $(a+c)-(b+d) > 0$, что равносильно неравенству $a + c > b + d$.

1.5. Числовые множества

Натуральные числа – это результат последовательного сложения единицы с самой собой. Множество натуральных чисел обозначают $\mathbb{N}$. Множество чисел противоположных натуральным обозначим $\mathbb{N}^-$.

Целые числа ($\mathbb{Z}$) – это объединение натуральных чисел, противоположных им и нуля:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup 0.$$

Рациональные числа ($\mathbb{Q}$) – числа, представляемые обыкновенными дробями, в которых числитель – целое число, знаменатель – натуральное число:

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

При этом оказывается, что разные записи могут представлять одну и ту же дробь, например, 1/4 и 2/8. Чтобы исключить разное представление одной и той же дроби можно говорить о множестве рациональных чисел как о множестве несократимых дробей со взаимно простыми целым числителем и натуральным знаменателем:

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{НОД}(m, n) = 1\}.$$

Здесь $\text{НОД}(m, n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n.

Действительные числа, которые не являются рациональными, называют иррациональными и обозначают $\mathbb{I}$, т. е. $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Очевидно, что числовые множества находятся в следующих соотношениях:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

1.6. Аксиома непрерывности

Отметим особую роль последней аксиомы – аксиомы непрерывности. Все предшествующие ей аксиомы справедливы также и для множества рациональных чисел, и лишь аксиома непрерывности не выполняется для множетства рациональных чисел.

Пример 1.2. Определим множества

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \, x > 0, x^2 < 2\} \text{ и } B = \{x \in \mathbb{Q} : \, x > 0, x^2 > 2\}.$$

Очевидно, что для всех элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$, однако нет рационального числа, разделяющего эти два множества. Действительно, этим числом может быть только число c такое, что $c^2 = 2$. Докажем, что число c не является рациональным методом «от противного».

Предположим противное: $c \in \mathbb{Q}$, то есть c представляется в виде несократимой дроби m/n, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Возведём предполагаемое равенство в квадрат: $c^2 = m^2/n^2$, т. е. $m^2/n^2 = 2$. Тогда $m^2 = 2n^2$, откуда следует, что m^2 – четно, значит четно и m; следовательно, m^2 делится на 4, а значит, n^2 и n тоже чётны. Полученное утверждение противоречит несократимости дроби m/n. Значит, исходное предположение было неверным, и c — иррациональное число.

Относительно приведенного доказательства существует легенда, что когда Пифагор доказал, что корень из 2 не является рациональным числом, то в благодарность за свое открытие принес богам в жертву 100 быков. Математики шутят, что если бы каждый из них поступал как Пифагор после аналогичных открытий, то в мире бы не осталось коров.

Таким образом, выполнение двенадцатой аксиомы является важной характеристикой действительного числа.

Отметим, что в самом названии двенадцатой аксиомы впервые используется термин «непрерывность» — название одного из основных понятий, изучающихся математическим анализом. Эта дополнительно подчеркивает, что аксиома имеет колоссальное значение именно для математического анализа.

Так, алгебра в основном опирается на свойства чисел, сформулированных в первых одиннадцати аксиомах, и можно построить полноценную алгебраическую теорию, вообще не используя двенадцатую аксиому. Алгебра полноценно развивалась и до 19 века, когда впервые была введена эта аксиома. Но самые первые основополагающие теоремы анализа, как мы увидим далее, являются следствием именно двенадцатой аксиомы. Без двенадцатой аксиомы невозможны представления о непрерывности, невозможна вся логическая теория математического анализа[2].

1.7. Модуль числа и его свойства

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a, если $a > 0$, и числу $-a$, если $a < 0$:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следуют следующие свойства (для всех $a, b \in \mathbb{R}$):

1. $|a| \geq 0$;

2. $|a| = |-a|$;

3. $-|a| \leq a \leq |a|$;

4. $|ab| = |a||b| \quad (\text{если } b \neq 0, \text{ то } |a/b| = |a|/|b|)$.

На основании их докажем еще три свойства:

5. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$;

6. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

7. $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

[2]Читайте о сечениях Дедекинда и аксиоматике Евдокса в главе «Дополнительный материал»

Доказательство свойства 5. Необходимость. Дано: $|a| \leq b$, надо доказать, что при этом верно неравенство $-b \leq a \leq b$. Возможны два случая:

1. $(a \geq 0) \wedge (a \leq b)$, тогда $-b \leq 0$ и, следовательно, $-b \leq a$, т. е.

$$(a \geq 0) \wedge (|a| \leq b) \;\Rightarrow\; -b \leq a \leq b;$$

2. $(a < 0) \wedge (-a \leq b)$, следовательно, $(b \geq 0) \wedge (a \geq -b)$, тогда $a \leq b$, т. е.

$$(a < 0) \wedge (|a| \leq b) \;\Rightarrow\; -b \leq a \leq b.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $-b \leq a \leq b$, надо доказать, что при этом верно неравенство $|a| \leq b$. Возможны два случая:

1. $(a \geq 0) \wedge (-b \leq a \leq b)$, т. е. $0 \leq a \leq b$, тогда справедливо неравенство $|a| \leq b$;

2. $(a < 0) \wedge (-b \leq a \leq b)$, т. е. $-b \leq a < 0$, тогда $b \geq -a > 0$, отсюда $b \geq |-a|$, что согласно свойству 2 соответствует неравенству $b \geq |a|$.

Свойство 5 доказано.

Доказательство свойства 6. Это свойство имеет название «неравенство треугольника». Из свойства 3 имеем: $-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|$. Сложим почленно эти неравенства: $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$. Последнее, согласно свойству 5, равносильно неравенству 6, что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 7. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$|a| = |(a-b)+b|,$$

тогда из неравенства 6 следует, что $|a| \leq |a-b|+|b|$, т. е. $|a-b| \geq |a|-|b|$, при этом, очевидно, $|a-b| = |b-a| \geq |b|-|a| = -(|a|-|b|)$, т. е. $|a|-|b| \geq -|a-b|$. В результате получили: $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$, что, согласно свойству 5, равносильно выполнению неравенства 7.

1.8. Конечные промежутки, окрестность точки в $\mathbb{R}$

$[a,b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ – отрезок;

$(a,b) = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ – интервал;

$[a,b) = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\} \vee (a,b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ – полуинтервал.

Интервал $(a-\delta, a+\delta)$ называют δ-окрестностью точки a и обозначают $U_\delta(a)$. δ-окрестность точки a можно записать, используя свойство

модуля:
$$U_\delta(a) = \{x : x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta\}.$$
Например, δ-окрестность точки ноль есть $U_\delta(0) = \{x : x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta\}$.

Наряду с окрестностями точки, когда точка лежит в некотором интервале, рассматривают промежутки, которые называют односторонними окрестностями точек. Полуинтервалы вида $(a-\delta; a]$ называют левой δ-окрестностью точки a, а полуинтервалы вида $[a; a+\delta)$ – правой δ-окрестностью точки a.

Проколотой δ-окрестностью точки a будем называть интервал $(a-\delta, a+\delta)$ с выколотой точкой a:
$$U^0_\delta(a) = \{x : x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-a| < \delta\} = \{x : x \in \mathbb{R},\ a-\delta < x < a+\delta,\ x \neq a\}.$$

Лекция 2. Расширенное множество действительных чисел. Ограниченные и неограниченные множества

2.1. Расширенное множество действительных чисел

Как уже говорилось в первой лекции, математический анализ связан с изучением бесконечности. Для строгого логического исследования этого понятия нам, как и в случае действительного числа, нужно использовать аксиоматический подход в её задании.

Дополним множество действительных чисел еще двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$. Эти элементы называются плюс бесконечность и минус бесконечность. Будем считать, что эти элементы подчиняются следующим правилам (аксиомам):

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty;$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x - \infty = -\infty, \quad x + \infty = +\infty;$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow x(+\infty) = +\infty;$
4. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < 0 \Rightarrow x(+\infty) = -\infty;$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x}{-\infty} = \dfrac{x}{+\infty} = 0;$
6. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$
7. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty;$
8. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$

Приведенные аксиомы не определяют следующие операции при работе с новыми элементами: $(+\infty)-(+\infty)$ или $(+\infty)+(-\infty)$; $0\cdot(+\infty)$ или $0\cdot(-\infty)$. Эти операции так и называют – неопределенности.

Поскольку элементы $+\infty$ и $-\infty$ не подчиняются всей совокупности аксиом действительного числа, то они не являются числами по определению. Поэтому их называют несобственными действительными числами (или бесконечно большими действительными числами).

Определение 2.1.1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$, дополненное несобственными действительными числами $+\infty$ и $-\infty$, называют расширенным множеством действительных чисел и обозначают $\overline{\mathbb{R}}$, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$.

Под символом ∞ понимается бесконечность с любым знаком ($\infty{=}\pm\infty$), если не очевидно, что это может быть только плюс бесконечность.

Операции $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞, ∞^0, 0^0 также не определены, так как сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$. Например, $\dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0} = \dfrac{1}{\infty} / \dfrac{1}{\infty} = 0 \cdot \infty$. Остальные операции сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$ с помощью основного логарифмического тождества:

$$\forall\, x, a \in \mathbb{R},\ (x > 0) \wedge (a > 0) \wedge (a \neq 1) \ \Rightarrow\ x = a^{\log_a x},$$

при a равном числу e – основанию натурального логарифма:

$$\log_e x = \ln x.$$

Заметим, что на расширенном множестве действительных чисел можно приписать ранее неопределенному $\ln 0$ значение минус бесконечность. Итак,

$$1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}, \quad (+\infty)^0 = e^{0 \cdot \ln(+\infty)} = e^{0 \cdot (+\infty)}, \quad 0^0 = e^{0 \cdot \ln 0} = e^{0 \cdot (-\infty)}.$$

2.2. Бесконечные промежутки, окрестность бесконечно удаленной точки

$(-\infty, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\} = \{x : x \in \mathbb{R}, |x| < +\infty\}$ – числовая прямая $\mathbb{R}$;
$(-\infty, b) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x < b\} \vee (a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x > a\}$ – полупрямая;
$(-\infty, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \leq b\} \vee [a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$ – луч.

Δ-окрестностью бесконечно удаленной точки $+\infty$ или $-\infty$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ будем называть соответственно полупрямые $(\Delta, +\infty)$ или $(-\infty, -\Delta)$:

$$U_\Delta(+\infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x > \Delta\}, \quad U_\Delta(-\infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x < -\Delta\}.$$

Можно обобщить эти определения и на случай ∞ без определенного знака:

$$U_\Delta(\infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ |x| > \Delta\}.$$

2.3. Ограниченные множества, точные грани множества

Пусть A некоторое непустое множество действительных чисел: $A \subset \mathbb{R}$.

Определение 2.3.1. Множество A называется ограниченным сверху, если существует такое действительное число M, что каждый элемент a множества A удовлетворяет неравенству $a \leq M$. При этом число M называется верхней гранью множества A.

Коротко это определение можно записать так: A – ограниченное сверху, если $\exists\, M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \;\; a \leq M$. Очевидно, что если $M^* > M$, то число M^* также является верхней гранью множества A.

Определение 2.3.2. Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества A называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $\sup A$.

То есть число β является точной верхней гранью множества A, если

1. β – верхняя грань этого множества;
2. левее β верхних граней нет, так как в любой сколь угодно малой ε-окрестности[3] β обязательно найдется элемент множества A.

Вот как можно записать это в символьной записи

Определение 2.3.3. $\beta = \sup A$, если

1. $\forall\, a \in A \;\; a \leq \beta$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A : \;\; a > \beta - \varepsilon$.

Заметим, что точная верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Например, если возьмем в качестве числового множества отрезок $A = [c, d]$, где $c < d$, то $\sup A = d$ и $\sup A \in A$. Если же рассмотрим полуинтервал $A = [c, d)$, то $\sup A = d$, но $\sup A \notin A$.

Если точная верхняя грань множества принадлежит этому множеству, то она является наибольшим элементом этого множества, его максимумом: $\sup A = \max A$. В случае, когда точная верхняя грань множества не принадлежит этому множеству, наибольшего элемента в этом множестве нет.

Определение 2.3.4. Множество A называется ограниченным снизу, если существует такое действительное число m, что каждый элемент a множества A удовлетворяет неравенству $a \geq m$. При этом число m называется нижней гранью множества A.

[3] ε-окрестностью точки β на числовой прямой $\mathbb{R}$ называют интервал $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$.

Короче, A – ограниченное снизу, если $\exists\, m \in \mathbb{R} : \forall\, a \in A \;\; a \geq m$.

Очевидно, что если $m^* < m$, то число m^* также является нижней гранью множества A.

Определение 2.3.5. Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества A называется точной нижней гранью этого множества и обозначается $\inf A$.

То есть число α является точной нижней гранью множества A, если

1. α – нижняя грань этого множества;

2. правее α нижних граней нет, так как в любой сколь угодно малой ε-окрестности α обязательно найдется элемент множества A.

Запишем в кванторах

Определение 2.3.6. $\alpha = \inf A$, если

1. $\forall\, a \in A \;\; a \geq \alpha$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A : \;\; a < \alpha + \varepsilon$.

Заметим, что точная нижняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Например, если возьмем в качестве числового множества отрезок $A = [c, d]$, где $c < d$, то $\inf A = c$ и $\inf A \in A$. Если же рассмотрим полуинтервал $A = (c, d]$, то $\inf A = c$, но $\inf A \notin A$.

Если точная нижняя грань множества принадлежит этому множеству, то она является наименьшим элементом этого множества, его минимумом: $\inf A = \min A$. В случае, когда точная нижняя грань множества не принадлежит этому множеству, наименьшего элемента в этом множестве нет.

Определение 2.3.7. Множество A называется ограниченным, если оно ограниченное сверху и снизу, т. е. $\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \; \forall a \in A \;\; m \leq a \leq M$.

Если ввести обозначение $C = max\{|m|, |M|\}$, то последнее определение можно сформулировать иначе.

Определение 2.3.8. Множество A называется ограниченным, если

$$\exists C > 0 : \forall a \in A \;\; |a| \leq C.$$

2.4. Связь ограниченности с наличием точных граней

Существование у любого ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (точной нижней) грани не является очевидным и требует доказательства.

Теорема 2.4.1. *Всякое непустое, ограниченное сверху (снизу) множество, имеет точную верхнюю (точную нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть A непустое, ограниченное сверху множество, т. е. $\exists b \in R : \forall a \in A,\ a \leq b$. Обозначим B – множество верхних граней множества A. Очевидно, что $\forall b \in B,\ b \geq a$, где a – любой элемент множества A.

Множества A и B удовлетворяют требованиям аксиомы непрерывности[4], следовательно, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ такое, что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq c \leq b$. Число c согласно сказанному удовлетворяет двум условиям: во-первых, $\forall a \in A,\ a \leq c$, т. е. c – верхняя грань множества A, поэтому $c \in B$; во-вторых, $\forall b \in B,\ b \geq c$, т. е. $c = \min B$. Согласно определению 2.3.2 число c является точной верхней гранью множества A.

Замечание 2.1. Доказанная теорема есть теорема существования. Она не является конструктивной в том смысле, что с ее помощью нельзя найти точные грани. Она лишь постулирует факт их существования.

Д/З: Доказать существование точной нижней грани ограниченного снизу множества.

Следствие 2.4.2. *Всякое непустое ограниченное множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани.*

2.5. Неограниченные множества

Определения неограниченного множества пишем по правилу записи отрицания утверждений[5], сформулированных в кванторах.

Определение 2.5.1. Множество A – неограниченное сверху, если $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A : a > M$.

Определение 2.5.2. Множество A – неограниченное снизу, если $\forall m \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A : a < m$.

Определение 2.5.3. Множество A называется неограниченным, если оно неограниченное сверху или неограниченное снизу, т. е. $\forall m, M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A : (a > M) \vee (a < m)$.

Определение 2.5.4. Множество A называется неограниченным, если

$$\forall C > 0\ \exists a \in A : \ |a| > C.$$

[4] Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, такие, что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leq c \leq b$.

[5] Если некоторое утверждение записано с помощью кванторов, то для *записи отрицания* этого утверждения необходимо все кванторы и последнее высказывание заменить на противоположные.

Утверждение 2.5.1. *Если A не ограничено сверху, то $\sup A = +\infty$ в расширенном множестве действительных чисел.*

Действительно, из аксиомы $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a < +\infty$ вытекает, что несобственное число $+\infty$ является верхней гранью множества A, так как $\forall a \in A\ a < +\infty$; согласно определению 2.5.1 неограниченного сверху множества A справедливо утверждение: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a > \varepsilon$, т. е. в любой ε-окрестности несобственного числа $+\infty$ найдется элемент из множества A. Следовательно, несобственное число $+\infty$ есть наименьшая верхняя грань.

Это означает согласно определению 2.3.2, что $+\infty$ является точной верхней гранью неограниченного сверху множества A, что и требовалось доказать.

Д/З: Доказать самостоятельно, что в расширенном множестве действительных чисел неограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань, равную несобственному числу $-\infty$.

2.6. Принцип Архимеда

Теорема 2.6.1. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху во множестве действительных чисел.*

Доказательство. Предположим противное: множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху, т. е. в силу определения 2.3.1 найдется действительное число M такое, что $\forall n \in \mathbb{N}\ n \leq M$. Тогда согласно теореме 2.4.1 множество $\mathbb{N}$ имеет точную верхнюю грань. Пусть $\sup \mathbb{N} = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Из пункта 2 определения 2.3.3 следует, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ \ n > \beta - \varepsilon$. Так как это выполнено для любого ε, то в том числе и для $\varepsilon = 1$, тогда $\exists\, n \in \mathbb{N} : n > \beta - 1$, следовательно, $n + 1 > \beta$. Так как $n + 1 \in \mathbb{N}$, то нашелся элемент множества $\mathbb{N}$, больший β. Это противоречит тому, что $\beta = \sup \mathbb{N}$, значит, наше предположение об ограниченности сверху множества натуральных чисел неверно. Теорема доказана.

Следствие 2.6.2. *Множество целых чисел не ограничено ни сверху, ни снизу во множестве действительных чисел.*

Следствие 2.6.3. *Для любого положительного действительного числа x найдется такое натуральное число n, что будет выполнено двойное неравенство $n - 1 \leq x < n$.*

Доказательство. Существование натурального числа n такого, что $x < n$ следует из принципа Архимеда и определения 2.5.1 неограниченного сверху множества: $\forall\, x > 0\ \exists\, n \in\ \mathbb{N} : n > x$. Так как по определению натуральные числа – это результат последовательного сложения единицы с самой собой, то среди натуральных чисел больших x, можно выбрать ближайшее к x, т. е. такое, чтобы выполнялось неравенство $0 < n - x \leq 1$. Отсюда вытекает, что $n - 1 \leq x$, что и требовалось доказать.

В этом случае число $n - 1$ называется целой частью[6] числа x и обозначается $[x]$. Число $x - [x]$ называется дробной частью числа x и обозначается $\{x\}$[7].

Следствие 2.6.4. *Точная нижняя грань множества* $A=\{a\colon a = 1/n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *есть ноль.*

Доказательство. Во-первых, $\forall a\in A\, a > 0$, так как $\forall n\in\mathbb{N}\, a = 1/n>0$, т.е. ноль является нижней гранью множества A.

Во-вторых, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, a = 1/n \in A :\ a < 0 + \varepsilon$, так как согласно принципу Архимеда и определению 2.5.1 неограниченного сверху множества $\forall\, M > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ n > M$, в том числе и для $M = 1/\varepsilon\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ n > 1/\varepsilon$, но тогда выполняется соотношение $a = 1/n < \varepsilon$, что и требовалось обосновать.

Выполнены оба пункта определения 2.3.6, следовательно, $\inf A = 0$.

Поясним второе: если, например, $\varepsilon = 1/10$, то для всех $n > 10$ $(n \geq 11)$ выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$, т. е., например, $\exists a = 1/11 \in A :\ a < \varepsilon$. Если $\varepsilon = 3/100$, то для всех $n > 100/3$ $(n \geq 34)$ выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$, т. е., например, $\exists a = 1/34 \in A :\ a < \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a = \dfrac{1}{[1/\varepsilon] + 1} \in A : a < \varepsilon$. Здесь выражение $[1/\varepsilon]$ есть целая часть числа $1/\varepsilon$.

[6] Ц е л а я ч а с т ь ч и с л а есть ближайшее целое к этому числу, не превосходящее данного числа. Например, $[0,5] = 0$; $[1] = 1$; $[1,3] = 1$; $[-0,5] = -1$; $[-1] = -1$; $[-1,3] = -2$.

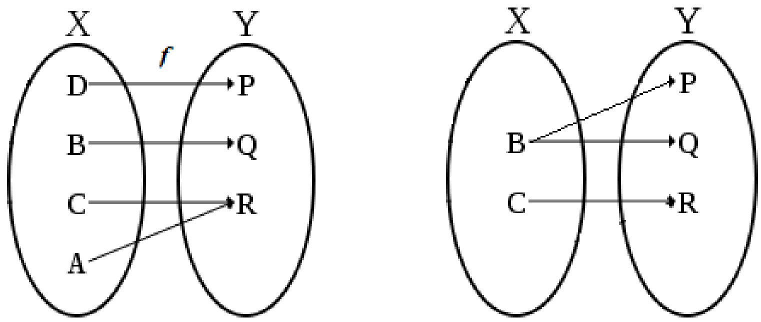
[7] Справедливо утверждение: дробная часть любого числа является неотрицательным числом меньшим единицы, т.е. $0 \leq x < 1$ для любого числа x. Например, $\{0,5\} = 0,5 - [0,5] = 0,5$; $\{1\} = 1 - [1] = 0$; $1,3 = 0,3$; $\{-0,5\} = -0,5 - [-0,5] = 0,5$; $\{-1,3\} = -1,3 - [-1,3] = 0,7$.

Лекция 3. Числовые функции

3.1. Понятие функции

Пусть X и Y некоторые непустые множества. Функция – математическое понятие, отражающее связь между элементами множеств X и Y.

Определение 3.1.1. Функция – это закон (правило), по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие единственный элемент y множества Y (рис.1). Если задан закон соответствия, то говорят, что на множестве X задана функция и обозначают ее как $y = y(x)$ или $y = f(x)$.



(a) (b)

Рис. 1. Законы соответствия: (a) задает функцию; (b) не задает функцию

Буква f в последнем обозначении символизирует указанное правило соответствия и называется характеристикой функции; x называют аргументом рассматриваемой функции или независимой переменной, а соответствующее ему y – значением функции или зависимой переменной, множество X называют областью определения (или областью существования) функции, множество Y – множеством значений функции. Область определения функции обозначают также $D(f)$, а множество значений функции – $E(f)$.

Наряду со словом «функция» используют синоним «отображение». Говорят: „задано отображение f" и обозначают $f : X \to Y$.

Число $y_0 \in Y$, соответствующее значению аргумента x_0, называют значением функции при $x = x_0$ (или в точке x_0) и обозначают $f(x_0)$ или $f(x)\Big|_{x=x_0}$. Говорят также: „$f(x_0)$ есть образ точки x_0 при отображении f".

Пример 3.1. Пусть имеется множество

$$X = \{\text{яблоко, морковь, картофель, капуста}\}$$

и множество Y = {коза, кролик, крот}. Зададим функцию (отображение) следующим образом:

$f = \{$(яблоко, коза), (морковь, кролик), (картофель, крот), (капуста, коза)$\}$.

Если ввести переменную x, пробегающую множество X, и переменную y, пробегающую множество Y, указанную функцию можно задать как $y = f(x)$.

Если X и Y числовые множества, то задается числовая функция. Если $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, то это действительная функция действительного переменного. Эти функции знакомы вам из школьной программы. В случае, когда $X = \mathbb{N}$, $Y \subset \mathbb{R}$, функция называется последовательностью. К изучению последовательностей мы приступим в ближайшее время. Если множество X состоит из векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y \subset \mathbb{R}$, то речь будет идти о действительной функции n переменных. Работать с такими функциями мы будем в следующем семестре. Если множества X и Y являются подмножествами комплексных чисел, тогда задается комплексная функция комплексного переменного. С этими функциями вы познакомитесь при изучении соответствущего курса «Теория функций комплексного переменного».

Заметим, что совсем не обязательно для обозначения аргумента и соответствующего значения функции использовать буквы x и y; если рассматриваются разные функции, то для обозначения их характеристик используются разные буквы. Например, запись $x = g(t)$ означает, что переменная x является функцией аргумента t, причем характеристика этой функции обозначена буквой g. Иногда для указания функции используют только символ, обозначающий характеристику, например, f или g.

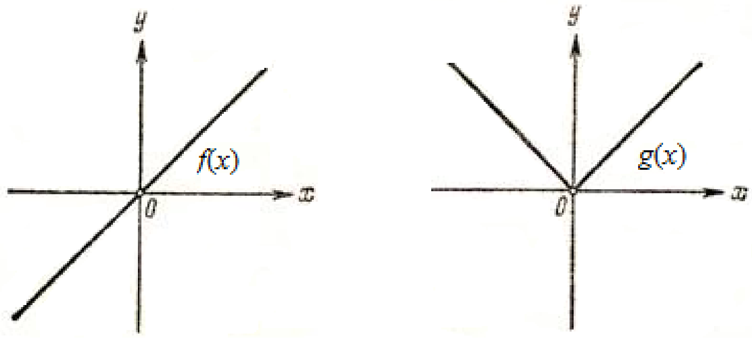
Геометрическое место точек с координатами $(x, f(x))$ на плоскости Oxy называют *графиком* функции.

Определение 3.1.2. Функции f и g называют *равными*, если $D(f)=D(g)$ и равенство $f(x) = g(x)$ верно для любого значения аргумента. Если же это равенство верно лишь на множестве $A \subset D(f) \cap D(g)$, то функции f и g называют *равными на множестве* A.

Пример 3.2. Функции $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, и $g(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (рис. 2), равны на множестве $A = [0; +\infty)$. На всей области определения $f \neq g$, так как $\sqrt{x^2} \neq x$ при $x < 0$. Указанная функция $g(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, равна функции $y(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, так как их области определения совпадают и для любого $x \in \mathbb{R}$

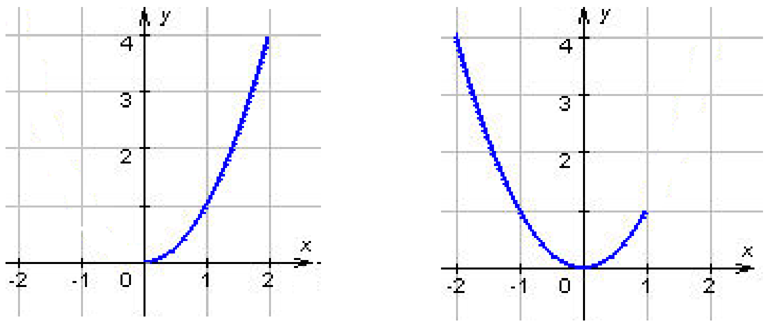
$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пример 3.3. Функции $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$, и $g(x) = \sqrt{x^4}$, $x \in [-2, 1]$, представленные на рис. 3, не равны между собой, так как $D(f) \neq D(g)$.



(a) (b)

Рис. 2. Графики функций: (a) $f(x) = x$; (b) $g(x) = \sqrt{x^2}$



(a) (b)

Рис. 3. Графики функций: (a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$; (b) $g(x) = \sqrt{x^4}$, $x \in [-2, 1]$

Пример 3.4. Функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x^4}$ равны между собой, так как если не указана область изменения x, то под областью определения понимается естественная область определения этих функций, т. е. множество $X = \mathbb{R}$, и для каждого $x \in X$ выполняется равенство $g(x) = \sqrt{x^4} = x^2 = f(x)$.

3.2. Способы задания функции

Табличный способ. Довольно распространенный, заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции удобен в том случае, когда область определения функции является дискретным конечным множеством.

На рис. 4 приведено расписание движения поезда номер 6202, являющееся примером табличного задания функции. По этой таблице каждому остановочному пункту ставится в соответствие время отправления поезда, конечной станции назначения ставится в соответствие время прибытия.

При табличном способе задания функции можно приближенно вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, соответствующие промежуточным значениям аргумента. Для этого используется способ и н т е р п о -

№ поезда	6202
Остановочные пункты	**отпр.**
Н.Новгород-Московский	**08.00**
Толоконцево	08.21
о.п. Неклюдово	08.24
о.п. Дружба	08.27
о.п. Военный городок	08.32
о.п. Спортивная	08.36
Моховые горы прибыт.	**08.40**

Рис. 4. Пример табличного задания функции

л я ц и и — замена функции между ее табличными значениями какой-то простой функцией (например, известными из школьной программы, линейной или квадратичной). На рис. 5 приведена таблица изменения курса доллара и график, построенный по данным таблицы с помощью линейной интерполяции.

Курс USD

Дата	Курс
06.07	33,2247
05.07	33,1605
04.07	33,2204
03.07	32,9475
02.07	32,8517
29.06	32,7090
28.06	32,8766
27.06	32,8876
26.06	32,7140
25.06	32,9097
22.06	32,7433
21.06	32,7041
20.06	32,1201
18.06	31.6790
15.06	31.8029
14.06	32.3467
12.06	32.3951
07.06	32.1385
06.06	31.9816

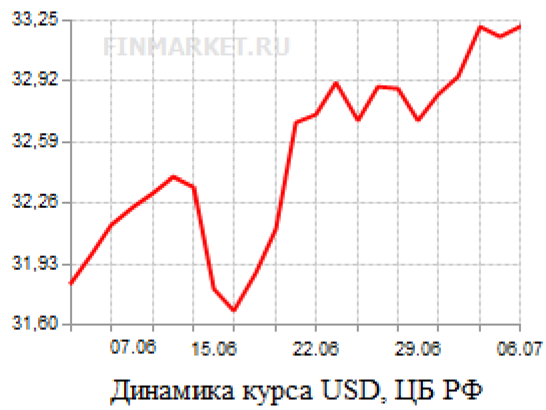


Рис. 5. Линейная интерполяция таблично заданной функции

Недостаток табличного способа задания функции в том, что в некоторых случаях таблица определяет функцию не полностью, а лишь для некоторых значений аргумента и не дает наглядного изображения характера изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

Графический способ. Пусть задано некоторое множество точек M с координатами $(x; y)$ на плоскости Oxy. Поставим числу x в соответствие число y: вторую координату точки M, у которой первая координата равна x. Если каждому числу x соответствует одна точка M с координатами (x, y), то это множество точек задает функцию $f(x) = y$ и, следовательно, оно является графиком этой функции на плоскости Oxy.

Не всякое множество точек координатной плоскости является графиком функции. Для того чтобы данное множество было графиком функции,

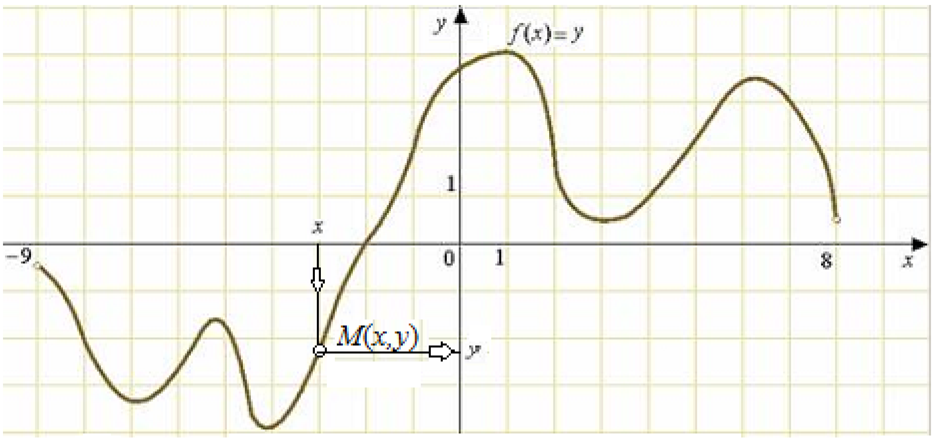


Рис. 6. Пример графического задания функции

необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекала это множество не более чем в одной точке. На рис. 7 приведен пример кривой, не являющейся графиком функции.

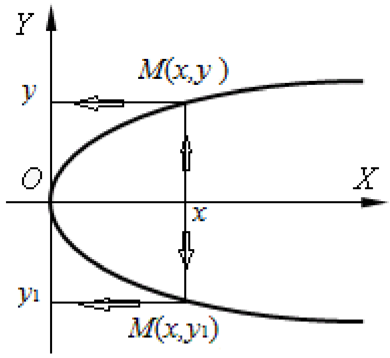


Рис. 7. Пример кривой, не задающей функцию

Графический способ задания функции не всегда дает возможность точно определить численные значения аргумента. Однако он имеет большое преимущество перед другими способами - наглядность. В технике и физике часто пользуются графическим способом задания функции, причем график бывает единственно доступным для этого способом.

Чтобы графическое задание функции было вполне корректным с математической точки зрения, необходимо указывать точную геометрическую конструкцию графика, которая, чаще всего, задается уравнением. Это приводит к следующему способу задания функции.

Аналитический способ. Чаще всего правило соответствия, устанавливающее связь между аргументом и функцией, задается посредством формул. Такой способ задания функции называется аналитическим.

Этот способ дает возможность по каждому численному значению аргумента x найти соответствующее ему численное значение функции y точно или с некоторой точностью.

Если зависимость между x и y задана формулой, разрешенной относительно y, т.е. имеет вид $y = f(x)$, то говорят, что функция от x задана в явном виде. Например, $y = x^2$ – это аналитическое задание простейшей квадратичной функции.

Важно понимать, что само выражение $y = x^2$ не является функцией. Функция, как объект, представляет собой множество упорядоченных пар (см. пример 3.1). А данное выражение, как объект, есть равенство двух переменных. Оно задает функцию, но не является ею. Однако, во многих разделах математики, можно обозначать через $f(x)$ как саму функцию, так и аналитическое выражение, ее задающее. Это синтаксическое соглашение является крайне удобным и оправданным.

Если же значения x и y связаны некоторым уравнением вида $F(x, y)=0$ (т.е. формула не разрешена относительно y), при этом $\forall\, \bar{x} \in X$ сопоставляется единственное $\bar{y}$, такое, что $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то говорят, что функция задана неявно. Например, $x^3 + y^3 - 1 = 0$ или, что то же самое, $x^3 + y^3 = 1$ является неявным заданием явной функции $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. Переход от неявного задания к явному возможен только в простейших случаях. В общем случае такой переход не очевиден и даже не возможен.

К функциям, заданным одной аналитической формулой, примыкают функции, которые на разных частях своей области определения задаются различными формулами:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Напомним, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ – обозначения соответственно множеств рациональных и иррациональных чисел[8]. Эта функция названа в честь немецкого математика Дирихле[9]. График функции Дирихле изобразить невозможно.

Еще один частный случай аналитического задания функции – параметрический, при этом каждая пара $(x, y) \in f$ задается с помощью пары функций $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t, называемый в этом случае параметром, принадлежит некоторому множеству T. Значению $t \in T$ на координатной плоскости Oxy соответствует точка $M(x, y)$. Когда t пробежит все значения из множества T, точка M на координатной плоскости Oxy опишет некоторую кривую. Например,

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

есть параметрическое задание окружности. Действительно, возведя в квад-

[8] $x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q}$

[9] Заметим, что эту функцию можно задать и одной аналитической формулой, но она понятна только знающим теорию пределов, сложна для запоминания и не имеет практического значения.

рат и сложив, соответствующие части обоих уравнений, получим

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t.$$

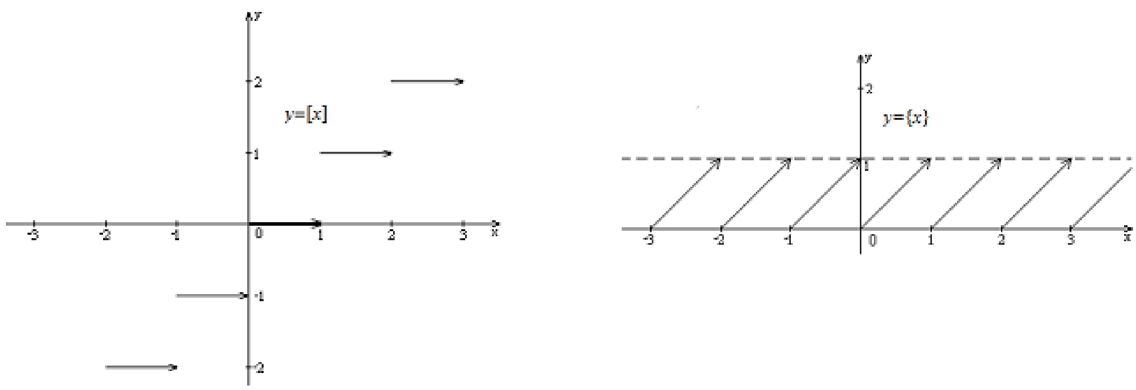
Благодаря основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ параметр t можно исключить и получить каноническое уравнение окружности $x^2+y^2 = 1$. Верхняя дуга и нижняя дуга окружности, задаваемые явно функциями $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, задаются параметрически следующим образом (верхняя и нижняя соответственно):

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0, \pi]; \quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [\pi, 2\pi].$$

Аналитический способ является самым распространенным способом задания функций. Компактность, лаконичность, возможность вычисления значения функции при произвольном значении аргумента из области определения, возможность применения к данной функции аппарата математического анализа – основные преимущества аналитического способа задания функции. К недостаткам можно отнести отсутствие наглядности, которое компенсируется возможностью построения графика.

Словесный способ. Этот способ состоит в том, что функциональная зависимость выражается словами. Основными недостатками словесного способа задания функции являются невозможность вычисления значений функции при произвольном значении аргумента и отсутствие наглядности. Главное преимущество же заключается в возможности задания тех функций, которые не удается выразить аналитически.

Например, функция Дирихле впервые была введена именно таким способом: значение функции $D(x)$ равно 1, если x — число рациональное, и 0, если x — число иррациональное.



(a) (b)

Рис. 8. Графики функций: (a) $[x]$; (b) $\{x\}$

К такому способу задания относится упомянутая в предыдущей лекции функция $[x]$ – целая часть числа x, которая каждому действительному x

ставит в соответствие ближайшее целое число, не превосходящее данное x. Тогда, как уже было показано в предыдущей лекции, функция $\{x\}$ – дробная часть чила записывается формулой $\{x\} = x - [x]$ (рис. 8).

Пример 3.5. Рассмотрим некоторые способы задания еще одной полезной функции называемой «сигнум» (от латинского signum – знак). Область определения этой функции – все множество действительных чисел $X = \mathbb{R}$, а множество значений – трехточечное множество $Y = \{-1, 0, 1\}$. Словесный способ задания: функция «сигнум» ставит в соответствие каждому действительному числу x его знак; аналитический: $sgn\, x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ графический способ задания представлен на рис. 9.

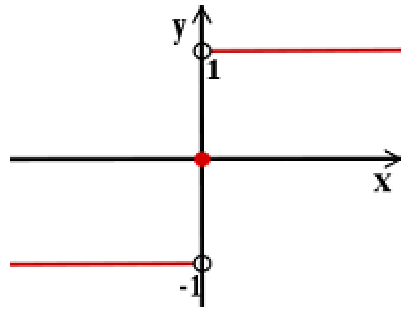


Рис. 9. График функции «сигнум»

3.3. Взаимно однозначные функции: понятие обратной функции

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. В случае, когда $Y = X$, говорят, что отображение f переводит множество X в себя, а именно $f : X \to X$.

Пусть $A \subset X$, тогда *образом* этого множества при отображении f называют множество $B = f(A) = \{y : y \in E(f),\, y = f(x)\, \forall\, x \in A\}$. Множество A называют *прообразом* множества B.

Пример 3.6. При отображении $y = x^2$ образом отрезка $[0, 2]$ является отрезок $[0, 4]$. Отрезок $[0, 2]$ называется прообразом отрезка $[0, 4]$. Отрезок $[-2, 0]$ также является прообразом отрезка $[0, 4]$ при отображении $y = x^2$ (рис. 10).

Определение 3.3.1. Функция $f(x)$ называется *взаимно однозначной* (отображение $f : X \to Y$ называется *биективным* или f – *биекция*), если каждое $y \in Y$ соответствует единственному элементу $x \in X$.

Это определение можно сформулировать иначе.

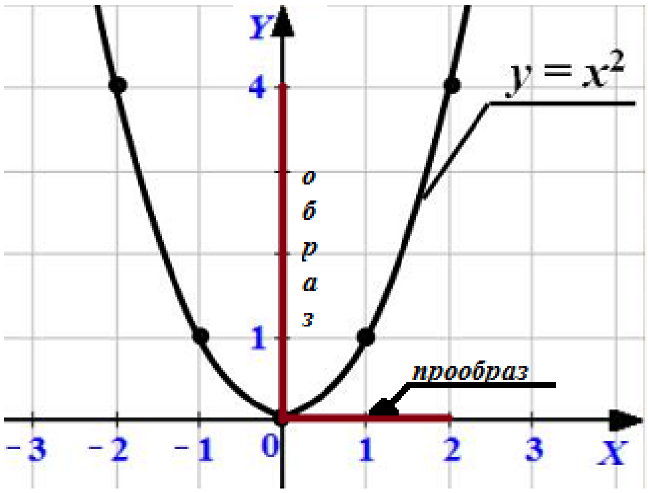
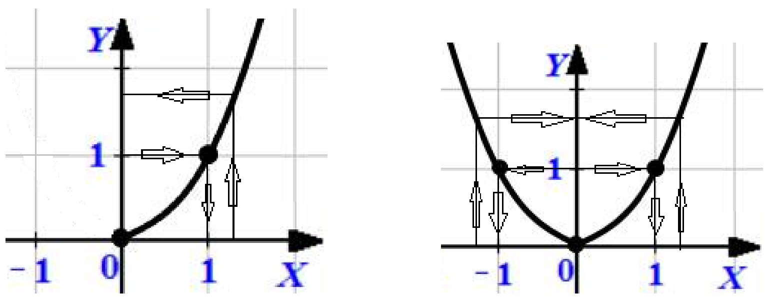


Рис. 10. Образ, прообраз

Определение 3.3.2. Функция $f(x)$ называется *взаимно однозначной* (f — *биекция*), если $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \neq x_2$ выполняется соотношение $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Иллюстрация этих определений представлена на рис. 11 (a). Каждая прямая $y = y_0$, где $y_0 \in Y$, пересекает график взаимно однозначной функции в единственной точке x_0, y_0, где $f(x_0) = y_0$.



(a) (b)

Рис. 11. Примеры: (a) биекция; (b) не биекция

Определение 3.3.3. Пусть на множестве X задана функция $y = f(x)$, множеством значений которой является множество Y. Если f — биекция, то на множестве Y определена функция $x = f^{-1}(y)$, ставящая в соответствие каждому $y \in Y$ то значение x из X, для которого $f(x) = y$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется *обратной*[10] для функции $y = f(x)$.

Согласно этому определению $D(f^{-1}) = Y$, $E(f^{-1}) = X$, т. е. множества определения и значений исходной и обратной функции меняются местами. Функцию, имеющую обратную, называют *обратимой*.

[10] Заметим, что f^{-1} это не «минус первая степень» функции f, а символическое обозначение функции, обратной для f.

Отметим, что если $x = f^{-1}(y)$ – обратная для $y = f(x)$, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называют также в з а и м н о о б р а т н ы - м и.

Пример 3.7. Функции $y = x^2$, $x \geq 0$, и $x = \sqrt{y}$ являются взаимно обратными, а для функции $y = x^2$ при $x \in \mathbb{R}$ нельзя определить обратную функцию, так как $y = x^2$ не является взаимно однозначной функцией на естественной области определения (см. рис. 11 (b)).

Для взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ справедливы следующие тождества[11]:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Пример 3.8. Функции $y = \sin x$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ и $x = \arcsin y$ являются взаимно обратными. Поэтому $\sin(\arcsin x^2) = x^2$ при $x \in [-1; 1]$, $\arcsin(\sin x^2) = x^2$ при $x \in [-\sqrt{\pi}/\sqrt{2}; \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$.

Очевидно, что график функции $x = f^{-1}(y)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции x, а значение y, ее записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

График этой функции симметричен графику функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, относительно прямой $y = x$. При построении графика обратной функции точки с координатами $(a, b) \in f$ переходят в точки $(b, a) \in f^{-1}$. На рис. 12 представлены графики функций $f(x)$ и $g = f^{-1}(x)$ взаимно обратных друг к другу.

[11] Обратите внимание, что $y \in E(f)$, $x \in E(f^{-1})$

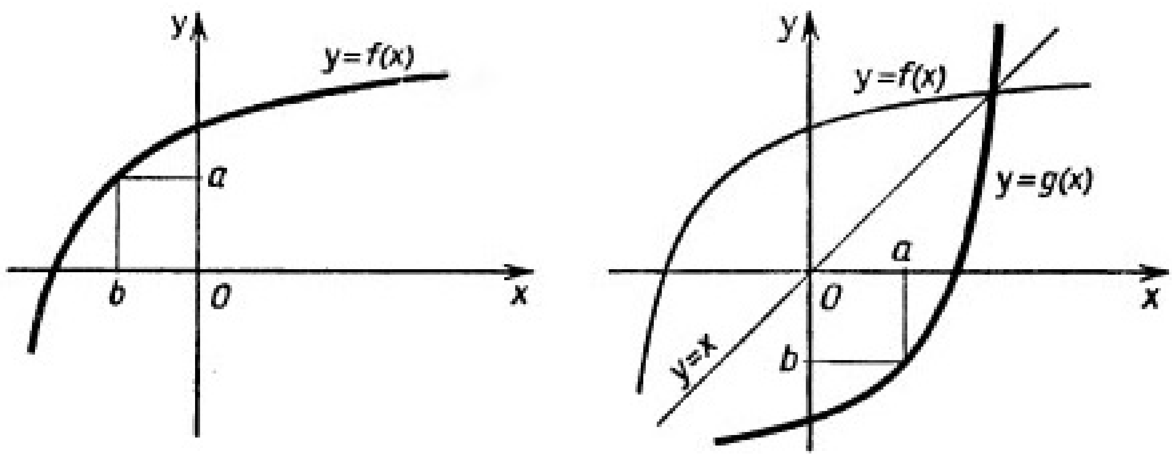


Рис. 12. Взаимно обратные функции

Лекция 4. Элементарные функции и их свойства

4.1. Свойства функций

Четность. Функцию $f(x)$, определенную на симметричном относительно нуля множестве X, называют *четной*, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = f(x);$$

нечетной, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примеры графиков четной ($g(x) = x^2$) и нечетной ($f(x) = x^3$) функций изображены на рис. 13.

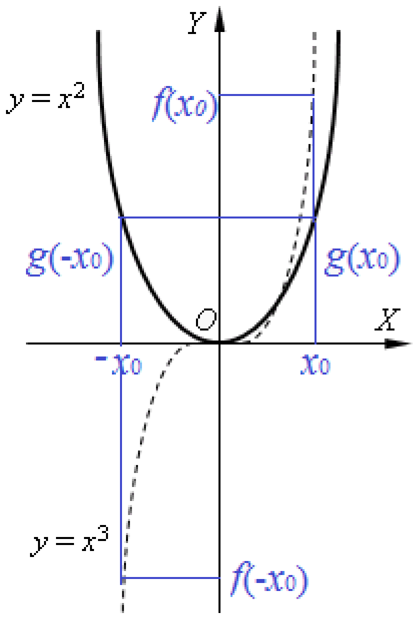


Рис. 13. Графики четной и нечетной функций

Монотонность. Функцию f называют *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Это определение коротко записывают так:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функцию f называют убывающей (невозрастающей) на множестве $X \subset D(f)$, если

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Если в этих определениях из неравенства $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то функцию называют строго возрастающей (соответственно строго убывающей) на множестве X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют названием монотонные, строго возрастающие и строго убывающие – строго монотонные.

Если $X = D(f)$, то указание на множество X опускают.

Примером строго возрастающей функции является функция $y = x^3$, $x \in R$ (см. рис. 1). Функция $y = x^2$, $x \in R$ (см. рис. 1), строго убывает на $(-\infty, 0)$ и строго возрастает на $(0, +\infty)$, на всей области определения $\mathbb{R}$ она не является монотонной.

Периодичность. Число $T \neq 0$ называют периодом функции f, если для любого $x \in D(f)$ выполнено $f(x+T) = f(x)$.

Если T – период функции, то для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, число kT также является периодом этой функции. Наименьший положительный период функции называется основным (или главным) периодом.

Функцию, имеющую главный период, будем называть периодической. Примером периодической функции является функция, ставящая в соответствие каждому $x \in \mathbb{R}$ дробную часть[12] числа x. Период данной функции – любое целое число, отличное от нуля; основной период равен единице. График функции $y = \{x\}$ представлен на рис. 14.

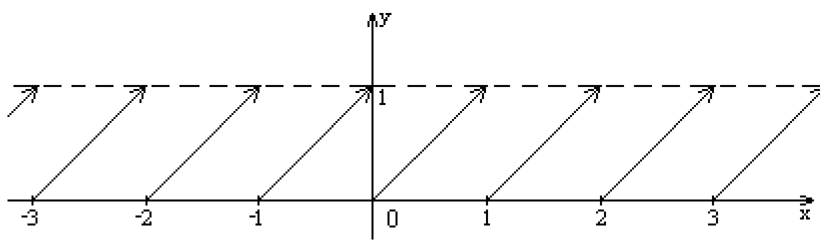


Рис. 14. График функции $\{x\}$

Пример 4.1. Периодом постоянной функции $y = const$ является любое действительное число, отличное от нуля, т. е. множество положительных периодов этой функции есть полупрямая $(0, +\infty)$. Точная нижняя грань[13] этого

[12] $y = \{x\}$ – дробная часть числа x; $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ – целая часть числа.

[13] Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества A называется точной нижней гранью этого множества и обозначается $\inf A$. То есть число α является точной нижней гранью множества A, если α – нижняя грань этого множества; правее α нижних граней нет, так как в любой сколь угодно малой ε-окрестности α обязательно найдется элемент множества A.

множества есть число ноль, ноль не принадлежит этому множеству, следовательно, наименьшего элемента в этом множестве нет. Такую функцию согласно данному определению мы не можем назвать периодической функцией.

Пример 4.2. Периодом функции Дирихле[14] является любое рациональное число, отличное от нуля. По тем же причинам, что и в предыдущем примере мы не будем называть функцию Дирихле периодической[15] функцией.

4.2. Обзор основных элементарных функций

К о с н о в н ы м э л е м е н т а р н ы м функциям относят постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

4.2.1. Степенная функция.

Степенной функцией называют функцию вида $f(x) = x^\alpha$, где α – п о к а з а т е л ь с т е п е н и – некоторое действительное число. В общем случае степенная функция определена при $x > 0$, но в зависимости от значения α область определения может быть расширена. Рассмотрим различные варианты показателя степени α.

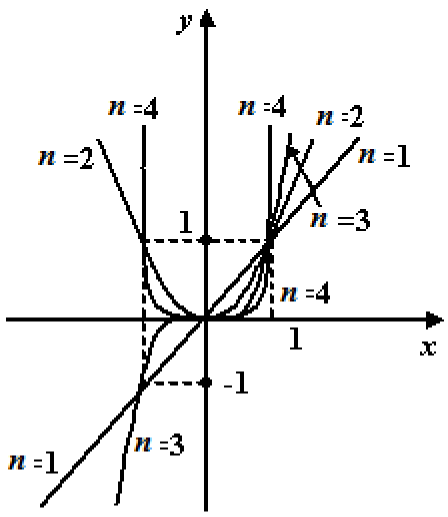


Рис. 15. График степенной функции при $n = 1, 2, 3, 4$

Показатель степени равен нулю. Если $\alpha = 0$, то по определению полагают, что $x^0 = 1$ для всех $x > 0$.

---

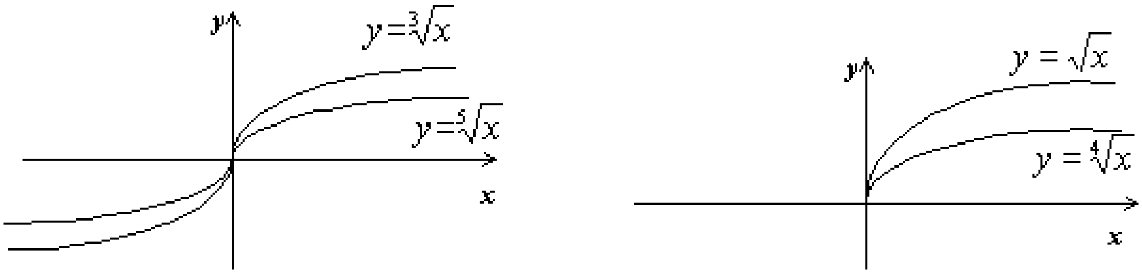
[14] Значение функции $D(x)$ равно 1, если x — число рациональное, и 0, если x — число иррациональное.

[15] В некоторых источниках определение периодической функции вводится несколько иначе: периодической называют функцию, имеющую период. Согласно такому определению функции $y = const$ и функция Дирихле будут периодическими, но не имеющими основного периода.

Натуральный показатель степени. Возведение любого действительного числа x в натуральную степень n определяется как $n-$ кратное умножение числа x самого на себя. Следовательно, при натуральном n степенная функция определена для всех действительных значений x: $D(f) = \mathbb{R}$. Если число n – четное, то и функция f – чётная; если число n – нечетное, то и функция f – нечётная.

Показатель степени, обратный натуральному. При нечетном n степенная функция является взаимно-однозначной с множеством значений $Y = \mathbb{R}$, следовательно, для нее есть обратная f^{-1} с областью определения $X = \mathbb{R}$. В принятых обозначениях (x – аргумент, y – значение функции) это функция $y = x^{1/n}$, которую также обозначают $y = \sqrt[n]{x}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$ (рис. 16 (a)).

При четном n функция $y = x^{1/n}$ определена только при $x \geq 0$ (рис. 16 (b)).



(a) (b)

Рис. 16. График степенной функции при показателе, обратном натуральному

На рис. 17 (a) изображено взаимное расположение графиков степенных функций с областью определения $x \geq 0$, для показателя степени $\alpha = 2$, $\alpha = 4$, соответствующих им обратных функций с показателем $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1/4$, график функции при $\alpha = 1$, которая является обратной самой себе, а также график функции при $\alpha = 0$, для которой нет обратной[16].

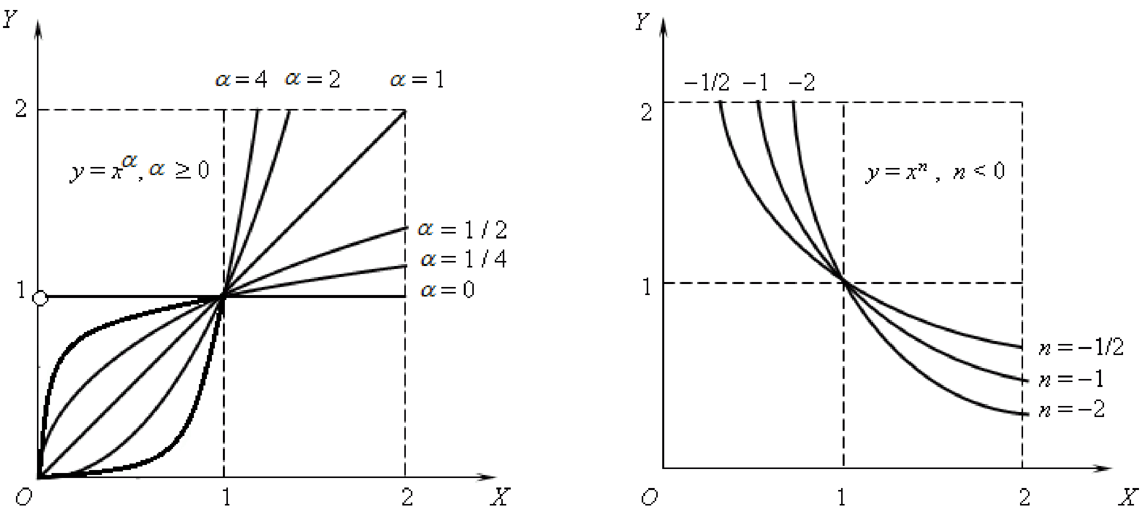
Положительный рациональный показатель степени. Как известно, положительное рациональное число есть отношение двух натуральных чисел, например, $\alpha = m/n$. Тогда степенную функцию с любым положительным рациональным показателем степени можно представить как натуральную степень функции с показателем, обратным некоторому натуральному числу: $x^{\alpha} = x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$. Заметим, что в общем случае $(\sqrt[n]{x})^m \neq \sqrt[n]{x^m}$. Равенство $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ справедливо при $x \geq 0$.

Отрицательный рациональный показатель степени. Полагают, что

$$x^{-m/n} = (1/x)^{m/n} \text{ для любых } x > 0, \; m \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{N}.$$

На рис. 17 (b) изображено взаимное расположение графиков степенных функций при $\alpha = \; -1/2, -1, -2$.

[16]Объясните, почему?



(a) (b)

Рис. 17. Взаимное расположение графиков степенных функций

Произвольный действительный показатель степени. Пусть α – произвольное действительное число. Определим общую степенную функцию $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, с помощью основного логарифмического тождества:

$$y = x^{\alpha} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x} (a > 1).$$

4.2.2. Показательная функция.

Возьмем произвольное положительное число a. Каждому действительному числу x поставим в соответствие значение степени a^x. Это соответствие будет определять функцию, которая называется п о к а з а т е л ь н о й и задается равенством $y = a^x$. Число a называется основанием степени, x – показателем степени. Областью определения этой функции является все множество действительных чисел.

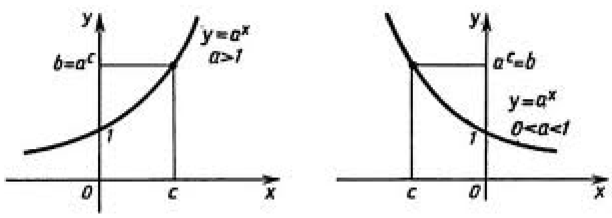


Рис. 18. Графики показательной функции при $a > 1$ и $a < 1$

Особый случай представляет $a = 1$. При этом показательная функция вырождается в постоянную $y = 1$. Во всех остальных случаях множество значений показательной функции есть множество положительных действительных чисел, так как любая степень положительного числа положительна.

При $a > 1$ показательная функция возрастает, так как большему значению показателя соответствует большее значение степени (рис. 18 а), при $a < 1$ показательная функция убывает, так как большему значению показателя здесь уже соответствует меньшее значение степени (рис. 18 б).

При любом основании a верно равенство $a^0 = 1$, следовательно, график показательной функции всегда проходит через точку с координатами $(0, 1)$. Для показательной функции справедливо основное свойство $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

4.2.3. Логарифмическая функция.

Поскольку при $a \neq 1$, показательная функция монотонна, то она имеет обратную, которая называется л о г а р и ф м и ч е с к о й функцией: $y = \log_a x$. Соответственно, область определения логарифмической функции есть множество всех положительных действительных чисел, а множество значений – множество всех действительных чисел (рис. 19а,б).

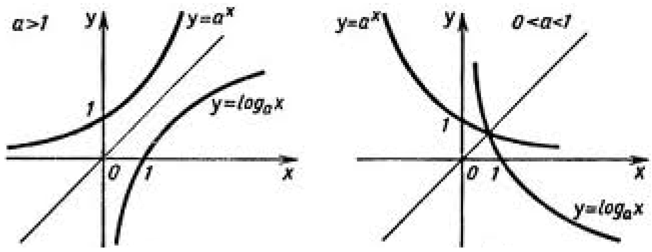


Рис. 19. Графики логарифмической функции

График логарифмической функции всегда проходит через точку с координатами $(1, 0)$. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, при $a < 1$ – убывает (рис. 19 с).

Из основного свойства показательной функции следует справедливость основного логарифмического свойства $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, выполняющегося для любых положительных чисел x и y.

4.2.4. Тригонометрические функции.

Определение 4.2.1. Функция, которая длине половины дуги на единичной окружности ставит в соответствие длину половины хорды, стягивающей эту дугу, называется ф у н к ц и е й с и н у с а. Эта функция имеет обозначение $y = \sin x$.

Если наглядно представить дугу как лук, а хорду как его тетиву, то можно считать, что функция синуса выражает зависимость между половиной длины лука и половиной длины его тетивы. Отсюда исторически происходит название этой функции – синус. Индийские математики функцию

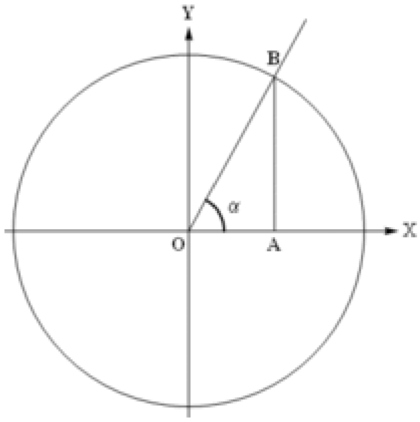


Рис. 20. Геометрическое определение функции синуса

синус называли словом «джива», что буквально означает «тетива лука». Арабы переделали этот термин в «джиба», который в дальнейшем превратился в «джайо» – обиходное слово арабского языка, означающее изгиб, пазуха, складка одежды. В латинском языке этому слову соответствует $sinus$, которое и стало названием соответствующей тригонометрической функции.

Рассмотрим на декартовой плоскости окружность с радиусом единица и с центром в начале координат. Построим дугу на этой окружности так, чтобы ее середина лежала на пресечении с осью абсцисс. Возьмем верхнюю половину этой дуги (лежащую в полуплоскости с положительными ординатами). Тогда ордината крайней верхней точки этой дуги будет соответствовать половине длины хорды, стягивающей построенную дугу. Таким образом, значение этой ординаты y и является значением функции синуса, отвечающей величине x – половине длины данной дуги. Дугу на единичной окружности можно откладывать как по, так и против часовой стрелки. Чтобы различать эти случаи, принято соглашение: считать длину дуги, отложенной по часовой стрелке отрицательной, а против – положительной. С учетом этого функция синуса будет н е ч е т н о й.

Если длина дуги превышает длину окружности, то это соответствует случаю, когда дуга откладывается вдоль окружности несколько раз. При этом ее хорда совпадет с хордой дуги, уменьшенной на длину окружности. Это обстоятельство приводит к тому, что функция синуса является п е р и о д и ч е с к о й с периодом 2π (2π – длина единичной окружности). Из геометрических соотношений выводятся некоторые важные значения функции синуса (рис. 22).

Ввиду того, что в случае, когда дуга не превышает половины окружности, ее увеличение приводит к увеличению стягивающей хорды, то функция синус является м о н о т о н н о в о з р а с т а ю щ е й при $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Наряду с ординатой крайней верхней точки дуги единичной окружности в декартовой системе координат можно рассматривать ее абсциссу. Если подобно предыдущему случаю поставить в соответствие величине x – половине длины дуги – значение абсциссы соответствующей верхней точки, то получим вторую тригонометрическую функцию – к о с и н у с. Эта функция имеет обозначение $y = \cos x$. Название функции означает, что она является дополнительной к функции синуса. Так как точка дуги всегда лежит на

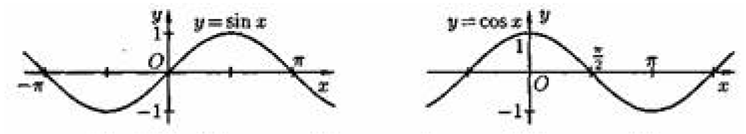


Рис. 21. Графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

единичной окружнсти, то значения синуса и косинуса связаны соотношением

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

которое называют о с н о в н ы м т р и г о н о м е т р и ч е с к и м т о ж д е с т в о м. С учетом этого ясно, что функция косинуса также является п е р и о д и ч е с к о й с периодом 2π. Кроме того, функция косинуса является ч е т н о й. Использую таблицу значений синуса, можно вывести таблицу значений косинуса (рис. 22).

x, рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
x^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0

Рис. 22. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Отношение синуса к косинусу одного и того же аргумента называется т а н г е н с о м этого аргумента:

$$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x.$$

Отношение косинуса к синусу – к о т а н г е н с о м.

$$\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x.$$

Тангенс и котангенс – периодические функции с периодом π, нечетные. Основные значения функций тангенса и котангенса представлены на рис. 22.

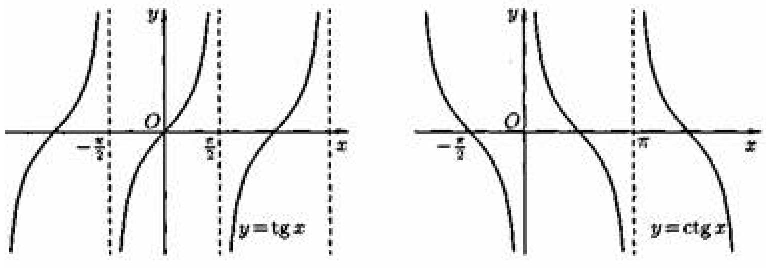


Рис. 23. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Наименование функции	**Значение аргумента**						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Рис. 24. Формулы приведения тригонометрических функций

Кроме этого, для тригонометрических функций имеют место соотношения, называющиеся формулами приведения (рис. 24).

Применение формул приведения можно свести к использованию мнемонического правила.

1. Определяется название приведенной функции по следующему правилу: если в аргументе приводимой функции содержатся углы $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то функция меняется на сходственную, если аргумент приводимой функции содержит углы π или 2π, то функция названия не меняет.

2. Определяется координатная четверть, в которой лежит аргумент приводимой функции, в предположении, что α — острый угол, и определяется знак приводимой функции в этой четверти. Этот знак ставим перед приведенной функцией.

Большое значение имеют формулы тригонометрических функций двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

4.2.5. Обратные тригонометрические функции

Поскольку на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция синуса строго монотонно возрастает, то она имеет обратную, которая называется арксинус: $y = \arcsin x$. Эта функция также строго монотонно возрастает. Используя таблицу значений синуса, можно построить таблицу основных значений арксинуса (рис. 25).

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0		
$\operatorname{arctg} a$	0				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Рис. 25. Значения обратных тригонометрических функций

Поскольку на отрезке $[0, \pi]$ функция косинуса строго монотонно убывает, то она имеет обратную, которая называется арккосинус: $y = \arccos x$. Эта функция также строго монотонно убывает. Используя известные значения функции косинуса можно найти основные значения функции арккосинуса (рис. 25).

Поскольку на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ функция тангенса строго монотонно возрастает, то она имеет обратную, которая называется арктангенс: $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция также строго монотонно возрастает. Основные значения арктангенса приведены на рис. 25.

Используя несобственные числа $+\infty$ и $-\infty$ можно доопределить функцию арктангенс в этих несобственных значениях аргумента

$$\operatorname{arctg}(+\infty) = \pi/2, \quad \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2.$$

На интервале $(0, \pi)$ функция котангенса строго монотонно убывает, она имеет обратную, которая называется арккотангенс: $y = \operatorname{arcctg} x$. Эта

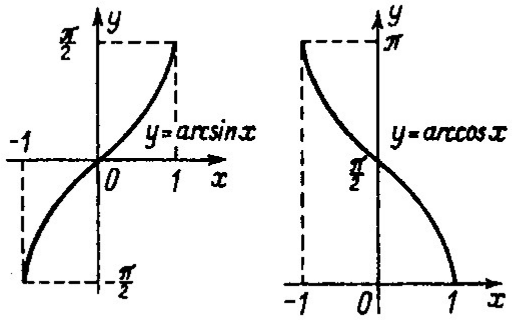


Рис. 26. Графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$

функция также строго монотонно убывает. Основные значения арккотангенса приведены на рис. 25.

Используя несобственные числа $+\infty$ и $-\infty$ можно доопределить функцию арккотангенс в этих несобственных значениях аргумента

$$\operatorname{arcctg}(+\infty) = 0, \quad \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi.$$

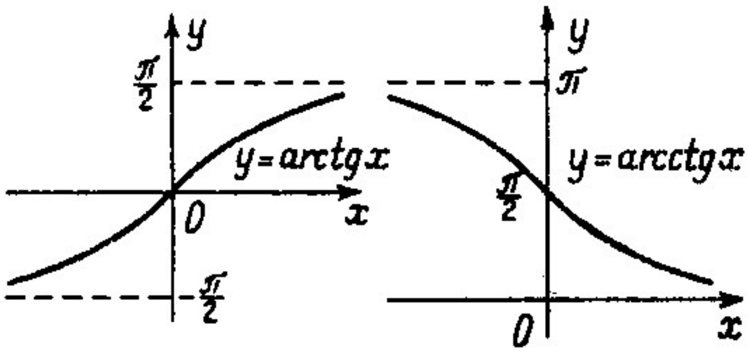


Рис. 27. Графики функций $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

4.3. Арифметические операции над функциями

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на некотором множестве X. Над этими функциями определены четыре арифметических операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

С л о ж е н и е м функций $f(x)$ и $g(x)$ называется операция, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие значение $y = f(x) + g(x)$. Результат сложения называется с у м м о й функций.

Вычитанием функций $f(x)$ и $g(x)$ называется операция, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие значение $y = f(x) - g(x)$. Результат вычитания называется **разностью** функций.

Умножением функций $f(x)$ и $g(x)$ называется операция, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие значение $y = f(x) \cdot g(x)$. Результат умножения называется **произведением** функций.

Делением функций $f(x)$ и $g(x)$ называется операция, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие значение $y = f(x)/g(x)$. Результат деления называется **частным** функций. Область определения частного функций f и g есть множество X за исключением точек, в которых $g(x) = 0$.

4.4. Композиция функций

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, и пусть область значений функции f содержится в области определения функции g. Функцию

$$z = g(f(x)), \; x \in D(f),$$

называют **сложной** функцией или **композицией** (**суперпозицией**) функций f и g и обозначают $g \circ f$.

Пример 4.3. Функция $z = \sqrt{x^2}$ является композицией функций $y = x^2$ и $z = \sqrt{y}$.

4.5. Элементарные функции

Элементарной функцией называют функцию, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций из основных элементарных функций.

Пример 4.4. Так как для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $|x| = \sqrt{x^2}$, то функция $y = |x|$ является элементарной функцией.

Замечание 4.1. Функция Дирихле, $y = sgn\, x$, функции целая часть числа, дробная часть числа элементарными не являются.

4.6. Классификация элементарных функций

Целая рациональная функция (алгебраический многочлен или полином) – функция вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$.

Дробная рациональная функция – это дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, числителем и знаменателем которой являются некоторые рациональные функции. Областью определения дробной рациональной функции является множество действительных чисел за исключением точек, в которых выполняется равенство $Q_m(x) = 0$.

Целые рациональные и дробные рациональные функции составляют класс рациональных функций.

Иррациональные функции – это степенные функции с рациональным показателем и полученные из них с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, за исключением рациональных функций.

Иррациональные и рациональные функции составляют класс алгебраических функций.

Трансцендентные функции – функции, не вошедшие в класс алгебраических. Например, все тригонометрические и обратные к ним, показательные и логарифмические.

Удобно классификацию элементарных функций представить в виде таблицы.

Элементарные функции:

- Трансцендентные
- Алгебраические
  - Иррациональные
  - Рациональные
    - Целые рациональные
    - Дробные рациональные

Пример 4.5. Степенная функция $f(x) = x^{-1}$ относится к классу дробных рациональных функций, так как $x^{-1} = 1/x$.

Замечание 4.1. Если вид элементарной функции можно упростить на всей области определения, то классификации подлежит именно упрощенная функция.

Пример 4.6. $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$ - не иррациональная функция, а рациональная, так как $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1$.

Лекция 5. Полезные неравенства; гиперболические функции

5.1. Полезные неравенства

Утверждение 5.1.1. *Функция* $y = \sin x$ *удовлетворяет неравенству* $|\sin x| \leq |x|$.

Доказательство. Очевидно, что это неравенство выполняется при $x = 0$, так как $\sin 0 = 0$. Пусть $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим на единичной окружности дугу $\breve{AK}$ длины x (рис. 28). Сектор круга AOK, опирающийся на эту дугу, имеет площадь $x/2$. Треугольник AOK, образованный радиусами круга и хордой, стягивающей эту дугу, имеет площадь $\dfrac{1}{2}\sin x$. Очевидно, что этот треугольник вписан в сектор, следовательно, его площадь не больше площади сектора, откуда вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \quad \text{или} \quad \sin x \leq x.$$

В силу нечетности функции синуса при $-\pi/2 < x < 0$ имеет место обратное неравенство $\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{2}\sin x$, но при этом $|\sin x| \leq |x|$.

При $|x| \geq \pi/2 > 1$ последнее неравенство тем более имеет место, так как $|\sin x| \leq 1$ при любом x. Справедливость неравенства установлена.

Нетрудно видеть, что при $x \neq 0$ неравенство выполняется в строгом смысле.

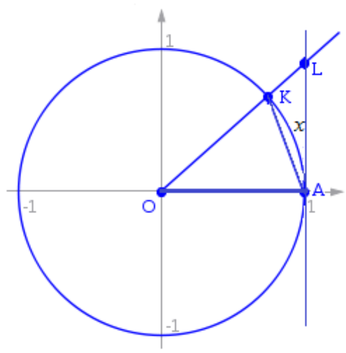


Рис. 28. Единичная окружность

Утверждение 5.1.2. *Функция* $y = \operatorname{tg} x$ *удовлетворяет неравенству* $|\operatorname{tg} x| \geq |x|$ *при* $|x| < \pi/2$.

Доказательство. Очевидно, это неравенство выполняется при $x = 0$, так как $\operatorname{tg} 0 = 0$. Пусть $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим на единичной окружности дугу $\breve{AK}$ длины x (рис. 28). Сектор круга AOK, опирающийся на эту дугу, имеет площадь $x/2$. Треугольник AOL, образованный радиусом круга AO, касательной к окружности OL, и отрезком прямой, проходящей через центр окружности и точку K дуги, имеет площадь $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Очевидно, что сектор вписан в треугольник, следовательно, его площадь не больше площади треугольника, откуда вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x \geq \frac{x}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x \geq x.$$

В силу нечетности функции тангенса при $-\pi/2 < x < 0$ имеет место обратное неравенство $\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, но при этом $|\operatorname{tg} x| \geq |x|$, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что при $x \neq 0$ неравенство выполняется в строгом смысле.

Утверждение 5.1.3. *Функция y=arcsinx удовлетворяет неравенству* $|\arcsin x| \geq |x|$.

Доказательство. Обозначим $y = \arcsin x$, тогда $x = \sin y$. Так как $|\sin y| \leq |y|$, то $|\arcsin x| \geq |x|$, что и требовалось доказать.

Утверждение 5.1.4. *Функция* $y = \operatorname{arctg} x$ *удовлетворяет неравенству* $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$.

Доказательство. Обозначим $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} y$. Так как $|\operatorname{tg} y| \geq |y|$, то $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$, что и требовалось доказать.

5.2. Гиперболические функции

Гиперболические функции $-$ семейство элементарных функций, задаваемые следующими формулами:

гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

Наименование «гиперболические функции» объясняется тем, что геометрически эти функции могут быть определены из рассмотрения равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, которую можно задать параметрическими уравнениями $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, при этом аргумент t представляет двойную площадь сектора гиперболы OAC (рис. 29).

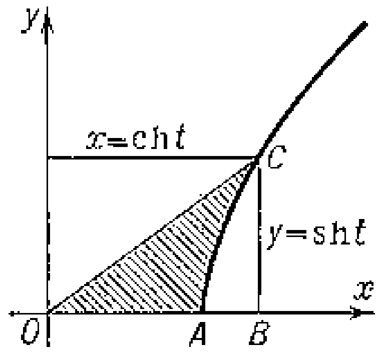


Рис. 29. Геометрическое определение гиперболического синуса и косинуса

Из формул задания гиперболических функций следует, что $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ заданы на всей числовой прямой, $\operatorname{cth} x$ определен всюду на числовой прямой, за исключением точки $x = 0$.

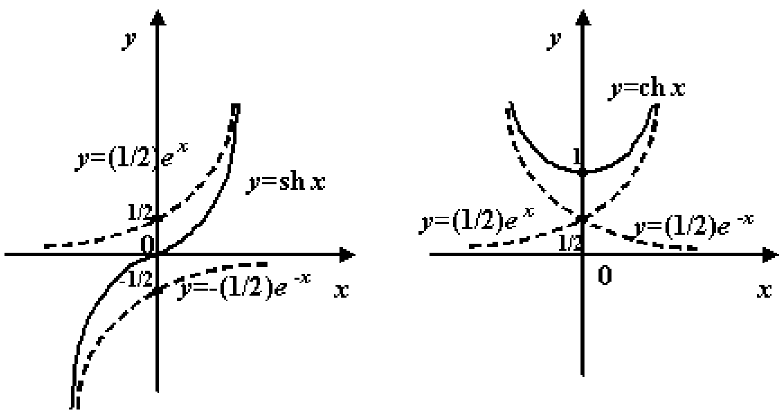


Рис. 30. Гиперболический синус и гиперболический косинус

Функция $y = \operatorname{sh} x$ – нечетная, строго возрастающая. Функция $y = \operatorname{ch} x$ – четная, строго убывающая на $(-\infty, 0]$ и строго возрастающая на $[0, +\infty)$. Функции $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$ – нечетные, причем $|\operatorname{th} x| < 1$, $|\operatorname{cth} x| > 1$.

На рис. 5.2. изображен процесс построения графиков гиперболического синуса и гиперболического косинуса, а на рис. 5.2. приведено взаимное расположение графиков $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Гиперболические функции обладают рядом свойств, аналогичных свойствам тригонометрических функций. Например, для гиперболических функций имеют место теоремы сложения, аналогичные теоремам сложения для

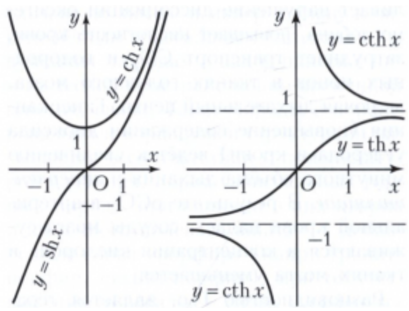


Рис. 31. Графики гиперболических функций

тригонометрических функций. Именно:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y. \tag{5.2}$$

Из формулы (5.1) с помощью подстановки $y = -x$, получим основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

посредством подстановки $y = x$, получим формулу гиперболического косинуса удвоенного аргумента:

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

из которой с помощью основного гиперболического тождества получаются часто употребляемые формулы понижения степени:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

Из формулы (5.1), используя подстановку $y = x$, получим формулу гиперболического синуса удвоенного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Д/З: Доказать теоремы сложения для гиперболических функций, получить из них все приведенные формулы.

5.3. Обратные гиперболические функции

Функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ взаимно-однозначные на всей области определения, поэтому обратимы, их обратные функции называются и обозначаются соответственно:

а р е а с и н у с гиперболический: $y = \operatorname{arsh} x, \quad x \in \mathbb{R}$,

а р е а т а н г е н с гиперболический: $y = \operatorname{arth} x, \quad x \in \mathbb{R}$.

а р е а к о т а н г е н с гиперболический: $y = \operatorname{arcth} x, \quad |x| > 1$.

Графики указанных обратных гиперболических функций получаем симметрией относительно прямой $y = x$ графиков функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Функция $y = \operatorname{ch} x$ не является взаимно-однозначной на области определения. Обратимыми являются ее правая $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0, +\infty)$, и левая $y = \operatorname{ch} x$, $x \in (-\infty, 0]$, ветки. Функцию, обратную для $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0, +\infty)$ будем называть г л а в н ы м з н а ч е н и е м а р е а к о с и н у с а гиперболического и обозначать $y = \operatorname{arch} x$, $x \geq 1$. Обратная для $y = \operatorname{ch} x$, $x \in (-\infty, 0]$, выражается через главное значение ареакосинуса гиперболического как $-\operatorname{arch} x$, $x \geq 1$.

Пример 5.1. Доказать, что функция $y = \operatorname{arsh} x, \quad x \in \mathbb{R}$, является элементарной.

$\diamond$ Данная функция является обратной к функции $y = \operatorname{sh} x$. Чтобы получить ее аналитическое выражение нужно уравнение $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ разрешить относительно переменной x для каждого $y \in \mathbb{R}$. Это уравнение сводится к квадратному относительно e^x уравнению $(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$. Отсюда находим $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Условию $e^x > 0$ при любых $y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет только решение $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, соответственно, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.
Поменяв обозначения зависимой и независимой переменных, получим $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Таким образом, ареасинус гиперболический задается формулой

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Видно, что эта функция получается с помощью конечного числа арифметических операций и композиций степенных логарифмической функций, т. е. является элементарной.

Д/З: Получить выражения для обратных гиперболических функций:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1;$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1.$$

Лекция 6. Предел последовательности

6.1. Числовая последовательность и ее предел

Определение 6.1.1. Последовательность — это функция натурального аргумента: $a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$.

Здесь n — номер члена последовательности, a_n — общий член последовательности.

Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ обозначают $\{a_n\}$. Элементы $a_1,\ a_2,\ \ldots$, из которых составлена последовательность, называют членами последовательности. Последовательности, членами которых являются числа, называют числовыми.

Если все $a_n = const$, то последовательность называется стационарной.

Пример 6.1. 2, 2, ... , 2, ... — стационарная последовательность.

Пример 6.2. Написать пять первых членов последовательности с общим членом

$$a_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{10n}.$$

$\diamond$ $a_1 = 2 - \frac{1}{10} = 1\frac{9}{10}$, $a_2 = 2 + \frac{1}{20} = 2\frac{1}{20}$, $a_3 = 2 - \frac{1}{30} = 1\frac{29}{30}$, $a_4 = 2 + \frac{1}{40} = 2\frac{1}{40}$, $a_5 = 1\frac{49}{50}$.

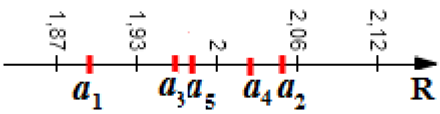


Рис. 32. Значения последовательности $a_n = 2 + (-1)^n \dfrac{1}{10n}$ на числовой оси.

Заметим, что члены этой последовательность с каждым номером приближаются к числу 2 с разных сторон: абсолютная погрешность[17] между членами

[17]Если a есть точное числовое значение некоторой величины, a_n — ее приближенное значение, то $\Delta = |a_n - a|$ называется абсолютной погрешностью приближенной величины a_n. Если известно, что $|a_n - a| < \Delta_a$, то величина Δ_a называется предельной абсолютной погрешностью приближенной величины a_n. На практике под точностью измерений обычно понимают предельную абсолютную погрешность. Например, вычислить приближённое значение с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую на n -м разряде после запятой.

последовательности a_n и числом 2 выражается формулой $\Delta = |2 - a_n| = \dfrac{1}{10n}$. Можно сказать, что начиная с некоторого номера члены последовательности a_n являются приближенными значениями числа 2 с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, поскольку для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n что выполняется неравенство

$$|a_n - 2| = \frac{1}{10n} < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Нетрудно видеть, что это неравенство справедливо для всех[18] $n > \dfrac{1}{10\varepsilon}$. Поскольку n – число натуральное, то можем утверждать, что неравенство (6.1) выполняется для всех $n > \left[\dfrac{1}{10\varepsilon}\right]$ или (что то же самое[19]) $n \geq \left[\dfrac{1}{10\varepsilon}\right] + 1 = N$. Очевидно, что чем меньше ε, тем больше значение номера N; ε может быть сколь угодно малым, а номер N – сколь угодно большим, соответственно значения членов последовательности $\{a_n\}$ с номерами $n > N$ будут сколь угодно близки к числу 2 (предельная абсолютная погрешность равна ε).

Значения абсолютной погрешности между членами последовательности $\{a_n\}$ и числом 2 также образуют числовую последовательность с общим членом

$$b_n = \frac{1}{10n} : \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{40}, \quad \frac{1}{50}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{10n}, \quad \ldots$$

Члены этой последовательности, начиная с того же номера N, являются приближениями чила 0 с точностью ε.

Пример 6.3. Найти общий член последовательности

$$-1, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \quad -\frac{1}{25}, \quad \ldots$$

$\diamond$ Нетрудно видеть, что $a_1 = -\dfrac{1}{1}$, $a_2 = \dfrac{1}{2^2}$, $a_3 = -\dfrac{1}{3^2}$, $a_4 = \dfrac{1}{4^2}$, $a_5 = -\dfrac{1}{5^2}$, ... Значит, общий член последовательности есть $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^2}$.

Заметим, что члены этой последовательности начиная с некоторого номера являются приближениями чила 0 с любой наперед заданной точностью ε. Например, если $\varepsilon = 1/100$, то $|a_n| = 1/n^2 < 1/100$ при $n > 10$, т.е. начиная с 11 -го номера. Если $\varepsilon = 1/10000$, то $|a_n| = 1/n^2 < 1/10000$ при $n > 100$, т.е. начиная со 101 -го номера, и т. д.

[18] Существование таких n следует из принципа Архимеда.

[19] Квадратные скобки означают, что берется целая часть от величины в скобках.

Если члены последовательности $\{a_n\}$ начиная с некоторого номера являются приближениями числа a с любой наперед заданной точностью, то число a называют пределом последовательности $\{a_n\}$.

В математическом анализе принято это определение записывать следующим образом:

Определение 6.1.2. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N (зависящее от ε) такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

В этом случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$ и говорят, что a_n сходится (или стремится) к a.

Спомощью кванторов определение 6.1.2 записывается так: число a – предел последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Используя понятие окрестности[20] точки можно дать следующее

Определение 6.1.3. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для каждой $\varepsilon-$окрестности числа a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности.

Иными словами, какую бы окрестность числа a ни взять, вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо находится лишь конечное число ее членов.

В символической записи на „языке окрестностей": число a – предел последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall\,U_\varepsilon(a) \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N \quad a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пример 6.4. Доказать, исходя из определения 6.1.2, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

$\diamond$ Так как $2^n > n$ для любого $n \geq 1$, то $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$, например, $N = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда для любого $n > N$ имеем

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Вывод:$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N \quad \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

[20]Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называют $\varepsilon-$окрестностью точки a.

Определение 6.1.4. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, то она называется б е с к о н е ч н о м а л о й.

В кванторах: $\{a_n\}$ называется б е с к о н е ч н о м а л о й, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |a_n| < \varepsilon.$$

В примере 6.4 было доказано, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ является бесконечно малой.

Определение 6.1.5. Если последовательность имеет предел, её называют с х о д я щ е й с я.

Другими словами: последовательность $\{a_n\}$ – с х о д я щ а я с я, если

$$\exists a \in \mathbb{R}: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

6.2. Расходящиеся последовательности

Сформулируем отрицание определения 6.1.2.

Определение 6.2.1. Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует ε такое, что для любого натурального N найдется номер $n > N$ такой, что $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

В символической записи: ч и с л о a н е я в л я е т с я п р е д е л о м п о с л е д о в а т е л ь н о с т и $\{a_n\}$, если

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N: \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

На языке окрестностей

Определение 6.2.2. Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует $\varepsilon-$окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

Пример 6.5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 1$.

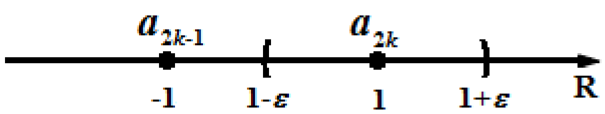


Рис. 33. Значения последовательности $a_n = (-1)^n$ на числовой оси.

$\diamond$ Заметим, что $a_n = 1$, если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; $a_n = -1$, если $n = 2k-1$ $k \in \mathbb{N}$. На рис. 33 эти члены последовательности отмечены соответственно a_{2k} и a_{2k-1}.

Очевидно, что, если взять, например, $\varepsilon = 1$, то за пределами этой $\varepsilon-$окрестности точки 1 останутся все члены последовательности с нечетными номерами. Их бесконечно много, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \neq 1$. Другими словами: существует $\varepsilon = 1$ такое, что для произвольного натурального N найдется, например, номер $n = 2N+1$, больший N, такой, что $a_n = -1$ и, следовательно, $|a_n - 1| = 2 > \varepsilon$. В символьной записи этот вывод выглядит следующим образом:

$$\exists\,\varepsilon = 1: \quad \forall\,N \in \mathbb{N} \quad \exists\,n = 2N+1 > N: \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Аналогично можно доказать, что и -1 не является пределом последовательности $\{(-1)^n\}$.

Последовательность называют р а с х о д я щ е й с я, если никакое число не является пределом этой последовательности, другими словами, последовательность $\{a_n\}$ является расходящейся, если для любого числа a существует такое ε, что для каждого натурального N найдется $n > N$ такое, что $|a_n - a| \geq \varepsilon$, или, короче,

$$\forall\,a \in \mathbb{R} \quad \exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\,N \in \mathbb{N} \quad \exists\,n > N: \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Замечание 6.1. Согласно определениям предела последовательности и сходящейся последовательности условие 6.2 должно выполняться для достаточно больших n. Таким образом, сходимость или расходимость последовательности и значение предела, если последовательность сходится, не зависят от ее начальных членов.

Заметим, что обоснование, приведенное в примере 6.5 не может служить доказательством того, что последовательность $a_n = (-1)^n$ расходящаяся.

Пример 6.6. Доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n$ расходится.

$\diamond$ Надо доказать, что никакое число не является пределом данной последовательности. Очевидно, что расстояние между двумя соседними членами последовательности больше 1 (рис. 33).

Для произвольного числа a возьмем окрестность единичной длины – интервал

$$\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right).$$

Любые соседние члены a_n и a_{n+1} оба вместе не могут находиться в этой окрестности, так как расстояние между ними больше 1. По крайней мере один из этих членов будет лежать вне окрестности. Таким образом,

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon = 1/2 : \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n = N+1 > N \vee n = N+2 > N : |a_n - a| > 1/2 = \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность расходится.

Пример 6.7. Доказать, что последовательность $a_n = n$ расходящаяся.

$\diamond$ Докажем, используя метод от противного. Предположим, что $\{n\}$ – сходящаяся: $\exists\, a \in \mathbb{R}: \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |n - a| < \varepsilon$. Это справедливо для любого положительного ε, в том числе для $\varepsilon = 1$ получим, что для всех натуральных n, больших N выполняется неравенство $n < a + 1$, но это противоречит принципу Архимеда. Значит, предположение о сходимости последовательности $\{n\}$ неверно. $\{n\}$ – расходящаяся последовательность.

6.3. Бесконечно большие последовательности

Определение 6.3.1. Последовательность $\{a_n\}$ называют бесконечно большой, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |a_n| > E.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > E \quad (\text{соответственно} \quad a_n < -E).$$

Это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$). Во всех этих случаях говорят, что последовательность имеет бесконечный предел.

В соответствии со сказанным в пунктах 6.1. – 6.3. последовательности, имеющие бесконечные пределы, являются расходящимися. Но нередко от этого правила отступают и называют такие последовательности сходящимися к соответствующему бесконечному пределу. В настоящем курсе, когда говорится о сходимости последовательности, это всегда будет означать, что она имеет конечный предел. В тех случаях, когда последовательность может иметь и бесконечный предел, это будет специально оговариваться.

Заметим, что последовательность может сходиться к ∞, но не сходиться при этом ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. Такова, например, последовательность $\{(-1)^n n\}$.

Пример 6.8. Доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n n^2$ является бесконечно большой.

$\diamond$ Справедлива оценка $|a_n| = |(-1)^n n^2| = n^2 > n$.

Пусть E – произвольное положительное число, а N – такое натуральное число, что $N > E$ (например, $N = [E] + 1$). Тогда для всех $n > N$ верно неравенство

$$|a_n| = n^2 > n > N > E.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \infty$

Д/З:

- Записать отрицание определений, сформулированных в пункте 6.3.
- Доказать, что последовательность $\{(-1)^n n^2\}$ не сходиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.
- Доказать, что предел стационарной последовательности $a_n = c$, где c – некоторая константа, равен этой константе.
- Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Верно ли обратное утверждение?

Лекция 7. Свойства пределов последовательности

7.1. Единственность предела

Теорема 7.1.1. *Если последовательность имеет предел, то он е д и н с т в е н н ы й.*

Доказательство. Предположим противное – пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \wedge \quad a \neq b,$$

для определённости положим $a < b$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4} > 0$, т. е. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

Пользуясь сходимостью последовательности $\{a_n\}$ к a, находим число N_1 такое, что для всех $n > N_1$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \tag{7.1}$$

Точно также в силу сходимости последовательности $\{a_n\}$ к b существует число N_2 такое, что для всех $n > N_2$

$$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon \tag{7.2}$$

Выберем число $N = \max(N_1; N_2)$. При $n > N$ выполняются оба неравенства – и (7.1), и (7.2), следовательно, для всех $n > N$

$$b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

но тогда $b - \varepsilon < a + \varepsilon$. Значит, $0 < b - a < 2\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, так как $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4}$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

(a) (b)

Рис. 34. Взаимное расположение графиков степенных функций

Приведенное доказательство иллюстрирует рис. 34. Мы брали ε–окрестности точек a и b непересекающиеся (рис. 34 (a)), а получили, что все члены последовательности с достаточно большими номерами должны принадлежать пересечению этих окрестностей (рис. 34 (b).

В доказательстве теоремы использовались неравенства (7.1) и (7.2), из которых первое имело место при $n > N_1$, второе при $n > N_2$. Чтобы выполнялись оба эти неравенства, мы брали $n > N = \max(N1; N2)$. Такой приём будет часто использоваться в дальнейшем без пояснений.

7.2. Теорема «о двух милиционерах»

7.2.1. Для сходящихся последовательностей

Теорема 7.2.1. *Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу и для всех n выполняется*

$$a_n \le b_n \le c_n, \tag{7.3}$$

тогда последовательность $\{b_n\}$ сходится к тому же пределу.

Доказательство. Обозначим $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, тогда теорему можно сформулировать короче:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \ \wedge \ a_n \le b_n \le c_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ находим N такое, что при всех $n > N$ выполняются неравенства

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Тогда для таких n

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon,$$

т. е. $b_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

Замечание 7.1. Очевидно, что теорема справедлива и в случае строгих неравенств

$$a_n < b_n < c_n.$$

Замечание 7.2. Поскольку сходимость или расходимость последовательности и значение предела, если последовательность сходится, не зависят от ее начальных членов, то теорема справедлива и в случае, когда неравенства (7.3) выполняются начиная с некоторого номера. Подобное замечание можно будет сделать и к некоторым последующим теоремам, но не будем заострять на этом внимание.

Пример 7.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^n} = 0$.

$\diamond$ Для всех $n \geq 6$ верно неравенство $\dfrac{3}{n} \leq \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$0 < \left(\frac{3}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

при $n \geq 6$. Здесь слева и справа стоят члены последовательностей, имеющих пределом ноль[21]. Значит, по теореме «о двух милиционерах» и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0.$$

7.2.2. Аналог для бесконечно больших

Теорема 7.2.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *и для всех* n *выполняется* $a_n \leq b_n$, *тогда и*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Короче, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \wedge \ a_n \leq b_n\right) \ \Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty.$

Доказательство. Для любого $E > 0$ находим N такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенства

$$a_n > E.$$

Тогда для таких n

$$E < a_n \leq b_n,$$

т. е. $b_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

Пример 7.2. Доказать, используя аналог теоремы «о двух милиционерах» для бесконечно больших последовательностей, что

$$\lim_{n\to\infty} (n!) = +\infty.$$

$\diamond$ Так как для всех $n \geq 1$ справедливо соотношение $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n \geq n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (n!) = +\infty$.

Д/З: Доказать аналогичную теорему, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ и для всех n выполняется $a_n \leq b_n$.

[21] Смотри предыдущую лекцию.

7.3. Предельные переходы в неравенствах

Теорема 7.3.1. *Члены сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ начиная с некоторого номера будут связаны тем же неравенством, что и их пределы, короче, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > b_n.$$

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{a-b}{4} > 0$, т. е. $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ и $b + \varepsilon < a - \varepsilon$ (рис. 35).

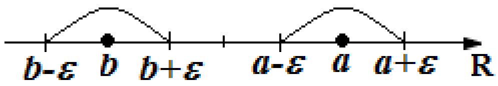


Рис. 35. Иллюстрация к доказательству теоремы 7.3.1.

Для данного ε находим N такое, что при всех $n > N$ выполняются неравенства
$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \text{и} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$
Для этих n справедливо $b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$, что и требовалось доказать.

Пример 7.3. Согласно теореме 7.3.1 все члены сходящейся последовательности с достаточно большими номерами положительны, если её предел положителен, и отрицательны, если предел отрицателен.

Теорема 7.3.2 (Сохранение нестрогого неравенства в пределе)**.** *Если члены сходящихся последовательностей связаны нестрогим неравенством*

$$a_n \leq b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

то пределы этих последовательностей также связаны нестрогим неравенством

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Предположим противное: $a > b$, тогда из теоремы 7.3.1 следует, что

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad a_n > b_n,$$

но это противоречит условию $a_n \leq b_n$ доказываемой теоремы.

Замечание 7.1. Если в теореме 7.3.2 вместо нестрогих неравенств $a_n \le b_n$ выполненяются строгие неравенств $a_n < b_n$, то для пределов всё равно будет справедливо только нестрогое неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Это видно на примере последовательностей $a_n = 0$ и $b_n = 1/n$, для которых $a_n < b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Поэтому при переходе к пределу в строгих неравенствах необходимо соблюдать следующее правило: *если существуют пределы выражений в левой и правой частях с т р о г о г о неравенства, то при переходе к пределу в этом неравенстве с т р о г о е неравенство нужно заменить на н е с т р о - г о е .*

7.4. Связь ограниченности и сходимости

Определение 7.4.1. Последовательность о г р а н и ч е н а, если ограничено числовое множество значений ее членов.

В символах: $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность (о г р а н и ч е - н а), если

$$\exists C > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \le C.$$

Д/З: Сформулировать в символах определения ограниченной последовательности сверху (снизу), неограниченной последовательности сверху (снизу), неограниченной последовательности.

Теорема 7.4.1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Взяв $\varepsilon = 1$, находим N такое, что $|a_n - a| < 1$ для всех $n > N$. Тогда при этих n

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Поэтому, положив $C = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$, получим $|a_n| \le C$ при всех n, т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Замечание 7.1. Ограниченность последовательности – н е о б х о д и м о е условие ее сходимости, т. е. если последовательность неограниченная, то она расходится. Из ограниченности последовательности не следует ее сходимость. Например, ограниченная последовательность $a_n = (-1)^n$ является расходящейся.

Из расходимости последовательности не следует ее неограниченность. Примером является та же последовательность $\{(-1)^n\}$.

Лемма 7.4.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$*, то*

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n > N \quad \frac{1}{2}|a| < |a_n| < \frac{3}{2}|a|.$$

Доказательство. На практике было доказано (№ 91), что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
Найдём для $\varepsilon = |a|/2$ такое N, что при всех $n > N$

$$||a_n| - |a|| < \frac{1}{2}|a|.$$

Тогда

$$|a| - \frac{1}{2}|a| < |a_n| < |a| + \frac{1}{2}|a|,$$

что и требовалось доказать.

Д/З: Докажите, что, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, то

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad \frac{1}{2}a < a_n < \frac{3}{2}a;$$

ели же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, то

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad \frac{3}{2}a < a_n < \frac{1}{2}a.$$

Лекция 8. Свойства бесконечно малых, арифметические свойства пределов

8.1. Арифметические операции над числовыми последовательностями

Числовые последовательности можно складывать, вычитать, перемножать и делить. Все арифметические операции определяются поэлементно.

- С у м м о й числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n = a_n + b_n$.
- Р а з н о с т ь ю числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n = a_n - b_n$.
- П р о и з в е д е н и е м числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n = a_n \cdot b_n$.
- Ч а с т н ы м числовой последовательности $\{a_n\}$ и числовой последовательности $\{b_n\}$, все элементы которой отличны от нуля, называется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

8.2. Свойства бесконечно малых

Напомним, что последовательность $\{\alpha_n\}$ – б е с к о н е ч н о м а л а я, если она сходится к нулю, т. е. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon$.

1. Связь сходящейся и бесконечно малой последовательности. *Для того чтобы $\{a_n\}$ сходилась к a, необходимо и достаточно, чтобы $\{a_n - a\}$ была бесконечно малой:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как $\{a_n\}$ сходится к a, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. $\{a_n - a\}$ – бесконечно малая.

Достаточность очевидна в силу идентичности записи в кванторах утверждений: $\{a_n - a\}$ бесконечно малая и $\{a_n\}$ сходится к a.

Следствие. *Для того чтобы $\{a_n\}$ сходилась к a, необходимо и достаточно, чтобы для всех n выполнялось $a_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.*

2. Алгебраическая сумма[22] **двух бесконечно малых есть бесконечно малая.** *Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то бесконечно малыми являются и последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$.*

Доказательство. Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то по $\varepsilon > 0$ можем выбрать N так, чтобы при всех $n > N$ выполнялись неравенства

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для этих n

$$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N \quad |a_n \pm b_n| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Алгебраическая сумма* ***конечного числа*** *бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Замечание 8.1. Алгебраическая сумма **бесконечного числа** бесконечно малых может не быть бесконечно малой. Например,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} \right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

3. Произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая. *Если последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}$ ограниченная, то последовательность $\{\alpha_n \cdot b_n\}$ бесконечно малая.*

Доказательство. По определению ограниченной последовательности найдется число C такое, что $|b_n| \leq C$ при всех n. Поэтому $|\alpha_n b_n| \leq C|\alpha_n|$.

[22] Алгебраической суммой называется такая сумма, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус.

Взяв $\varepsilon > 0$ и выбрав N так, чтобы при всех $n > N$ выполнялось

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C},$$

получим требуемое неравенство

$$|\alpha_n b_n| \leq C|\alpha_n| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Поскольку бесконечно малая величина обязательно ограниченная (это вытекает из связи сходимости и ограниченности последовательности), то очевидным представляется следующее

Следствие. *Произведение бесконечно малых есть бесконечно малая.*

4. Обратная к бесконечно малой есть бесконечно большая. *Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ при всех n, то $\{1/\alpha_n\}$ – бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Для произвольного $E > 0$ положим $\varepsilon = 1/E$. Теперь по ε находим N такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Тогда для этих n имеем

$$|1/\alpha_n| = 1/|\alpha_n| > 1/\varepsilon = E$$

и наше утверждение доказано.

Обратная к бесконечно большой есть бесконечно малая. *Если $\{a_n\}$ – бесконечно большая последовательность, причём $a_n \neq 0$ при всех n, то $\{1/a_n\}$ – бесконечно малая последовательность.*

Д/З Доказательство аналогично. Провести самостоятельно.

8.3. Арифметические свойства пределов

Теорема 8.3.1. *Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4. *если $b_n \neq 0$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Здесь в каждом из случаев 1-4 содержатся два утверждения: во-первых, существование предела в левой части равенства, а во-вторых, равенство этого предела выражению из правой части.

Словами эту теорему обычно формулируют так: *предел суммы равен сумме пределов; предел разности равен разности пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов. В последнем случае, разумеется, имеется в виду, что ни члены последовательности делителей, ни её предел не равны нулю.*

Доказательство Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Тогда, согласно связи сходящихся и бесконечно малых последовательностей (свойство 1 бесконечно малых последовательностей), последовательности $\{a_n - a\}$ и $\{b_n - b\}$ являются бесконечно малыми.

1-2. Тогда последовательность $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}$:

$$(a_n \pm b_n) - (a \pm b) = (a_n - a) \pm (b_n - b)$$

есть бесконечно малая, поскольку является алгебраической суммой двух бесконечно малых. Отсюда, согласно свойству 1 бесконечно малых последовательностей, следуют утверждения 1 и 2.

3. Члены последовательности $\{a_n b_n - ab\}$ представимы в следующем виде:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab = (a_n - a) b_n + a(b_n - b). \tag{8.1}$$

Вспомним, что сходящаяся последовательность $\{b_n\}$ ограничена, поэтому в (8.1) первое слагаемое бесконечно малое, так как является произведением бесконечно малой $\{a_n - a\}$ на ограниченную $\{b_n\}$; второе слагаемое бесконечно малое, так как является произведением бесконечно малой $\{b_n - b\}$ на ограниченную (стационарную последовательность) $\{a\}$. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая. Отсюда, согласно свойству 1 бесконечно малых последовательностей, следует утверждение 3. Из этого утверждения естественным образом вытекает

Следствие. *Постоянный множитель c можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

4. Последовательность $\{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\}$ представима в следующем виде:

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - b_n a}{b_n b} = \frac{a_n b - ab + ab - b_n a}{b_n b} = \frac{1}{b_n b}(b(a_n - a) - a(b_n - b)). \tag{8.2}$$

По условию $b \neq 0$, значит, существует число N_1 такое, что $|b_n| > |b|/2$ для всех $n > N_1$. Так как $b_n \neq 0$, то $\dfrac{1}{|b_n b|} < \dfrac{2}{b^2}$ для всех $n > N_1$. Последовательность

$\left\{\dfrac{1}{b_n b}\right\}$ является ограниченной, так как

$$\exists\, C = \max\{\frac{2}{b^2}, \frac{1}{|b_1 b|}, \ldots, \frac{1}{|b_{N_1} b|}\}:\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{1}{b_n b}\right| \leq C.$$

Согласно доказанным утверждениям 2, 3

$$\lim_{n\to\infty}(b(a_n - a) - a(b_n - b)) = b \lim_{n\to\infty}(a_n - a) - a \lim_{n\to\infty}(b_n - b) = 0.$$

Произведение бесконечно малой $\{b(a_n - a) - a(b_n - b)\}$ на ограниченную $\left\{\dfrac{1}{b_n b}\right\}$ есть бесконечно малая. Отсюда, согласно свойству 1 бесконечно малых последовательностей, следует утверждение 4. Теорема доказана.

Замечание 8.1. Теорема 8.3.1 не справедлива для расходящихся последовательностей, в частности для бесконечно больших. Это подтверждается следующими примерами.

Пример 8.1. Предел суммы последовательностей $\{(-1)^n n\}$ и $\{(-1)^{n+1} n\}$ равен нулю, предел частного равен -1, в то время как слагаемые являются бесконечно большими.

Пример 8.2. Предел разности последовательностей $\{n\}$ и $\{n + (-1)^n\}$ не существует, в то время как слагаемые сходятся к $+\infty$.

Пример 8.3. Нетрудно убедиться, что последовательности

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

расходящиеся, но предел суммы и произведения этих последовательностей существует, так как:

$$a_n + b_n = 1, \quad a_n b_n = 0.$$

Пример 8.4. Нетрудно убедиться, что последовательности

$$a_n = n^{(-1)^n}, \quad b_n = n \cdot n^{(-1)^{n+1}}$$

не являются бесконечно большими, а предел их произведения

$$a_n b_n = n \cdot n^{(-1)^n + (-1)^{n+1}} = n \cdot n^{(-1)^n - (-1)^n} = n \cdot n^0 = n$$

является бесконечно большим.

Лекция 9. Монотонные последовательности; число e

9.1. Предел монотонной последовательности

Определение 9.1.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей, если при всех n справедливо $a_n \le a_{n+1}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется убывающей, если при всех n справедливо $a_n \ge a_{n+1}$.

Таким образом, возрастание и убывание последовательности не обязательно являются строгими. Если же $a_n < a_{n+1}$, соответственно, $a_n > a_{n+1}$ для всех n, то будем говорить о строгом возрастании и строгом убывании последовательности.

Определение 9.1.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонной, если она возрастает или убывает. Последовательность $\{a_n\}$ называется строго монотонной, если она строго возрастает или строго убывает.

Мы уже знаем, что если последовательность ограничена сверху (снизу), то это означает ограниченность сверху (снизу) множества значений $\{a_n\}$ и, следовательно, существует точная верхняя грань $\beta = \sup\{a_n\}$ (точная нижняя грань $\alpha = \inf\{a_n\}$) этого множества. Сформулируем известные определения[23] точных граней применительно к последовательностям.

Определение 9.1.3. $\beta = \sup\{a_n\}$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le \beta$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad a_p > \beta - \varepsilon$.

Определение 9.1.4. $\alpha = \inf\{a_n\}$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \ge \alpha$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad a_p < \alpha + \varepsilon$.

Теорема 9.1.1. *Если монотонно возрастающая последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, то она сходится. При этом* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

Доказательство. Так как последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, то существует точная верхняя грань $\beta = \sup\{a_n\}$. Покажем, что β является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку β – точная верхняя грань, то $a_n \le \beta$ при всех n и для каждого $\varepsilon > 0$ существует член последовательности a_p такой, что $a_p > \beta - \varepsilon$

[23] См. Лекцию 3.

в силу определения (9.1.3). Тогда, так как $\{a_n\}$ – монотонно возрастающая, для всех $n > p$ имеем

$$\beta - \varepsilon < a_p \leq a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = p \in \mathbb{N}: \ \forall n > N, \quad |a_n - \beta| < \varepsilon$. Значит, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 9.1.2. *Если монотонно убывающая последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, то она сходится. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

Следствие 9.1.3. *Для того чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Теорема 9.1.4. *Если монотонно возрастающая последовательность $\{a_n\}$ – неограниченная сверху, то она расходится. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.*

Доказательство. Если последовательность $\{a_n\}$ не является ограниченной сверху, то для любого $E > 0$ существует число q такое, что $a_q > E$.

В силу возрастания последовательности отсюда следует, что при всех $n > q$ выполняются неравенства $a_n \geq a_q > E$, т. е.

$$\forall E > 0 \quad \exists N = q: \quad \forall n > N \quad a_n > E,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Теорема доказана.

Теорема 9.1.5. *Если монотонно убывающая последовательность $\{a_n\}$ – неограниченная снизу, то она расходится. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

Пример 9.1. В качестве примера приведем один из способов доказательства замечательного предела

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{при} \quad |q| < 1.$$

$\diamond$ Пусть сначала $0 < q < 1$. Тогда $\{q^n\}$ – убывающая ограниченная снизу последовательность. Значит, она и м е е т п р е д е л, обозначим его a.

Очевидно, что последовательность $\{q^{n+1}\}$ имеет этот же предел[24]: $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = a$, и по теореме о пределе произведения последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = qa$$

Таким образом, должно выполняться равенство $a = qa$, отсюда $a = 0$, поскольку $q \neq 1$. Мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ для положительных q.

Для отрицательных q пользуемся тем, что $|q^n| = |q|^n$.

[24] Члены последовательностей $\{q^n\}$: $q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ q^{n+1},\ldots;\quad \{q^{n+1}\}$: $q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ q^{n+1},\ldots$

9.2. Число e

Теорема 9.2.1. *Последовательность* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, *имеет предел.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

В силу неравенства Бернулли[25] имеем $\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 + (n+1)\left(-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Таким образом, $a_n < a_{n+1}$ при всех n. Теперь докажем, что $\{a_n\}$ ограничена сверху. Воспользовавшись биномом Ньютона, разложим общий член последовательности и оценим его сверху:

$$\begin{gathered} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \end{gathered} \tag{9.1}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \le$$

$$\le 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2 + \frac{1/2}{1-1/2} = 3.$$

[25] Если $x > -1$, то $\forall n > 1$ справедливо неравенство $(1+x)^n \ge 1 + nx$, причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$. Докажите методом математической индукции.

Здесь использовали формулу суммы членов бесконечно убывающей прогрессии. Согласно теореме 9.1.1 последовательность $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ сходится.

Следуя Леонарду Эйлеру, предел последовательности $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Это выражение числа e называют еще вторым замечательным пределом.

Наряду с π число e является одной из наиболее важных констант в математике. Также как и π, число e — иррациональное, трансцендентное[26].

Пример 9.2. Исходя из второго замечательного предела, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}, \tag{9.2}$$

где $0<\theta_n<1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

$\diamond$ Общий член последовательности $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ можно представить в виде 9.1. Оценим его снизу, оставив лишь $k+1$ слагаемых в разложении 9.1:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

При k — фиксированном, $n\to\infty$, в правой части неравенства — конечное число слагаемых, каждое из которых является произведением конечного числа множителей, имеющих предел, в левой части — последовательность, имеющая пределом число e. Согласно теореме о предельном переходе в неравенстве[27] имеем соотношение

$$e \geq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!} = y_k,$$

[26]Т. е. не алгебраическое. Корни уравнений

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0, \quad n\in\mathbb{N},$$

с целыми коэффициентами называют алгебраическими числами.

[27]Сохранение нестрогого неравенства в пределе.

верное для любого числа k. Обратим внимание, что в множестве $\{y_k\}$ нет наибольшего элемента, следовательно, при $k = n$ выполняется строгое неравенство

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e. \tag{9.3}$$

Кроме того, согласно оценке 9.1

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Таким образом, выполняется двойное неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y_n < e.$$

Согласно теореме «о двух милиционерах» $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$y_{m+n} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2}$$

при фиксированном n и $m \to \infty$, получаем в пределе

$$e - y_n \leq \frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Легко проверить, что $\dfrac{n+2}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n}$, поэтому с учетом неравенства (9.3) имеем, наконец,

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!},$$

т. е. n-й член последовательности $\{y_n\}$ отличается от числа e меньше, чем на $\dfrac{1}{n \cdot n!}$.

Неравенство $0 < e - y_n < \dfrac{1}{n \cdot n!} < 10^{-5}$ справедливо при $n \geq 8$. Отсюда

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$

Обозначив $\theta_n = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n \cdot n!}}$, $0 < \theta_n < 1$, убедимся в справедливости формулы (9.2).

Лекция 10. Принцип вложенных отрезков; теорема Больцано-Вейерштрасса; критерий Коши

10.1. Теоремы о вложенных отрезках

Определение 10.1.1. Систему отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots\}$$

называют системой в л о ж е н н ы х отрезков, если выполняются неравенства

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1. \tag{10.1}$$

Теорема 10.1.1. *Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \ne \emptyset$.*

Доказательство. Обозначим множества левых и правых концов отрезков соответственно $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. В силу неравенств (10.1) последовательность $\{a_n\}$ в о з р а с т а е т, а последовательность $\{b_n\}$ у б ы в а е т. Тогда для любых n и m справедливо неравенство $a_n \le b_m$. Действительно, если $n < m$, то $a_n \le a_m \le b_m$; если $n > m$, то $a_n \le b_n \le b_m$. Сославшись на аксиому непрерывности[28] справедливую для множеств A и B, можно утверждать, что

$$\exists\, c \in \mathbb{R}: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \le c \le b_n,$$

таким образом, $\exists\, c \in \mathbb{R}: \quad c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, что и требовалось доказать.

Определение 10.1.2. Систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ называют с т я г и в а ю щ е й с я, если $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Теорема 10.1.2. ***Принцип вложенных отрезков.*** *Если $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ – стягивающаяся система вложенных отрезков, то существует только одна точка c на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = c,$$

при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} \{b_n\} = c$.

[28] $\forall\, A, B \subset \mathbb{R} \quad (A, B \ne \varnothing) \wedge (\forall\, a \in A\; \forall\, b \in B \quad a \le b) \quad \exists\, c \in \mathbb{R}: \quad \forall\, a \in A \quad \forall\, b \in B \quad a \le c \le b.$

Доказательство. Пусть существуют неравные числа c и d, принадлежащие всем отрезкам $[a_n; b_n]$, и для определённости $c < d$. Тогда из условий

$$a_n \le c < d \le b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

находим $b_n - a_n \ge d - c > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$ т. е. длины отрезков не стремятся к нулю. Полученное противоречие доказывает единственность числа, принадлежащего всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

В этом случае, очевидно, $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ (вспомните доказательство теоремы о существовании точных граней ограниченного множества). Согласно теоремам о пределе монотонно возрастающей (убывающей) последовательности, ограниченной сверху (снизу) $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = c$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{b_n\} = c$. Теорема доказана.

Замечание 10.1. При доказательстве принципа вложенных отрезков мы опирались на аксиому непрерывности и неявным образом на теорему о существовании точных граней ограниченного множества, так как ссылались на теоремы о пределе монотонных ограниченных последовательностей. Надо отметить, что аксиома непрерывности, теорема о существовании точных граней ограниченного множества и принцип вложенных отрезков это „три кита“ математического анализа. Любую из них можно принять за аксиому и вывести из нее остальные теоремы.

Замечание 10.2. Система стягивающихся интервалов общей точки не имеет.

В самом деле, в последовательности интервалов $(0; 1/n)$ каждый следующий интервал вложен в предыдущий, длины этих интервалов равны $1/n$ и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Но никакое число не может принадлежать всем интервалам $(0; 1/n)$: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(0; 1/n) = \emptyset$. В случае же отрезков $[0; 1/n]$: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[0; 1/n] = 0$.

10.2. Подпоследовательности; теорема Больцано - Вейерштрасса

Определение 10.2.1. Последовательность $\{y_k\}$ будем называть п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю последовательности $\{a_n\}$, если

1. $\{y_k\}$ состоит из членов последовательности $\{a_n\}$;
2. в последовательности $\{y_k\}$ сохранен тот же порядок следования элементов, какой они имели в последовательности $\{a_n\}$.

Условия 1-2 в символьной записи:

1. $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_k \in \mathbb{N}: \quad a_{n_k} = y_k;$

2. $n_{k'} > n_{k''} \qquad \Leftrightarrow \qquad k' > k''.$

Можно сказать, что мы записываем подряд все члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, затем "вычеркиваем" некоторые её элементы, сохранив при этом бесконечно много элементов, и полученную последовательность называем подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Д/З: Доказать, что если последовательность сходится к конечному или бесконечному пределу ($+\infty$ или $-\infty$), то любая её подпоследовательность сходится к тому же самому пределу.

Если последовательность расходится, то это не означает, что все ее подпоследовательности расходятся. Так, последовательность $\{(-1)^n\}$ наряду с расходящимися подпоследовательностями имеет сходящиеся, например, стационарные последовательности $\{-1\}$, $\{1\}$.

Теорема 10.2.1. ***Теорема Больцано–Вейерштрасса.*** *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность и отрезок $[a, b]$, содержит все члены последовательности $\{x_n\}$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если последовательность содержит бесконечно много членов, равных $\dfrac{a+b}{2}$, то теорема доказана. Иначе, по крайней мере, один из полученных отрезков содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $[a_1, b_1]$ тот из отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности, а если таковы оба отрезка, то – любой из них. Возьмём произвольный элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$. Пусть это будет x_{n_1}.

Разделим теперь пополам отрезок $[a_1, b_1]$. Если последовательность содержит бесконечно много членов, равных $\dfrac{a_1+b_1}{2}$, то теорема доказана. Иначе, обозначим $[a_2, b_2]$ один из получившихся отрезков, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$, такой, что его индекс n_2 больше, чем n_1. Так выбран элемент x_{n_2}.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам. Если не бесконечно много членов совпадает со значением $\dfrac{a_2+b_2}{2}$, берём отрезок $[a_3, b_3]$, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выбираем в $[a_3, b_3]$ элемент x_{n_3} такой, что $n_3 > n_2$.

Если на каком-то шаге мы не наткнемся на стационарную подпоследовательность, то продолжив процесс „ловли льва в пустыни“[29], получим систему стягивающихся вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$, так как длины отрезков, равные $\dfrac{b-a}{2^k}$, стремятся к нулю при $k \to \infty$. Каждый из отрезков $[a_k, b_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Мы выбирали члены подпоследовательности x_{n_k} так, чтобы $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. Согласно принципу вложенных отрезков существует единственное число c:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] = c, \quad \lim_{k\to\infty}\{a_k\} = c, \quad \lim_{k\to\infty}\{b_k\} = c.$$

Тогда из теоремы «о двух милиционерах» следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{n_k}\} = c$.

Таким образом, из ограниченной последовательности мы выделили сходящуюся подпоследовательность. Теоремма доказана.

Теорема 10.2.2. ***Аналог теоремы Больцано–Вейерштрасса для неограниченных последовательностей.*** *Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

10.3. Критерий Коши

Словом “критерий” обычно называют необходимые и достаточные условия. В этом пункте будет установлен критерий существования у последовательности конечного предела.

Определение 10.3.1. Последовательность $\{a_n\}$ называют ф у н д а м е н т а л ь н о й (п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю К о ш и или с х о д я щ е й с я в с е б е), если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\,n > N, \quad \forall\,m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

Это означает, что для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ существует элемент последовательности, начиная с которого все элементы последовательности находятся друг от друга на расстоянии менее, чем заданное ε.

Справедливы следующие три свойства.

[29] Рассекаем пустыню, окруженную предварительно решеткой, линией, проходящей с севера на юг. Лев находится либо в восточной части пустыни, либо в западной. Предположим для определенности, что он находится в западной части. Рассекаем ее линией, идущей с запада на восток. Лев находится либо в северной части, либо в южной. Предположим для определенности, что он находится в южной части, рассекаем ее линией, идущей с севера на юг. Продолжаем этот процесс до бесконечности, воздвигая после каждого шага крепкую решетку вдоль разграничительной линии. Площадь последовательно получаемых областей стремится к нулю, так что лев в конце концов оказывается окруженным решеткой произвольно малого периметра. На самом деле, конечно, льва мы не поймаем, потому что львы не водятся в пустыне, но данный метод помогает понять как мы „ловим“ сходящуюся подпоследовательность.

1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальная.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится к некоторому числу a. В силу этого $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon/2$. Поэтому, если $n > N$ и $m > N$, то

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2. *Если последовательность фундаментальна, то она ограничена.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальная, т. е. выполнено (10.2). Для $\varepsilon = 1$ найдём натуральное N такое, что при всех n, $m > N$ справедлива оценка $|a_n - a_m| < 1$. Положив $m = N + 1$, имеем для $n > N$

$$|a_n - a_{N+1}| < 1$$

   и, значит, $|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$. Поэтому, если

$$C = \max\{|a_1|, |a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\},$$

   то $|a_n| \leq C$ при всех n.

3. *Если последовательность фундаментальная, то она сходится.*

   Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальная, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1,\ \forall m > N_1 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon/2.$$

   Тогда по сойству 2 она ограниченная.

   Из ограниченной последовательности согласно теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность$\{a_{n_k}\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к некоторому числу a:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall\, k > K \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2.$$

   Покажем, что a является пределом всей последовательности $\{a_n\}$.

   Выберем $N = \max\{N_1, n_K\}$. При всех $n > N$ имеем

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ сходится к a.

Доказанные свойства фундаментальных последовательностей и составляют критерий Коши.

Теорема 10.3.1 (Критерий Коши)**.** *Для того чтобы последовательность была сходящейся в $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Множество называется п о л н ы м, если любая фундаментальная последовательность элементов этого множества сходится к элементу этого же множества.

Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, но не каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу из своего множества.

Например, мы знаем, что последовательность рациональных чисел

$$2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

сходится к иррациональному числу e. Этот факт говорит о неполноте множества рациональных чисел.

Критерий Коши выражает свойство полноты множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

На практике используют также эквивалентную формулировку критерия Коши: последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Поскольку критерий Коши – это необходимое и достаточное условие сходимости последовательности, это означает, что если

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N}: \quad \exists\, n > N, \quad \exists\, p \in \mathbb{N}: \quad |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon, \tag{10.3}$$

то последовательность $\{a_n\}$ расходится. Очевидно, что (10.3) является необходимым и достаточным условием расходимости последовательности $\{a_n\}$.

Лекция 11. Частичные пределы; классификация точек множества

11.1. Частичный предел

Определение 11.1.1. Предел подпоследовательности называется ч а с т и ч н ы м п р е д е л о м последовательности.

Здесь имеются в виду как конечные, так и бесконечные пределы. Понятно, что если предел последовательности равен a, где a — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, то все ее частичные пределы равны a. Но если частичный предел последовательности равен a, то отсюда не следует, что предел этой последовательности равен a. Например, частичными пределами последовательности $\{(-1)^n\}$, являются числа $+1$ и -1, а предела у этой последовательности нет.

Теорема 11.1.1. *Число a является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда любая $\varepsilon-$окрестность a содержит бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$.*

Доказательство. Необходимость. Если a — частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то это значит, что существует $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, сходящаяся к a. Следовательно, в любой $\varepsilon-$окрестности a содержатся все члены последовательности $\{a_{n_k}\}$, начиная с некоторого номера, т. е. бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$.

Достаточность. Пусть в каждой окрестности числа a находится бесконечно много членов. Способом, аналогичным доказательству теоремы Больцано—Вейер выделим подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, сходящуюся к a.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Обязательно найдется член последовательности $\{a_n\}$, обозначим его a_{n_1} такой, что

$$a - \varepsilon < a_{n_1} < a + \varepsilon.$$

Сузим $\varepsilon-$окрестность a вдвое. Выберем элемент последовательности $\{a_n\}$, принадлежащий интервалу $(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$, такой, что его индекс n_2 больше, чем n_1. Так будет выбран элемент a_{n_2}:

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n_2} < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сузим $\varepsilon/2-$окрестность a вдвое. Выберем элемент последовательности $\{a_n\}$, принадлежащий интервалу $(a - \varepsilon/2^2, a + \varepsilon/2^2)$, такой, что его индекс n_3 больше, чем n_2. Так будет выбран элемент a_{n_3}:

$$a - \frac{\varepsilon}{2^2} < a_{n_3} < a + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

На k−м шаге выберем элемент последовательности $\{a_n\}$, принадлежащий интервалу $(a-\varepsilon/2^{k-1}, a+\varepsilon/2^{k-1})$, такой, что его индекс n_k больше, чем n_{k-1}. Так будет выбран элемент a_{n_k}:

$$a-\frac{\varepsilon}{2^{k-1}} < a_{n_k} < a+\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}.$$

Продолжим процесс и далее, т. е. устремим $k\to\infty$. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\left(a-\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(a-\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right)=a,$$

то согласно теореме «о двух милиционерах» и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a$.

Следовательно, a − частичный предел. Теорема доказана.

11.2. Верхний и нижний предел

Определение 11.2.1. Наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$ называется верхним пределом и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение 11.2.2. Наименьший частичный предел последовательности $\{a_n\}$ называется нижним пределом и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема 11.2.1. *Ограниченная последовательность имеет верхний предел.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ − ограниченная последовательность и A − множество частичных пределов $\{a_n\}$. $A\neq\emptyset$, так как согласно теореме Больцано−Вейерштрасса ограниченная последовательность $\{a_n\}$ обязательно содержит сходящуюся подпоследовательность. Очевидно, что A − ограниченное множество, следовательно, существует точная верхняя грань[30] этого множества. Обозначим $\beta=\sup A$. Если $\beta\in A$, то

1. β − частичный предел;
2. β − наибольший частичный предел, т. е. $\beta=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Предположим, что $\beta\notin A$, т. е. β не является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ (рис. 36). Согласно критерию 11.1.1, существует окрестность $U_\varepsilon(\beta)$, содержащая, в лучшем случае, лишь конечное число членов $\{a_n\}$, следовательно, ни одно число $\gamma\in U_\varepsilon(\beta)$ не может быть частичным

[30]Напомним, что $\beta=\sup A$, если

1. $\forall\, a\in A\;\; a\le\beta$;
2. $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\, a\in A:\;\; a>\beta-\varepsilon$.

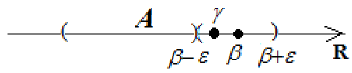


Рис. 36. Предположим, что $\beta \notin A$.

пределом последовательности $\{a_n\}$. Но тогда β не является точной верхней гранью множества A, поскольку

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall a \in A \quad a \le \beta - \varepsilon.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, сделанное предположение неверно. $\beta \in A$ и это и есть верхний предел последовательности $\{a_n\}$. Теорема доказана.

Теорема 11.2.2. *Ограниченная последовательность имеет нижний предел.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

Теорема 11.2.3. *У любой неограниченной сверху последовательности есть верхний предел, равный $+\infty$.*

Доказательство. Если последовательность не ограничена сверху, то согласно теореме 12.2.2 (аналогу теоремы Больцано—Вейерштрасса для неограниченных последовательностей) из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$, и верхним пределом последовательности будет $+\infty$, что и требовалось доказать.

Теорема 11.2.4. *У любой неограниченной снизу последовательности есть нижний предел, равный $-\infty$.*

Доказательство. Если последовательность не ограничена снизу, то согласно аналогу теоремы Больцано—Вейерштрасса для неограниченных последовательностей из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$, и нижним пределом последовательности будет $-\infty$. Теорема доказана.

В случаях, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, несобственные числа $+\infty$, $-\infty$ считают и верхним, и нижним пределом.

Таким образом, верхний и нижний пределы определены для любой последовательности.

Можно уточнить, что верхний (нижний) предел последовательности $\{a_n\}$ – это точная верхняя (нижняя) грань множества A всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ (наряду с действительными числами A может содержать несобственные числа $+\infty$ и $-\infty$).

11.3. Критерий сходимости последовательности

Теорема 11.3.1. *Ограниченная последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда равны ее верхний и нижний пределы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{a_n\}$ сходится к числу a, тогда все ее подпоследовательности сходятся к a. Множество A частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ состоит из одного элемента $A = \{a\}$, $\sup A = \inf A = a$, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

Достаточность. Пусть $\{a_n\}$ – ограниченная и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Так как $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, то на луче $[a+\varepsilon, +\infty)$ находится не более конечного числа членов последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_1 \quad a_n < a + \varepsilon.$$

Действительно, если предположить противное, то из бесконечного числа элементов последовательности $\{a_n\}$, больших или равных $a + \varepsilon$, можно было бы выделить согласно теореме Больцано–Вейерштрасса подпоследовательность a_{n_k}, сходящуюся к некоторому числу $x \geq a+\varepsilon$. Но это противоречит тому, что a – верхний предел последовательности $\{a_n\}$.

Аналогично, так как $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, то на луче $(-\infty, a - \varepsilon]$ находится не более конечного числа членов последовательности $\{a_n\}$:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_2 \quad a_n > a - \varepsilon.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Теорема доказана.

Теорема 11.3.2. *Последовательность $\{a_n\}$ сходится к $+\infty$ тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы равны $+\infty$. Последовательность $\{a_n\}$ сходится к $-\infty$ тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы равны $-\infty$.*

Д/З: Доказательство провести самостоятельно.

Следствие 11.3.3. *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел (конечный или одну из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$) тогда и только тогда, когда равны ее верхний и нижний пределы.*

11.4. Классификация точек множества

Пусть задано непустое числовое множество X.

Определение 11.4.1. Точка a – в н у т р е н н я я точка множества X, если существует ε-окрестность точки a целиком содержащаяся в X.

Определение 11.4.2. Точка a – г р а н и ч н а я точка множества X, если в любой ε-окрест- ности точки a содержатся точки как принадлежащие X, так и не принадлежащие X.

Определение 11.4.3. Точка a множества X – и з о л и р о в а н н а я точка множества X, если существует ε-окрестность точки a, в которой нет ни одной точки из X, кроме самой точки a.

Определение 11.4.4. Точка a является точкой п р и к о с н о в е н и я множества X, если в любой ε-окрестности точки a есть хотя бы одна точка из X.

Определение 11.4.5. Точка a – п р е д е л ь н а я точка множества X, если в любой ε-окрестности точки a содержится хотя бы одна точка из X, не совпадающая с a.

Заметим, что внутренние и изолированные точки множества обязательно принадлежат этому множеству. Граничные, предельные и точки прикосновения множества могут как принадлежать ему, так и не принадлежать.

Согласно данным определениям изолированная точка множества является для него точкой прикосновения и граничной точкой, но не является предельной. Внутренние точки множества всегда являются предельными точками этого множества.

11.5. Свойства предельной точки

Теорема 11.5.1. *Точка a является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда в любой ε-окрестности точки a содержится бесконечно много точек из X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a является предельной точкой множества X. Согласно определению 11.4.5 в любой ε-окрестности точки a обязательно найдется число x_1 такое, что

$$x_1 \in X, \quad x_1 \neq a.$$

Обозначим $\varepsilon_1 = \dfrac{|a - x_1|}{2}$. Тогда $x_1 \notin U_{\varepsilon_1}(a)$.

В ε_1-окрестности точки a обязательно найдется число x_2:

$$x_2 \in X, \quad x_2 \neq a, \quad x_2 \notin U_{\varepsilon_2}(a), \quad \varepsilon_2 = \frac{|a - x_2|}{2}.$$

На k-м шаге выберем число x_k:

$$x_k \in X, \quad x_k \neq a, \quad x_k \notin U_{\varepsilon_k}(a), \quad \varepsilon_k = \frac{|a - x_k|}{2}.$$

Продолжив этот процесс и далее (до бесконечности), получим счетное множество[31] точек $\{x_k\}$ в любой окрестности точки a.

Достаточность очевидна. Если в любой окрестности точки a содержится бесконечно много точек из X, то есть и одна, отличная от a. Теорема доказана.

Теорема 11.5.2. *Точка a является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда существует последовательность точек из X, не совпадающих с a, которая сходится к a.*

Доказательство. Необходимость. Если a – предельная точка множества X, то согласно предыдущей теореме в любой окрестности точки a содержится бесконечно много точек из X. Следовательно, из них, также как в доказательстве теоремы 11.1.1, можно выделить последовательность точек, сходящуюся к a.

Достаточность. Если $\{x_n\}$ – последовательность точек из множества X, сходящаяся к a, $x_n \neq a$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$. Значит, в любой окрестности точки a содержится бесконечно много точек из X, следовательно, найдется и одна, не совпадающая с a. Теорема доказана.

11.6. Открытые и замкнутые множества

Определение 11.6.1. Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение 11.6.2. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 11.1.

- Интервал (a, b) – открытое множество, так как все точки, принадлежащие интервалу, внутренние; не является замкнутым, так как граничные точки интервала a и b являются его предельными точками, но не принадлежат интервалу (a, b).

[31]Множество называется счетным, если между ним и множеством натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.

- Отрезок $[a, b]$ не является открытым множеством, так как содержит граничные точки a, b; является замкнутым, так как содержит все свои предельные точки.
- Полуинтервал $[a, b)$ не является ни открытым, ни замкнутым.
- Числовая прямая $\mathbb{R}$ – открытое множество, так как не имеет граничных точек; является замкнутым множеством, так как содержит все свои предельные точки (это следует из свойства полноты множества действительных чисел).

Напомним, что если множество A является подмножеством множества B ($A \subset B$), то разность множеств $B \setminus A$ называют дополнением множества A до множества B.

Разность множеств $\mathbb{R} \setminus A$ называют дополнением множества A и обозначают $\overline{A}$.

Теорема 11.6.1. *Для того чтобы множество A на числовой прямой было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $\overline{A}$ было замкнутым.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A – открытое множество. Предположим, что $\overline{A}$ – не является замкнутым, т. е. существует число x, являющееся предельной точкой множества $\overline{A}$, но не принадлежащее множеству $\overline{A}$: $x \notin \overline{A}$. Тогда $x \in A$.

Поскольку A – открытое множество, то x – внутренняя точка множества A. Согласно определению 11.4.1: $\exists\, \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \subset A$. Следовательно, $U_\varepsilon(x)$ не содержит ни одной точки из $\overline{A}$, но тогда x не может быть предельной точкой множества $\overline{A}$. Полученное противоречие доказывает, что множество $\overline{A}$ – замкнутое.

Достаточность. Пусть $\overline{A}$ – замкнутое множество. Предположим, что A – не является открытым, т. е. существует число x, являющееся граничной точкой множества A и принадлежащее A ($x \in A$). Согласно определению граничной точки в любой ε-окрестности числа x содержатся точки, не принадлежащие A, т. е. принадлежащие множеству $\overline{A}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, y_\varepsilon \in \overline{A} : \quad |x - y_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Согласно определению 11.4.5 число x – предельная точка множества $\overline{A}$. Но $x \notin \overline{A}$. Это противоречит тому, что $\overline{A}$ – замкнутое множество. Следовательно, сделанное предположение неверно и A – открытое множество. Теорема доказана.

Теорема 11.6.2. *Для того чтобы множество A на числовой прямой было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $\overline{A}$ было открытым.*

Доказательство. Поскольку $\overline{\overline{A}} = A$, то теорему можно сформулировать подобно предыдущей: для того чтобы множество $\overline{A}$ на числовой прямой было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение A было замкнутым. Теорема доказана.

Пример 11.2. Пустое множество $\emptyset$ является открытым и замкнутым, так как его дополнение: $\overline{\emptyset} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, как мы уже говорили, является замкнутым и открытым.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 11.6.3. *Объединение конечного или счетного числа открытых множеств — открытое множество.*

Теорема 11.6.4. *Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество.*

Д/З: Приведите пример счетного пересечения открытых множеств, которое не является открытым.

Теорема 11.6.5. *Пересечение конечного или счетного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*

Теорема 11.6.6. *Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*

Д/З: Приведите пример счетного объединения замкнутых множеств, не являющегося замкнутым.

Дополнительный материал

12.1.Сечения Дедекинда и аксиоматика Евдокса

Для большего прояснения смысла двенадцатой аксиомы рассмотрим следующую конструкцию, введенную в рассмотрение математиком Дедекиндом. Пусть множество действительных чисел $\mathbb{R}$ разделено на два непустых непересекающихся подмножества A и $\overline{A}$ ($\overline{A}$ читается «не A», $A \cup \overline{A} = \mathbb{R}$) таких, что любой элемент из A меньше любого элемента из $\overline{A}$. Пара множеств с такими свойствами называется сечением Дедекинда.

По аксиоме непрерывности существует действительное число c, которое не меньше любого числа из A и не больше любого числа из $\overline{A}$. Так как любое действительное число принадлежит либо A либо $\overline{A}$, то c также входит либо в A, либо в $\overline{A}$.

Если c принадлежит A, то оно будет наибольшим числом в A. Вместе с этим оно меньше всех элементов из $\overline{A}$, но не принадлежит $\overline{A}$, поэтому не является наименьшим в $\overline{A}$. Предположим, что все-таки существует наименьший элемент α в $\overline{A}$, т.е. все элементы из $\overline{A}$ больше или равны α и $\alpha \in \overline{A}$, но тогда, пара A, $\overline{A}$ не является сечением Дедекинда, так как точки из интервала $(c; \alpha)$ в этом случае не принадлежат ни A, ни $\overline{A}$ и не выполняется условие $A \cup \overline{A} = \mathbb{R}$.

Если же c принадлежит $\overline{A}$, то оно будет наименьшим числом в $\overline{A}$, а наибольшего элемента в A не будет. Итак, если задано сечение Дедекинда, то в одном из этой пары множеств есть наибольший либо наименьший элемент, а в другом – нет.

Эту конструкцию Дедекинда можно проиллюстрировать с помощью геометрической интерпретации чисел точками на числовой прямой. Представим, что все точки прямой покрашены в два цвета – зелёный и красный, так что каждая точка зелёного цвета лежит левее каждой точки красного цвета. Геометрически очевидно, должна существовать такая точка прямой, в которой краски приходят в соприкосновение. Эта точка и производит «разделение прямой на два класса»: все точки зелёного цвета лежат слева от неё, а все точки красного цвета – справа. При этом сама точка «стыка цветов» также должна быть определённого цвета, поскольку по условию закрашены все без исключения точки прямой. Эта точка должна быть либо зелёного цвета, являясь в этом случае последней зелёной точкой, либо красного цвета – при этом являясь первой красной точкой. Эти два варианта исключают друг друга: в первом случае не существует первой красной точки – существуют красные точки сколь угодно близкие к месту стыка, но первой среди них нет, а во втором случае по аналогичным причинам нет последней зелёной точки.

Обратим внимание на то, какие логические возможности мы исключили, апеллируя к геометрической наглядности. Нетрудно видеть, что их всего две: во-первых, случай, когда одновременно существуют и последняя зелёная, и первая красная точка; во-вторых, случай, когда нет ни последней зелёной, ни первой красной точек. Про первую ситуацию говорят, что имеет место скачок. Такая картина, как показывалось выше, возможна для прямой, из которой выброшен целый интервал промежуточных точек.

Для описания второй ситуации используют термин «пробел». Такая картина может иметь место для прямой, из которой удалили целый отрезок, включая его концы – в частности, если удалили единственную точку.

Таким образом, непрерывность прямой означает, что в ней нет ни скачков, ни пробелов, т. е. нет пустот. Это и постулирует аксиома непрерывности.

Как было показано в примере 1.2 для множества рациональных чисел аксиома непрерывности не имеет места. Так, если множество $\overline{A}$ состоит из тех рациональных положительных чисел, квадрат которых больше двух, A – из всех остальных рациональных чисел. Тогда ни в A нет наибольшего, ни в $\overline{A}$ нет наименьшего, поскольку таким числом может быть только корень из двух, но оно не является рациональным, поэтому не входит ни в одно из этих множеств.

Если мы зададим произвольное действительное число c, то можем с его помощью единственным образом построить сечение Дедекинда во множестве рациональных чисел, отнеся ко множеству A все рациональные числа, которые не больше c, а ко множеству $\overline{A}$ – все рациональные числа, которые больше c.

Этот факт впервые был установлен во II веке до нашей эры греческим математиком Евдоксом. Но Дедекинд установил и обратный факт – любое сечение рациональных чисел определяет единственным образом какое-нибудь действительное число. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между действительными числами и сечениями рациональных чисел. Это позволяет говорить о действительных числах как о сечениях рациональных. Такой подход называется конструктивной теорией действительного числа.

Если бы Евдокс смог догадаться до справедливости обратного утверждения, то полная аксиоматика действительных чисел была бы создана на две тысячи лет раньше.

12.2. Конструктивная теория действительных чисел

12.2.1. Необходимость конструктивного подхода

В начале курса математического анализа было дано понятие действительных чисел как элементов некоторого множества, подчиняющихся определенным правилам – аксиомам. Чем конкретно являются элементы этого множества, не уточнялось. Множество могло иметь самую разную природу, например, элементы его могли быть точками на прямой. Более того, не задавался вопрос, существует ли множество с такими свойствами? При аксиоматическом подходе к определению действительных чисел они являются некоторой абстракцией, которую трудно использовать в приложениях. Наше знание того факта, что длина диагонали квадрата выражается иррациональным числом, с которым можно делать различные преобразования, мало что дает для практики, если при этом не будут приведены какие-либо способы приближенного выражения этого числа через набор рациональных чисел.

Цель настоящей лекции состоит в том, чтобы конструктивно построить такое множество элементов, которые удовлетворяют системе правил – аксиом, введенных в начале курса. При этом в основу построения такой конструкции положены рациональные числа, как наиболее удобный для практики аппарат.

Обладая навыками аксиоматического подхода, можно определить рациональные числа, не прибегая к действительным. Так, например, можно ввести натуральные числа с помощью аксиом Пеано, добавить противоположные им, задав при этом операции сложения и вычитания, и тем самым получить множество целых чисел. Затем рассмотреть отношения (или упорядоченные пары) целых чисел. Определив на этих парах операции сложения, умножения и сравнения привычным нам способом, получим множество рациональных чисел. Это множество будет фундаментом (строительным материалом) для дальнейшего конструирования действительных чисел.

С точки зрения абстрактной математики нет разницы, задаем ли мы аксиоматически натуральные числа, рациональные числа или сразу действительные числа. Но с точки зрения приложений разница очень существенна. Дело в том, что с натуральными и рациональными числами мы можем работать в повседневной жизни, а с действительными уже нет. В компьютерных вычислениях также используются только рациональные числа. Во всех случаях, когда мы сталкиваемся с необходимостью на практике использовать иррациональное число (длину диагонали квадрата, длину окружности и т. п.), нам приходится заменять его на некоторое рациональное. Соответственно, встает вопрос о правомерности такой замены с точки зрения математики. Таким образом, в практических приложениях невозможно ограничиться только лишь аксиоматическим заданием действительного числа, необходимо показать связь множества действительных чисел с множеством рациональных.

12.2.2. Бесконечные десятичные дроби

Рассмотрим произвольное положительное действительное число $x > 0$. В силу следствия 3.3 из принципа Архимеда[32] найдется такое натуральное число n, что будет выполнено двойное неравенство $n-1 \leq x < n$. Обозначим это натуральное число $n = a_0 + 1$, где $a_0 = [x]$ – целая часть числа x.

Рис. 37. Число x на полуинтервале $[a_0; a_0 + 1)$

Разобьем отрезок $[a_0, a_0 + 1]$ на 10 равных отрезков. Число x принадлежит одному из этих отрезков. Если x попало на границу отрезков, то будем считать, что оно принадлежит только тому отрезку, у которого левая граничная точка совпадает с x. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Согласно сказанному: $a_1 \leq x < b_1$.

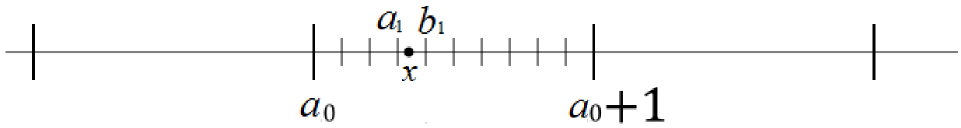


Рис. 38. Разбиение $[a_0, a_0 + 1]$ на 10 равных частей

Пусть α_1 порядковый номер (от 0 до 9) отрезка $[a_1, b_1]$ из десяти, равных ему. Тогда левый конец отрезка $[a_1, b_1]$ есть число

$$a_1 = a_0, \alpha_1,$$

а правый конец отрезка $[a_1, b_1]$ есть число

$$b_1 = a_0, \alpha_1 + 0,1.$$

Теперь разобьем отрезок $[a_1, b_1]$ на 10 равных отрезков. Число x снова принадлежит всего лишь одному отрезку $[a_2, b_2]$ нового разбиения, не совпадая с его правым концом: $a_2 \leq x < b_2$. Длина отрезка $[a_2, b_2]$ равна 0,01.

[32] Лекция 3.

Пусть α_2 порядковый номер (от 0 до 9) отрезка $[a_2, b_2]$ из десяти, равных ему. Тогда левый конец этого отрезка можно записать в виде

$$a_2 = a_0, \alpha_1\alpha_2,$$

соответственно правый конец есть число

$$b_2 = a_0, \alpha_1\alpha_2 + (0,1)^2.$$

На n-м шаге мы получим отрезок $[a_n, b_n]$ длины $(0,1)^n$, которому принадлежит число x, не совпадая с его правым концом: $a_n \le x < b_n$. При этом $a_n = a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, где α_i – одна из цифр от 0 до 9, $i = \overline{1, n}$,

$$b_n = a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + (0,1)^n.$$

Продолжив эту процедуру далее, построим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$, длины которых образуют последовательность $(0,1)^n$, сходящуюся к нулю.

Согласно принципу вложенных отрезков эта система стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку. Так как по построению точка x принадлежит каждому отрезку, то она и будет этой единственной точкой.

Таким образом, с помощью указанной процедуры положительному действительному числу x однозначно ставится в соответствие система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которой оно является единственной общей точкой.

Обратим внимание, что для описания всей этой системы вложенных отрезков достаточно задать только последовательность левых концов a_n, поскольку точки правых концов b_n однозначно вычисляются через них путем прибавления чисел $(0,1)^n$: $b_n = a_n + (0,1)^n$.

Последовательность левых концов этой системы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется последовательностью *десятичных приближений действительного числа x с недостатком*, последовательность правых концов $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ называется последовательностью *десятичных приближений действительного числа x с избытком*.

Как уже говорилось выше, последовательность $\{a_n\}$ можно записать в следующей форме

$$a_0, \alpha_1; \quad a_0, \alpha_1\alpha_2; \quad \ldots \quad ; a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \quad \ldots \tag{12.1}$$

где α_n – цифры от 0 до 9, $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, в этой записи присутствует много избыточной, дублирующейся информации: каждая цифра α_n повторяется бесконечно много раз, начиная с n-го члена последовательности. Всю информацию об этой последовательности удобнее записать в более компактной форме, устранив дублирование, а именно, указав целое a_0 и перечислив все цифры α_n, из которых образованы члены последовательности:

$$a_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots \tag{12.2}$$

Такая форма записи последовательности $\{a_n\}$ называется бесконечной десятичной дробью. Итак,

Определение 12.2.1. Бесконечная десятичная дробь — это специальная форма записи последовательности десятичных приближений действительного числа с недостатком (устраняющая дублирование информации и сохраняющая только различные значимые цифры указанного приближения).

Подчеркнем, что бесконечная десятичная дробь не является дробью в обычном понимании — как отношение двух чисел, это не отношение, а последовательность чисел.

Таким образом, с помощью описанной процедуры построения каждому положительному действительному числу поставлена в однозначное соответствие бесконечная десятичная дробь.

Обратим внимание, что последовательности десятичных приближений действительного числа с недостатком и с избытком образованы только рациональными числами, каждое десятичное приближение действительного числа есть рациональное число.

12.2.3. Действительные числа

В этом параграфе докажем, что множество бесконечных десятичных дробей находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством действительных чисел. Следовательно, под действительными числами можно понимать бесконечные десятичные дроби.

Лемма 12.2.1. *В полученной бесконечной десятичной дроби (12.2) цифры α_n не могут постоянно совпадать с 9, начиная с некоторого номера.*

Доказательство. Предположим, $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad \alpha_n = 9$. Это означает, что начиная с N-го шага, при каждом разбиении соответствующего отрезка $[a_n, b_n]$ на 10 равных частей точка x попадает на крайнюю правую часть. То есть точка x принадлежит всем правым отрезкам при последовательном разбиении отрезка $[a_N, b_N]$ и является в силу принципа вложенных отрезков единственной точкой пересечения всех этих отрезков. В то же время, у всех правых отрезков есть общая точка b_N — правый конец отрезка $[a_N, b_N]$.

Следовательно, точка x совпадает с b_N – правым концом одного из отрезков разбиения, что противоречит алгоритму построения. Лемма доказана.

В случае, когда все цифры бесконечной десятичной дроби без исключения совпадают с 9, начиная с некоторого номера, говорят, что бесконечная десятичная дробь *содержит 9 в периоде*. Если бесконечная десятичная дробь не содержит 9 в периоде, то она называется *допустимой*.

Допустимую бесконечную десятичную дробь, т. е. последовательность десятичных приближений действительного числа с недостатком, все члены которой положительны, называют *положительной*.

Из леммы вытекает следующая

Теорема 12.2.2. *Каждому действительному положительному числу соответствует единственная положительная допустимая бесконечная десятичная дробь.*

Доказательство. Рассмотрим, например, действительное число 1. Его можно записать согласно приведенному алгоритму в виде бесконечной десятичной дроби $1,000\ldots$. Бесконечная десятичная дробь $0,999\ldots$ Также может являться представлением числа 1: $0+9/10+9/100+\ldots=1$, но согласно лемме, пользуясь изложенным алгоритмом, мы не получим эту бесконечную десятичную дробь, содержащую 9 в периоде.

Также положительное действительное число, представимое в виде допустимой бесконечной десятичной дроби $a_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n000\ldots$, где α_i – цифры от 0 до 9, $i=\overline{1,n}$, $\alpha_n\neq 0$, может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби, содержащей 9 в периоде $a_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)999\ldots$, но согласно лемме это невозможно при использовании изложенного алгоритма.

Оказывается, этим общим примером исчерпываются все случаи неоднозначности представления положительных действительных чисел в виде десятичных дробей. При этом мы, конечно, не рассматриваем тривиальные случаи дробей, полученные приписыванием нулей в конец друг другу.

Замечание 12.1. Бесконечные дроби, оканчивающиеся на 9 в периоде, получаются, если в приведённом выше алгоритме всегда выбирать отрезок, которому принадлежит число x, так, чтобы x не совпадало с левым концом отрезка.

Теорема 12.2.3. *Каждой положительной допустимой бесконечной десятичной дроби соответствует единственное действительное положительное число.*

Доказательство. Как уже говорилось, положительная допустимая бесконечная десятичная дробь 12.2 является специфической формой записи последовательности $\{a_n\}$ рациональных чисел 12.1, по которой можно восстановить соответствующую последовательность рациональных чисел b_n, прибавив $(0,1)^n$ к каждому числу a_n.

Если рассматривать a_n и b_n как концы соответствующих отрезков, то получим систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Эта система имеет единственную общую точку — действительное число x.

Таким образом, каждой положительной допустимой бесконечной десятичной дроби соответствует единственное действительное число $x > 0$. Теорема доказана.

Следствие 12.2.4. *Множество действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством допустимых бесконечных десятичных дробей.*

Доказательство. Взаимно однозначное соответствие между множеством положительных действительных чисел и множеством положительных допустимых бесконечных десятичных дробей (которые представляют собой последовательности рациональных чисел) установлено в доказанных теоремах.

Если число x отрицательно, то можно рассмотреть противоположное ему $-x$. Для положительного числа $-x$ справедливы все приведенные выше рассуждения, ему ставится во взаимно однозначное соответствие допустимая положительная бесконечная десятичная дробь 12.2. Тогда отрицательному числу x можно поставить во взаимно однозначное соответствие бесконечную десятичную дробь $-a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, которая является последовательностью отрицательных рациональных чисел

$$-a_0, \alpha_1; \quad -a_0, \alpha_1\alpha_2; \quad \ldots \quad ; -a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \quad \ldots,$$

т.е. чисел, противоположных числам, образующим последовательность 12.1.

Действительному числу 0 поставим в соответствие бесконечную десятичную дробь, образованную нулями $0, 0000 \ldots$.

В результате каждому действительному числу будет соответствовать единственная допустимая бесконечная десятичная дробь, и наоборот. Следствие доказано.

Следствие 12.2.4 показывает, что множество действительных чисел можно «заменить» множеством бесконечных десятичных дробей, или, более точно, множество допустимых бесконечных десятичных дробей можно рассматривать как множество тех элементов, которые удовлетворяют всем 12 аксиомам множества действительных чисел. С бесконечными десятичными дробями можно работать как с действительными числами.

С точки зрения практики такой подход обладает несомненными преимуществами, так как позволяет работать лишь с рациональными числами и их последовательностями, сохраняя все математические преимущества множества действительных чисел (например, полноту).

Изложенный выше подход к конструктивному построению множества действительных чисел, исходя из множества рациональных чисел, принадлежит Вейерштрассу.

12.2.4. Другие конструктивные теории

В математике существуют еще два подхода к конструктивному построению множества действительных чисел на основе рациональных.

Об одном из них, предложенном Дедекиндом, уже говорилось в первых лекциях. Дедекинд в качестве действительных чисел использовал сечения на множестве рациональных чисел — разбиения рациональных чисел на два непересекающихся класса так, что любой элемент одного класса больше любого элемента из другого класса. Хотя такой подход кажется непривычным и не согласуется с интуитивным представлением о действительном числе, построенное множество сечений Дедекинда удовлетворяет всем аксиомам действительных чисел.

Задолго до Дедекинда древнегреческий математик Евдокс показал, что любое действительное число обладает свойством разбивать множество рациональных чисел на два указанных класса. Дедекинд же сделал следующий шаг – он предложил считать действительными числами все такие разбиения.

Наконец, третий подход для построения действительного числа был сделан Кантором. В качестве действительного числа он предложил рассматривать всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел. Из критерия Коши следует, что каждая фундаментальная последовательность имеет предел во множестве действительных чисел. Кантор, по-существу, предложил идентифицировать каждый такой предел (каждое действительное число) сходящейся к нему последовательностью рациональных чисел. Поскольку к одному и тому же числу могут сходиться разные последовательности, то Кантор отождествил те последовательности, разность которых есть бесконечно малая. Тем самым, последовательности, имеющие один и тот же предел, не различались.

Нетрудно заметить, что подход Вейерштрасса является частным случаем подхода Кантора, поскольку здесь в качестве действительного числа также используются фундаментальные последовательности рациональных чисел, но не произвольные, как у Кантора, а специальные – последовательности десятичных приближений.

Отметим, что подход Кантора, опирающийся на критерий Коши, решал одну из центральных проблем математики XIX века. К середине XIX века уже сложилось четкое понимание, что действительное число является пределом последовательности рациональных чисел. Но очевидно, что не любая последовательность рациональных чисел сходится. Для задания действительных чисел нужно было выделить лишь сходящиеся последовательности рациональных чисел. Но в определении сходимости последовательности неизбежно фигурирует ее предел – действительное число, которое нужно определить с помощью этой последовательности. Получался замкнутый порочный логический круг: для определения числа нужно определить сходящуюся к нему последовательность, но для определения сходящейся последовательности нужно определить число, к которому она сходится.

Коши сумел отделить сходящиеся последовательности от расходящихся, не прибегая к понятию предела; дал знаменитое определение фундаментальной последовательности или последовательности, сходящейся в себе. По определению этой последовательности все ее члены отклонялись друг от друга сколь угодно мало, начиная с некоторого номера, в отличие от сходящейся последовательности, члены которой по определению, должны попадать в любую, сколь угодно малую, окрестность некоторого числа (предела), начиная с некоторого номера. Впоследствии фундаментальные последовательности были названы последовательностями Коши, в честь автора знаменитого определения.

Кантор же использовал эти последовательности для определения действительного числа, тем самым, заслугами Коши и Кантора математическая теория числа обрела прочный, логически непротиворечивый фундамент.

Подход Кантора является универсальным, может быть использован не только для задания действительных чисел. С помощью него любое неполное множество (подобно множетву рациональных чисел) можно пополнить, добавить дополнительные элементы, чтобы оно стало полным (подобно множеству действительных чисел). Для этого нужно взять фундаментальные последовательности элементов исходного неполного множества. Эта процедура получила название канторовской процедуры пополнения или канторовским пополнением.

Несмотря на то, что подход Кантора является более общим, на практике наибольшее распространение получил подход Вейерштрасса, как наиболее удобный, в том числе и для компьютерных вычислений.

12.3. Счетные множества

12.3.1. Сравнение конечных и бесконечных множеств

Рассмотрим два множества X и Y. Пусть каждому элементу множества X поставлен в соответствие один элемент множества Y. В этом случае говорят, как известно из лекции 4, что задано однозначное отображение множества X на множество Y (или функция). Элемент x множества X называется прообразом соответствующего ему элемента y множества Y, а элемент y при этом называется образом элемента x.

Пусть у каждого элемента y существует единственный прообраз во множестве X. Тогда каждому элементу y можно поставить в соответствие его прообраз и задать, таким образом, однозначное отображение множества Y на множество X. В этом случае отображение множества X на множество Y называется *взаимно-однозначным*[33].

Со взаимно-однозначными отображениями мы часто сталкиваемся в повседневной жизни. Так, например, накрывая стол к обеду, мы устанавливаем взаимно-однозначное отображение между множеством людей — участников обеда и множеством стульев.

Частным случаем установления взаимно-однозначного соответствия является пересчитывание, когда устанавливается соответствие между множеством пересчитываемых предметов и конечным множеством первых натуральных чисел. При этом каждому предмету будет соответствовать некоторое натуральное число — его номер. При необходимости по номеру можно определить соответствующий предмет, фактически используя обратное отображение.

Если между двумя конечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то это означает, что эти множества имеют одно и то же количество элементов.

Определение 12.3.1. Количество элементов конечного множества называется его *мощностью*.

Таким образом, взаимно-однозначное отображение можно установить тогда и только тогда, когда два множества имеют одинаковую мощность. Мощность является показателем сравнения множеств с точки зрения возможности установления взаимно-однозначного соответствия.

Этот же подход положен и в основу сравнения бесконечных множеств.

Определение 12.3.2. Два множества (конечных или бесконечных) называются *равномощными* (или *эквивалентными*), если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Также говорят, что эти множества имеют одинаковую мощность. Понятие мощности обобщает понятие количества конечного множества на общий случай.

Наиболее известное из всех бесконечных множеств — множество натуральных чисел.

Определение 12.3.3. Множество называется *счетным*[34], если оно равномощно множеству натуральных чисел.

[33] Определение взаимно-однозначного или биективного отображения давалось в лекции 4.

[34] Его мощность называется *мощностью натурального ряда*. Для ее обозначения используется символ $\aleph_0$ («алеф-нуль»).

Пример 12.1. Счетным множеством является, например, множество натуральных четных чисел. Для того, чтобы установить взаимно-однозначное отображение между ним и множеством натуральных чисел, поставим в соответствие каждому натуральному числу n четное число $2n$. Построенное соответствие и будет представлять собой нужное отображение.

Отметим, что множество натуральных чисел эквивалентно своему подмножеству четных чисел. Такая ситуация, когда множество эквивалентно своему подмножеству, имеет место только в случае бесконечных множеств. Если провести параллель с конечными множествами, то получается, что множества натуральных и четных чисел имеют одно и то же «количество» элементов (одну и ту же мощность).

Для установления счетности некоторого множества фактически нужно найти способ нумерации его элементов такой, чтобы каждому элементу этого множества соответствовал единственный номер (натуральное число), и каждому номеру (натуральному числу) соответствовал единственный элемент рассматриваемого множества.

12.3.2. Теоремы о счетных множествах

Теорема 12.3.1. *Добавление к счетному множеству любого конечного числа элементов не меняет счетности множества.*

Доказательство. Поскольку исходное множество счтеное, то его элементы можно занумеровать – присвоить каждому из них номер (натуральное число). Обозначим элементы этого множества a_i, где номер i может принимать все натуральные значения.

Пусть к данному множеству добавлено N элементов, присвоим им номера от 1 до N. Каждому из бывших элементов a_i присвоим номер $n = i + N$. Таким образом, все элементы дополненного множества получают номера.

По заданному номеру n можно однозначно найти элемент этого множества. Если номер n больше N, то ему соответствует элемент a_i, исходного множества, где $i = n - N$. Если номер n меньше или равен N, то ему соответствует один из добавленных элементов с соответствующим номером. Теорема доказана.

Теорема 12.3.2. *Объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Если количество N заданных счетных множеств равно 1, то справедливость теоремы очевидна.

Пусть задано $N > 1$ счетных множеств, занумеруем их, присвоив номера от 1 до N. Элементы каждого i-го множества также можно занумеровать в силу его счетности. Будем обозначать их a_{ij}, где i – номер соответствующего множества, j – номер элемента в данном множестве. Индекс i может принимать значения от 1 до N, индекс j может принимать все натуральные значения.

Теперь каждому элементу a_{ij} объединения множеств поставим в соответствие натуральное число $n = N(j-1)+i$. При этом, очевидно, что каждый элемент получит единственный номер n.

Наоборот, по каждому натуральному числу n можно найти единственный соответствующий ему элемент a_{ij}. Для этого число n нужно поделить на число N, целая часть частного даст номер $j-1$, а остаток – номер i. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь множество р а ц и о н а л ь н ы х ч и с е л. Казалось бы, рациональных чисел во много раз больше, чем натуральных и установить взаимно-однозначное соответствие между ними нельзя. Однако это не так, что впервые было показано Георгом Кантором.

12.3.3. Счетность множества рациональных чисел

Теорема 12.3.3. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на тот факт, что любое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

Покажем сначала счетность множества положительных рациональных чисел. Здесь p и q – натуральные. Поместим все положительные рациональные числа в бесконечную таблицу. Номера столбцов этой таблицы будут соответствовать числителям p рациональных чисел, а номера строк – их знаменателям q. В итоге получим таблицу как на рис. 39. Очевидно, что все положительные рациональные числа попадут в эту таблицу, причем не по одному разу.

Теперь все элементы этой таблицы можно занумеровать, последовательно переходя от одной диагонали к следующей. Поскольку, как уже говорилось, некоторые рациональные числа в таблице повторяются, то при нумерации будем их пропускать.

Первая диагональ состоит всего из одного элемента: 1, присвоим ему номер 1.

Вторая диагональ содержит два числа: 2 и $\frac{1}{2}$, присвоим им номера соответственно 2 и 3. Третья диагональ содержит три числа: $\frac{1}{3}$, 1 и 3, но 1 уже встречалось, поэтому пропустим его, оставшимся элементам дадим номера 4 и 5.

Четвертая диагональ состоит из чисел: 4, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, они получают номера 6, 7, 8, 9 и так далее.

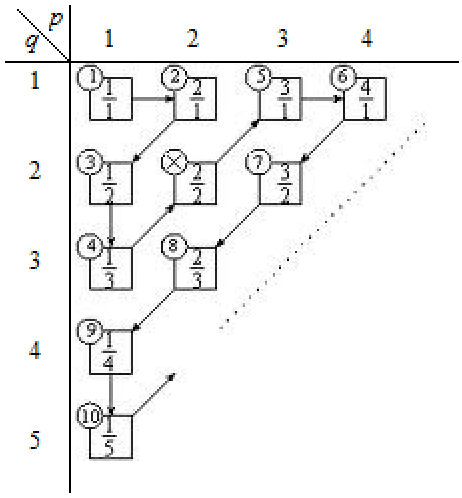


Рис. 39. «Пересчет» положительных рациональных чисел

В результате все положительные рациональные числа можно записать в ряд по порядку номеров $1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ldots$

Занумеровав положительные рациональные числа, мы тем самым установили взаимно-однозначное соответствие между ними и натуральными числами (их номерами) и доказали счетность этого множества.

Этот способ нумерации элементов таблицы по диагоналям впервые был предложен Г.Канторм и называется „диагональной процедурой Кантора“.

Покажем теперь, что все множество рациональных чисел счетно. Очевидно, что множество отрицательных рациональных чисел счетно, так же как и множество положительных. Объединение двух счетных множеств положительных и отрицательных рациональных чисел по теореме 12.3.2 также является счетным множеством.

Наконец, добавление еще одного элемента 0 также сохраняет счетность множества по теореме 12.3.1.

В итоге получаем все множество рациональных чисел, которое является счетным. Теорема доказана.

Установление факта счетности множества рациональных имело столь большое значение для дальнейшего развития математики, что фрагмент доказательства, содержащий построенную выше таблицу, был высечен на памятнике Г. Кантора в ознаменовании его заслуги.

С помощью диагональной процедуры Кантора можно доказать, еще одну теорему о счетных множествах.

Теорема 12.3.4. *Объединение счетного множества счетных множеств есть счетное множество.*

Д/З: Доказать самостоятельно. Указание: расположите элементы счетных множеств в строках бесконечной таблице, как на рис. 41.

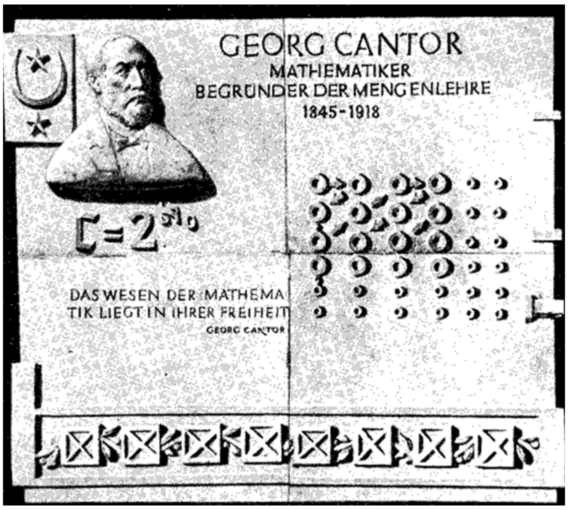


Рис. 40. Плита с изображением диагональной процедуры на могиле Кантора

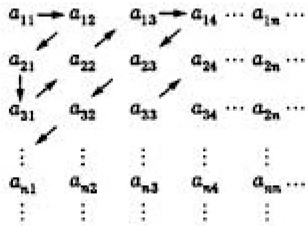


Рис. 41. «Пересчет» элементов счетного объединения счетных множеств

12.4. Несчетные множества

12.4.1. Несчетность множества действительных чисел

При изучении счетных множеств может возникнуть иллюзия, что любое бесконечное множество является счетным. На самом деле это не так. Примером бесконечного несчетного множества является множество действительных чисел. Этот факт был впервые установлен Г.Кантором.

Теорема 12.4.1. *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что существует хотя бы одно бесконечное подмножество действительных чисел, которое при этом не является счетным. Покажем, что таким подмножеством является множество действительных чисел на интервале $(0, 1)$.

В лекции 13 было установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и допустимых бесконечных десятичных дробей. Поэтому можно показать, что множество допустимых бесконечных десятичных дробей на интервале $(0, 1)$ несчетно. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что множество допустимых бесконечных десятичных дробей на интервале $(0, 1)$ счетно. Следовательно, его элементы можно занумеровать и присвоить каждой дроби соответствующий номер (натуральное число). Будем обозначать i-ю цифру после запятой у n-й дроби как α_{ni}, тогда n-я дробь будет иметь вид $0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \alpha_{ni} \ldots$.

По предположению все допустимые бесконечные десятичные дроби из интервала $(0, 1)$ можно выписать в виде ряда по порядку номеров:

$$\begin{gathered}
0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \ldots \alpha_{1i} \ldots \\
0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \ldots \alpha_{2i} \ldots \\
0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \ldots \alpha_{3i} \ldots \\
\ldots \\
0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \alpha_{ni} \ldots \\
\ldots
\end{gathered}$$

Покажем, что не все допустимые бесконечне десятичные дроби из интервала (0,1) содержатся в этом «пронумерованном» списке. Построим новую бесконечную десятичную дробь по следующим правилам. В качестве целой части возьмем 0. В качестве первой цифры выберем любую, кроме 0, 9 и α_{11}. В качестве второй цифры возьмем любую, кроме 0, 9 и α_{22}. В качестве третьей цифры возьмем любую, кроме 0, 9 и α_{33}, и так далее. В качестве n-й цифры возьмем любую, кроме 0, 9 и α_{nn}, и так далее.

В результате получим некоторую бесконечную десятичную дробь. Эта дробь будет допустимой, так как она не только не содержит девятки в периоде, но и вообще не содержит ни одной девятки. Она не является представлением нуля, так как ни одна ее цифра не совпадает с нулем. Очевидно, что она больше нуля и меньше единицы. Следовательно, это допустимая бесконечная десятичная дробь из (0, 1), и она должна попасть в занумерованный перечень таких дробей, приведенный выше. Но она не может совпадать с первой дробью из этого перечня, так как отличается от нее первой цифрой после запятой; не может совпадать со второй дробью, так как отличается от нее второй цифрой, и так далее. Она не может совпадать ни с какой n-й дробью из приведенного перечня, так как отличается от нее n-й цифрой. Значит, эта дробь вообще не может попасть в «пронумерованный» список. В результате мы получаем противоречие, которое и доказывает справедливость теоремы.

12.4.2. Континуальные множества

Определение 12.4.1. Говорят, что множество действительных чисел на интервале (0, 1) имеет мощность континуума[35].

Определение 12.4.2. Множество, имеющее мощность континуум, называется континуальным множеством.

---

[35]Мощность континуума обозначают строчной латинской буквой $\mathfrak{c}$ во фрактурном начертании. Фраку́ра (нем. Fraktur — надлом) – поздняя разновидность готического письма, возникшая в XVII—XVIII вв.

Лемма 12.4.2. *Интервал* $(0, a)$ *имеет мощность континуума* $(a > 0)$.

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала (0, 1) и элементами y интервала $(0, a)$ следующим образом: $y = ax$. Взаимная однозначность этого отображения и доказывает лемму.

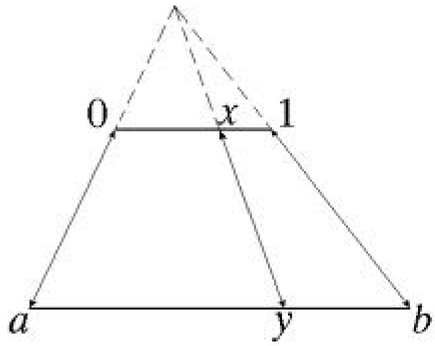


Рис. 42. Биективное отображение интервала (0,1) на произвольный (a, b)

Лемма 12.4.3. *Интервал* (a, b), *где* $b > a$, *равномощен интервалу* $(0, b-a)$.

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала $(0, b - a)$ и элементами у интервала (a, b) следующим образом: $y = x + a$. Взаимная однозначность этого отображения и доказывает лемму.

Следствие 12.4.4. *Интервал* (a, b) *имеет мощность континуума.*

Теорема 12.4.5. *Множество действительных чисел имеет мощность континуума.*

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и элементами y множества всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$ следующим образом: $y = \operatorname{tg} x$. Взаимная однозначность этого отображения доказывает теорему.

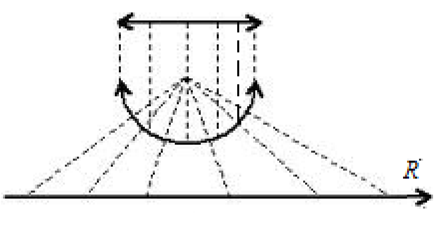


Рис. 43. Биективное отображение интервала на числовую прямую

Существуют ли множества, мощность которых больше континуума? Можно попробовать взять в качестве такого множества плоскость, поскольку интуитивно точек на плоскости «намного больше», чем точек на прямой.

В декартовой системе координат каждая точка на плоскости задается парой действительных чисел-координат $(x; y)$. Но оказывается, что переход к множествам в двумерном пространстве принципиально не может увеличить мощность. Об этом говорит следующая лемма.

Лемма 12.4.6. *Множество точек квадрата (рис. 44)*

$$\Pi = \{(x; y) : 0 \leq x < 1, \ 0 \leq y < 1\} \setminus \{(0; 0)\}$$

имеет мощность континуум.

Доказательство. Для доказательства установим взаимно-однозначное соответствие между точками $(x; y)$ квадрата Π, изображенного на рисунке 44, и точками z интервала $(0, 1)$.

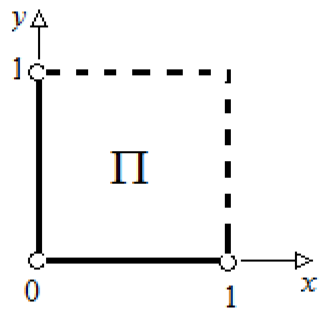


Рис. 44. Квадрат Π

Поскольку x, y и z – действительные числа, то их можно однозначно представить в виде допустимых бесконечных десятичных дробей

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_i \ldots, y = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_i \ldots, z = 0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_i \ldots.$$

Поставим в соответствие паре $(0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_i \ldots; 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_i \ldots) \in \Pi$ допустимую бесконечную десятичную дробь $0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 \ldots \alpha_i\beta_i \ldots \in (0; 1)$; и наоборот, допустимой бесконечной десятичной дроби $0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_i \ldots \in (0; 1)$ пару $(0, \gamma_1\gamma_3\gamma_5 \ldots; 0, \gamma_2\gamma_4\gamma_6 \ldots) \in \Pi$. Очевидно, это соответствие является взаимно-однозначным, что и доказывает лемму.

С помощью этой леммы, повторяя те же рассуждения, что и в случае прямой, можно доказать, что плоскость имеет мощность континуума. Проведенные доказательства можно обобщить на случай любого конечномерного евклидова пространства (трехмерного, четырехмерного и т. п.). Таким образом, *в конечномерных пространствах нет подмножеств мощности больше континуума.*

Означает ли это, что множества мощности больше континуума не существует? Конечно, нет. Но искать такие множества нужно на другом пути, который открывается важным фактом о том, что ни одно множество не эквивалентно множеству его подмножеств.

12.4.3. Множество мощности больше континуума

Лемма 12.4.7. *Любое множество не эквивалентно*[36] *множеству его подмножеств.*

Доказательство леммы будет приведено ниже. Чтобы лучше его понять, используем известный логический парадокс, получивший название – парадокс брадобрея.

Парадокс состоит в следующем. Брадобрей одного селения объявил, что будет брить всех тех и только тех мужчин этого селения, которые не бреются сами. Данное утверждение и представляет собой парадокс, поскольку оно заведомо ложно. Ложность утверждения обнаруживается, если решать вопрос: должен ли при этом брадобрей брить себя самого?

Если он будет брить себя самого, то он будет мужчиной, который бреется сам, следовательно, согласно обещанию, он не должен себя брить – ведь он бреет только тех, кто не бреется самостоятельно.

Если же он не будет бриться сам, то он должен себя брить, поскольку он обещал брить всех, кто не бреется самостоятельно.

Полученное противоречие доказывает ложность (парадоксальность) обещания брадобрея.

Можно дать некоторую математическую формализацию этого парадокса. Пусть Φ – множество мужчин селения, где живет брадобрей.

Поставим в соответствие каждому мужчине из Φ множество тех мужчин селения, которых он бреет. Например, если мужчина x не бреет никого, то ему будет соответствовать пустое множество $\varnothing$, если мужчина y бреется сам и больше никого не бреет, то ему будет соответствовать множество, состоящее только из него самого – $\{y\}$. Брадобрею c будет соответствовать множество C тех мужчин, которых он бреет.

В любом случае, если мужчина бреется сам, то он принадлежит множеству, которому соответствует; если мужчина не бреется сам, то он не принадлежит множеству, которому соответствует.

Для того, чтобы брадобрей выполнил свое обещание, множество C, которое ему соответствует, должно состоять только из тех и всех тех мужчин, которые не входят в соответствующие им множества (не бреются сами).

Если брадобрей c сам входит в это соответствующее ему множество C, то значит, он бреется самостоятельно, следовательно, согласно обещанию, он должен быть исключен из множества C – ведь туда должны входить только те мужчины, которые не входят в соответствующие им множества (не бреются сами).

Если брадобрей c не входит в множество C, значит, он не бреется самостоятельно и не входит во множество, которому соответствует. Но все такие

[36] Два множества (конечных или бесконечных) называются *равномощными* (или *эквивалентными*), если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

мужчины должны быть отнесены ко множеству C. Получается неразрешимое противоречие.

Перейдем к доказательству нужного нам факта, используя аналогию с парадоксом брадобрея.

Доказательство **леммы 12.4.7** проведем от противного. Пусть есть некоторое множество Φ=$\{a, b, c, \ldots\}$; пусть 2^{Φ} – множество всех его подмножеств: 2^{Φ}=$\{A, B, C, \ldots\}$, где A, B, C $\ldots$ – подмножества множества Φ.

Предположим, что существует взаимно-однозначное соответствие (биекция) между множествами Φ и 2^{Φ}, то есть каждому подмножеству A элементов из Φ (элементу множества 2^{Φ}) можно поставить в соответствие элемент a множества Φ. Например, элемент a соответствует подмножеству $A = \{a, b, c\}$; элемент b соответствует подмножеству $B = \{a, c\}$ и так далее.

При этом некоторые элементы множества Φ будут соответствовать тем подмножествам из Φ, которым они принадлежат. Так, в приведенном только что примере, элемент a соответствует множеству $A = \{a, b, c\}$, которому принадлежит.

Некоторые элементы множества Φ будут соответствовать тем подмножествам из Φ, которым сами они не принадлежат. В том же примере элемент b соответствует множеству $B = \{a, c\}$, которому не принадлежит.

Здесь можно провести параллель с парадоксом брадобрея. Элементы множества Φ можно рассматривать как мужчин селения; подмножество, соответствующее каждому элементу (мужчине), можно рассматривать как совокупность людей, которых он бреет, а факт принадлежности элемента к соответствующему ему подмножеству – как бритье себя самого.

Обозначим C – множество элементов из Φ, соответствующих тем подмножествам, которым они не принадлежат. По аналогии с парадоксом брадобрея это будет множество тех жителей селения, которые не бреются сами. Поскольку C является подмножеством элементов из Φ, то в Φ должен существовать некоторый элемент c, соответствующий этому подмножеству. В парадоксе брадобрея роль элемента c выполняет брадобрей.

Рассмотрим вопрос: принадлежит элемент c множеству C, которому соответствует (должен ли брадобрей брить себя самого)?

Если c принадлежит C, то c принадлежит подмножеству, которому соответствует. Но C содержит только те элементы из Φ, которые не принадлежат подмножествам, которым соответствуют. Значит, c не может принадлежать C.

Если c не принадлежит C, то тогда c не принадлежит подмножеству, которому соответствует. Тогда c должно входить в C, поскольку в C входят все элементы, не принадлежащие подмножествам, которым соответствуют.

И в том, и в другом случае мы приходим к противоречию, которое доказывает справедливость леммы.

Следствие 12.4.8. *Множество всех подмножеств действительных чисел имеет мощность больше континуума.*

Следствие 12.4.9. *Не существует множества наибольшей мощности.*

Всегда вместе с множеством можно рассмотреть множество его подмножеств, мощность которого будет больше мощности исходного множества.

Г. Кантор также доказал, что *множество всех подмножеств счетного множества есть множество мощности континуума.*

Но долгое время после Кантора математики занимались решением вопроса о том, *существует ли множество мощности больше счетного и меньше континуума.* Этот вопрос получил название к о н т и н у у м - г и п о т е з а.

В XX веке, когда была построена аксиоматическая теория множеств, было установлено, что факт существования такого множества нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из других аксиом теории множеств. Можно постулировать в виде дополнительной аксиомы как существование такого множества, так и его отсутствие. В любом случае мы получим логически непротиворечивую систему утверждений — разные варианты математической теории.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: Часть I. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 648 с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59376

[2] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400 с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2224

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та ЧеРо,1997. – 624с.; То же [Электронный ресурс]. – URL:http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

Олег Анатольевич **Кузенков**
Елена Александровна **Рябова**

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЛЕКЦИИ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.