

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и
математическое обеспечение»

Д.Т.Чекмарев

Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем

*Учебно-методические материалы по программе повышения
квалификации «Информационные технологии и компьютерное
моделирование в математике и механике»*

Нижний Новгород

2007

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: *Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»*

Чекмарев Д.Т. Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике». Нижний Новгород, 2007, 88 с.

Для численных схем, основанных на вариационной постановке задач (вариационно-разностный метод и МКЭ) рассматривается метод преобразования к конечно-разностному виду. Полученная стандартная форма записи численной схемы в виде равенства некоторого сеточного оператора нулю далее используется для анализа аппроксимации, устойчивости и других ее свойств. Рассматривается применение данного подхода к широкому классу схем метода конечного элемента – от простейших до эрмитовых и сирендиповых. Обсуждается вопрос автоматизации процесса построения и анализа схем путем применения аналитических вычислений на компьютере. Приводятся результаты работы программы автоматического построения численных схем. Возможности подхода иллюстрируются примерами анализа вариационно-разностных и КЭ численных схем решения задач теории упругости, пластин и оболочек.

© Чекмарев Д.Т., 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1 Сеточные методы. Простой пример конечно-разностной, вариационно-разностной и конечно-элементной схем	6
2 Общий метод преобразования вариационно-разностных и КЭ численных схем к конечно-разностному виду	14
3 Вариационная постановка линейных задач динамики упругих сред и пластин типа Тимошенко	39
4 Анализ аппроксимации вариационно-разностных схем	48
Заключение	80
Список литературы	81

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество различных численных методов решения задач математической физики. Среди них наибольшее распространение получили сеточные методы. Приведем их неполный список: метод конечных разностей (МКР), метод конечного элемента (МКЭ), вариационно-разностные методы (В-РМ), метод Годунова (конечных объемов), метод частиц в ячейках, метод граничного элемента, сеточно-характеристические методы. Этот список можно расширить (или детализировать более подробно). По данным методам имеется обширная литература, часть которой приведена в данном пособии ([3,28,34-37, 39-41,43-53,57,61-72,74,78,84]). Учитывая, что каждый из данных методов существует в большом числе вариантов, исследователь неизбежно сталкивается с проблемой выбора метода и конкретной численной схемы при моделировании того или иного физического процесса. При выборе метода основным критерием является эффективность, то есть возможность получить решение с минимальными затратами ресурсов – как человеческих, так и компьютерных. В последнее время значение человеческого ресурса преобладает. Например, существенно проще (и экономически выгоднее) решить какую-либо задачу механики сплошных сред с помощью стандартных средств, предоставляемых известной системой ANSYS, чем разрабатывать собственную численную схему с быстродействием в 1000 раз больше, если время расчета одного варианта не превышает нескольких минут. С другой стороны, существует немалое число задач, для которых время расчета одного варианта измеряется часами, сутками и более. А также существуют (и будут существовать всегда) задачи, решение которых с заданной точностью при современном уровне развития компьютерной техники невозможно. Поэтому требуемые компьютерные ресурсы (объем вычислений) иногда имеют решающее значение.

Выбор наиболее эффективного метода численного решения задачи осуществляется на основе теоретического анализа или путем численных экспериментов. При этом первый путь предпочтительнее, если он возможен. К сожалению, не существует общей теории, позволяющей сравнивать эффективность численных схем, основанных на различных (см. выше) подходах к их построению. В предлагаемом материале описывается попытка сделать шаг в данном направлении – рассмотреть с единой точки зрения вариационно-разностные и КЭ схемы путем приведения их к единой конечно-разностной форме записи

в тех случаях, когда это возможно. Это позволяет теоретически исследовать и сравнивать между собой по большому числу параметров схемы МКР, В-РМ и МКЭ.

В первой главе на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа демонстрируется применение МКР, В-РМ и МКЭ для построения численных схем, описаны основы вариационных методов и обсуждается различие между МКЭ и В-РМ. Во второй главе дается описание метода преобразования, рассмотрены его различные варианты. Также рассматривается проблема автоматизации преобразований. В третьей главе даются краткие сведения о динамических задачах теории упругости и теории оболочек типа Тимошенко и приводится вывод линейного варианта уравнений на основе вариационного принципа Даламбера-Лагранжа. В четвертой главе для данных задач построены вариационно-разностные и КЭ схемы и проводится их анализ с использованием описанного во второй главе подхода.

ГЛАВА 1. СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ. ПРИМЕР КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ, ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОЙ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ

В данной главе на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа рассмотрим построение численных схем МКР, В-РМ и МКЭ.

Задача Дирихле может быть сформулирована разными способами.

Первая формулировка – дифференциальная:

найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

в односвязной области $\Omega \subset R^2$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = j(x, y), \quad (1.2)$$

где контур Γ - граница области Ω .

Вторая формулировка – вариационная:

найти функцию $u \in C^1(\bar{\Omega})$, принимающую на границе Γ области заданные значения (1.2)

и доставляющую минимальное значение функционалу

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy. \quad (1.3)$$

Возможны и другие формулировки данной задачи, например в виде системы уравнений Коши-Римана и т.д.. Важно, что эти формулировки эквивалентны и решением полученных задач является одна и та же функция $u(x, y)$.

Теперь рассмотрим данные задачи как основу для построения численных методов. Из дифференциальной постановки задачи (1.1), (1.2) естественным образом следует метод конечных разностей. Из вариационной постановки следует вариационно-разностный метод и МКЭ. Данная связь постановок задач и численных методов несколько условна, но в основном соответствует сложившейся вычислительной практике. Главным является тот факт, что полученные численные схемы не эквивалентны друг другу.

Рассмотрим на примере задачи (1.1), (1.2) (или (1.2), (1.3)) пример построения схем МКР, В-РМ и МКЭ, их общие черты и различия.

Все три метода являются сеточными, то есть начинаются с построения сетки – конечного множества узлов, расположенных в области, включая границу. Сетка может

быть равномерная, регулярная и нерегулярная (точные определения см. следующую главу). Ограничимся случаем равномерной сетки, которая в двумерном случае задается в виде

$$\begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} j$$

или

$$\begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} + B_h \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix},$$

где B_h - невырожденная матрица 2×2 . В рассматриваемом примере будем считать матрицу B_h диагональной:

$$B_h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}.$$

Для каждого узла в случае МКР определим соседние узлы (шаблон разностной схемы). При этом узлы сетки разбиваются на три группы – внутренние, внешние и граничные. В граничных узлах задаются граничные условия (1.2), а во внутренних – ищется решение задачи. Внутренние узлы могут быть соседними только с внутренними и граничными. В случае В-РМ и МКЭ область разбивается на ячейки (элементы) – многоугольники с вершинами в узлах сетки. При этом узлы, лежащие на контуре (ломаной линии), ограничивающем область, будем считать граничными и зададим в них граничные условия (1.2). Остальные узлы сетки, принадлежащие области, будем считать внутренними.

Теперь рассмотрим построение систем уравнений для приближенного решения задачи.

Метод конечных разностей

Решение будем искать в узлах сетки. Заменим производные в уравнении (1.1) конечно-разностными выражениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h_2^2} (u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1})$$

В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + \frac{1}{h_2^2} (u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}) = 0, & (i, j) \in \Omega_h \\ u_{ij} = j(x_{ij}, y_{ij}) & (i, j) \in \Gamma_h \end{cases} \quad (1.4)$$

(здесь Ω_h - множество внутренних узлов, а Γ_h - множество граничных узлов разностной сетки).

Вариационно-разностный метод

Необходимым условием минимума функционала (1.3) является равенство его первой вариации нулю. В результате приходим к вариационному уравнению

$$dW = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) d \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (1.5)$$

Будем считать ячейки прямоугольными размерами $h_1 \times h_2$. Для дискретизации задачи заменим интеграл в (1.3) (или (1.5)) суммой интегралов по ячейкам. Интегралы в ячейках будем считать приближенно по формуле прямоугольников (умножая соответствующее приближенное значение подынтегрального выражения на площадь ячейки). При этом производные в (1.3) (или (1.5)) заменим следующими конечно-разностными выражениями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} &\approx \frac{1}{2h_1} (u_{i+1j} + u_{i+1j+1} - u_{ij+1} - u_{ij}) = (d_1^+ u)_{ij}, \\ d \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} &\approx \frac{1}{2h_1} (du_{i+1j} + du_{i+1j+1} - du_{ij+1} - du_{ij}) = (d_1^+ du)_{ij}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij} &\approx \frac{1}{2h_2} (u_{ij+1} + u_{i+1j+1} - u_{i+1j} - u_{ij}) = (d_2^+ u)_{ij}, \\ d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij} &\approx \frac{1}{2h_2} (du_{ij+1} + du_{i+1j+1} - du_{i+1j} - du_{ij}) = (d_2^+ du)_{ij} \end{aligned} \quad (1.6)$$

В результате из (1.5) получим дискретное вариационное уравнение

$$dW_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} [(d_1^+ u)(d_1^+ du) + (d_2^+ u)(d_2^+ du)]_{ij} \Delta S = 0 \quad (1.7)$$

Собирая и приравнявая нулю коэффициенты при вариациях узловых перемещений du_{ij} , получим разностную схему, которая во внутренних узлах сетки запишется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4h_1^2} [(u_{i+1j-1} + 2u_{i+1j} + u_{i+1j+1}) - 2(u_{ij-1} + 2u_{ij} + u_{ij+1}) + (u_{i-1j-1} + 2u_{i-1j} + u_{i-1j+1})] + \\ &+ \frac{1}{4h_2^2} [(u_{i-1j+1} + 2u_{ij+1} + u_{i+1j+1}) - 2(u_{i-1j} + 2u_{ij} + u_{i+1j}) + (u_{i-1j-1} + 2u_{ij-1} + u_{i+1j-1})] = 0, \quad (1.8) \\ &(i, j) \in \Omega_h \end{aligned}$$

В граничных узлах задаются граничные условия.

Метод конечного элемента

Рассмотрим схему для четырехузлового билинейного элемента. Элемент будет совпадать с ячейкой, рассмотренной в вариационно-разностном методе. Зададим в

элементе локальную систему координат (x, h) с началом в центре элемента. В отличие от предыдущих методов в МКЭ решение ищется во всей области, а не в узлах, как в МКР и В-РМ. Но при этом решение в элементе задается конечным числом параметров. Зададим функцию в элементе в виде полинома

$$u = C_0 + C_1 x + C_2 h + C_3 xh . \quad (1.9)$$

Тогда производные запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = C_1 + C_3 h \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial h} = C_2 + C_3 x \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в функционал (1.3), получим дискретный функционал

$$W_h = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dh = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \left[(C_1^2 + C_2^2) h_1 h_2 + \frac{1}{12} C_3^2 h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2) \right]_{ij} \quad (1.11)$$

Из него следует вариационное уравнение

$$dW_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \left[(C_1 dC_1 + C_2 dC_2) h_1 h_2 + \frac{1}{12} C_3 dC_3 h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2) \right]_{ij} = 0 \quad (1.12)$$

Далее можно выразить коэффициенты через узловые неизвестные

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{4} (u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij+1} + u_{i+1j+1}) = (d_0^+ u)_{ij} \\ C_1 &= (d_1^+ u)_{ij} \\ C_2 &= (d_2^+ u)_{ij} \\ C_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} (u_{ij} + u_{i+1j+1} - u_{i+1j} - u_{ij+1}) = (d_3^+ u)_{ij} \end{aligned} \quad (1.13)$$

(операторы d_1^+, d_2^+ см. (1.6)). В результате вариационное уравнение примет вид

$$dW_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \left[(d_1^+ u) (d_1^+ du) + (d_2^+ u) (d_2^+ du) + \frac{1}{12} C_3 dC_3 (h_1^2 + h_2^2) \right]_{ij} \Delta S = 0$$

Далее действуем так же, как в вариационно-разностном методе. Собирая и приравнявая нулю коэффициенты при du_{ij} , получим разностную схему. Во внутренних узлах сетки будем иметь уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4h_1^2} [(u_{i+1j-1} + 2u_{i+1j} + u_{i+1j+1}) - 2(u_{ij-1} + 2u_{ij} + u_{ij+1}) + (u_{i-1j-1} + 2u_{i-1j} + u_{i-1j+1})] + \\
& + \frac{1}{4h_2^2} [(u_{i-1j+1} + 2u_{ij+1} + u_{i+1j+1}) - 2(u_{i-1j} + 2u_{ij} + u_{i+1j}) + (u_{i-1j-1} + 2u_{ij-1} + u_{i+1j-1})] + \\
& + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) [(u_{i+1j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1j+1}) - 2(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) + (u_{i+1j-1} - 2u_{ij-1} + u_{i-1j-1})] = 0, \\
& (i, j) \in \Omega_h
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Таким образом, тремя разными методами получили три разные численные схемы (1.4), (1.8) и (1.14) решения одной задачи. Отметим различие в подходах.

В МКР производные в дифференциальном уравнении заменяются конечно-разностными выражениями, при этом приходим к системе алгебраических уравнений.

В В-РМ интеграл в функционале или вариационном уравнении заменяется квадратурной формулой. В результате из вариационного уравнения получаем разностную схему.

МКЭ – проекционно-сеточный метод, отличается от предыдущих тем, что решение ищется не в узлах, а во всей области. Дискретизация получается за счет того, что функция в элементе задается в виде полинома или другой функции, определяемой с помощью конечного набора параметров.

При использовании МКР и В-РМ важной является проблема аппроксимации производных. В простейшем рассмотренном случае ее решение очевидно. В случае неравномерных и косоугольных сеток используются другие подходы. Рассмотрим некоторые из них.

Формулы естественной аппроксимации производных [77] основаны на применении формулы Грина

$$\int_C P dX^1 + Q dX^2 = \int_S \left(\frac{\mathcal{I} Q}{\mathcal{I} X^1} - \frac{\mathcal{I} P}{\mathcal{I} X^2} \right) dX^1 dX^2,$$

(где C - замкнутый контур, S - область, ограниченная этим контуром) к ячейке разностной сетки. Частными случаями формулы Грина являются формулы:

$$\int_C f dX^1 = - \int_S \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} X^2} dX^1 dX^2, \int_C f dX^2 = \int_S \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} X^1} dX^1 dX^2. \tag{1.15}$$

Пронумеруем вершины m -угольной ячейки против часовой стрелки от 1 до m (рис. 1.1).

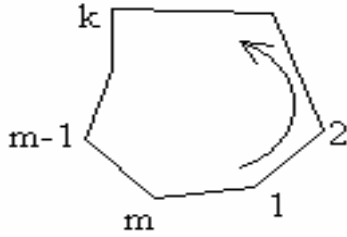


Рис.1.1

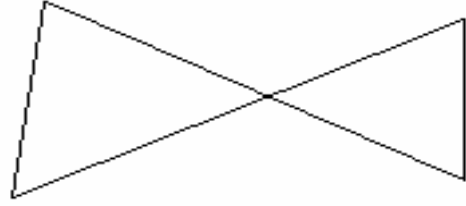


Рис.1.2

Пусть известны значения функции $f_i = f(X_i^1, X_i^2)$ в вершинах ячейки. Предполагая функцию f линейной вдоль сторон ячейки, контурные интегралы в формулах (1.15) получим в виде

$$2 \int_C f dX^1 = \sum_{i=1}^m f_i (X_{i+1}^1 - X_{i-1}^1), \quad 2 \int_C f dX^2 = \sum_{i=1}^m f_i (X_{i+1}^2 - X_{i-1}^2). \quad (1.16)$$

Если поделить выражения (2.5) на удвоенную площадь ячейки S , где

$$S = \int_C X^1 dX^2 = - \int_C X^2 dX^1, \quad (1.17)$$

получим средние значения частных производных в ячейке или формулы для аппроксимации производных

$$\frac{\int f}{\int X^i} = \frac{\sum_{k=1}^m f_k (X_{k+1}^{3-i} - X_{k-1}^{3-i})}{\sum_{k=1}^m X_k^i (X_{k+1}^{3-i} - X_{k-1}^{3-i})}. \quad (1.18)$$

Формулы естественной аппроксимации производных (1.18) пригодны для любых выпуклых многоугольников, а также и для невыпуклых, но не имеющих самопересечений. Пример самопересекающейся ячейки приведен на рис. 1.2.

Известен аналогичный подход для трехмерных ячеек в виде многогранников, основанный на применении формул Гаусса-Остроградского.

Аппроксимация производных, основанная на применении метода наименьших квадратов, предполагает определение коэффициентов линейной функции n переменных

$$L(X^1, \mathbf{K}, X^n) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i (X^i - X_c^i), \quad (1.19)$$

(здесь $X_- = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ - центральная точка шаблона) наименее уклоняющейся от искомой функции f , заданной в m точках, то есть доставляющей минимум по всем A_i ($i=0, \dots, n$) выражению

$$\sum_{k=1}^m [L(X_k^1, \mathbf{K}, X_k^n) - f(X_k^1, \mathbf{K}, X_k^n)]^2.$$

Решение экстремальной задачи будет единственным, если выполнены условия: $m \geq n+1$; точки X_1, \mathbf{K}, X_m не лежат в одной гиперплоскости в R^n . При выполнении этих условий частные производные (коэффициенты A_i ($i=1, \dots, n$)) определяются по формулам:

$$\frac{\mathcal{J} f}{\mathcal{J} X^i} = A_i = \frac{\det[V^T V_i]}{\det[V^T V]}, \quad (1.20)$$

где V - прямоугольная матрица $(m-1) \times n$:

$$\{V_{ij}\} = \{X_i^j - X_m^j\}. \quad (1.21)$$

Матрица V_i получается из V заменой i -го столбца столбцом $\text{col}(f_i - f_m, \mathbf{K}, f_{m-i} - f_m)$. В случае $m=n+1$ (ячейка является симплексом) матрицы V и V_i становятся квадратными и формула (2.9) упрощается:

$$\frac{\mathcal{J} f}{\mathcal{J} X^i} = A_i = \frac{\det V_i}{\det V}. \quad (1.22)$$

В случае $n=2, m=3$ (треугольная ячейка на плоскости) формулы (1.22) и (1.18) совпадают. Вообще для симплексов задача аппроксимации частных производных с первым порядком точности имеет единственное решение.

Рассмотрим еще один *общий подход к аппроксимации производных* в ячейках. Среди узлов ячейки выбираются группы по $n+1$ узлу, не лежащему в одной гиперплоскости (симплексы). Для каждого симплекса вычисляется производная по формуле (2.11), а далее значения этих производных суммируются с весами. Окончательная формула имеет вид:

$$\frac{\mathcal{J} f}{\mathcal{J} X^i} = \sum_k C_k \left(\frac{\mathcal{J} f}{\mathcal{J} X^i} \right)_k, \quad (1.23)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial X^i} \right)_k$ - значение производной в k-м симплексе, а весовые коэффициенты удовлетворяют единственному условию: $\sum_k C_k = 1$. По-видимому, формула (1.23)

исчерпывает все возможные способы аппроксимации первых производных. Выбирая какой-либо принцип выбора симплексов и подбора весовых коэффициентов (например, пропорционально объему симплекса) можно получить ту или иную формулу аппроксимации производных в n-мерной ячейке.

Для аппроксимации функции в ячейке по заданным значениям в ее вершинах используется формула

$$f = \sum_{k=1}^m C_k f_k, \quad (1.24)$$

где m-число вершин, $\sum_{k=1}^m C_k = 1$. На практике наиболее часто используется либо аппроксимация функции ее значением в одном (i-м) узле ($C_i = 1, C_j = 0, j = 1, \dots, m; i \neq j$), либо среднее арифметическое ($C_i = 1/m, i = 1, \dots, m$). Последний вариант совпадает с результатом, полученным методом наименьших квадратов, поэтому он является более предпочтительным, если нет каких-либо высших соображений.

ГЛАВА 2. ОБЩИЙ МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ К ВИДУ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ

Теоретическое исследование разностных схем предполагает стандартную форму записи схемы в виде равенства некоторого сеточного оператора нулю (для однородной задачи) или сеточной функции [50,69,70]. Для общего случая вариационно-разностной или конечно-элементной схемы на нерегулярной сетке от такого представления мало пользы в силу следующих обстоятельств. Во-первых, процедура построения операторов включает трудно формализуемые моменты, связанные с кодировкой ячеек и узлов; во-вторых, от узла к узлу могут меняться не только коэффициенты разностного оператора, но и его шаблон. В случае равномерных (в том числе косоугольных) сеток разностный оператор удается выписать в конечном виде, пригодном для теоретического анализа методом гармоник или методом дифференциального приближения [84].

Данная глава посвящена преобразованию вариационно-разностных и конечно-элементных схем к виду конечно-разностных. Процедура преобразования аналогична выводу системы дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера) из вариационной задачи.

Сеточный аналог формул интегрирования по частям. Конечно-разностное представление вариационно-разностных схем

Пусть в $R^n = \{X\} = \{(X^1, \dots, X^n)\}$ задана равномерная (в общем случае косоугольная) сетка с координатами узлов

$$X_{j_1 \dots j_n} = \begin{bmatrix} X^1_{j_1 \dots j_n} \\ \dots \\ X^n_{j_1 \dots j_n} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} j_1 \\ \dots \\ j_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^1_0 \\ \dots \\ X^n_0 \end{bmatrix} \quad j_1, \dots, j_n \in Z, \quad (2.1)$$

где B - невырожденная матрица $n \times n$.

Здесь (j) – мультииндекс: $(j) = (j_1, \dots, j_n)$. Сетку (2.1) назовем основной сеткой.

Пусть в R^n определена вещественная функция $f(X) \in C^2(R^n)$, значения которой в узлах разностной сетки (2.1) обозначим через $f_{(j)} = f(X_{(j)})$. Таким образом, получили сеточную функцию $\{f_{(j)} | (j) \in Z^n\}$.

Назовем некоторое конечное множество Π целочисленных n -мерных векторов основным шаблоном. Будем считать шаблон Π невырожденным, то есть не лежащим в какой-либо гиперплоскости в R^n . Определим на шаблоне Π линейные операторы $d_0^+, d_1^+, \mathbf{K}, d_n^+$:

$$(d_m^+ f)_{(j)} = \sum_{(k) \in \Pi^+} \beta_{(k)}^m f_{(j)+(k)}, \quad (2.2)$$

отображающие множество сеточных функций $\{f\}$ в себя и аппроксимирующие функции и их первые производные:

$$d_0^+ f = f + O(\Delta x), \quad d_m^+ f = \frac{\partial f}{\partial X^m} + O(\Delta x), \quad m=1, \dots, n \quad (2.3)$$

Под Δx здесь будем понимать диаметр ячейки разностной сетки:

$$\Delta x = \max_{\{k, l, j=0, 1, \dots, n\}} |X_{(k)} - X_{(l)}|.$$

Возможность построения системы операторов со свойствами (2.3) очевидным образом следует из невырожденности шаблона. Определим операторы $d_0^-, d_1^-, \mathbf{K}, d_n^-$ посредством равенств

$$(d_m^- f)_{(j)} = c_m \sum_{(k) \in \Pi} b_{(k)}^m f_{(j)-(k)}, \quad m=0, \dots, n, \quad (2.4)$$

где $b_{(k)}^m (m=0, \dots, n)$ - коэффициенты из формул (2.2), $c_0 = 1, c_m = -1, (m=1, \dots, n)$.

Операторы $d_0^-, d_1^-, \mathbf{K}, d_n^-$ назовем двойственным по отношению к $d_0^+, d_1^+, \mathbf{K}, d_n^+$. Следствием (2.2) - (2.4) является

$$d_0^- \bar{f} = f + O(\Delta x), \quad d_m^- \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial X^m} + O(\Delta x), \quad m=1, \dots, n \quad (2.5)$$

Разностные операторы d_m^+ и d_m^- можно рассматривать как обобщение на многомерный случай соответственно правых и левых конечных разностей. Можно также указать на аналогию с операторными разностными схемами, где некоторым дифференциальным операторам соответствуют по два различных разностных оператора.

Пусть в области $V \in R^n$ определены две вещественные функции $f, g \in C^1(R^n)$, удовлетворяющие на границе области условиям $f=g=0$. Рассмотрим сеточные области $\bar{V} = \{(j) | X_{(j)} \in V\}$, $V^+ = \{(j)+(k) | (j) \in \bar{V}, (k) \in \Pi\}$, $V^- = \{(j)-(k) | (j) \in \bar{V}, (k) \in \Pi\}$, $V^* = \bar{V} \cup V^+ \cup V^-$.

Определим сеточные функции f, g , полагая

$$f_{(j)} = f(X_{(j)}), g_{(j)} = g(X_{(j)}) \text{ при } (j) \in \bar{V}; \quad f_{(j)} = g_{(j)} = 0 \text{ при } j \notin \bar{V}.$$

Рассмотрим интегралы

$$\int_V f g dV, \quad \int_V f \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} X^m} dV \quad (m = 1, \dots, n)$$

и их разностные аналоги

$$\sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V \quad (m = 0, \dots, n),$$

где $\Delta V = \det B$ - объем элементарной ячейки разностной сетки (2.1)

Теорема (разностный аналог формул интегрирования по частям).

Справедливы равенства

$$\sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V = c_m \sum_{(j) \in \bar{V}} (d_m^- f)_{(j)} g_{(j)} \Delta V, \quad (m = 0, \dots, n) \quad (2.6)$$

Доказательство

Воспользуемся определением операторов (2.2):

$$\begin{aligned} \sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V &= \sum_{(j) \in V^*} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V = \sum_{(j) \in V^*} f_{(j)} \left(\sum_{(k) \in \Pi} b_{(k)}^m g_{(j)+(k)} \right) \Delta V = \\ &= \sum_{(k) \in \Pi} \sum_{(j) \in V^*} b_{(k)}^m f_{(j)} g_{(j)+(k)} \Delta V. \end{aligned}$$

Обозначив $(j)+(k)=(l)$, после замены получим далее

$$\begin{aligned} \sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} (d_m^+ g)_{(j)} \Delta V &= \sum_{(k) \in \Pi} \sum_{(l) \in V^*} b_{(k)}^m f_{(l)-(k)} g_{(l)} \Delta V = \sum_{(l) \in V^*} \left(\sum_{(k) \in \Pi} b_{(k)}^m f_{(l)-(k)} \right) g_{(l)} \Delta V = \\ &= c_m \sum_{(l) \in V^*} (d_m^- f)_{(l)} g_{(l)} \Delta V = c_m \sum_{(l) \in \bar{V}} (d_m^- f)_{(l)} g_{(l)} \Delta V \end{aligned}$$

Последнее равенство с точностью до обозначения мультииндекса совпадает с (3.6),

что и требовалось доказать.

Изменение множеств суммирования в процессе преобразований корректно, если учесть, что $f_{(j)} = g_{(j)} = 0$ при $(j) \notin \bar{V}$.

Равенства (2.6) допускают другую интерпретацию.

Определим скалярное произведение сеточных функций f и g как

$$(f, g) = \sum_{(j) \in \bar{V}} f_{(j)} g_{(j)} \Delta V \quad ,$$

тогда равенства (2.6) можно записать в виде

$$(f, d_m^+ g) = (c_m d_m^- f, g) \quad (2.7)$$

Теорема может быть сформулирована таким образом:

Оператор $c_m d_m^-$ является сопряженным к оператору d_m^+ .

Рассмотрим применение формул (2.6) к преобразованию вариационно-разностных схем в конечно-разностный вид.

Пусть $u = (u_1, \dots, u_m)$ - векторная функция в R^n , $p_{jk} = \frac{\mathcal{I} u_j}{\mathcal{I} X^k}$,

$$W = \int_V F(u_1, \dots, u_m, p_{11}, \dots, p_{mm}) dV \quad (2.8)$$

- функционал. В вариационном уравнении

$$dW = \int_V \sum_{j=1}^m \left[\frac{\mathcal{I} F}{\mathcal{I} u_j} du_j + \sum_{k=1}^m \frac{\mathcal{I} F}{\mathcal{I} P_{jk}} d \left(\frac{\mathcal{I} u_j}{\mathcal{I} X^k} \right) \right] dV = 0 \quad (2.9)$$

заменяем интеграл конечной суммой:

$$\sum_{(l) \in \bar{V}} \left\{ \sum_{j=1}^m \left[\frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} u_j} d(d_0^+ u_j)_{(l)} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} P_{jk}} \right)_{(l)} d(d_k^+ u_j)_{(l)} \right] \right\} \Delta V = 0, \quad (2.10)$$

где $f(u_1, \dots, u_m, p_{11}, \dots, p_{mm})$ - сеточная функция, аппроксимирующая F . Применяя к (2.10)

теорему, получим для внутренних точек сеточной области систему уравнений

(разностный аналог уравнений Эйлера вариационной задачи)

$$d_0^- f_{j_0} - \sum_{k=1}^m d_k^- f_{jk} = 0, \quad (j = 1, \mathbf{K}, m) \quad (j = 1, \mathbf{K}, m). \quad (2.11)$$

Здесь $f_{j_0} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} u_j$, $f_{jk} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} p_{jk}$.

Под внутренними точками сеточной области будем понимать множество $\bar{V} \setminus \{(j) \pm (k) | (k) \in \mathcal{I}, (j) \in Z^n \setminus \bar{V}\}$. Таким образом, установлено важное

Следствие из теоремы

Вариационно-разностное уравнение (2.10) эквивалентно разностной схеме (2.11).

Полученный результат (теорема и ее следствие) фактически является сеточным аналогом приведения вариационной задачи к системе дифференциальных уравнений Эйлера. Его основное содержание - эквивалентность вариационно-разностной и конечно-разностной формулировок задачи.

Рассмотрим случай квадратичного функционала с постоянными коэффициентами, когда подынтегральная функция в (2.8) имеет вид

$$F(u_1, \mathbf{K}, u_m, p_{11}, \mathbf{K}, p_{mm}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \left(C_{00}^{ij} u_i u_j + \sum_{k=1}^n C_{0k}^{ij} u_i p_{jk} + \sum_{k,l=1}^n C_{kl}^{ij} p_{ik} p_{jl} \right) \quad (2.12)$$

В этом случае сеточные функции $f_{j0} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} u_j$, $f_{jk} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} p_{jk}$ являются линейными:

$$f_{jk} = \sum_{r=0}^n \sum_{s=1}^m C_{jk}^{rs} d_r^+ u_s \quad (j=1, \mathbf{K}, m; k=0, \mathbf{K}, n)$$

и система сеточных уравнений (2.11) принимает вид

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=1}^m \left[C_{j0}^{rs} d_r^+ d_0^- u_s - \sum_{k=1}^n C_{jk}^{rs} d_r^+ d_k^- u_s \right] = 0 \quad (j=1, \mathbf{K}, m) \quad (2.13)$$

Примем для попарных суперпозиций сеточных операторов d_m^+ , d_m^- обозначения:

$$D_{jk} = d_j^+ d_k^- \quad (j, k = 0, \dots, n). \quad (2.14)$$

Операторы (2.14) аппроксимируют тождественный оператор I и дифференциальные операторы $\mathcal{I} / \mathcal{I} X^j$, $\mathcal{I}^2 / \mathcal{I} X^j \mathcal{I} X^k$:

$$D_{00} \approx I; \left\{ D_{j0}, D_{0j} \approx \frac{\partial}{\partial X^j} \right\}, \left\{ D_{jk}, D_{kj} \approx \frac{\partial^2}{\partial X^j \partial X^k} \right\}, \text{ при этом каждому}$$

дифференциальному оператору вида $\partial / \partial X^j$ и $\partial^2 / \partial X^j \partial X^k$, ($j \neq k$) соответствуют по

два различных оператора (2.14), а тождественному оператору и операторам $\mathcal{I}^2 / (\mathcal{I} X^j)^2$ - по одному. С учетом обозначений (2.14) в случае квадратичного функционала разностная схема (2.11) принимает вид:

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=1}^m \left[C_{j0}^{rs} D_{r0} u_s - \sum_{k=1}^n C_{jk}^{rs} D_{rk} u_s \right] = 0, \quad (j=1, \mathbf{K}, m) \quad (2.15)$$

При выводе систем сеточных уравнений (2.11), (2.15) неявно предполагалось, что в каждой ячейке основной сетки (n -мерном параллелепипеде) находится ровно одна

ячейка вариационно-разностной сетки (это соответствует случаю четырехугольных ячеек в R^2 и не соответствует случаю треугольных, когда каждый параллелограмм разбивается на два треугольника). Предположим, что каждая элементарная ячейка сетки (3.1) разбита на p n -мерных многогранников с вершинами в узлах элементарной ячейки. Каждому многограннику соответствует свой шаблон и система операторов $d_{q,l}^+$ ($q=0,\dots,n; l=1,\dots,p$). Пусть объемы многогранников равны $g_l \Delta V$ ($l=1,\mathbf{K},p$). Тогда система уравнений (2.11) примет вид

$$\sum_{l=1}^p g_l d_{0,l}^- f_{j0l} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p g_l d_{k,l}^- f_{jkl} = 0 \quad (2.16)$$

(здесь $f_{j0l} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} u_j$, $f_{jkl} = \mathcal{I} f / \mathcal{I} p_{jk}$ соответственно для ячейки l -го типа). Система (2.15) примет следующий вид

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=1}^m \left[C_{j0}^{rs} D_{ro}^* u_s - \sum_{k=1}^n C_{jk}^{rs} D_{rk}^* u_s \right] = 0, \quad (j=1,\mathbf{K},m) \quad (2.17)$$

где

$$D_{jk}^* = \sum_{l=1}^p g_l d_{j,l}^+ d_{k,l}^- \quad (2.18)$$

Конечно-разностное представление схем МКЭ

Данный подход допускает обобщение на схемы МКЭ. Рассмотрим его для наиболее типичного случая метода конечного элемента, основанного на вариационной постановке задачи минимизации функционала в виде интеграла.

Метод применим к численным схемам МКЭ, основанным на вариационной постановке задачи, при следующих ограничениях: 1) сетка регулярная; 2) сетка равномерная; 3) подынтегральная функция в функционале за исключением своей линейной части явно не зависит от координат. При этом только первое ограничение является принципиальным для применения данного метода. Два других приняты с целью уменьшения технических трудностей при преобразованиях и получения сеточных уравнений с постоянными коэффициентами, что является обычным для теории разностных схем. Изложение метода в общем n -мерном случае сопряжено с определенными техническими трудностями, поэтому ограничимся двумерным случаем, обобщение которого на общий случай очевидно.

Пусть в $R^2 = \{x\} = \{(x^1, x^2)\}$ задана равномерная параллелограммная основная сетка вида (2.1) с координатами узлов

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{bmatrix} = B_h \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \quad i, j \in Z, \quad (2.19)$$

где B_h - вещественная невырожденная матрица 2×2 , зависящая от параметра $h=(h_1, h_2)$. Для большей определенности уточним понятие регулярной и равномерной конечно-элементной сетки.

Определение 1. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем *равномерной*, если элементы и их узлы расположены двоякопериодически с периодом, задаваемым некоторой сеткой вида (2.19).

Определение 2. Конечноэлементную сетку в R^2 назовем *регулярной*, если существует взаимнооднозначное непрерывное отображение, переводящее ее в равномерную.

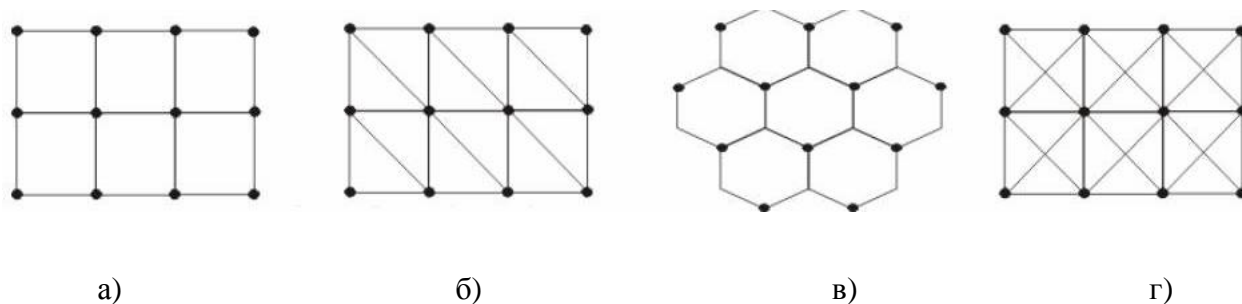


Рис. 2.1

Примеры равномерных сеток приведены на рис.2.1, где жирными точками выделены узлы основной сетки. Под (i, j) -й ячейкой основной сетки будем понимать параллелограмм с вершинами в узлах $x_{ij}, x_{i+1j}, x_{ij+1}, x_{i+1j+1}$. В некоторых случаях (например, рис. 1в) под ячейкой удобнее понимать фигуру, равную по площади указанному параллелограмму. Согласно определению и примерам, ячейка может содержать один или несколько конечных элементов. Для узлов конечных элементов, совпадающих с узлами основной сетки, будем использовать целые индексы, для остальных - дробные.

Пусть в R^2 определена вещественная функция $f(x^1, x^2) \in C^4(R^2)$. Шаблоном \mathcal{M} назовем некоторое подмножество множества целочисленных векторов $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Значение функции f в узлах сетки $f(x_{ij})$ обозначим f_{ij} . Определим разностные операторы, аппроксимирующие функцию и ее производные на сетке (2.19).

Количество разностных операторов возьмем равным числу узлов шаблона. В зависимости от числа узлов возможны следующие ситуации:

а) 4 узла, 4 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ , d_3^+ , где

$$\begin{aligned} d_0^+ f &= f + O(h), & d_1^+ f &= \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} x^1} + O(h), & d_2^+ f &= \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} x^2} + O(h), \\ d_3^+ f &= a \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I} (x^1)^2} + b \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I} x^1 \mathcal{I} x^2} + c \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I} (x^2)^2} + O(h) \end{aligned} \quad (2.20)$$

(в последнем операторе коэффициенты a, b, c зависят от формы ячейки (или матрицы B_h), см. пример ниже).

б) 3 узла, 3 оператора d_0^+ , d_1^+ , d_2^+ - так же, как для 4 узлов, но без оператора d_3^+

с) 2 узла, 2 оператора d_0^+ , d_1^+

$$d_0^+ f = f + O(h), \quad d_1^+ f = a \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} x^1} + b \frac{\mathcal{I} f}{\mathcal{I} x^2} + O(h)$$

(2.21)

(коэффициенты a, b зависят от матрицы B_h , по сути - это производная по направлению, проходящему через два узла ячейки)

д) 1 узел, 1 оператор $d_0^+ f = f + O(h)$

Операторы определяются общей формулой (3.2) или эквивалентной формулой

$$d_m^+ = \sum_{(k,l) \in \Pi} b_{kl}^m T_{kl}, \quad m = 0,1,2,3, \quad (2.22)$$

где T_{kl} - оператор сдвига: $T_{kl} f_{ij} = f_{i+k, j+l}$, b_{kl}^m - коэффициенты.

Для каждого оператора d_m^+ определим двойственный ему оператор d_m^- посредством формул (2.4) или

$$d_m^- = \sum_{(k,l) \in \Pi} b_{kl}^m T_{-k-l}, \quad m = 0,1,2,3, \quad (2.23)$$

где $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$.

Двойственные операторы аппроксимируют те же величины, что и исходные. Знак в формулах (2.23) определяется по правилу: плюс для операторов, аппроксимирующих функцию и производные четного порядка, и минус - для производных нечетного порядка.

Примеры:

1. Пусть $B_h = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}$,

вид ячейки приведен на рис. 2.2 а. Приведем разностные операторы для шаблона из 4 узлов:

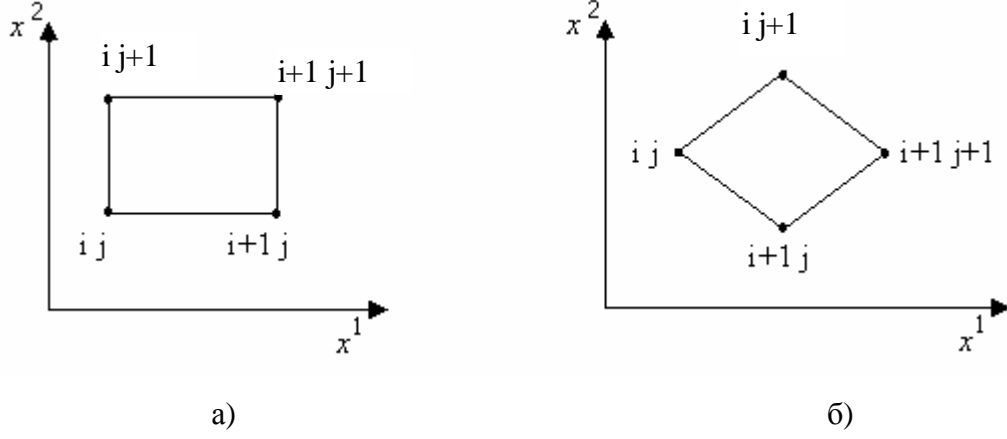


Рис. 2.2

$$\begin{aligned}
 d_0^+ f &= \frac{1}{4} (f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i+1j+1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_1^+ f &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{ij+1}) = \frac{\partial f}{\partial x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_2^+ f &= \frac{1}{2h_2} (f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{ij} - f_{i+1j}) = \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_3^+ f &= \frac{1}{h_1 h_2} (f_{ij} + f_{i+1j+1} - f_{i+1j} - f_{ij+1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad (2.24) \\
 d_0^- f &= \frac{1}{4} (f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_1^- f &= \frac{1}{2h_1} (f_{ij} + f_{ij-1} - f_{i-1j} - f_{i-1j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_2^- f &= \frac{1}{2h_2} (f_{ij} + f_{i-1j} - f_{ij-1} - f_{i-1j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
 d_3^- f &= \frac{1}{h_1 h_2} (f_{ij} + f_{i-1j-1} - f_{i-1j} - f_{ij-1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} + O(h_1^2 + h_2^2).
 \end{aligned}$$

2. Пусть $B_h = \begin{bmatrix} h_1 & -h_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$,

вид ячейки приведен на рис. 2.2 б. Приведем разностные операторы для шаблона из 4 узлов:

$$\begin{aligned}
d_0^+ f &= \frac{1}{4}(f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i+1j+1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_1^+ f &= \frac{1}{2h_1}(f_{i+1j+1} - f_{ij}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad d_2^+ f = \frac{1}{2h_2}(f_{ij+1} - f_{i+1j}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_3^+ f &= \frac{1}{h_1 h_2}(f_{ij} + f_{i+1j+1} - f_{i+1j} - f_{ij+1}) = \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}(x^1)^2} - \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}(x^2)^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_0^- f &= \frac{1}{4}(f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i-1j-1}) = f + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_1^- f &= \frac{1}{2h_1}(f_{ij} - f_{i-1j-1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^1} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad d_2^- f = \frac{1}{2h_2}(f_{i-1j} - f_{ij-1}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \\
d_3^- f &= \frac{1}{h_1 h_2}(f_{ij} + f_{i-1j-1} - f_{i-1j} - f_{ij-1}) = \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}(x^1)^2} - \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}(x^2)^2} + O(h_1^2 + h_2^2).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Рассмотрим наиболее распространенный подход к построению схем МКЭ.

Пусть задан функционал

$$W = \int_{\Omega} F(u, p_1, p_2) d\Omega, \tag{2.26}$$

где u — неизвестная функция (вообще говоря, векторная), удовлетворяющая заданным

граничным условиям; $p_1 = \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}x^1}$, $p_2 = \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}x^2}$.

Требуется найти функцию u , доставляющую функционалу W экстремальное или стационарное значение.

Решение указанной задачи удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{\mathcal{I}F}{\mathcal{I}u} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x^1} \frac{\mathcal{I}F}{\mathcal{I}p_1} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x^2} \frac{\mathcal{I}F}{\mathcal{I}p_2} = 0 \tag{2.27}$$

и граничным условиям.

Построение численной схемы МКЭ сводится к разбиению области на конечные элементы (построению конечноэлементной сетки) и выбору базисных функций, после чего задача МКЭ определена. Далее она известными методами [39,74] редуцируется к системе алгебраических уравнений.

Будем считать, что задача МКЭ определена, то есть задан функционал (2.26), построена конечно-элементная сетка и выбраны базисные функции. Рассмотрим преобразование схемы МКЭ к конечно-разностному виду для ряда случаев по возрастанию сложности.

Схемы, содержащие только узлы основной сетки

Будем считать, что каждая ячейка основной сетки разбита на r конечных элементов. Тогда функционал (2.26) может быть записан в виде

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \int_{E_{ijk}} F(u, p_1, p_2) d\Omega, \quad (2.28)$$

где E_{ijk} - k -й элемент в (i, j) -й ячейке основной сетки. Полагая, что элемент k -го типа содержит m_k узлов, имеет шаблон $Ш_k$, построим для него систему разностных операторов $d_0^{k+}, \mathbf{K}, d_{m_k-1}^{k+}$. Неизвестная функция u в элементе задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} C_l j_{lk}, \quad (2.29)$$

где j_{lk} ($l = 0, \mathbf{K}, m_k - 1$)- базисные функции элемента k -го типа. Коэффициенты C_l могут быть выражены через значения функции u в узлах элемента, а далее - через разностные операторы $d_0^{k+}, \mathbf{K}, d_{m_k-1}^{k+}$. В результате функция u в элементе E_{ijk} может быть представлена в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} (d_l^{k+} u)_{ij} y_{lk}, \quad (2.30)$$

где y_{lk} - некоторые линейные комбинации функций j_{lk} .

После подстановки (2.30) в (2.28) и точного или приближенного интегрирования по элементам получим

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \Phi_k(\mathbf{x}_{ij0}, \mathbf{K}, \mathbf{x}_{ijm_k-1}). \quad (2.31)$$

где $\mathbf{x}_{ijl} = (d_l^+ u)_{ij}$.

Запишем вариацию функционала (2.31):

$$dW_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r (f_{k0} d(d_0^{k+} u) + \mathbf{K} + f_{km_k-1} d(d_{m_k-1}^{k+} u))_{ij}. \quad (2.32)$$

Здесь используются обозначения

$$(f_{kl})_{ij} = \frac{\int \Phi_k}{\int x_{ij}}$$

Подставляя (2.32) в дискретное вариационное уравнение

$$dW_h = 0$$

и применяя разностный аналог формул интегрирования по частям, получим

$$\sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-1} f_{kl} du_l = 0.$$

Так как du_l - произвольная сеточная функция, последнее равенство удовлетворяется при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-1} f_{kl} = 0 \quad (2.33)$$

во всех узлах разностной сетки. Уравнение (2.33) представляет из себя разностную схему, записанную в стандартном виде - в виде равенства сеточного оператора нулю. Таким образом, получен окончательный вид разностной схемы, эквивалентной задаче метода конечного элемента. При этом схема (2.33) аналогична по форме дифференциальному уравнению Эйлера (2.27).

Эрмитовы элементы, содержащие только узлы основной сетки

Рассмотрим схемы МКЭ, для которых сохраняется непрерывность первых частных производных на границах элементов (элементы с более высокой степенью гладкости могут быть рассмотрены аналогично). Данный случай отличается от предыдущего необходимостью введения дополнительных сеточных функций - значений первых частных производных в узлах сетки. Общая схема вывода при этом сохраняется. Функционал (2.26) записывается в виде (2.28). Неизвестная функция в элементе k -го типа задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{3m_k-1} C_j j_{lk}, \quad (2.34)$$

а после преобразования – в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_k-1} \left[(d_l^{k+} u)_{ij} y_{lk0} + (d_l^{k+} p_1)_{ij} y_{lk1} + (d_l^{k+} p_2)_{ij} y_{lk2} \right], \quad (2.35)$$

где y_{lkm} - линейные комбинации функций j_{lk} . После подстановки (2.35) в (2.28) и интегрирования получим формулу, аналогичную (2.31)

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \Phi_k(x_{ij0}, \mathbf{K}, x_{ijm_k-1}, h_{ij0}, \mathbf{K}, h_{ijm_k-1}, V_{ij0}, \mathbf{K}, V_{ijm_k-1}), \quad (2.36)$$

где $x_{ijl} = (d_l^+ u)_{ij}$, $h_{ijl} = (d_l^+ p_1)_{ij}$, $V_{ijl} = (d_l^+ p_2)_{ij}$. Записывая дискретное вариационное уравнение $dW_h = 0$ для функционала (3.36) и осуществляя разностное интегрирование по частям, получим окончательный вид разностной схемы

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-} f_{kl} = 0, \quad (2.37)$$

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-} g_{1kl} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-} g_{2kl} = 0,$$

(здесь $f_{kl} = \frac{\int \Phi_k}{\int x_{ijl}}$, $g_{1kl} = \frac{\int \Phi_k}{\int h_{ijl}}$, $g_{2kl} = \frac{\int \Phi_k}{\int V_{ijl}}$).

Схемы, содержащие узлы, не совпадающие с основной сеткой

Каждый узел элемента вида $x_{i+a} y_{j+b}$ (где $0 < a < 1$, $0 < b < 1$), не совпадающий с основной сеткой, порождает параллельную сетку, сдвинутую относительно основной на некоторый начальный вектор. Пусть имеется $s-1$ такая дополнительная сетка, порожденная узлами

$$x_{i+a_2} y_{j+b_2}; \mathbf{K}; x_{i+a_s} y_{j+b_s}$$

Для значений функции u в узлах дополнительных сеток введем обозначения

$$u(x_{i+a_k} y_{j+b_k}) = u_{ij}^k \quad (k = 2, \mathbf{K}, s). \quad (2.38)$$

Функцию $u_{ij} = u(x_{ij})$ переобозначим в u_{ij}^1 . Таким образом, на основной сетке определены s сеточных функций u^1, \mathbf{K}, u^s .

Предположим, что каждая ячейка разбита на r элементов, а k -ый элемент содержит $m_{k1} + \mathbf{K} + m_{ks}$ узлов (где m_{ki} - число узлов i -й сетки, содержащейся в k -м элементе. Соответственно, для k -го элемента определим шаблоны $\mathcal{M}_{k1}, \mathbf{K}, \mathcal{M}_{ks}$ и разностные

операторы $d_0^{k1+}, \mathbf{K}, d_{m_{k_1}-1}^{k1+}, \mathbf{K}, d_0^{ks+}, \mathbf{K}, d_{m_{k_s}-1}^{ks+}$. Неизвестная функция u в элементе E_{ijk} задается в виде

$$u = \sum_{l=0}^{m_{k_1} + \mathbf{K} + m_{k_s}} C_l j_{lk}, \quad (2.39)$$

а после того, как коэффициенты C_l будут выражены через разностные операторы, преобразуется к виду

$$u = \sum_{n=1}^s \sum_{l=0}^{m_{k_n}-1} (d_l^{kn+} u)_{ij} y_{nlk}, \quad (2.40)$$

где y_{nlk} - линейные комбинации функций j_{lk} . После подстановки (2.40) в (2.28) и интегрирования получим:

$$W_h = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \sum_{k=1}^r \Phi_k(x_{ij10}, \mathbf{K}, x_{ijm_{k_s}-1}). \quad (2.41)$$

где $x_{ijpl} = (d_l^{kp+} u)_{ij}$.

Далее, пропуская промежуточные выкладки, запишем разностную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_{k_1}-1} c_l d_l^{k1-} f_{1kl} = 0, \\ \mathbf{KKKKKKKKKK}, \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_{k_s}-1} c_l d_l^{ks-} f_{skl} = 0. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Здесь $f_{pkl} = \frac{\int \Phi_k}{\int x_{ijpl}}$.

Случай эрмитовых элементов, содержащих узлы вне основной сетки, может быть рассмотрен аналогично.

Аппроксимация правых частей

Предположим наличие в подынтегральной функции функционала (2.26) слагаемых вида $uQ(X)$ (аналогично $p_1Q(X)$ или $p_2Q(X)$), где $Q(X)$ - произвольная интегрируемая функция. Если функционал имеет смысл и размерность энергии, интеграл от слагаемых такого вида соответствует потенциальной энергии в поле внешних сил. Рассмотрим преобразование таких членов для простейшего случая конечно-элементных схем (2.33);

при этом ограничимся слагаемыми вида $uQ(X)$. Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично. Обозначим интеграл

$$\int_{E_{ijk}} Q(X) j_{lk} d\Omega$$

(см.(2.29)) через Z_{ijkl} . Выразим коэффициенты C_l при базисных функциях через значения разностных операторов:

$$C_l = \sum_{n=0}^{m_k-1} m_{nl} d_n^{k+} u.$$

Тогда получим равенство

$$\int_{E_{ijk}} u Q(X) d\Omega = \sum_{l,n=0}^{m_k-1} m_{nl} (d_n^{k+} u)_{ij} Z_{ijkl},$$

а после варьирования и применения разностного интегрирования по частям получим слагаемое в разностной схеме, аппроксимирующее внешние силы. Перенос его в правую часть, получим в итоге разностную схему (2.33) в виде

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{m_k-1} c_l d_l^{k-} f_{kl} = \Psi, \quad (2.43)$$

где Ψ - сеточная функция, определяемая равенством

$$\Psi_{ij} = - \sum_{k=1}^r \sum_{l,n=0}^{m_k-1} c_n m_{nl} (d_l^{k-} Z_{ijkl}). \quad (2.44)$$

При этом левая часть уравнения (2.43) получается из функционала (2.26) без линейных членов в подынтегральном выражении.

В МКЭ часто используется другой подход, когда внешние силы аппроксимируют на взаимной сетке, то есть относятся непосредственно к узлам конечных элементов. Так поступают, в частности, с силами инерции, при численном решении динамических задач. В последнем случае внешние силы просто добавляются в правые части соответствующих уравнений.

Примеры преобразований схем МКЭ в конечно-разностные

Рассмотрим применение описанного метода к преобразованию ряда схем МКЭ. Во избежание чересчур громоздких выкладок рассмотрим функционалы простого вида: для двумерной задачи

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla u}{\nabla x} \right)^2 + \left(\frac{\nabla u}{\nabla y} \right)^2 dx dy, \quad (2.45)$$

для одномерной задачи

$$W = \int_a^b u^2 + \left(\frac{\nabla u}{\nabla x} \right)^2 dx, \quad (2.46)$$

а в качестве примера нелинейной задачи - одномерную задачу нелинейной теории упругости. Рассмотрим три примера - сирендипов четырехугольный восьмиузловой элемент (рис.2.3), эрмитов одномерный (функционал (2.46)) и линейный одномерный для задачи нелинейной теории упругости.

Четырехугольный сирендипов восьмиузловой конечный элемент

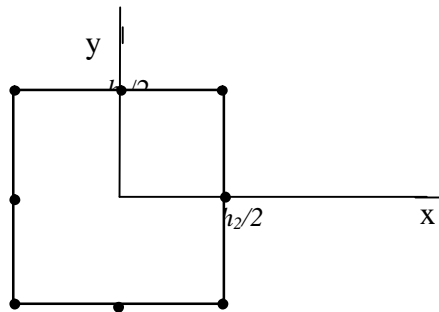


Рис. 2.3

Сетку будем считать ортогональной с диагональной матрицей B_n . Элемент представлен на рис. 2.3, (x, y) - местная система координат, в которой узлы основной сетки имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (-h_1/2, -h_2/2); & x_{i+1j} &= (h_1/2, -h_2/2); \\ x_{ij+1} &= (-h_1/2, h_2/2); & x_{i+1j+1} &= (h_1/2, h_2/2). \end{aligned}$$

Функцию u в элементе представим в виде многочлена

$$u = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6x^2y + c_7xy^2. \quad (2.47)$$

Имеем сетки 3 типов: 1) основную; 2) сетку, порождаемую узлом $x_{i+1/2j}$; и 3) сетку, порождаемую узлом $x_{ij+1/2}$. Обозначим: $u_{i+1/2j} = \mathbf{u}_{ij}$, $u_{ij+1/2} = \mathbf{w}_{ij}$. Для функции в узлах основной сетки сохраним старое обозначение u_{ij} . Имеем три шаблона: \mathcal{I}_I -

четырёхузловой, $III_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$ и $III_3 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ - двухузловые. Определим систему разностных операторов: $d_0^{1+}, d_1^{1+}, d_2^{1+}, d_3^{1+}$ совпадают с операторами (2.24);

$$\begin{aligned} (d_0^{2+} f)_{ij} &= \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ij+1}), (d_1^{2+} f)_{ij} = \frac{1}{h_1}(f_{ij+1} - f_{ij}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}y} + O(h), \\ (d_0^{3+} f)_{ij} &= \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}), (d_1^{3+} f)_{ij} = \frac{1}{h_1}(f_{i+1j} - f_{ij}) = \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}x} + O(h). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Так как ячейка разностной сетки содержит единственный элемент, первый верхний индекс в разностных операторах, соответствующий номеру элемента, писать не будем.

Подставляя значения функции u (2.47) в выражения (2.24), (2.48), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} d_0^{1+} u &= c_0 + \frac{h_1^2}{4} c_4 + \frac{h_2^2}{4} c_5, & d_0^{2+} u &= c_0 + \frac{h_2^2}{4} c_5, \\ d_1^{1+} u &= c_1 + \frac{h_2^2}{4} c_7, & d_1^{2+} u &= c_2, \\ d_2^{1+} u &= c_2 + \frac{h_1^2}{4} c_6, & d_0^{3+} w &= c_0 + \frac{h_1^2}{4} c_4, \\ d_3^{1+} u &= c_3, & d_1^{3+} w &= c_1. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим выражения неопределенных коэффициентов через разностные операторы:

$$\begin{aligned} c_0 &= -d_0^{1+} u + d_0^{2+} u + d_0^{3+} w, & c_1 &= d_1^{3+} w, & c_2 &= d_1^{2+} u, & c_3 &= d_3^{1+} u, & c_4 &= \frac{4}{h_1^2} (d_0^{1+} u - d_0^{2+} u), \\ c_5 &= \frac{4}{h_2^2} (d_0^{1+} u - d_0^{3+} w), & c_6 &= \frac{4}{h_1^2} (d_2^{1+} u - d_1^{2+} u), & c_7 &= \frac{4}{h_2^2} (d_1^{1+} u - d_1^{3+} w). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Разобьем область W на конечные элементы и подставим функцию u в виде (2.47) в функционал (3.45). После интегрирования получим:

$$\begin{aligned} W_h &= \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{E_{ij}} \left[c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \left(\frac{h_2^2}{12} + \frac{h_1^2}{12} \right) + c_4^2 \frac{h_1^2}{3} + c_5^2 \frac{h_2^2}{3} + c_6^2 \left(\frac{h_1^2 h_2^2}{36} + \frac{h_1^4}{80} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_7^2 \left(\frac{h_1^2 h_2^2}{36} + \frac{h_2^4}{80} \right) + c_1 c_7 \frac{h_2^2}{6} + c_2 c_6 \frac{h_1^2}{6} \right] \end{aligned}$$

и вариационное уравнение

$$dW_h = h_1 h_2 \sum_{E_{ij}} \left[c_1 dc_1 + c_2 dc_2 + \left(\frac{h_2^2}{12} + \frac{h_1^2}{12} \right) c_3 dc_3 + \frac{h_1^2}{3} c_4 dc_4 + \frac{h_2^2}{3} c_5 dc_5 + \right. \quad (3.50)$$

$$\left. + \left(\frac{h_1^2 h_2^2}{36} + \frac{h_1^4}{80} \right) c_6 dc_6 + \left(\frac{h_1^2 h_2^2}{36} + \frac{h_2^4}{80} \right) c_7 dc_7 + \frac{h_2^2}{12} (c_1 dc_7 + c_7 dc_1) + \frac{h_1^2}{12} (c_2 dc_6 + c_6 dc_2) \right] = 0.$$

Вариации коэффициентов выразим через разностные операторы с помощью формул (2.49), в которых функции заменим соответствующими вариациями, например

$$dc_7 = \frac{4}{h_2^2} (d_1^{1+} du - d_1^{3+} dw).$$

Далее остается применить к (2.50) формулы разностного интегрирования по частям и приравнять нулю коэффициенты при независимых вариациях функций. Опуская громоздкие, но очевидные преобразования, получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_1^2}{12} + \frac{h_2^2}{12} \right) d_3^{1-} c_3 + \frac{4}{3} d_0^{1-} c_4 + \frac{4}{3} d_0^{1-} c_5 - \left(\frac{h_1^2}{20} + \frac{h_2^2}{9} \right) d_2^{1-} c_6 - \left(\frac{h_1^2}{9} + \frac{h_2^2}{20} \right) d_1^{1-} c_7 - \\ & - \frac{1}{3} d_1^{1-} c_1 - \frac{1}{3} d_2^{1-} c_2 = 0, \\ & - d_1^{2-} c_2 - \frac{4}{3} d_0^{2-} c_4 + \left(\frac{h_1^2}{20} + \frac{h_2^2}{9} \right) d_1^{2-} c_6 + \frac{1}{3} d_1^{2-} c_2 - \frac{h_1^2}{12} d_1^{2-} c_6 = 0, \\ & - d_1^{3-} c_1 - \frac{4}{3} d_0^{3-} c_5 + \left(\frac{h_1^2}{9} + \frac{h_2^2}{20} \right) d_1^{3-} c_7 + \frac{1}{3} d_1^{3-} c_1 - \frac{h_2^2}{12} d_1^{3-} c_7 = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Подставляя вместо c_i их выражения (2.49), можно записать окончательный вид сеточных уравнений.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_1^2}{12} + \frac{h_2^2}{12} \right) d_3^{1-} d_3^{1+} u + \frac{16}{3h_1^2} (d_0^{1-} d_0^{1+} u - d_0^{1-} d_0^{2+} u) + \frac{16}{3h_2^2} (d_0^{1-} d_0^{1+} u - d_0^{1-} d_0^{3+} w) - \left(\frac{1}{5} + \frac{5h_2^2}{9h_1^2} \right) * \\ & * (d_2^{1-} d_2^{1+} u - d_2^{1-} d_1^{2+} u) - \left(\frac{5h_2^2}{9h_1^2} + \frac{1}{5} \right) (d_1^{1-} d_1^{1+} u - d_1^{1-} d_1^{3+} w) - \frac{1}{3} d_1^{1-} d_1^{3+} w - \frac{1}{3} d_2^{1-} d_1^{2+} u = 0, \\ & - d_1^{2-} d_1^{2+} u - \frac{16}{3h_1^2} (d_0^{2-} d_0^{1+} u - d_0^{2-} d_0^{2+} u) + \left(\frac{1}{5} + \frac{5h_2^2}{9h_1^2} \right) (d_1^{2-} d_2^{1+} u - d_1^{2-} d_1^{2+} u) + \\ & + \frac{1}{3} d_1^{2-} d_1^{2+} u - \frac{1}{3} (d_1^{2-} d_2^{1+} u - d_1^{2-} d_1^{2+} u) = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
& -d_1^{3-}d_1^{3+}w - \frac{16}{3h_2^2} \left(d_1^{3-}d_0^{1+}u - d_1^{3-}d_1^{3+}w \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{5h_2^2}{9h_1^2} \right) \left(d_1^{3-}d_1^{1+}u - d_1^{3-}d_1^{3+}w \right) + \\
& + \frac{1}{3}d_1^{3-}d_1^{3+}w - \frac{1}{3} \left(d_1^{3-}d_1^{1+}u - d_1^{3-}d_1^{3+}w \right) = 0.
\end{aligned}$$

При необходимости можно заменить разностные операторы их выражениями (2.24), (2.48).

Одномерный эрмитов элемент

Рассмотрим задачу минимизации функционала (2.46). Сетку будем считать равномерной с шагом h . В узлах сетки зададим значения функции u_i и производной p_i . Выберем в элементе местную систему координат с началом в середине элемента. Функцию в элементе представим в виде

$$u = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3. \quad (2.53)$$

Определим два сеточных оператора

$$\left(d_0^+ f \right)_i = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \quad \left(d_1^+ f \right)_i = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i). \quad (2.54)$$

Подставляя значения функций u и p под знак разностных операторов, получим систему уравнений

$$d_0^+ u = c_0 + c_2 \frac{h^2}{4}, \quad d_1^+ u = c_1 + c_3 \frac{h^2}{4}, \quad d_0^+ p = c_1 + c_3 \frac{3h^2}{4}, \quad d_1^+ p = 2c_2,$$

из которой выразим коэффициенты $c_i (i=1,2,3)$:

$$\begin{aligned}
c_0 &= d_0^+ u - \frac{h^2}{8} d_1^+ p, \quad c_1 = \frac{3}{2} d_1^+ u - \frac{1}{2} d_0^+ p, \\
c_2 &= \frac{1}{2} d_1^+ p, \quad c_3 = \frac{2}{h^2} \left(d_0^+ p - d_1^+ u \right).
\end{aligned} \quad (2.55)$$

После подстановки функции u в функционал (2.46) и интегрирования получим

$$W_h = h \sum_{\Omega_h} \left[c_0^2 + c_1^2 + \left(c_1^2 + 4c_2^2 + 2c_0c_2 + 6c_1c_3 \right) \frac{h^2}{12} + \left(c_2^2 + 2c_1c_3 + 9c_3^2 \right) \frac{h^4}{80} + c_3^2 \frac{h^6}{448} \right],$$

вариационное уравнение

$$dW_h = h \sum_{\Omega_h} \left[2c_0 dc_0 + 2c_1 dc_1 + \left(c_1 dc_1 + 4c_2 dc_2 + c_0 dc_2 + c_2 dc_0 + 3c_1 dc_3 + 3c_3 dc_1 \right) \frac{h^2}{6} + \right. \\ \left. + \left(c_2 dc_2 + c_1 dc_3 + c_3 dc_1 + 9c_3 dc_3 \right) \frac{h^4}{40} + c_3 dc_3 \frac{h^6}{224} \right] = 0.$$

Выражая коэффициенты через разностные операторы и проводя интегрирование по частям, в итоге получим разностную схему

$$2d_0^- d_0^+ u - \frac{h^2}{6} d_0^- d_1^+ p - \left(\frac{12}{5} + \frac{89}{280} h^2 \right) d_1^- d_1^+ u + \left(\frac{2}{5} + \frac{33}{280} h^2 \right) d_1^- d_0^+ p = 0, \\ \frac{h^2}{6} d_1^- d_0^+ u - \frac{h^4}{64} d_1^- d_1^+ p - \left(\frac{2}{5} + \frac{19}{280} h^2 \right) d_0^- d_1^+ u + \left(\frac{2}{5} - \frac{41}{840} h^2 \right) d_0^- d_0^+ p - \frac{h^2}{6} d_1^- d_1^+ p = 0. \quad (2.56)$$

Ее можно выразить через узловые значения функций u и p , учитывая, что

$$d_0^- d_0^+ f = \frac{1}{4} (f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}), \quad d_0^- d_1^+ f = d_1^- d_0^+ f = \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}), \\ d_1^- d_1^+ f = \frac{1}{h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}).$$

Пример нелинейной задачи

Рассмотренные выше задачи были линейными (исходные функционалы соответственно - квадратичными). Однако применение данного метода не ограничивается линейным случаем. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу геометрически нелинейной теории упругости (равновесие стержня при одноосном сжатии под действием распределенной осевой силы). При этом воспользуемся нелинейным лагранжевым тензором деформации.

Функционал энергии зададим в виде

$$W = \int_0^l \frac{1}{2} s_{11} e_{11} - F u \, dx, \quad (2.57)$$

где s_{11} - осевое напряжение, e_{11} - деформация, F - внешняя сила.

Зададим s_{11} , e_{11} в виде

$$e_{11} = \frac{\mathcal{J}u}{\mathcal{J}x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{J}u}{\mathcal{J}x} \right)^2, \quad s_{11} = E e_{11},$$

где E - модуль Юнга. В итоге функционал (2.57) примет вид:

$$W = \frac{E}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}x} \right)^2 + \left(\frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}x} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}x} \right)^4 - \frac{2F}{E} u \, dx. \quad (2.58)$$

Для данной задачи рассмотрим схему линейного конечного элемента.

Разностные операторы в данной задаче те же, что и предыдущей;

$u = c_0 + c_1 x$, $c_0 = d_0^+ u$, $c_1 = d_1^+ u$, функционал после дискретизации принимает вид:

$$W_h = \frac{E}{2} \sum_{\Omega_h} \left[\left(d_1^+ u \right)^2 + \left(d_1^+ u \right)^3 + \frac{1}{4} \left(d_1^+ u \right)^4 - \frac{2F}{E} u \right] \quad (3.59)$$

(в данном случае внешняя сила F отнесена к узлам).

Запишем вариационное уравнение

$$dW_h = \frac{E}{2} \sum_{\Omega_h} \left[2d_1^+ u + 3 \left(d_1^+ u \right)^2 + \left(d_1^+ u \right)^3 \right] \left(d_1^+ d u \right) - \frac{2F}{E} d u = 0$$

и, пропуская выкладки, имеем окончательный вид разностной схемы

$$2d_1^- d_1^+ u + 3d_1^- \left(d_1^+ u \right)^2 + d_1^- \left(d_1^+ u \right)^3 + \frac{2F}{E} = 0 \quad (2.60)$$

или через узловые значения функций

$$\begin{aligned} & \frac{2}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{3}{h^3} \left[(u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2 \right] + \\ & + \frac{1}{h^4} \left[(u_{i+1} - u_i)^3 - (u_i - u_{i-1})^3 \right] + \frac{2F_i}{E} = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Примеры преобразования численных схем МКЭ теории пластин Тимошенко приводятся в четвертой главе.

Автоматическое построение конечно-разностного представления схем МКЭ.

Алгоритм преобразования и программная реализация.

Рассмотренный метод преобразования легко формализуется, следовательно, допускает реализацию на компьютере в виде системы аналитических вычислений в духе известных пакетов Maple и т.п.. Рассмотрим алгоритм преобразования для общего n -мерного случая.

В качестве входной информации должны задаваться:

1. Размерность задачи;
2. Число неизвестных функций;
3. Число элементов в ячейке;

4. Информация об элементе: число и расположение узлов, шаблоны на основной и дополнительной сетках, базисные функции, способ интегрирования (точное или приближенное), гладкость сопряжения на границе (лагранжев или эрмитов элемент);
5. Сетка (матрица B_h);
6. Разностные операторы (конкретный набор коэффициентов b_{kl} для каждого оператора);
7. Информация о функционале: вид подынтегральной функции $F(u, p_1, p_2)$.

Выходной информацией программы должна являться разностная схема, записанная в виде (2.33), либо с конкретной росписью операторов по узлам разностной сетки.

Алгоритм преобразования можно разделить на следующие основные этапы:

1. Задание входной информации
2. Преобразование функционала от вида (2.26) к виду (2.31) или аналогичному
3. Варьирование функционала
4. Разностное интегрирование по частям (применение формул (2.6))
5. Сборка уравнений вида (2.33).
6. Печать результатов.

Описанный алгоритм разработан и реализован для одномерных и двумерных схем МКЭ при весьма жестких ограничениях. Ограничены типы элементов, заданные в библиотеке (линейный одномерный, линейный треугольный, билинейный четырехугольный, 6-ти и 8-и узловые сирендиповы элементы). Эрмитовы элементы не рассматривались. Подынтегральная функция в функционале (2.26) считается однородной квадратичной функцией от u_i, p_{i1}, p_{i2} , то есть имеет вид:

$$F(u, p_1, p_2) = \sum_{i,j} C_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j,k} C_{ijk} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$$

и фактически задается массивом своих коэффициентов.

Элементы считаются прямоугольными со сторонами h_1 и h_2 , направленными вдоль координатных линий. Количество неизвестных функций ограничено пятью. Базисные функции считаются полиномами. Все преобразования за редким исключением ведутся со строковыми переменными.

Программа построена по модульному принципу и состоит из следующих основных модулей:

1. Модуль ввода информации. Содержит процедуры создания меню, ввода информации вручную или из файла и записи в файл.
2. Модуль выражения коэффициентов функции через разностные операторы. Фактически осуществляется решение системы линейных алгебраических уравнений, записанной в символьном виде. Число уравнений и неизвестных равно числу узлов элемента.
3. Модуль дифференцирования и перемножения полиномов.
4. Модуль интегрирования. Осуществляет аналитическое вычисление интегралов по элементу от функций вида $(x^1)^m \cdot (x^2)^n$.
5. Модуль варьирования. Осуществляет вычисление вариации функционала и интегрирование по частям. В этом же модуле готовые члены уравнения добавляются в результирующие строки уравнений.

В программе все преобразования производятся со строковыми переменными. Коэффициенты уравнений и имена переменных задаются в виде строк входной информации. Результат также печатается в виде строкового выражения вида «0=...» (см. примеры ниже). Если коэффициенты уравнений содержат числовые коэффициенты, то их сокращения с коэффициентами, получающимися в процессе формирования схемы МКЭ, не происходит. Задача символьных вычислений относится к компьютерной алгебре и выходит за рамки данной работы.

Результаты работы программы построения конечно-разностного представления схем МКЭ

Рассмотрим примеры, демонстрирующие работу программы автоматического преобразования двумерных схем МКЭ. Поскольку в строках нельзя использовать верхние и нижние индексы, для операторов использовались следующие обозначения:

$$d_{m,k}^+ = (dmk +), d_{m,k}^- = (dmk -).$$

Шаги сетки h_1 и h_2 обозначались соответственно как h и l . Неизвестные функции и коэффициенты при слагаемых функционала задавались пользователем программы в виде значений строковых переменных. Как указано выше, сокращений в строках не производилось, поэтому результаты по форме могут несколько отличаться от полученных вручную.

Рассмотрим разностные схемы решения уравнения Лапласа, полученные методом конечного элемента для функционала

$$W = \int_W (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) dW.$$

Пример 1

Линейный треугольный КЭ.

$$\begin{aligned} \text{ur}[1,1]: \quad 0 = & -2*1*1*(d11 -)(d11 +)U \\ & -2*1*1*(d21 -)(d21 +)U \end{aligned}$$

Пример 2

Билинейный четырехугольный КЭ.

$$\begin{aligned} \text{ur}[1,1]: \quad 0 = & -2*(d11 -)(d11 +)U \\ & +2*(l^2)/12*(d31 -)(d31 +)U \\ & -2*(d21 -)(d21 +)U \\ & +2*(h^2)/12*(d31 -)(d31 +)U \end{aligned}$$

Пример 3

Сирендипов четырехугольный восьмиузловой КЭ.

$$\begin{aligned} \text{ur}[1,1]: \quad 0 = & -2*(l^2)/12*4/(l^2)*(d11 -)(d13 +)U3 \\ & +2*(l^2)/12*(d31 -)(d31 +)U1 \\ & -2*(l^4)/80*4/(l^2)*4/(l^2)*(d11 -)(d11 +)U1 \\ & -2*(l^4)/80*4/(l^2)*-4/(l^2)*(d11 -)(d13 +)U3 \\ & +2*(h^2)/12*4/(h^2)*2*4/(h^2)*2*(d01 -)(d01 +)U1 \\ & +2*(h^2)/12*4/(h^2)*2*-4/(h^2)*2*(d01 -)(d02 +)U2 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*4/(h^2)*2*4/(h^2)*2*(d21 -)(d21 +)U1 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*4/(h^2)*2*-4/(h^2)*2*(d21 -)(d12 +)U2 \\ & +2*(l^2)/12*4/(l^2)*2*4/(l^2)*2*(d01 -)(d01 +)U1 \\ & +2*(l^2)/12*4/(l^2)*2*-4/(l^2)*2*(d01 -)(d03 +)U3 \\ & -2*(h^2)/12*4/(h^2)*(d21 -)(d12 +)U2 \\ & +2*(h^2)/12*(d31 -)(d31 +)U1 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*4/(l^2)*2*4/(l^2)*2*(d11 -)(d11 +)U1 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*4/(l^2)*2*-4/(l^2)*2*(d11 -)(d13 +)U3 \\ & -2*(h^4)/80*4/(h^2)*4/(h^2)*(d21 -)(d21 +)U1 \\ & -2*(h^4)/80*4/(h^2)*-4/(h^2)*(d21 -)(d12 +)U2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ur}[1,2]: \quad 0 = & +2*(h^2)/12*-4/(h^2)*2*4/(h^2)*2*(d02 -)(d01 +)U1 \\ & +2*(h^2)/12*-4/(h^2)*2*-4/(h^2)*2*(d02 -)(d02 +)U2 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*-4/(h^2)*2*4/(h^2)*2*(d12 -)(d21 +)U1 \\ & -2*(h^2*l^2)/144*-4/(h^2)*2*-4/(h^2)*2*(d12 -)(d12 +)U2 \\ & -2*(d12 -)(d12 +)U2 \\ & -2*(h^2)/12*-4/(h^2)*(d12 -)(d12 +)U2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2*(h^2)/12*-4/(h^2)*(d12 -)(d12 +)U2 \\
& -2*(h^2)/12*4/(h^2)*(d12 -)(d21 +)U1 \\
& -2*(h^4)/80*-4/(h^2)*4/(h^2)*(d12 -)(d21 +)U1 \\
& -2*(h^4)/80*-4/(h^2)*-4/(h^2)*(d12 -)(d12 +)U2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ur[1,3]: \quad 0 = & -2*(d13 -)(d13 +)U3 \\
& -2*(l^2)/12*-4/(l^2)*(d13 -)(d13 +)U3 \\
& -2*(l^2)/12*-4/(l^2)*(d13 -)(d13 +)U3 \\
& -2*(l^2)/12*4/(l^2)*(d13 -)(d11 +)U1 \\
& -2*(l^4)/80*-4/(l^2)*4/(l^2)*(d13 -)(d11 +)U1 \\
& -2*(l^4)/80*-4/(l^2)*-4/(l^2)*(d13 -)(d13 +)U3 \\
& +2*(l^2)/12*-4/(l^2)*2*4/(l^2)*2*(d03 -)(d01 +)U1 \\
& +2*(l^2)/12*-4/(l^2)*2*-4/(l^2)*2*(d03 -)(d03 +)U3 \\
& -2*(h^2*l^2)/144*-4/(l^2)*2*4/(l^2)*2*(d13 -)(d11 +)U1 \\
& -2*(h^2*l^2)/144*-4/(l^2)*2*-4/(l^2)*2*(d13 -)(d13 +)U3
\end{aligned}$$

Рассмотренный метод преобразования схем МКЭ в конечно-разностные может быть полезен при теоретическом анализе широкого класса схем МКЭ, как для линейных, так и для нелинейных задач. Примеры показывают, что схемы, подобные традиционным конечно-разностным, получаются только на простых элементах - линейных и билинейных. Элементы с большим числом узлов, а также эрмитовы элементы приводят к существенному усложнению как получаемых разностных схем, так и их дальнейшего анализа. В связи с этим на первый план выходит задача автоматизации преобразований и анализа полученных схем с помощью аналитических вычислений на ЭВМ. В целом рассмотренный в данной главе метод позволяет сократить разрыв между теориями разностных схем и метода конечного элемента. Его можно рассматривать как первый этап исследования различных свойств вариационно-разностных и КЭ схем – аппроксимации, устойчивости, дисперсионных свойств, консервативности, монотонности и т.д.

ГЛАВА 3. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СРЕД И ПЛАСТИН ТИПА ТИМОШЕНКО

Данная глава носит вспомогательный характер. Здесь кратко описывается постановка задач механики сплошных сред, для которых в следующих главах будет проведено построение и анализ численных схем В-РМ и МКЭ.

Рассматривается геометрически и физически линейная постановка задач динамики упругой среды и пластин типа Тимошенко. Среда предполагается линейно-упругой, однородной и изотропной, система координат - декартовой. В этом случае системы уравнений имеют наиболее простой вид, коэффициенты уравнений постоянны, возможно преобразование систем к виду отдельных уравнений. Это, в свою очередь, позволяет провести исследование численных схем достаточно подробно и получить результаты в конечном виде.

Система дифференциальных уравнений выводится из вариационного принципа Даламбера -Лагранжа (принципа виртуальной работы) для упругой среды.

Введем обозначения:

X^1, X^2, X^3 -декартова система координат;

t -время;

$u(X^1, X^2, X^3) = (u_1, u_2, u_3)$ -вектор перемещения;

$h_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$ -тензор дисторсии;

$e_{ij} = (h_{ij} + h_{ji}) / 2$ -тензор малых деформаций (симметричная составляющая тензора дисторсии);

$w_{ij} = (h_{ij} - h_{ji}) / 2$ -тензор элементарного вращения (кососимметричная составляющая тензора дисторсии);

S_{ij} -тензор напряжений;

$n = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный вектор внешней нормали.

Характеристики материала:

E -модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона;

ρ - плотность;

$I = E / [(1+n)(1-2n)]$, $G = E / [2(1+n)]$ - параметры Ламе.

Везде в дальнейшем используются соглашения и обозначения, принятые в тензорном анализе: повторение индекса означает суммирование по этому индексу, индекс после запятой - дифференцирование по соответствующей координате.

Пусть упругая среда занимает объем V , на границе которого $\partial V = S_u \cup S_p$ заданы граничные условия: на части границы S_u - в перемещениях, на S_p - в напряжениях. Предполагаются известными поля внешних массовых F и поверхностных P сил, распределение перемещений u и скоростей v при $t=0$ (начальные условия). При выводе уравнений будем исходить из общего уравнения динамики (вариационного принципа Даламбера-Лагранжа или принципа виртуальной работы).

Принцип виртуальной работы

Виртуальная работа, совершаемая внутренними силами, равна виртуальной работе, совершаемой внешними силами, включая силы инерции, на бесконечно малых виртуальных перемещениях, удовлетворяющих заданным граничным условиям в перемещениях.

Принцип виртуальной работы записывается в виде уравнения

$$dA_{\text{внутр}} = dA_{\text{внеш}},$$

где $dA_{\text{внеш}} = dA_{\text{внеш}}^{\text{масс}} + dA_{\text{внеш}}^{\text{пов}}$ (работа внешних сил равна сумме работ внешних массовых и поверхностных сил). Заменяя обозначения работы их выражениями, получим уравнение

$$\int_V s_{ij} de_{ij} dv = \int_V r(F_i - \ddot{u}_i) du_i dv + \int_{S_p} P_i du_i dS. \quad (3.1)$$

Так как из симметричности тензора напряжений следует равенство $s_{ij} dw_{ij} = 0$, имеем

$$s_{ij} de_{ij} = s_{ij} dh_{ij} = s_{ij} du_{i,j}. \quad (3.2)$$

Проводя с учетом (3.2) в левой части формулы (3.1) интегрирование по частям по j -й координате, преобразуем ее к виду:

$$\int_{S_p} \mathbf{s}_{ij} n_j du_i dS - \int_V \mathbf{s}_{ij} du_i dV .$$

Собирая в (3.1) коэффициенты при независимых вариациях перемещений, получим

$$\int_{S_p} (\mathbf{s}_{ij} n_j - P)_i du_i dS = \int_V (\mathbf{s}_{ij,j} + rF_i - r\bar{F}_i) du_i dV = 0 . \quad (3.3)$$

Ввиду произвольности вариаций из (3.3) следуют уравнения движения

$$\mathbf{s}_{ij,j} + rF_i = r\bar{F}_i . \quad (3.4)$$

и естественные граничные условия в напряжениях

$$\mathbf{s}_{ij} n_j \Big|_{S_p} = P_i . \quad (3.5)$$

Выражая в (3.4) с помощью закона Гука для изотропной среды

$$\mathbf{s}_{ij} = I d_{ij} e_{kk} + 2G e_{ij} , \quad (3.6)$$

тензор напряжения через перемещения, получим уравнения Ламе

$$(I + G) u_{j,ij} + G u_{i,jj} + rF_i = r\bar{F}_i . \quad (3.7)$$

Или в векторных обозначениях:

$$(I + G) \mathit{grad} \mathit{div} \bar{u} + G \Delta \bar{u} + r\bar{F} = r\bar{F} . \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7) (или (3.8)) вместе с граничными условиями в усилиях (3.5), граничными условиями в перемещениях

$$u_i \Big|_{S_n} = u_i^s \quad (3.9)$$

и начальными условиями

$$u_i \Big|_{t=0} = u_i^0, \quad \dot{u}_i \Big|_{t=0} = v_i^0 \quad (3.10)$$

составляют полную формулировку начально-краевой задачи теории упругости.

Пусть Ω - замкнутая область в \mathbb{R}^2 , $d(\Omega)$ - характерный размер этой области, h - постоянная, удовлетворяющая условию $0 < h \ll d(\Omega)$. Под пластинкой будем понимать упругое тело, занимающее объем

$V = \left((X^1, X^2, X^3) \middle| (X^1, X^2) \in W, X^3 \in [-h/2, h/2] \right)$. Постоянную h назовем

толщиной пластинки. Поверхность $X^3 = 0$ назовем срединной поверхностью пластинки.

Наличие у пластинки вырожденной координаты X^3 , то есть координаты, размеры тела вдоль которой малы, позволяет строить приближенные математические модели, имеющие число независимых переменных на единицу меньше, чем у исходной задачи теории упругости. Рассмотрим один из вариантов такой модели - теорию пластин типа Тимошенко. Везде ниже будем предполагать выполнение следующих условий, обычных для большинства задач теории пластин и оболочек.

- 1) Граничные условия в перемещениях могут быть заданы только на боковой поверхности пластинки $\Gamma \times [-h/2, h/2]$ (где контур Γ - граница области Ω) или на ее части. На поверхностях пластинки $X^3 = \pm h/2$ могут быть заданы только усилия.
- 2) Касательные составляющие усилий P_1, P_2 на свободных поверхностях пластинки $X^3 = \pm h/2$ отсутствуют.
- 3) Массовые силы F_i отсутствуют.

Для сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной введем гипотезу относительно распределения перемещений по координате X^3

$$u_i(X^1, X^2, X^3, t) = u_i^0(X^1, X^2, t) + X^3 u_i^1(X^1, X^2, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

(линейное распределение перемещений). Следствием гипотезы является линейность по толщине компонент тензора дисторсии

$$h_{ij} = h_{ij}^0 + X^3 h_{ij}^1 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$h_{ij}^0 = u_{i,j}^0, \quad h_{ij}^1 = u_{i,j}^1 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2); \quad h_{i3}^0 = u_i^1, \quad h_{i3}^1 = 0. \quad (3.12)$$

Гипотеза (3.11) позволяет привести трехмерную задачу к двумерной. Однако ее непосредственное применение приводит к теории пластин, страдающей серьезными недостатками, связанными с удовлетворением граничных условий (3.5) на свободных поверхностях пластинки $X^3 = \pm h/2$. Учитывая направление вектора нормали, условия (3.5) в данном случае получим в виде

$$S_{i3} \Big|_{X^3 = \pm h/2} = P_i.$$

Так как касательные усилия на свободных поверхностях отсутствуют (см. выше), имеем

$$s_{i3} \Big|_{X^3 = \pm h/2} = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим граничным условиям, примем для смешанных компонент тензора напряжений закон распределения

$$s_{i3} = s_{i3}^0 \cdot f(X^3), \quad (3.13)$$

где $s_{i3}^0(X^1, X^2)$ ($i=1, 2$) - значения напряжений на срединной поверхности пластинки, $f(X^3)$ - четная функция, удовлетворяющая условию $f(\pm h/2) = 0$. Гипотеза (3.13)

эквивалентна заданию закона распределения деформаций

$$e_{i3} = e_{i3}^0 \cdot f(X^3), \quad (3.14)$$

где $e_{i3}^0(X^1, X^2)$ ($i=1, 2$) - значения деформаций на срединной поверхности пластинки.

Будем считать нормальную внешнюю нагрузку P_3 пренебрежимо малой по сравнению с напряжениями, возникающими в пластинке, и примем для компоненты S_{33} тензора напряжений гипотезу плоского напряженного состояния

$$S_{33} = 0 \quad (3.15)$$

во всем объеме, занимаемом пластинкой. С учетом (3.15) закон Гука (3.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{E}{1-n^2} (e_{11} + ne_{22}), & s_{22} &= \frac{E}{1-n^2} (e_{22} + ne_{11}), & s_{33} &= 0, \\ s_{ij} &= 2G e_{ij} & (i, j &= 1, 2, 3; i \neq j). \end{aligned} \quad (3.16)$$

При этом деформация e_{33} может быть определена через другие компоненты тензора деформации по формуле

$$e_{33} = \frac{-n}{1-n} (e_{11} + e_{22}). \quad (3.17)$$

Окончательно компоненты тензора деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= u_{1,1}^0 + X^3 u_{1,1}^1, & e_{22} &= u_{2,2}^0 + X^3 u_{2,2}^1, \\
e_{33} &= \frac{-n}{1-n} \left(u_{1,1}^0 + u_{2,2}^0 + X^3 (u_{1,1}^1 + u_{2,2}^1) \right), \\
e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{2} \left(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 + X^3 (u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1) \right), \\
e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{2} \left(u_{3,1}^0 + u_1^1 \right) f(X^3), \\
e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{2} \left(u_{3,2}^0 + u_2^1 \right) f(X^3).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Функция u_3^1 не входит в выражения (3.18). Пренебрегая в вариационном уравнении слагаемым $r \int_W d u_3^1$ (погрешность при этом не превышает погрешности от введения гипотезы плоского напряженного состояния), мы тем самым исключаем u_3^1 из числа неизвестных. В результате в теории пластин и оболочек типа Тимошенко остается 5 неизвестных функций: три компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности - u_1^0, u_2^0, u_3^0 и два угла поворота нормальных волокон - u_1^1, u_2^1 .

Уравнение (3.1) для пластинки как трехмерного тела с учетом принятых нами допущений принимает вид:

$$\int_{W-h/2}^{h/2} \int \left(s_{ij} d e_{ij} + r d u_i \right) d X^3 d W - \int_W P_3^0 d u_3^0 d W + \int_W P_i d u_i d X^3 d G = 0. \tag{3.19}$$

Здесь $G = G_u + G_p = \int W$ - контур, ограничивающий область W , Γ_u и Γ_p - соответственно части контура, на которых заданы граничные условия в перемещениях и усилиях; $P_3^0 = P_3^+ - P_3^-$ - разность давлений, действующих на поверхности пластинки $X^3 = \pm h/2$. Подставляя в (3.19) вместо компонент тензора деформаций их значения (3.18) и производя интегрирование по координате X^3 , получим

$$\begin{aligned}
& \int_W \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \sum_{n=0}^1 N_{ij}^n d u_{i,j}^n + \sum_{i=1}^2 \left[N_{i3}^0 (d u_{3,i}^0 + d u_i^0) + r h \left(\frac{h^2}{12} \right)^n d u_i^n \right] - P_3^0 d u_3^0 \right\} d W - \\
& - \int_{G_p} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^1 S_i^n d u_i^n + S_3^0 d u_3^0 \right\} d G = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь

$$N_{ij}^n = \int_{-h/2}^{h/2} (X^3)^n S_{ij}^n dX^3, \quad (n=0,1; j=1,2) \quad (3.21)$$

$$N_{i13}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} f((X^3)) S_{i3} dX^3, \quad (i=1,2)$$

$$S_i^n = \int_{-h/2}^{h/2} (X^3)^n P_i dX, \quad (n=0,1; i=2,3) \quad (3.22)$$

Интегралы (3.21) можно выразить через функции перемещений, воспользовавшись законом Гука(3.16)

$$N_{11}^n = rh \left(\frac{h^2}{12} \right)^n \frac{E}{1-n^2} (u_{1,1}^n + n \cdot u_{2,2}^n),$$

$$N_{22}^n = rh \left(\frac{h^2}{12} \right)^n \frac{E}{1-n^2} (u_{2,2}^n + n \cdot u_{1,1}^n), \quad (3.23)$$

$$N_{12}^n = rh \left(\frac{h^2}{12} \right)^n G (u_{1,2}^n + u_{2,3}^n), \quad (n=0,1)$$

$$N_{13}^0 = k^2 G (u_{3,1}^0 + u_1^1), \quad N_{23}^0 = k^2 G (u_{3,2}^0 + u_2^1).$$

Коэффициент k^2 зависит от вида принятого распределения сдвиговых напряжений по толщине пластинки (функции $f(X^3)$). В литературе [22,35] принято использовать для k^2 значения в пределах от 2/3 до 1. В дальнейшем будем считать $k^2 = 2/3$. Чтобы избавиться от вариации перемещений под знаком производной, произведем в (3.20) интегрирование по частям во всех случаях, где это необходимо; получим:

$$\int_W \left\{ - \sum_{i,j=1}^2 \sum_{n=0}^1 N_{ij,j}^n d u_i^n + \sum_{i=1}^2 \left[(- N_{i3,i}^0 d u_3^0 + N_{i3}^0 d u_i^0) + rh \left(\frac{h^2}{12} \right)^n d u_i^n \right] - P_3^0 d u_3^0 \right\} dW +$$

$$+ \int_{G_p} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \sum_{n=0}^1 N_{ij}^n d n_j u_i^n + \sum_{i=1}^2 N_{i3}^0 d n_i u_3^0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^1 S_i^n d u_i^n + S_3^0 d u_3^0 \right\} dG = 0. \quad (3.24)$$

Собирая коэффициенты при независимо варьируемых функциях перемещений, придем к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
N_{11,1}^0 + N_{12,2}^0 &= rh \frac{h^0}{4}, \\
N_{21,1}^0 + N_{22,2}^0 &= rh \frac{h^0}{2}, \\
N_{13,1}^0 + N_{23,2}^0 + P_3^0 &= rh \frac{h^0}{3}, \\
N_{11,1}^1 + N_{12,2}^1 - N_{13}^1 &= r \frac{h^2}{12} \frac{h^1}{4}, \\
N_{21,1}^1 + N_{22,2}^1 - N_{23}^1 &= r \frac{h^2}{12} \frac{h^1}{2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

и естественным граничным условиям на части контура Γ_p :

$$\begin{aligned}
N_{11}^0 n_1 + N_{12}^0 n_2 &= S_1^0, \\
N_{21}^0 n_1 + N_{22}^0 n_2 &= S_2^0, \\
N_{13}^0 n_1 + N_{23}^0 n_2 &= S_3^0, \\
N_{11}^1 n_1 + N_{12}^1 n_2 &= S_1^1, \\
N_{21}^1 n_1 + N_{22}^1 n_2 &= S_2^1.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Выражая в (3.25) интегралы N_{ij}^n через перемещения (3.23), получим систему уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned}
Eh\Delta u_1^0 + \frac{Eh}{2(1-n)} \frac{\int}{\int X^2} \left(\frac{\int u_2^0}{\int X^1} - \frac{\int u_1^0}{\int X^2} \right) - rh \frac{\int^2 u_1^0}{\int t^2} &= 0, \\
Eh\Delta u_2^0 + \frac{Eh}{2(1-n)} \frac{\int}{\int X^1} \left(\frac{\int u_1^0}{\int X^2} - \frac{\int u_2^0}{\int X^1} \right) - rh \frac{\int^2 u_2^0}{\int t^2} &= 0, \\
k^2 G \left(\Delta u_3^0 + \frac{\int u_1^1}{\int X^1} + \frac{\int u_2^1}{\int X^2} \right) - rh \frac{\int^2 u_3^0}{\int t^2} &= 0, \\
\frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \Delta u_1^1 + \frac{Eh^3}{24(1-n)} \frac{\int}{\int X^2} \left(\frac{\int u_2^1}{\int X^1} - \frac{\int u_1^1}{\int X^2} \right) - 2Gh \left(\frac{\int u_3^0}{\int X^1} + u_1^1 \right) - r \frac{h^3}{12} \frac{\int^2 u_1^1}{\int t^2} &= 0, \\
\frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \Delta u_2^1 + \frac{Eh^3}{24(1-n)} \frac{\int}{\int X^2} \left(\frac{\int u_1^1}{\int X^1} - \frac{\int u_2^1}{\int X^1} \right) - 2Gh \left(\frac{\int u_3^0}{\int X^2} + u_2^1 \right) - r \frac{h^3}{12} \frac{\int^2 u_2^1}{\int t^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Дополняя (3.26) и (3.27) граничными условиями в перемещениях

$$u_i^0 \Big|_{G_u} = u_{G_i}^0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad u_i^1 \Big|_{G_u} = u_{G_i}^1 \quad (i = 1, 2) \tag{3.28}$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned}
u_i^0|_{t=0} &= u_{0i}^0, & \mathbb{J}u_i^0 / \mathbb{J}t|_{t=0} &= v_{0i}^0 & (i = 1, 2, 3), \\
u_i^1|_{t=0} &= u_{0i}^1, & \mathbb{J}u_i^1 / \mathbb{J}t|_{t=0} &= v_{0i}^1 & (i = 1, 2),
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

получаем полную формулировку начально-краевой задачи для системы уравнений теории пластин типа Тимошенко.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Глава построена по следующему плану. Сначала методом, рассмотренным в главе 2, выводится конечно-разностное представление вариационно-разностных и КЭ схем теории пластин Тимошенко в двумерном и одномерном случае. Далее проводится анализ одномерных схем методом гармоник и сопоставление их с конечно-разностной схемой [30,38,61]. Показано отсутствие равномерной сходимости конечно-разностной схемы по параметру сеточной задачи $\frac{\Delta X}{h}$. На основе анализа причин указанного недостатка схемы формулируются свойства индексной коммутативности разностных операторов, необходимые для его устранения. Далее установлено, что данные свойства выполняются для вариационно-разностной схемы на четырехугольных ячейках и не выполняются для схемы на треугольных ячейках. Отсутствие индексной коммутативности у схемы на треугольных ячейках приводит к условной сходимости данной схемы, что подтверждается решением тестовой задачи и анализом одномерных решений. Предлагается класс «ажурных» схем решения задач теории оболочек и теории упругости, свободных от данного недостатка.

Вывод систем сеточных уравнений вариационно-разностных и КЭ схем теории пластин Тимошенко

Применим процедуру вывода конечно-разностных схем к описанной выше линейной задаче теории пластин Тимошенко. Так как нашей дальнейшей целью является анализ схем методом гармоник, рассмотрим однородную задачу. В рассматриваемом случае внутренняя энергия деформированной пластинки имеет вид

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{h}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{E}{(1-n^2)} \left(u_{i,i}^0{}^2 + \frac{h^2}{12} u_{i,i}^1{}^2 \right) + \frac{k^2 E}{2(1+n)} (u_i^1 + u_{3,i}^0)^2 \right] + \\
 & + \frac{2En}{1-n^2} \left(u_{1,1}^0 u_{2,2}^0 + \frac{h^2}{12} u_{1,1}^1 u_{2,2}^1 \right) + \frac{E}{2(1+n)} \left[(u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0)^2 + \frac{h^2}{12} (u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1)^2 \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

а ее вариация -

$$\begin{aligned}
dW = & \int_{\Omega} \frac{hE}{1-n^2} [(u_{1,1}^0 + nu_{2,2}^0) du_{1,1}^0 + (u_{2,2}^0 + nu_{1,1}^0) du_{2,2}^0] + \frac{hE}{2(1+n)} (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) (du_{1,2}^0 + du_{2,1}^0) + \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+n)} [(u_1^1 + u_{3,1}^0) (du_1^1 + du_{3,1}^0) + (u_2^{10} + u_{3,2}^0) (du_2^{10} + du_{3,2}^0)] + \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-n^2} [(u_{1,1}^1 + nu_{2,2}^1) du_{1,1}^1 + \\
& + (u_{2,2}^1 + nu_{1,1}^1) du_{2,2}^1] + \frac{h^3 E}{24(1+n)} (u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1) (du_{1,2}^1 + du_{2,1}^1) d\Omega
\end{aligned} \quad (4.2)$$

Для построения вариационно-разностной схемы запишем сеточную аппроксимацию (4.2).

В случае, когда в каждой ячейке основной сетки находится ровно одна ячейка вариационно-разностной схемы (случай четырехугольных ячеек) получим

$$\begin{aligned}
dW_h = & \sum \left\{ \frac{hE}{1-n^2} [(d_1^+ u_1^0 + nd_2^+ u_2^0) d_1^+ du_1^0 + (d_2^+ u_2^0 + nd_1^+ u_1^0) d_2^+ du_2^0] + \right. \\
& + \frac{hE}{2(1+n)} (d_2^+ u_1^0 + d_1^+ u_2^0) (d_2^+ du_1^0 + d_1^+ du_2^0) + \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+n)} [(d_0^+ u_1^1 + d_1^+ u_3^0) (d_0^+ du_1^1 + d_1^+ du_3^0) + (d_0^+ u_2^1 + d_2^+ u_3^0) (d_0^+ du_2^1 + d_2^+ du_3^0)] + \\
& + \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-n^2} [(d_1^+ u_1^1 + nd_2^+ u_2^1) d_1^+ du_1^1 + (d_2^+ u_2^1 + nd_1^+ u_1^1) d_2^+ du_2^1] + \\
& \left. + \frac{h^3 E}{24(1+n)} (d_2^+ u_1^1 + d_1^+ u_2^1) (d_2^+ du_1^1 + d_1^+ du_2^1) \right\}.
\end{aligned} \quad (4.3)$$

Применяя к (4.3) разностное интегрирование по частям и добавляя инерционные слагаемые в дискретном виде, получим разностную схему теории пластин Тимошенко на четырехугольных ячейках.

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = r D_{\#} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = r D_{\#} u_2^0, \\
& \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = r D_{\#} u_3^0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1) = r \frac{h^2}{12} D_{\#} u_1^1, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1) = r \frac{h^2}{12} D_{\#} u_2^1.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22}$ - сеточный оператор Лапласа. Разностная схема (4.4) записана в форме, аналогичной исходной системе уравнений; отличие состоит в том, что дифференциальные операторы заменены разностными.

Рассмотрим схему на треугольных ячейках. Ее отличие от схемы (4.4) аналогично отличию схем общего вида (2.15) и (2.17). Схема на треугольных ячейках имеет в каждой ячейке основной сетки две треугольные ячейки вариационно-разностной схемы равной площади (см. рис. 4.1).

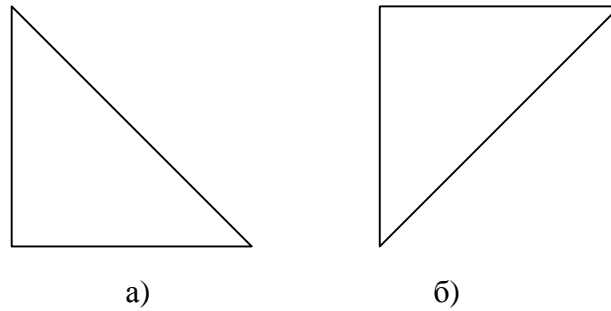


рис. 4.1

Таким образом, в схеме (4.4) операторы D_{ij} следует заменить операторами

$D_{ij}^* = \frac{1}{2}(d_{i,1}^+ d_{j,1}^- + d_{i,2}^+ d_{j,2}^-)$. (см. (3.18)). Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$d_{i,2}^+ = d_{i,1}^- T_{11}, \quad d_{i,2}^- = d_{i,1}^+ T_{-1-1}, \quad (i = 0,1,2),$$

из которых следует

$$d_{i,2}^+ d_{j,2}^- = d_{i,1}^- T_{11} d_{j,1}^+ T_{-1-1} = d_{i,1}^- d_{j,1}^+ T_{11} T_{-1-1} = d_{i,1}^- d_{j,1}^+ = d_{j,1}^+ d_{i,1}^-.$$

Следовательно, для схемы на треугольных ячейках достаточно ограничиться операторами одного типа, построенными на шаблоне рис. 4.1а. Если ввести обозначение

$$D_{ij} = d_{i,1}^+ d_{j,1}^-$$

то получим

$$D_{ij}^* = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}). \quad (4.5)$$

Из (4.5), в частности, следует, что при $i=j$ $D_{ij}^* = D_{ij}$. В результате схема на треугольных ячейках имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{12}^* u_2^0 - D_{22}^* u_1^0) = r D_{\Pi} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{12}^* u_1^0 - D_{11}^* u_2^0) = r D_{\Pi} u_2^0, \\
& \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01}^* u_1^1 + D_{02}^* u_2^1) = r D_{\Pi} u_3^0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{12}^* u_2^1 - D_{22}^* u_1^1) - \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{10}^* u_3^0 + D_{00}^* u_1^1) = r \frac{h^2}{12} D_{\Pi} u_1^1, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{21}^* u_1^1 - D_{11}^* u_2^1) - \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{20}^* u_3^0 + D_{00}^* u_2^1) = r \frac{h^2}{12} D_{\Pi} u_2^1.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где операторы D_{ij}^* определяются на основе формул (4.5).

Рассмотрим построение схем МКЭ, ограничиваясь случаем прямоугольной координатной сетки с координатами узлов $X_{ij}^1 = X_0^1 + h_1 \cdot i$, $X_{ij}^2 = X_0^2 + h_2 \cdot j$ (см. пример в главе 2).

Для четырехугольного билинейного конечного элемента введем локальную систему

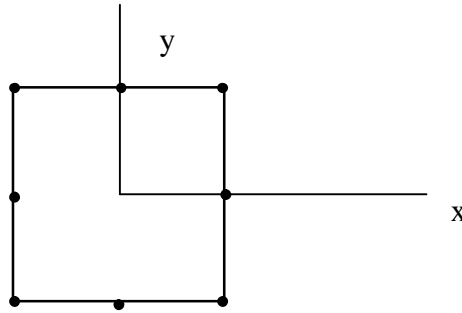


Рис.4.2

координат с началом в центре элемента. Неизвестные функции в элементе представим в виде

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy. \tag{4.7}$$

Система разностных операторов элемента совпадает с (2.24). Коэффициенты и значения операторов связаны соотношениями

$$c_0 = d_0^+ u, c_1 = d_1^+ u, c_2 = d_2^+ u, c_3 = d_3^+ u \tag{4.8}$$

(поскольку существуют элементы одного типа и только основная сетка, верхний индекс опускаем). Заменяя в (4.1) интеграл суммой интегралов по элементам, в которых неизвестные функции имеют вид (4.7), с учетом (4.8) получим

$$\begin{aligned}
W_h = & \sum_{\Omega_h} \frac{h}{2} \left\{ \frac{E}{1-n^2} \sum_{i=1}^2 \left[(d_i^+ u_i^0)^2 + \frac{h^2}{12} (d_i^+ u_i^1)^2 + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_3^+ u_i^0)^2 + \frac{h^2 h_{3-i}^2}{144} (d_3^+ u_i^1)^2 \right] + \right. \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+n)} \sum_{i=1}^2 \left[(d_0^+ u_i^1)^2 + \frac{h_1^2}{12} (d_1^+ u_i^1)^2 + \frac{h_2^2}{12} (d_2^+ u_i^1)^2 + \frac{h_1^2 h_2^2}{144} (d_3^+ u_i^1)^2 + (d_i^+ u_3^0)^2 + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_3^+ u_3^0)^2 + \right. \\
& + 2(d_0^+ u_i^1)(d_i^+ u_3^0) + 2\frac{h_{3-i}^2}{12} (d_{3-i}^+ u_i^1)(d_3^+ u_3^0) \left. \right] + \frac{2En}{1-n^2} \left[(d_1^+ u_1^0)(d_2^+ u_2^0) + \frac{h^2}{12} (d_1^+ u_1^1)(d_2^+ u_2^1) \right] + \quad (4.9) \\
& + \frac{E}{2(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^0)^2 + \frac{h_1^2}{12} (d_3^+ u_1^0)^2 + (d_1^+ u_2^0)^2 + \frac{h_2^2}{12} (d_3^+ u_2^0)^2 + 2(d_2^+ u_1^0)(d_1^+ u_2^0) \right] + \\
& \left. + \frac{Eh^2}{24(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^1)^2 + \frac{h_1^2}{12} (d_3^+ u_1^1)^2 + (d_1^+ u_2^1)^2 + \frac{h_2^2}{12} (d_3^+ u_2^1)^2 + 2(d_2^+ u_1^1)(d_1^+ u_2^1) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Вариация функционала (4.9) имеет вид

$$\begin{aligned}
dW_h = & \sum_{\Omega_h} h \left\{ \frac{E}{1-n^2} \sum_{i=1}^2 \left[(d_i^+ u_i^0)(d_i^+ d u_i^0) + \frac{h^2}{12} (d_i^+ u_i^1)(d_i^+ d u_i^1) + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_3^+ u_i^0)(d_3^+ d u_i^0) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{h^2 h_{3-i}^2}{144} (d_3^+ u_i^1)(d_3^+ d u_i^1) \right] + \frac{k^2 E}{2(1+n)} \sum_{i=1}^2 \left[(d_0^+ u_i^1)(d_0^+ d u_i^1) + \frac{h_1^2}{12} (d_1^+ u_i^1)(d_1^+ d u_i^1) + \right. \\
& + \frac{h_2^2}{12} (d_2^+ u_i^1)(d_2^+ d u_i^1) + \frac{h_1^2 h_2^2}{144} (d_3^+ u_i^1)(d_3^+ d u_i^1) + (d_i^+ u_3^0)(d_i^+ d u_3^0) + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_3^+ u_3^0)(d_3^+ d u_3^0) + \\
& + (d_0^+ u_i^1)(d_i^+ d u_3^0) + (d_0^+ d u_i^1)(d_i^+ u_3^0) + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_{3-i}^+ u_i^1)(d_3^+ d u_3^0) + \frac{h_{3-i}^2}{12} (d_{3-i}^+ d u_i^1)(d_3^+ u_3^0) \left. \right] + \\
& + \frac{En}{1-n^2} \left[(d_1^+ u_1^0)(d_2^+ d u_2^0) + (d_1^+ d u_1^0)(d_2^+ u_2^0) + \frac{h^2}{12} (d_1^+ u_1^1)(d_2^+ d u_2^1) + \frac{h^2}{12} (d_1^+ d u_1^1)(d_2^+ u_2^1) \right] + \\
& + \frac{E}{2(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^0)(d_2^+ d u_1^0) + \frac{h_1^2}{12} (d_3^+ u_1^0)(d_3^+ d u_1^0) + (d_1^+ u_2^0)(d_1^+ d u_2^0) + \frac{h_2^2}{12} (d_3^+ u_2^0)(d_3^+ d u_2^0) + \right. \\
& + (d_2^+ u_1^0)(d_1^+ d u_2^0) + (d_2^+ d u_1^0)(d_1^+ u_2^0) \left. \right] + \frac{Eh^2}{24(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^1)(d_2^+ d u_1^1) + \frac{h_1^2}{12} (d_3^+ u_1^1)(d_3^+ d u_1^1) + \right. \\
& + (d_1^+ u_2^1)(d_1^+ d u_2^1) + \frac{h_2^2}{12} (d_3^+ u_2^1)(d_3^+ d u_2^1) + (d_2^+ u_1^1)(d_1^+ d u_2^1) + (d_2^+ d u_1^1)(d_1^+ u_2^1) \left. \right] \left. \right\}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Интересно сравнить выражение (4.10) с (4.3), от которого оно отличается наличием нескольких дополнительных малых слагаемых порядка $O(h_1^2 + h_2^2)$ и более высокого. Из (4.10), повторяя описанные выше действия, получим разностную схему

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = r D_{\#} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = r D_{\#} u_2^0, \\
& \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = r D_{\#} u_3^0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+n)} \left(D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1 - \frac{h_1^2}{12} D_{11} u_1^1 - \frac{h_2^2}{12} D_{22} u_1^1 + \frac{h_1^2 h_2^2}{144} D_{33} u_1^1 \right) = r \frac{h^2}{12} D_{\#} u_1^1, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+n)} \left(D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1 - \frac{h_1^2}{12} D_{11} u_2^1 - \frac{h_2^2}{12} D_{22} u_2^1 + \frac{h_1^2 h_2^2}{144} D_{33} u_2^1 \right) = r \frac{h^2}{12} D_{\#} u_2^1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Рассмотрим построение разностной схемы треугольного линейного конечного элемента. В каждой ячейке основной сетки присутствуют элементы двух типов (см. рис. 4.1). Поскольку для схемы МКЭ справедливы те же замечания, что и для вариационно-разностной схемы на треугольных ячейках, ограничимся рассмотрением одного типа элементов (рис. 4.1а). В треугольном элементе введем локальную систему координат с началом в

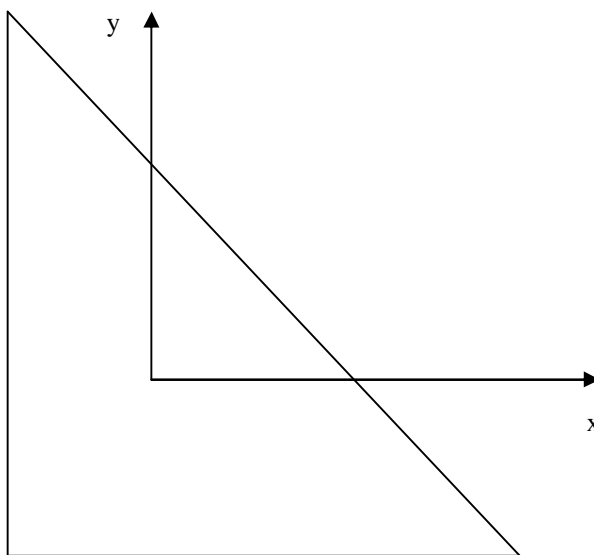


Рис. 4.3

центре треугольника (точке пересечения медиан). Функцию в элементе зададим в виде

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 y. \tag{4.12}$$

Зададим систему разностных операторов

$$\begin{aligned}
\left(d_0^+ f\right)_{ij} &= \frac{1}{3}\left(f_{ij} + f_{i+1j} + f_{ij+1}\right) = f + O(h_1 + h_2) \\
\left(d_1^+ f\right)_{ij} &= \frac{1}{h_1}\left(f_{i+1j} - f_{ij}\right) = \frac{\partial f}{\partial X^1} + O(h_1 + h_2) \\
\left(d_2^+ f\right)_{ij} &= \frac{1}{h_2}\left(f_{ij+1} - f_{ij}\right) = \frac{\partial f}{\partial X^2} + O(h_1 + h_2) \\
\left(d_0^- f\right)_{ij} &= \frac{1}{3}\left(f_{ij} + f_{i-1j} + f_{ij-1}\right) = f + O(h_1 + h_2) \\
\left(d_1^- f\right)_{ij} &= \frac{1}{h_1}\left(f_{ij} - f_{i-1j}\right) = f + O(h_1 + h_2) \\
\left(d_2^- f\right)_{ij} &= \frac{1}{h_2}\left(f_{ij} - f_{ij-1}\right) = f + O(h_1 + h_2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Коэффициенты и значения операторов связаны соотношениями

$$c_0 = d_0^+ u, c_1 = d_1^+ u, c_2 = d_2^+ u \tag{4.14}$$

Из (4.1), (4.12), (4.14) получим

$$\begin{aligned}
W_h &= \sum_{\Omega_h} \frac{h}{2} \left\{ \frac{E}{1-n^2} \sum_{i=1}^2 \left[\left(d_i^+ u_i^0\right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(d_i^+ u_i^1\right)^2 \right] + \right. \\
&+ \frac{k^2 E}{2(1+n)} \sum_{i=1}^2 \left[\left(d_0^+ u_i^1\right)^2 + \frac{h_1^2}{18} \left(d_1^+ u_i^1\right)^2 + \frac{h_2^2}{18} \left(d_2^+ u_i^1\right)^2 + \left(d_i^+ u_3^0\right)^2 + 2\left(d_0^+ u_i^1\right)\left(d_i^+ u_3^0\right) \right] + \\
&+ \frac{2En}{1-n^2} \left[\left(d_1^+ u_1^0\right)\left(d_2^+ u_2^0\right) + \frac{h^2}{12} \left(d_1^+ u_1^1\right)\left(d_2^+ u_2^1\right) \right] + \frac{E}{2(1+n)} \left[\left(d_2^+ u_1^0\right)^2 + \left(d_1^+ u_2^0\right)^2 + 2\left(d_2^+ u_1^0\right)\left(d_1^+ u_2^0\right) \right] + \\
&+ \left. \frac{Eh^2}{24(1+n)} \left[\left(d_2^+ u_1^1\right)^2 + \left(d_1^+ u_2^1\right)^2 + 2\left(d_2^+ u_1^1\right)\left(d_1^+ u_2^1\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Вариация функционала (4.15) имеет вид

$$\begin{aligned}
dW_h = & \sum_{\Omega_h} h \left\{ \frac{E}{1-n^2} \sum_{i=1}^2 \left[(d_i^+ u_i^0)(d_i^+ d u_i^0) + \frac{h^2}{12} (d_i^+ u_i^1)(d_i^+ d u_i^1) \right] + \right. \\
& + \frac{k^2 E}{2(1+n)} \sum_{i=1}^2 \left[(d_0^+ u_i^1)(d_0^+ d u_i^1) + \frac{h_1^2}{18} (d_1^+ u_i^1)(d_1^+ d u_i^1) + \frac{h_2^2}{18} (d_2^+ u_i^1)(d_2^+ d u_i^1) + \right. \\
& \quad \left. \left. + (d_i^+ u_3^0)(d_i^+ d u_3^0) + (d_0^+ u_i^1)(d_i^+ d u_3^0) + (d_0^+ d u_i^1)(d_i^+ u_3^0) \right] + \right. \\
& + \frac{En}{1-n^2} \left[(d_1^+ u_1^0)(d_2^+ d u_2^0) + (d_1^+ d u_1^0)(d_2^+ u_2^0) + \frac{h^2}{12} (d_1^+ u_1^1)(d_2^+ d u_2^1) + \frac{h^2}{12} (d_1^+ d u_1^1)(d_2^+ u_2^1) \right] + \\
& + \frac{E}{2(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^0)(d_2^+ d u_1^0) + (d_1^+ u_2^0)(d_1^+ d u_2^0) + (d_2^+ u_1^0)(d_1^+ d u_2^0) + (d_2^+ d u_1^0)(d_1^+ u_2^0) \right] + \\
& \left. + \frac{Eh^2}{24(1+n)} \left[(d_2^+ u_1^1)(d_2^+ d u_1^1) + (d_1^+ u_2^1)(d_1^+ d u_2^1) + (d_2^+ u_1^1)(d_1^+ d u_2^1) + (d_2^+ d u_1^1)(d_1^+ u_2^1) \right] \right\}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Из (4.16) следует разностная схема

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_1^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{12} u_2^0 - D_{22} u_1^0) = r D_{\pi} u_1^0, \\
& \frac{E}{1-n^2} D_{\Delta} u_2^0 + \frac{E}{2(1-n)} (D_{21} u_1^0 - D_{11} u_2^0) = r D_{\pi} u_2^0, \\
& \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{\Delta} u_3^0 + D_{01} u_1^1 + D_{02} u_2^1) = r D_{\pi} u_3^0, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_1^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{12} u_2^1 - D_{22} u_1^1) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+n)} \left(D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1 - \frac{h_1^2}{18} D_{11} u_1^1 - \frac{h_2^2}{18} D_{22} u_1^1 - \frac{h_1 h_2}{18} D_{12}^* u_1^1 \right) = r \frac{h^2}{12} D_{\pi} u_1^1, \\
& \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{\Delta} u_2^1 + \frac{Eh^2}{24(1-n)} (D_{21} u_1^1 - D_{11} u_2^1) - \\
& - \frac{Ek^2}{2(1+n)} \left(D_{20} u_3^0 + D_{00} u_2^1 - \frac{h_1^2}{18} D_{11} u_2^1 - \frac{h_2^2}{18} D_{22} u_2^1 - \frac{h_1 h_2}{18} D_{12}^* u_2^1 \right) = r \frac{h^2}{12} D_{\pi} u_2^1.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Схемы (4.11), (4.17) по сравнению со схемами (4.4), (4.6) имеют ряд дополнительных малых слагаемых порядка $(\Delta X)^2$ и выше.

Для теоретического анализа рассмотрим также одномерные вариационно-разностную и КЭ схемы задач теории пластин Тимошенко. В одномерном случае, когда решение не зависит от координаты X^2 , рассмотрим систему операторов (3.54). Функцию в линейном конечном элементе представим в виде

$$u = c_0 + c_1 x. \tag{4.18}$$

где x – локальная координата, точка $x = 0$ – середина элемента. Тогда получим

$$c_0 = d_0^+ u, c_1 = d_1^+ u . \quad (4.19)$$

Вариационно-разностную и КЭ схемы легко получить непосредственно, но можно воспользоваться соответственно (4.3) и (4.10), полагая в них $d_2^+ u = d_3^+ u = 0$, а операторы d_0^+ и d_1^+ заменяя одноименными одномерными операторами (2.54). Соответственно получим одномерную вариационно-разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-n^2} D_{11} u_1^0 &= r D_{\pi} u_1^0, \\ \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{11} u_3^0 + D_{01} u_1^1) &= r D_{\pi} u_3^0, \\ \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{11} u_1^1 - \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1) &= r \frac{h^2}{12} D_{\pi} u_1^1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

и конечно-элементную схему

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-n^2} D_{11} u_1^0 &= r D_{\pi} u_1^0, \\ \frac{Ek^2}{2(1+n)} (D_{11} u_3^0 + D_{01} u_1^1) &= r D_{\pi} u_3^0, \\ \frac{Eh^2}{12(1-n^2)} D_{11} u_1^1 - \frac{Ek^2}{2(1+n)} \left(D_{10} u_3^0 + D_{00} u_1^1 - \frac{h_1^2}{12} D_{11} u_1^1 \right) &= r \frac{h^2}{12} D_{\pi} u_1^1, \end{aligned} \quad (4.21)$$

В (4.20), (4.21)

$$D_{00} = \frac{1}{4} (f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}), D_{01} f = D_{10} f = \frac{1}{h_1} (f_{i+1} - f_{i-1}), D_{11} = \frac{1}{h_1^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}).$$

Таким образом, получено конечно-разностное представление шести вариационно-разностных и КЭ схем (4.4), (4.6), (4.11), (4.17), (4.20) и (4.21), свойства которых будут исследованы ниже в данной главе. Отметим, что каждая из полученных систем сеточных уравнений распадается на две. Первые два уравнения схем (4.4), (4.6), (4.11), (4.17) аппроксимируют плоскую задачу теории упругости, остальные три описывают поперечные колебания пластины Тимошенко. Аналогично у схем (4.20), (4.21) первое уравнение описывает распространение продольных волн (волновое уравнение), два последних описывают поперечные колебания. В дальнейшем анализ будет проведен только для систем, описывающих поперечные колебания, так как именно эти системы являются жесткими (см. параграф 1.3) и могут приводить к условно аппроксимирующим численным схемам.

Анализ численных схем решения одномерных задач теории пластин

Рассмотрим систему уравнений, описывающую поперечные колебания пластин Тимошенко в одномерном случае. Она эквивалентна одному уравнению четвертого порядка.

$$\frac{\mathcal{I}^4 W}{\mathcal{I} X^4} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{12a}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 W}{\mathcal{I} t^2} - \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{\mathcal{I}^4 W}{\mathcal{I} X^2 \mathcal{I} t^2} \right] + \frac{1}{ac^4} \frac{\mathcal{I}^4 W}{\mathcal{I} t^4} = 0.$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения приведем ее к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные: $x = X/L$, $\tau = t \cdot c/L$, $w = W/L$, $y = \Psi/L$, $h = h/L$, $\Delta x = h_1/L$.

Здесь L - некоторый линейный размер, $c = [E/(r(I - n^2))]^{1/2}$ - скорость звука. Ниже в данной главе все формулы приводятся в безразмерных величинах. Система (1.33) примет вид

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} x^2} + \frac{\mathcal{I} y}{\mathcal{I} x} \right) - \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} &= 0 \\ \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} x^2} - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} x} + y \right) - \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} \tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

а эквивалентное ей уравнение -

$$\frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^4} + \frac{12a}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^2 \mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (4.22)$$

Рассмотрим разностные схемы, аппроксимирующие систему уравнений (1.33), записанную в безразмерных величинах. Это известная в литературе [30,38,61] конечно-разностная схема

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11} w + D_{01} y) - D_{\tau\tau} w = 0 \\ \Lambda(w, y) &= D_{11} y - \frac{12a}{h^2} (D_{01} w + y) - D_{\tau\tau} w = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

вариационно-разностная схема (два последних уравнения (4.20), записанные в безразмерных величинах)

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11} w + D_{01} y) - D_{\tau\tau} w = 0 \\ \Lambda'(w, y) &= D_{11} y - \frac{12a}{h^2} (D_{01} w + D_{00} y) - D_{\tau\tau} w = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

и схема линейного конечного элемента (два последних уравнения (4.21))

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11} w + D_{01} y) - D_{\tau\tau} w = 0 \\ \Lambda''(w, y) &= D_{11} y - \frac{12a}{h^2} \left(D_{01} w + D_{00} y - \frac{h_1^2}{12} D_{11} y \right) - D_{\tau\tau} w = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Системы (4.23)-(4.25) отличаются аппроксимацией единственного члена уравнений – функции y : с помощью тождественного оператора в (4.23), оператора D_{00} в (4.24) и оператора $D_0^* = D_{00} - \frac{Dx^2}{12} D_{11}$ в (4.25). При этом все три схемы имеют второй порядок аппроксимации. Преобразуем схему (4.23) к виду, аналогичному (4.22). "Продифференцируем" с помощью оператора D_{00} часть системы (4.23):

$$D_{01} \Lambda(w, y) = 0$$

В полученном уравнении

$$D_{01} D_{11} y - \frac{12a}{h^2} (D_{01} D_{10} w + D_{01} y) - D_{01} D_{\tau\tau} w = 0$$

выразим члены, содержащие функцию y , из равенств:

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= 0, \\ D_{11} \Phi(w, y) &= 0, \\ D_{\tau\tau} \Phi(w, y) &= 0. \end{aligned}$$

. В результате получим сеточное уравнение, содержащее одну неизвестную функцию:

$$D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w + \frac{12a}{h^2} (D_{01} D_{10} w - D_{11} w) = 0.$$

или, учитывая равенство

$$D_{01} D_{10} - D_{11} = \frac{\Delta x^2}{4} D_{11} D_{11}$$

(см. ниже) его же в виде

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (4.26)$$

Аналогичные преобразования вариационно-разностной схемы (4.24) приводят к уравнению

$$D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_{00} D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (4.27)$$

Для схемы линейного КЭ (4.25) уравнение получим в виде

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_0^* D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (4.28)$$

Сопоставляя (4.26)-(4.28) с исходным дифференциальным уравнением (4.22), приходим к выводу, что при конечных значениях величины $(\Delta x / h)$ (отношения шага сетки к толщине оболочки) сеточные уравнения (4.26) и (4.28) аппроксимируют не (4.22), а, соответственно, уравнения

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^4} + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^2 \mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (4.29)$$

и

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^4} + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} x^2 \mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (4.30)$$

Таким образом, можно сделать предварительный вывод о том, что хотя сходимость в обычном смысле имеет место (при $\Delta x \rightarrow 0$ коэффициенты уравнений (4.29) и (4.30) стремятся к соответствующим коэффициентам (3.28)), конечно-разностная и КЭ схемы не обладают равномерной сходимостью по параметру сеточной задачи $\Delta x / \eta$. С практической точки зрения достаточная точность решения может быть обеспечена лишь на сетках с малым значением отношения $(\Delta x / \eta)$ (отношение безразмерных величин $\Delta x / \eta$ равно отношению размерных величин h_1 / h), что существенно снижает их эффективность. В отличие от них уравнение (4.27), а соответственно и вариационно-разностная схема (4.24) аппроксимирует (4.22) при любых значениях параметра сеточного уравнения $\Delta x / \eta$ и не накладывает никаких ограничений на шаг пространственной сетки по сравнению с толщиной оболочки.

Для подтверждения сделанного качественного вывода проанализируем погрешности сеточных уравнений (4.26)-(4.28) по низшей собственной частоте. Поскольку нас будет интересовать влияние аппроксимации только по пространственным координатам, рассмотрим полудискретные уравнения, полученные заменой в (4.26)-(4.28) разностного оператора $D_{\tau\tau}$ производной по времени. Для конечно-разностной схемы получим

$$\left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \tau^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \tau^4} = 0. \quad (4.31)$$

Для вариационно-разностной схемы:

$$D_{11}D_{11}w + \frac{12}{h^2}D_{00} \frac{f^2 w}{f_T^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11} \frac{f^2 w}{f_T^2} + \frac{1}{a} \frac{f^4 w}{f_T^4} = 0. \quad (4.32)$$

Для схемы линейного КЭ:

$$\left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11}D_{11}w + \frac{12}{h^2}D_{00}^* \frac{f^2 w}{f_T^2} - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11} \frac{f^2 w}{f_T^2} + \frac{1}{a} \frac{f^4 w}{f_T^4} = 0. \quad (4.33)$$

Подставим в (4.31)-(4.33) решение в виде одного члена ряда Фурье:

$$w_j(\tau) = \exp[i(a\Delta x j + \omega\tau)]$$

(здесь и далее $i = \sqrt{-1}$). Учитывая, что

$$\begin{aligned} D_{11}w_j &= \frac{1}{\Delta x^2} (\exp(i(a\Delta x(j+1) + \omega\tau)) - 2\exp(i(a\Delta x j + \omega\tau)) + \exp(i(a\Delta x(j-1) + \omega\tau))) = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \exp(i(a\Delta x j + \omega\tau)) (\exp(ia\Delta x) - 2 + \exp(-ia\Delta x)) = \frac{1}{\Delta x^2} w_j (2\cos(a\Delta x) - 2) = \\ &= \frac{-4}{\Delta x^2} w_j \sin^2 \frac{a\Delta x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{00}w_j &= \frac{1}{4} (\exp(i(a\Delta x(j+1) + \omega\tau)) + 2\exp(i(a\Delta x j + \omega\tau)) + \exp(i(a\Delta x(j-1) + \omega\tau))) = \\ &= \frac{1}{4} \exp(i(a\Delta x j + \omega\tau)) (\exp(ia\Delta x) + 2 + \exp(-ia\Delta x)) = \frac{1}{4} w_j (2\cos(a\Delta x) + 2) = \\ &= w_j \cos^2 \frac{a\Delta x}{2} \end{aligned}$$

получим дисперсионные уравнения.

Для конечно-разностной схемы:

$$\frac{1}{a} w^4 - \left[\frac{12}{h^2} + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{a\Delta x}{2} \right] w^2 + \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{a\Delta x}{2} = 0, \quad (4.34)$$

вариационно-разностной схемы:

$$\frac{1}{a} w^4 - \left[\frac{12}{h^2} \cos^2 \frac{a\Delta x}{2} + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{a\Delta x}{2} \right] w^2 + \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{a\Delta x}{2} = 0 \quad (4.35)$$

и схемы МКЭ:

$$\frac{1}{a} w^4 - \left[\frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \frac{a\Delta x}{2} \right) + \left(1 + \frac{1}{a} \right) \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{a\Delta x}{2} \right] w^2 + \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \frac{16}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{a\Delta x}{2} = 0 \quad (4.36)$$

Аналогично, подставляя общее решение

$$w_j(x, \tau) = \exp[i(bx + w\tau)]$$

в дифференциальное уравнение (4.22) получим дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{a} w^4 - \left[\frac{12}{h^2} + \left(1 + \frac{1}{a} \right) b^2 \right] w^2 + b^4 = 0 \quad (4.37)$$

Полагая длину полуволны (безразмерную) равной 1, получим

$$a = p\Delta x, \quad b = p$$

Дисперсионные уравнения (4.34)-(4.37) являются биквадратными относительно частоты. Нас будет интересовать пара корней, меньших по модулю, - наиболее важных в большинстве задач теории оболочек. Выпишем значения квадратов меньших по модулю корней уравнений (4.34)-(4.37) для полуволн единичной длины. Конечно-разностная схема:

$$w_{\text{кр}}^2 = \frac{6a}{h^2} + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) \right)^2 - \frac{16a}{\Delta x^4} \left(1 + 3a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \sin^4 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right)}$$

Вариационно-разностная схема:

$$w_{\text{вр}}^2 = \frac{6a}{h^2} \cos^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} \cos^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right) \right)^2 - \frac{16a}{\Delta x^4} \sin^4 \left(\frac{p\Delta x}{2} \right)}$$

Схема МКЭ:

$$w_{кэ}^2 = \frac{2a}{h^2} \left(1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{2} \right) \right) + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p \Delta x}{2} \right) -$$

$$- \sqrt{\left(\frac{2a}{h^2} \left(1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{2} \right) \right) + \frac{2(a+1)}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{p \Delta x}{2} \right) \right)^2 - \frac{16a}{\Delta x^4} \left(1 + a \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right) \sin^4 \left(\frac{p \Delta x}{2} \right)}$$

Исходное уравнение:

$$w_0^2 = \frac{6a}{h^2} + \frac{(a+1)}{2} p^2 - \sqrt{\left(\frac{6a}{h^2} + \frac{(a+1)}{2} p^2 \right)^2 - a p^4}$$

Представляет интерес, как ведут себя относительные погрешности

$$d_{кр} = \frac{w_{кр} - w_0}{w_0}, d_{вр} = \frac{w_{вр} - w_0}{w_0}, d_{кэ} = \frac{w_{кэ} - w_0}{w_0}$$

низших собственных частот уравнений (4.31)-(4.33) по сравнению с (4.22). Графики погрешностей конечно-разностной схемы (штрих-пунктирные линии) при различных значениях параметра $\Delta X / h$ и вариационно-разностной схемы (штриховые линия) при $a=0.32$ приведены на рис. 4.4. Сплошной линией изображен график погрешностей при $\Delta X = l$. Погрешности схемы линейного КЭ качественно ведут себя аналогично погрешностям конечно-разностной схемы.

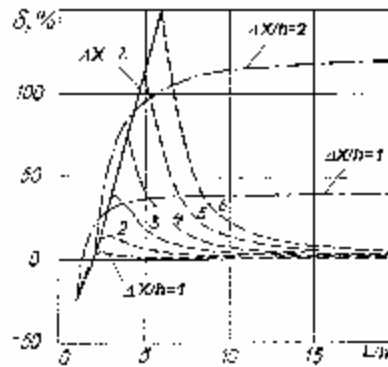


Рис. 4.4

Таким образом, ошибки $d_{кр}$ и $d_{кэ}$ не убывают при увеличении числа узлов на полуволну и стремятся к константе, отличной от нуля, для каждого постоянного значения $\Delta x / h$ (или $\Delta X / h$) при $L / \Delta X \rightarrow \infty$.

Асимптотические значения погрешностей $d_{кр}$, $d_{вр}$ и $d_{кэ}$ при $L \rightarrow \infty$ равны соответственно:

$$d_{\text{кр}}^{\infty}\left(\frac{\Delta X}{h}\right) = \lim_{L/\Delta X \rightarrow \infty} d_{\text{кр}}\left(\frac{\Delta X}{h}, \frac{L}{\Delta X}\right) = \sqrt{1 + 3a\left(\frac{\Delta X}{h}\right)^2} - 1,$$

$$d_{\text{вр}}^{\infty}\left(\frac{\Delta X}{h}\right) = \lim_{L/\Delta X \rightarrow \infty} d_{\text{вр}}\left(\frac{\Delta X}{h}, \frac{L}{\Delta X}\right) = 0,$$

$$d_{\text{кэ}}^{\infty}\left(\frac{\Delta X}{h}\right) = \lim_{L/\Delta X \rightarrow \infty} d_{\text{кэ}}\left(\frac{\Delta X}{h}, \frac{L}{\Delta X}\right) = \sqrt{1 + a\left(\frac{\Delta X}{h}\right)^2} - 1$$

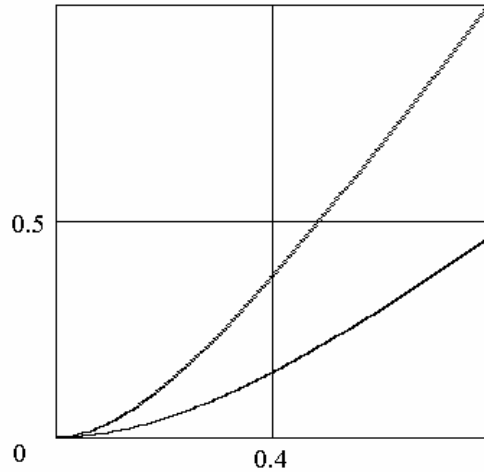


Рис. 4.5

Функции $d_{\text{кр}}^{\infty}$ и $d_{\text{кэ}}^{\infty}$ представлены на рис.4.5. Погрешность $d_{\text{кэ}}^{\infty}$ расположена ниже. Таким образом, можно сделать вывод, что разностные схемы (4.23) и (4.25) численного решения системы уравнений(1.33) не обладает равномерной сходимостью по параметру сеточного уравнения $\Delta X/h$. Вследствие этого для обеспечения достаточной точности численного решения необходимо применять сетки с малым значением этого параметра. Например, если считать допустимой ошибку по собственной частоте не более 5%, нужно применять сетки с $\Delta X/h < 0.3$ для конечно-разностной схемы и $\Delta X/h < 0.5$ для схемы линейного конечного элемента. Такое ограничение существенно снижает эффективность численных схем теории оболочек.

В отличие от схем (4.23), (4.25) схема (4.24) обладает равномерной сходимостью по параметру $\Delta X/h$, если он принадлежит любому ограниченному отрезку $\Delta X/h \in [0, M]$. Следовательно, ограничения на величину пространственного шага сетки определяются не толщиной оболочки, а характером решения, то есть той частью спектра решения, которая является существенной в каждой конкретной задаче.

Недостатки схем (4.23), (4.25) не видны в их исходной записи, но становятся очевидными после преобразования их к одному уравнению (4.26) или (4.28). Их проявлением является наличие в преобразованных схемах дополнительных слагаемых вида $cD_{11}D_{11}w$. Причина этого кроется в несогласованной аппроксимации функций, первых и вторых производных. Дополнительные слагаемые получаются как разность суперпозиций двух сеточных операторов $D_{01}D_{10}w - D_{11}w$ в (4.26) или $D_{01}D_{10}w - D_{11}D_0^*w$ в (4.28). Очевидно, что для их дифференциальных аналогов получаем тождество

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} w - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0.$$

В сеточном варианте получаем:

$$D_{01}D_{10}w = \frac{1}{4\Delta x^2}(w_{i+2} - 2w_i + w_{i-2}), \quad D_{11}w = \frac{1}{\Delta x^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}),$$

$$D_{01}D_{10}w - D_{11}w = \frac{1}{4\Delta x^2}(w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) = \frac{\Delta x^2}{4} D_{11}D_{11}w$$

аналогично получается

$$D_{01}D_{10}w - D_{11}D_0^*w = \frac{\Delta x^2}{12} D_{11}D_{11}w$$

Само по себе появление таких слагаемых не является недостатком, так как они обладают вторым порядком малости (таким же, как и схемы в целом). Но в силу вырождения решаемой задачи это приводит к фатальным последствиям. В отличие от данных схем вариационно-разностная схема (4.24) является удачной в силу согласованности операторов численного дифференцирования

$$D_{01}D_{10} = D_{11}D_{00} \quad (4.38)$$

Проведенные выше исследования показывают, что данное равенство является необходимым условием равномерной сходимости по параметру сеточной задачи $\Delta X / h$ одномерных схем теории пластин Тимошенко. Рассмотрим обобщение равенства (4.38) на многомерный случай.

Индексная коммутативность численного дифференцирования

Пусть $f(X^1, \mathbf{K}, X^n) \in C^4(\mathbb{R}^n)$, тогда справедливы тождества

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}X^i} \left(\frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}X^j} \right) = \frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}X^i \mathcal{I}X^j}, \quad \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}X^i} \left(\frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}X^j \mathcal{I}X^k} \right) = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}X^j} \left(\frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}X^i \mathcal{I}X^k} \right)$$

$$\frac{\mathcal{I}^2}{\mathcal{I}X^i \mathcal{I}X^j} \left(\frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}X^k \mathcal{I}X^l} \right) = \frac{\mathcal{I}^2}{\mathcal{I}X^i \mathcal{I}X^l} \left(\frac{\mathcal{I}^2 f}{\mathcal{I}X^j \mathcal{I}X^k} \right) \quad (4.39)$$

Разностные операторы (2.14) обладают аналогичными свойствами:

$$D_{ij}D_{kl} = D_{kj}D_{il} = D_{il}D_{kj} \quad (i, j, k, l = 0, \mathbf{K}, n) . \quad (4.40)$$

Равенства (4.40) вытекают из определения операторов D_{ij} и коммутативности линейных сеточных операторов:

$$D_{ij}D_{kl} = d_i^+ d_j^- d_k^+ d_l^- = d_k^+ d_j^- d_i^+ d_l^- = D_{kj}D_{il} = d_i^+ d_l^- d_k^+ d_j^- = D_{il}D_{kj}$$

Назовем свойства (4.40) индексной коммутативностью численного дифференцирования. Имеется в виду, что можно менять местами индексы у операторов: левый индекс одного оператора переставлять с левым индексом другого; или правый индекс одного - с правым индексом другого. Перестановки индексов внутри одного оператора не допускаются, так как, вообще говоря

$$D_{ij} \neq D_{ji} \quad (4.41)$$

Определим оператор сдвига по формуле

$$(T_{(k)}f)_{(j)} = f_{(j)+(k)} \quad (4.42)$$

Если существует такой вектор (k) , что выполнены равенства

$$d_m^+ = T_{(k)}d_m^-, \quad (m = 0, \mathbf{K}, n) ,$$

(то есть операторы d_m^+ и d_m^- могут быть преобразованы друг в друга с помощью сдвига), то неравенства (4.41) переходят в равенства

$$D_{ij} = D_{ji} \quad (4.43)$$

поскольку

$$D_{ij} = d_i^+ d_j^- = T_{(k)}d_i^- d_j^- = d_i^- (T_{(k)}d_j^-) = d_i^- d_j^+ = d_j^+ d_i^- = D_{ji} .$$

Ввиду того, что в большинстве разностных схем первые и вторые производные аппроксимируются независимо, свойства, аналогичные (4.39), для разностных операторов, как правило, не выполняются. Так, уже в одномерном случае для центральных разностей имеем

$$\left(f_{\frac{0}{X}} \right)_{\frac{0}{X}} \neq f_{\frac{X}{X}} . \quad (4.44)$$

Здесь использованы обозначения [71]:

$$\begin{aligned}
f_x &= (f_{i+1} - f_i)/\Delta x, & f_{\bar{x}} &= (f_i - f_{i-1})/\Delta x, \\
f_x^0 &= (f_{i+1} - f_{i-1})/(2 \cdot \Delta x) & f_{x\bar{x}} &= (f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1})/(\Delta x)^2.
\end{aligned}
\tag{4.45}$$

В многомерных случаях подобная ситуация встречается еще чаще. Например, операторы (2.18) свойствам (4.40) не удовлетворяют.

Свойства (4.40) (разностные аналоги тождеств (4.39)) для ряда задач являются не менее важными, чем, например, свойства консервативности и полной консервативности разностных схем. Если последние устанавливают, что разностная схема может быть записана в дивергентном виде [58,59], то свойства индексной коммутативности позволяют проводить с разностными схемами любые преобразования, аналогичные преобразованиям исходной системы дифференциальных уравнений. Примеры таких преобразований будут приведены ниже.

Приведем примеры систем разностных операторов вида (2.15) в R и R^2 .

Пример 1.

На одномерном шаблоне $\mathcal{M} = \{0,1\} \subset Z$ определим операторы

$$(d_0^+ f)_i = f_i, (d_1^+ f)_i = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x.$$

Согласно формулам (2.5) определим операторы d_0^-, d_1^- :

$$(d_0^- f)_i = f_i, (d_1^- f)_i = (f_i - f_{i-1})/\Delta x.$$

Определим операторы вида (2.14):

$$\begin{aligned}
(D_{00} f)_i &= f_i, (D_{01} f)_i = (f_i - f_{i-1})/\Delta x, (D_{10} f)_i = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x, \\
(D_{11} f)_i &= (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/\Delta x^2
\end{aligned}
\tag{4.46}$$

которые в обозначениях (4.45) примут вид

$$D_{00} f = f, D_{01} f = f_{\bar{x}}, D_{10} f = f_x, D_{11} f = f_{x\bar{x}},$$

При этом равенства (4.40) сводятся к тождеству

$$(f_x)_{\bar{x}} = (f_{\bar{x}})_x = f_{x\bar{x}}. \quad (4.47)$$

Пример 2.

На том же шаблоне определим операторы

$$(d_0^+ f)_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}), (d_1^+ f)_i = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x$$

Согласно формулам (2.5) определим операторы d_0^-, d_1^- :

$$(d_0^- f)_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}), (d_1^- f)_i = (f_i - f_{i-1})/\Delta x$$

Определим операторы:

$$\begin{aligned} (D_{00}f)_i &= \frac{1}{4}(f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}), (D_{01}f)_i = (D_{10}f)_i = \frac{1}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}), \\ (D_{11}f)_i &= \frac{1}{\Delta x^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

которые в обозначениях (4.45) примут вид

$$D_{00}f = f + \frac{\Delta x^2}{4} f_{x\bar{x}}, \quad D_{01}f = D_{10}f = f_{\frac{0}{x}}, \quad D_{11}f = f_{x\bar{x}}$$

При этом равенства (4.40) сводятся к тождеству

$$\underset{\text{ê}}{\underset{\text{ë}}{\underset{\text{ç}}{\text{æ}}}} f_{\frac{0}{x} \frac{0}{\bar{x}}} = D_0(f_{x\bar{x}}) = (D_0 f)_{x\bar{x}} \quad (4.49)$$

Интересно сравнить (4.49) с (4.44).

Рассмотрим двумерную ортогональную сетку с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \text{é} \Delta x^1 & 0 \text{ ù} \\ \text{ê} & \Delta x^2 \text{ ú} \\ \text{ë} & 0 \text{ û} \end{pmatrix}$$

Пример 3.

На треугольном шаблоне $\Pi = \{(0,0), (0,1), (1,0)\} \subset Z^2$ рассмотрим операторы (4.13).

Выпишем систему операторов вида (3.14):

$$\begin{aligned}
(D_{00}f)_{ij} &= \frac{1}{9}(f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 3f_{ij}), \\
(D_{11}f)_{ij} &= \frac{1}{(\Delta x^1)^2}(f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}), \\
(D_{22}f)_{ij} &= \frac{1}{(\Delta x^2)^2}(f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}), \\
(D_{01}f)_{ij} &= \frac{1}{3\Delta x^1}(f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - f_{i-1,j} - f_{i-1,j+1}), \\
(D_{10}f)_{ij} &= \frac{1}{3\Delta x^1}(f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1}), \\
(D_{02}f)_{ij} &= \frac{1}{3\Delta x^2}(f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j-1}), \\
(D_{20}f)_{ij} &= \frac{1}{3\Delta x^2}(f_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1}), \\
(D_{12}f)_{ij} &= \frac{1}{\Delta x^1 \Delta x^2}(f_{i+1,j} + f_{i,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{ij}), \\
(D_{21}f)_{ij} &= \frac{1}{3\Delta x^2}(f_{i,j+1} + f_{i-1,j} - f_{i-1,j+1} - f_{ij}),
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Эта система удовлетворяет равенствам (4.40), в чем несложно убедиться непосредственной проверкой.

Пример 4.

На четырехугольном шаблоне $\Pi = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \subset Z^2$ рассмотрим операторы (2.24), из которых получим систему операторов:

$$\begin{aligned}
(D_{00}f)_{ij} &= \frac{1}{16} (f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} + f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} + 2(f_{i-1j} + f_{i+1j} + f_{ij-1} + f_{ij+1}) + 4f_{ij}), \\
(D_{01}f)_{ij} &= (D_{10}f)_{ij} = \frac{1}{8\Delta x^1} (f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{i-1j} - f_{i-1j+1}), \\
(D_{02}f)_{ij} &= (D_{20}f)_{ij} = \frac{1}{8\Delta x^2} (f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} - 2f_{ij-1} - f_{i+1j-1}), \\
(D_{11}f)_{ij} &= \frac{1}{4(\Delta x^1)^2} (f_{i+1j-1} + 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1} - 2(f_{ij-1} + 2f_{ij} + f_{ij+1}) + f_{i-1j-1} + 2f_{i-1j} + f_{i-1j+1}), \\
(D_{22}f)_{ij} &= \frac{1}{4(\Delta x^2)^2} (f_{i-1j+1} + 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - 2(f_{i-1j} + 2f_{ij} + f_{i+1j}) + f_{i-1j-1} + 2f_{ij-1} + f_{i+1j-1}), \\
(D_{12}f)_{ij} &= (D_{21}f)_{ij} = \frac{1}{4\Delta x^1 \Delta x^2} (f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1} - f_{i+1j-1})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Свойства (4.40) для (4.51) легко установить непосредственной проверкой.

Эквивалентные преобразования разностных схем

Система динамических уравнений теории упругости для изотропной среды может быть преобразована к виду отдельных скалярных волновых уравнений, описывающих распространение волн сжатия и сдвига. Уравнения теории пластин типа Тимошенко также могут быть сведены к отдельным скалярным уравнениям.

При выполнении свойств индексной коммутативности (4.40) аналогичные преобразования можно проводить и с разностными схемами. Рассмотрим преобразования систем уравнений и соответствующих им вариационно-разностных схем. Во избежание загромождения изложения несущественными деталями будут рассмотрены однородные уравнения.

Применяя к системе уравнений Ламе

$$(I + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + G \Delta u = \mathfrak{F}^2 u / \mathfrak{F} t^2$$

оператор дивергенции, получим скалярное волновое уравнение

$$(I + 2G) \Delta p = \mathfrak{F}^2 p / \mathfrak{F} t^2, \tag{4.52}$$

где $p = \operatorname{div} u$. Аналогично, применяя к этой же системе уравнений оператор ротора, получим три скалярных волновых уравнения

$$G \Delta q_i = \partial^2 q_i / \partial t^2 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.53}$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = \text{rot } u$. Полученные уравнения описывают распространение волн сжатия и сдвига в изотропной упругой среде. Проведем аналогичные преобразования с дискретным аналогом системы уравнений Ламе (разностной схемой, построенной вариационно-разностным методом)

$$(I + G) \begin{vmatrix} D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3 \\ D_{21} u_1 + D_{22} u_2 + D_{23} u_3 \\ D_{31} u_1 + D_{32} u_2 + D_{33} u_3 \end{vmatrix} + G D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = D_{\Pi} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (4.54)$$

здесь ($D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$). Применим к первому уравнению системы (4.54) разностный оператор D_{01} , ко второму - D_{02} , к третьему - D_{03} и сложим все три уравнения.

Вследствие тождеств (4.40) получим сеточное уравнение для одной неизвестной функции

$$(I + 2G) D_{\Delta} p = D_{\Pi} p,$$

где $p = D_{01} u_1 + D_{02} u_2 + D_{03} u_3$ - сеточный аналог дивергенции. Аналогично получаются скалярные сеточные уравнения для компонент ротора: ко второму уравнению системы (4.54) применяется оператор D_{03} , к третьему - D_{02} и третье вычитается из второго; к третьему уравнению применяется оператор D_{01} , к первому - D_{03} и первое вычитается из третьего; к первому уравнению применяется оператор D_{02} , ко второму - D_{01} и второе вычитается из первого. В результате получаем три скалярных сеточных уравнения

$$G D_{\Delta} q_i = D_{\Pi} q_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30} u_2 - D_{20} u_2, D_{10} u_3 - D_{30} u_1, D_{20} u_1 - D_{10} u_2)$ - сеточный аналог ротора.

Замечание: Вариационно-разностная схема записывается в виде (4.54) и с ней можно провести данные преобразования, если в каждой ячейке основной сетки (2.1) лежит ровно одна ячейка вариационно-разностной схемы. В других случаях, например, для схемы на тетраэдральных ячейках, сеточное уравнение принимает вид

$$(I + G) \begin{vmatrix} D_{11}^* u_1 + D_{12}^* u_2 + D_{13}^* u_3 \\ D_{21}^* u_1 + D_{22}^* u_2 + D_{23}^* u_3 \\ D_{31}^* u_1 + D_{32}^* u_2 + D_{33}^* u_3 \end{vmatrix} + G D_{\Delta}^* \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = D_{\Pi} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}.$$

Здесь операторы D_{ij}^* определяются по формулам (2.18), $D_{\Delta}^* = D_{11}^* + D_{22}^* + D_{33}^*$.

Преобразование данной схемы невозможно, так как операторы (2.18) не удовлетворяют свойствам индексной коммутативности. В итоге делаем вывод, что данные

преобразования возможны для схем на шестигранных ячейках и невозможны для схемы на тетраэдральных ячейках.

Преобразование разностных схем теории пластин типа Тимошенко

Рассмотрим однородную систему уравнений пластин типа Тимошенко (1.29). Для удобства дальнейшего рассмотрения приведем ее к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} (x^1, x^2, x^3) &= (X^1/L, X^2/L, X^3/L), \quad \tau = t \cdot c/L \\ u &= u_1^0/L, \quad v = u_2^0/L, \quad w = u_3^0/L, \quad y_1 = u_1^1/L, y_2 = u_2^1/L, \quad h = h/L. \end{aligned}$$

Здесь L -некоторый линейный размер, $c = \left[\left(E / (r(1-n^2)) \right) \right]^{1/2}$ - скорость звука. В

безразмерных величинах система примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1+n}{2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} x^2} \left(\frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} x^1} - \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} x^2} \right) &= \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \\ \Delta v + \frac{1+n}{2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} x^2} \left(\frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} x^2} - \frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} x^1} \right) &= \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \\ a \left(\Delta w + \frac{\mathcal{I} y_1}{\mathcal{I} x^1} + \frac{\mathcal{I} y_2}{\mathcal{I} x^2} \right) &= \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \\ \Delta y_1 + \frac{1+n}{2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} x^2} \left(\frac{\mathcal{I} y_2}{\mathcal{I} x^1} - \frac{\mathcal{I} y_1}{\mathcal{I} x^2} \right) - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} x^1} + y_1 \right) &= \frac{\mathcal{I}^2 y_1}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \\ \Delta y_2 + \frac{1+n}{2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} x^2} \left(\frac{\mathcal{I} y_1}{\mathcal{I} x^2} - \frac{\mathcal{I} y_2}{\mathcal{I} x^1} \right) - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} x^2} + y_2 \right) &= \frac{\mathcal{I}^2 y_2}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

где $a = k^2(1-\nu)/2$. Как сказано выше, система (4.57) распадается на две независимых системы уравнений: два первых и три последних уравнения. Два первых уравнения представляют из себя частный случай системы (1.9), когда $u_3 = 0$, u_1 и u_2 не зависят от x^3 . Поэтому она может быть сведена к двум скалярным волновым уравнениям

$$\Delta p_0 = \frac{\mathcal{I}^2 p_0}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \quad \frac{1-n}{2} \Delta q_0 = \frac{\mathcal{I}^2 q_0}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \quad (4.58)$$

где $p_0 = \mathcal{I} u / \mathcal{I} x^1 + \mathcal{I} v / \mathcal{I} x^2$, $q_0 = \mathcal{I} u / \mathcal{I} x^2 - \mathcal{I} v / \mathcal{I} x^1$ - двумерные аналоги дивергенции и одной из компонент ротора. Система, составленная из трех последних уравнений, также может быть сведена к скалярным уравнениям. Дифференцируя четвертое уравнение (4.57) по x^1 , пятое - по x^2 и складывая их, получим уравнение

$$\Delta p_1 - \frac{12a}{h^2} (\Delta w + p_1) = \frac{\mathcal{I}^2 p_1}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \quad (4.59)$$

где $p_1 = \frac{\mathcal{I} y_1}{\mathcal{I} x^1} + \frac{\mathcal{I} y_2}{\mathcal{I} x^2}$. Выражая p_1 через w из третьего уравнения, после подстановки

получим уравнение четвертой степени относительно w :

$$\Delta^2 w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \Delta \left(\frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \Gamma^2} \right) + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \Gamma^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \Gamma^4} = 0. \quad (4.60)$$

Дифференцируя четвертое уравнение (4.57) по x^1 , пятое - по x^2 и вычитая второе из первого, получим уравнение

$$\frac{1-n}{2} \Delta q_1 - \frac{12a}{h^2} q_1 = \frac{\mathcal{I}^2 q_1}{\mathcal{I} \Gamma^2}, \quad (4.61)$$

где $q_1 = \frac{\mathcal{I} y_2}{\mathcal{I} x^1} - \frac{\mathcal{I} y_1}{\mathcal{I} x^2}$. Таким образом, система уравнений (4.57) приведена к виду

отдельных уравнений (4.58),(4.60),(4.61):

$$\begin{aligned} \Delta p_0 - \frac{\mathcal{I}^2 p_0}{\mathcal{I} \Gamma^2} &= 0, \\ \frac{1-n}{12} \Delta q_0 - \frac{\mathcal{I}^2 q_0}{\mathcal{I} \Gamma^2} &= 0, \\ \Delta^2 w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \Delta \left(\frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \Gamma^2} \right) + \frac{12}{h^2} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} \Gamma^2} + \frac{1}{a} \frac{\mathcal{I}^4 w}{\mathcal{I} \Gamma^4} &= 0, \\ \frac{1-n}{2} \Delta q_1 - \frac{12a}{h^2} q_1 - \frac{\mathcal{I}^2 q_1}{\mathcal{I} \Gamma^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Запишем однородные разностные схемы теории оболочек (4.4) и (4.6) в безразмерных величинах. Схема (4.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} D_{\Delta} u + \frac{1+n}{2} (D_{12} v - D_{22} u) - D_{\text{тр}} u &= 0, D_{\Delta} v + \frac{1+n}{2} (D_{21} u - D_{11} v) - D_{\text{тр}} v = 0, \\ a(D_{\Delta} w + D_{01} y_1 + D_{02} y_2) - D_{\text{тр}} w &= 0, \\ D_{\Delta} y_1 + \frac{1+n}{2} (D_{12} y_1 - D_{22} y_2) - \frac{12a}{h^2} (D_{10} w - D_{00} y_1) - D_{\text{тр}} y_1 &= 0, \\ D_{\Delta} y_2 + \frac{1+n}{2} (D_{21} y_1 - D_{11} y_2) - \frac{12a}{h^2} (D_{20} w - D_{00} y_2) - D_{\text{тр}} y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Схема на треугольных ячейках (4.6) имеет вид:

$$\begin{aligned}
D_{\Delta}^* u + \frac{1+n}{2} (D_{12}^* v - D_{22}^* u) - D_{\text{тр}} u &= 0, \quad D_{\Delta}^* v + \frac{1+n}{2} (D_{21}^* u - D_{11}^* v) - D_{\text{тр}} v = 0, \\
a(D_{\Delta}^* w + D_{01}^* y_1 + D_{02}^* y_2) - D_{\text{тр}} w &= 0, \\
D_{\Delta}^* y_1 + \frac{1+n}{2} (D_{12}^* y_1 - D_{22}^* y_2) - \frac{12a}{h^2} (D_{10}^* w - D_{00}^* y_1) - D_{\text{тр}} y_1 &= 0, \\
D_{\Delta}^* y_2 + \frac{1+n}{2} (D_{21}^* y_1 - D_{11}^* y_2) - \frac{12a}{h^2} (D_{20}^* w - D_{00}^* y_2) - D_{\text{тр}} y_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Схема (4.63) легко преобразовывается к виду, аналогичному (4.62). Применим к первому уравнению (4.63) конечноразностный оператор D_{01} , ко второму - D_{02} и сложим их:

$$D_{\Delta} (D_{01} u + D_{02} v) + \frac{1+n}{2} [(D_{01} D_{12} v - D_{02} D_{11} v) + (D_{02} D_{21} u - D_{01} D_{22} u)] - D_{\text{тр}} (D_{01} u + D_{02} v) = 0.$$

из последнего уравнения в силу свойств индексной коммутативности после замены $p_0 = D_{01} u + D_{02} v$ получим:

$$D_{\Delta} p_0 - D_{\text{тр}} p_0 = 0.$$

Аналогично, применяя к первому уравнению оператор D_{20} , ко второму - D_{10} , и вычитая второе из первого, получим после замены $q_0 = D_{20} u - D_{10} v$:

$$\frac{1-n}{2} D_{\Delta} q_0 - D_{\text{тр}} q_0 = 0$$

В третьем уравнении после замены $p_1 = D_{01} y_1 + D_{02} y_2$ получим

$$p_1 = \frac{1}{a} D_{\text{тр}} w - D_{\Delta} w \tag{4.65}$$

Применяя к четвертому и пятому уравнениям соответственно операторы D_{01} и D_{02} и складывая их, будем иметь

$$D_{\Delta} p_1 - \frac{12a}{h^2} D_{00} (D_{\Delta} w + p_1) - D_{\text{тр}} p_1 = 0$$

Подставляя в полученное уравнение значение p_1 из (4.65), получаем

$$D_{\Delta} D_{\Delta} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{\Delta} D_{\text{тт}} w + \frac{12}{h^2} D_{00} D_{\text{тт}} w + \frac{1}{a} D_{\text{тт}} D_{\text{тт}} w = 0.$$

Применяя к четвертому и пятому уравнениям соответственно операторы D_{20} и D_{10} и вычитая второе из первого, после замены $q_1 = D_{20} y_1 - D_{10} y_2$ получим уравнение

$$\frac{1-n}{2} D_{\Delta} q_0 - \frac{12}{h^2} D_{00} q_1 - D_{\text{тт}} q_0 = 0.$$

Соберем вместе полученные уравнения:

$$\begin{aligned} D_{\Delta} p_0 - D_{\text{тт}} p_0 &= 0, \\ \frac{1-n}{2} D_{\Delta} q_0 - D_{\text{тт}} q_0 &= 0, \\ D_{\Delta} D_{\Delta} w + \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{\Delta} D_{\text{тт}} w + \frac{12}{h^2} D_{00} D_{\text{тт}} w + \frac{1}{a} D_{\text{тт}} D_{\text{тт}} w &= 0, \\ \frac{1-n}{2} D_{\Delta} q_0 - \frac{12}{h^2} D_{00} q_1 - D_{\text{тт}} q_0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Здесь $p_0 = D_{01} u + D_{02} v$, $q_0 = D_{20} u - D_{10} v$, $p_1 = D_{01} \psi_1 + D_{02} \psi_2$, $q_1 = D_{20} \psi_1 - D_{10} \psi_2$. Таким образом, разностная схема (4.63) приведена к отдельным сеточным уравнениям, аналогичным дифференциальным уравнениям (4.62). Отметим, что преобразование разностной схемы в данном случае проводится совершенно аналогично преобразованию дифференциальной системы с той лишь разницей, что дифференциальные операторы заменяются разностными. При этом существенную роль в данных преобразованиях играют свойства индексной коммутативности (4.40). При отсутствии данных свойств (например, у схемы (4.6)) такие преобразования становятся возможными в исключительных случаях.

Анализ и тестирование численных схем решения двумерных задач теории пластин и оболочек

На рассмотренном выше примере одномерных задач показано, что из двух разностных схем лучшими свойствами обладает та, которая обладает свойствами индексной коммутативности. Этот вывод можно распространить и на схемы (4.4) и (4.6). Гармонический анализ схемы (4.4), аналогичный рассмотренному выше, провести несложно, поскольку схема (4.4) может быть преобразована к виду отдельных уравнений (4.66). В силу отсутствия свойств индексной коммутативности преобразование схемы

(4.6) к виду, аналогичному (4.6б), не представляется возможным, а гармонический анализ непосредственно схемы (4.6) существенно сложнее, чем анализ одного уравнения.

Поэтому для сопоставления свойств разностных схем ограничимся тестовым примером.

Рассмотрим результаты решения тестовой задачи динамического деформирования квадратной пластинки размерами 0.1×0.1 м, толщиной 0.002 м, защемленной по краю.

Пластинка имеет начальную скорость $V_0 = 100$ м/с, направленную по нормали к срединной поверхности, равномерно распределенную по поверхности пластинки.

Характеристики материала: $E=71.5$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³, $\nu=0.3$. Использовались

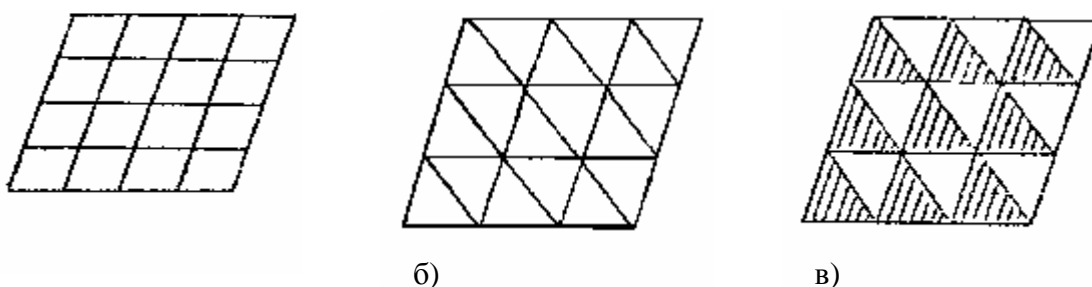


Рис. 4.6

равномерные прямоугольные сетки на квадратных, треугольных и треугольных "через 1" ячейках 11×11 узлов и 21×21 узел. Типы сеток представлены на рис. 4.6 а,б,в. В последнем случае заштрихованные ячейки не рассматривались. Из схем а, б, в свойствами индексной коммутативности обладают первая и последняя; схема б этими свойствами не обладает, так как в ней присутствуют ячейки двух типов. На рис 4.7 а, б представлены зависимости прогибов в центре пластинки от времени $y=2.55t*c/L$ (здесь $L=0.1$ м). Кривые а,б,в соответствуют четырехугольным, треугольным и треугольным "через 1"ячейкам. Результаты показывают, что при индексной коммутативности разностных операторов (кривые а, в) сходимость гораздо быстрее и качество решения выше, чем при ее отсутствии (кривая б).

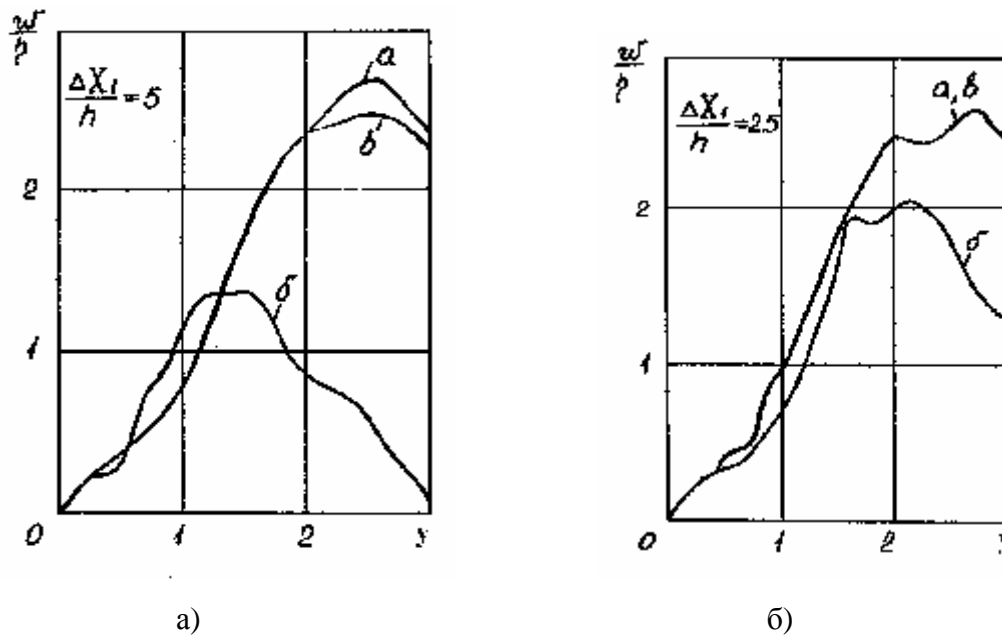


Рис. 4.7

Для сеток 11*11 (рис.4.7а) и 21*21 (рис.4.7 б) отношение размеров ячейки к толщине пластинки $h_1/h = h_2/h$ равнялось соответственно 5 и 2.5. Плохое качество разностной схемы (4.6) (случай б) хорошо согласуется с результатом исследования одномерной задачи и подтверждает сделанный вывод.

В связи с невыполнением свойств индексной коммутативности у схемы (4.6), провести ее полный анализ представляется сложным, так как она не может быть приведена к виду (4.6б). Для теоретического подтверждения плохого качества данной схемы проведем анализ ее одномерного численного решения. Направим ось OX^1 перпендикулярно ряду ячеек с постоянными значениями индекса i и рассмотрим решение, зависящее только от X^1 .

Спроектируем двумерное сеточное уравнение на ось OX^1 , при этом двумерные сеточные операторы преобразуются в одномерные, которые получим в виде

$$D_{00}^* = \frac{1}{9}(2f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1}), D_{01}^* = D_{10}^* = \frac{1}{2h_1}(f_{i+1} - f_{i-1}), D_{11} = \frac{1}{h_1^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

В результате получим систему, которая в безразмерных величинах записывается в виде, аналогичном (4.23), (4.24) или (4.25).

$$\begin{aligned} \Phi(w, y) &= a(D_{11}w + D_{01}y) - D_{\text{т}}w = 0 \\ \Lambda'''(w, y) &= D_{11}y - \frac{12a}{h^2}(D_{01}w + D_{00}^*y) - D_{\text{т}}w = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Учитывая, что $D_{00}^* = D_{00} - \frac{1}{36} D_{11}$, после преобразования (4.67) к виду одного уравнения

четвертого порядка получим:

$$\left(1 + \frac{a}{3} \left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2\right) D_{11} D_{11} w + \frac{12}{h^2} D_0^* D_{\tau\tau} w - \left(1 + \frac{1}{a}\right) D_{11} D_{\tau\tau} w + \frac{1}{a} D_{\tau\tau} D_{\tau\tau} w = 0. \quad (4.68)$$

Очевидно, что уравнение (4.68) обладает тем же недостатком, что и (4.26) или (4.28), хотя и менее выраженным. При этом приемлемый шаг пространственной сетки, дающий асимптотическую погрешность по частоте не более 5%, не должен превышать толщину оболочки. Для представленного на рис. 4.7а соотношения $h_1 / h = h_2 / h = 5$ погрешность составляет

$$\sqrt{1 + \frac{a}{3} \left(\frac{h_1}{h}\right)^2} - 1 \approx 0.75,$$

то есть период собственных колебаний получается в 1.75 раза меньше, чем в дифференциальной задаче. Это хорошо согласуется с результатом, представленным на рис. 4.7а.

«Ажурные» схемы метода конечного элемента

Все известные вариационно-разностные схемы и схемы МКЭ предполагают, что конечные элементы занимают расчетную область сплошь – без промежутков и без наложения друг на друга. Такое предположение вполне естественно, если принять во внимание, что в методе конечного элемента решение ищется во всех точках области, а не только в узлах. Однако возможен и отказ от требования сплошного заполнения области элементами – в том смысле, что элементы, участвующие в формировании системы алгебраических уравнений, заполняют расчетную область с промежутками. В качестве примера можно привести вариационно-разностную схему решения задач динамики пластин Тимошенко на треугольных ячейках «через 1», приведенную в рассмотренном выше примере (см. рис. 4.6 в). Как видно из приведенной тестовой задачи, данная схема показала преимущества по сравнению со стандартной схемой на треугольниках. К ним относятся: 1) свойства индексной коммутативности, которыми обладает данная схема; 2) равномерная сходимость по параметру сеточной задачи Dx / h . Кроме того, данная схема является более экономичной и по памяти и по быстродействию. Если рассмотреть «ажурную» неявную схему МКЭ, она будет обладать еще одним преимуществом – более разреженной матрицей системы. Данная схема имеет суммарный второй порядок

аппроксимации на равномерных сетках, хотя каждое отдельное ее уравнение имеет первый порядок. К сожалению, данная схема обладает и существенным недостатком – очевидной асимметрией. В результате на границе второй порядок аппроксимации нарушается. Эта нерешенная проблема граничных условий является основным недостатком, мешающим ее внедрению в расчетную практику.

Приведенный пример показывает, что отказ от сплошного заполнения области элементами позволяет получить ряд новых схем, некоторые из которых представляются весьма перспективными. Это относится как к вариационно-разностным схемам, так и к схемам метода конечного элемента. Возникающий при этом вопрос – что делать с оставшейся площадью или объемом? – решается относительно просто. Функцию в промежутках можно восстановить с помощью интерполяции, а сами промежутки, включая содержащуюся в них массу, приложенные к ним силы и т.д., можно либо распределить между близлежащими элементами, либо вообще не принимать их во внимание. В последнем случае все уравнения как бы умножаются на константу, равную отношению заполненного объема ко всему объему. Очевидно, что последнее обстоятельство в ряде случаев должно быть учтено.

Рассмотрим пример «ажурной» схемы решения трехмерной теории упругости. Это схема на базе линейного конечного элемента в виде тетраэдра. Известно несколько способов построения регулярных сеток на тетраэдральных ячейках. При одном из них ячейка основной сетки (параллелепипед) разбивается на 5 тетраэдров – 1 в центре и 4 по краям. Если удалить все тетраэдры, кроме центрального, то мы получим искомую схему МКЭ (рис. 4.8). При этом разбиение области на элементы производится следующим образом: область делится на шестигранники и далее в каждом из них остается по одному тетраэдру. При этом оказывается, что в расчетах участвуют не все узлы разностной сетки (см. рис. 4.9, где жирно выделены

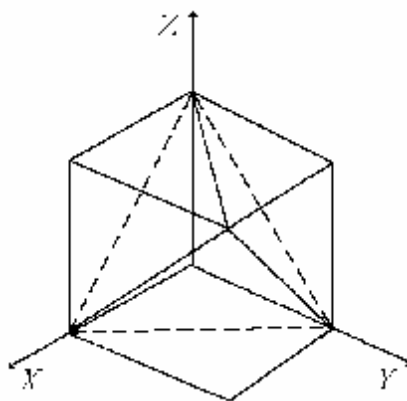


Рис.4.8

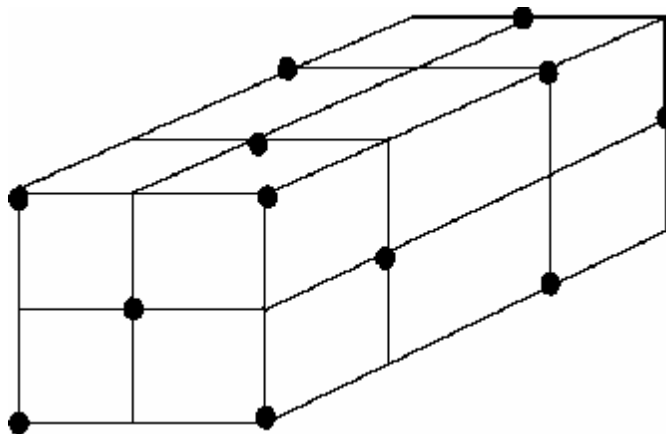


Рис. 4.9

узлы, участвующие в расчетах).

В отличие от рассмотренной выше схемы на треугольных ячейках «через 1» данная схема полностью симметрична, так как тетраэдр расположен симметрично относительно центра куба. Схема имеет на ортогональной по координатной сетке второй порядок аппроксимации. При решении динамических задач по явной схеме (или при итерационном решении системы в неявной схеме) вычислительные затраты на один временной слой (одну итерацию) для данной схемы в 2-4 раза ниже, чем для традиционной схемы на тетраэдрах или для билинейного шестигранного элемента. В случае использования явной схемы «крест» данная схема является устойчивой при тех же условиях, что и схема билинейного конечного элемента (см. следующую главу). Отметим, что данная схема МКЭ в точности совпадает с вариационно разностной схемой с идентичным расположением ячеек и, следовательно, обладает свойствами индексной коммутативности, как и рассмотренные выше вариационно-разностные схемы, содержащие по одной ячейке в ячейке основной сетки. Отметим также, что полный шаблон (окрестность узла) данной схемы имеет вид икосаэдра, то есть он существенно ближе к шару, чем куб. Следовательно, сеточная анизотропия у нее должна быть ниже, чем, например, у схемы шестигранного билинейного конечного элемента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в данном учебном пособии подход к анализу численных схем, базирующихся на вариационной постановке задачи, в некотором смысле стирает грань между МКР, В-РМ и МКЭ и позволяет глубже исследовать их возможности и недостатки. Также он позволяет комбинировать разные подходы, выбирать из них лучшее. В то же время, как показали приведенные примеры, реальные практические результаты по его применению удалось получить на сравнительно простых (линейных и билинейных) элементах. Для элементов высокого порядка полученные разностные схемы становятся настолько громоздкими, что реально провести их анализ можно только путем автоматизации этого процесса, включая построение и решение дисперсионных уравнений. В связи с этим автоматизация научных исследований в данном направлении становится одним из решающих факторов успеха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Кибец А.И., Садырин А.И., Чекмарев Д.Т. Нелинейные задачи динамики конструкций// Математическое моделирование. 2000. Т.12. N.6. С.47-50.
2. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.
3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
4. Баженов В.Г. и др. Пакет прикладных программ “Динамика-2”// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация исследований: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, Горький, 1987. С. 4-13.
5. Баженов В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек // Проблемы прочности. 1984. №11. С. 51-54.
6. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кибец А.И. О численной реализации вариационно-разностной моментной схемы решения нелинейных задач динамики нетонких оболочек при импульсных воздействиях. //Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. /Горьк. ун-т, Горький, 1988. С. 66-73.
7. Баженов В.Г., Игоничева Е.В. Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. - Нижний Новгород :ННГУ,1991.
8. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов//Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 52-57.
9. Баженов В.Г., Кибец А.И., Садырин А.И. О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. у-нт. 1986. С. 14-19.
10. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций//Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20-26.

11. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб., 2002, Вып. 64, с. 55-63.
12. Баженов В.Г., Ломунов В.К., Петров М.В., Угодчиков А.Г. Исследование больших вязкопластических деформаций цилиндрических оболочек с применением магнитно-импульсного способа нагружения. / Машиноведение, №5, 1983. - С.73-80.
13. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Устойчивость и закритическое состояние оболочек вращения при осевом ударе // Прикладная механика. 1986. Т. 22, N 9. С. 28-33.
14. Баженов В.Г., Пирогов С.А., Чекмарев Д.Т. Явная схема со стабилизирующим оператором для решения нестационарных задач динамики конструкций // Изв. РАН. МГТ. 2002. № 5. С. 120-130.
15. Баженов В.Г., Рузанов А.И., Угодчиков А.Г. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности // Численные методы механики сплошной среды. 1985. Т. 16, №. 4. С. 129-149.
16. Баженов В.Г., Угодчиков А.Г., Шинкаренко А.П. Численный анализ упругопластического деформирования оболочек с криволинейными отверстиями при импульсном нагружении // Прикладная механика. 1979. Т. 15, N 5. С. 48-53.
17. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек // Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. 159 с.
18. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Вычислительные модели нелинейных задач динамики пространственных конструкций // Актуальные проблемы механики оболочек. Труды международной конференции. Новое знание, Казань, 2000.
19. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. О конечно-разностном решении волновых уравнений теории оболочек типа Тимошенко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: изд-во Горьк. ун-та. 1981. Вып. 19. С. 41-50.
20. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 662-674.
21. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Об одном подходе к конечно-разностной аппроксимации функций и производных при численном решении задач теории пластин и оболочек типа Тимошенко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация

- и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: изд-во Горьк. ун-та. 1983. Вып. 25. С. 78-86
22. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы “крест” решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Горький: изд-во Горьк. ун-та. 1984. Вып. 28. С. 15-22.
23. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач динамики тонкостенных конструкций// Изв.РАН.МТТ.2001.№ 5. С.156-173.
24. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом .Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2000. 118 с.
25. Баженов В.Г., Шинкаренко А.П. Вариационно-разностный метод решения двумерных задач динамики упругопластических оболочек// Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз.межвуз. сб./Горьк.ун-т.Горький,1976.Вып.3.С.61-69.
26. Баженов В.Г., Шинкаренко А.П. Упругопластическое деформирование составных оболочечных конструкций при импульсных воздействиях // Проблемы прочности. 1981. № 3. С. 25-29.
27. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука. Физматлит,1998. 463 с.
28. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
29. Болдычев В.П. О связи различных схем метода конечных элементов при решении вырождающихся задач // Труды ЛПИ.1985.N 405. С.26-31.
30. Борисенко В.И., Клокова А.И. Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе //Прикладная механика.1966.Т.11, N 10. С.29-35.
31. Власов В.З.Общая теория оболочек и ее приложения в технике.М.-Л.:ГИТ-ТЛ,1949. 785 с.
32. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.. М.:Наука. 1972. 432 с.
33. Ву Р.В.Г., Уитмер Е.А. Устойчивость метода Де Вожеля численного интегрирования во времени // Ракетная техника и космонавтика.1973.N.10.С.97-100.

- 34.Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир. 1984.
- 35.Годунов С.К., Забродин А.В. Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- 36.Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы.- М.: Наука, 1973.
- 37.Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Физ.-техн. ин-т 1990. 269 с.
- 38.Гордиенко Б.А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 143-148.
- 39.Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. / Пер. с англ. под ред Н.С. Бахвалова. - М.: Мир, 1986, 318 с.
- 40.Капустин С.А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел. Учебное пособие. Н.Новгород:Изд-во ННГУ, 2002. 180 с.
- 41.Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сибирское отд-ние, 1981. 304 с.
- 42.Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Изв. Всесоюз. НИИ Гидротехники. 1967. Т. 83. С. 286-307.
- 43.Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 199 с.
- 44.Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред. // Успехи механики. Т. 8. № 4. 1985. С. 21-65.
- 45.Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела. // Проблемы динамики упругопл. сред. - М.: Мир, 1975. С.39-85.
- 46.Курант Р., Фридрихс, Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // Успехи математических наук, 1940. Вып. 8. С. 112-125.
- 47.Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
- 48.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости.- М.: Наука, 1987. 248 с.
- 49.Луговой П.З., Мукоид В.П., Мейш В.Ф. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. Киев: Наук. думка, 1991. 278 с.
- 50.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

51. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
52. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982.
53. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510 с.
54. Морино Л., Лич Дж.В., Уитмер Е.А. Уточненный метод численного расчета нестационарных процессов в упруго-пластических тонких оболочках при больших деформациях // Труды Америк. Об-ва инж. мех., серия E, 1971, N 2, ч. 2 С.157-164.
55. Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К. Нестационарные волны в деформируемых средах. Кишинев: Штиинца, 1986. 236 с.
56. Нох В.Ф. СЭЛ - совместный эйлера-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 128-184.
57. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
58. Остапенко В.В. О дивергентности конечно-разностных операторов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып.70. С.105-126.
59. Остапенко В.В. О стандартной аппроксимации дифференциальных операторов // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып.72, С.67-83.
60. Паутов А.Н. Треугольный конечный элемент для анализа изгиба пластин с учетом деформации поперечного сдвига // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем: Всесоюз межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1983. С. 95-99.
61. Пацюк В.И., Рыбакова Г.А., Сабодаш П.Ф. Волновые процессы в цилиндрической оболочке при неосесимметричном продольном ударе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 1. С. 35-42.
62. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
63. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
64. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.

- 65.Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
- 66.Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988.
- 67.Рихтмайер Р, Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
- 68.Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 129 с.
- 69.Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука, 1983. 616 с.
- 70.Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. - 430 с.
- 71.Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. -М.:Наука, 1980.
- 72.Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Диф. уравнения. 1981. Т.17. N 7. С.1317-1327.
- 73.Степаненко М.В. Об одном методе расчета нестационарных импульсных процессов деформирования в упругих конструкциях //Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых . 1976. N 2, С.53-57.
- 74.Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
- 75.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
- 76.Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. ун - та., 1986. 295 с.
- 77.Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / М.: Мир, 1967. С.212-263.
- 78.Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.:Мир, 1967. С. 316-342.
- 79.Чекмарев Д.Т. “Ажурные” схемы метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб./ М., 1997.
- 80.Чекмарев Д.Т. Анализ некоторых схем МКЭ теории оболочек типа Тимошенко//Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М. Товарищ. науч. изданий КМК, 1995. С.124-132
- 81.Чекмарев Д.Т. Построение конечноразностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и

- пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищ. науч. изданий КМК, 1999. С.129-138.
- 82.Чекмарев Д.Т. Применение стабилизирующего оператора в численных схемах решения нестационарных задач динамики конструкций// Вестник ННГУ. Серия Механика./ Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 1999.Вып. 1. С. 118-127.
- 83.Шешенин С.В., Минхуэй Фу. Полуявный метод решения задач теории упругости для тонкостенных осесимметрических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 5. С. 78-85.
- 84.Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 364 с.
- 85.Witmer E.A., Balmer H.A., Leech J.W., Pian T.H. Large dynamic deformation of beams, rings, plates and shells// AIAA Journal 1963. V. 1, № 8. P. 1848-1857
- 86.Zienkiewich O.C., Too J., Taylor R.L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Int.J. Num.Meth.Engng.1971.V.3.No.2.p.275-290.