МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

А. Л. Пригоровский
В. М. Сандалов
Т. А. Тананаева

Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений

Часть 6. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Нижний Новгород
2017

УДК 517.938:517.925(075.8)
ББК В161.6я73
П 75

П 75 Пригоровский А. Л., Сандалов В. М., Тананаева Т. А. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 6. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 22 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Петухов Ю. В.**

В данном пособии изложен краткий теоретический материал, посвященный «быстрым» и «медленным» движениям, разрывным колебаниям и автоколебаниям, приведены примеры решения задач, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения с ответами и указаниями к решению.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся по фундаментальным проблемам математики и механики, поскольку принцип разделения движений является одним из основных способов исследования динамических систем различной природы на современном этапе их развития.

УДК 517.938:517.925(075.8)
ББК В161.6я73

Содержание

Содружество математики, физики и техники нигде так ярко не проявлялось, как в создании математического аппарата теории колебаний.

Академик Л. И. Мандельштам, учитель А. А. Андронова

Введение

Одним из видов нелинейных колебаний являются автоколебания, представляющие собой периодическую смену быстрых и медленных движений. В 1929 году задача теоретического изучения таких колебаний, наблюдавшихся в мультивибраторе, была предметом обсуждения А. А. Андроновым и Л. И. Мандельштамом. Парадокс, состоящий в различии экспериментальных данных и результатов исследования математической модели, был разрешен А. А. Андроновым и А. А. Виттом с помощью использования для описания быстрых процессов гипотезы скачка, не следующего из рассматриваемой математической модели. Появившаяся позднее теория основана на исследовании более точных математических моделей в виде систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.

Теорию разрывных колебаний динамических систем второго порядка разработал в основном ученик академика А. А. Андронова – Н. А. Железцов. Он построил теорию разрывных автоколебаний ряда радиотехнических схем. Теория разрывных колебаний многомерных систем развита главным образом в работах Е. Ф. Мищенко и Л. С. Понтрягина.

Разрывные колебания находят применение в радиотехнике, радиолокации, приборостроении. Встречаются они и в механических системах.

Часть 6 учебно-методического пособия «Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений», посвященная «быстрым» и «медленным» движениям, разрывным колебаниям и автоколебаниям, включает в себя краткую теорию, 2 примера реализаций, 3 задачи с подробным решением, 14 контрольных вопросов и 20 задач для самостоятельного решения студентов с ответами и указаниями к решению.

Принцип разделения движений удобно использовать для исследования устойчивости состояний равновесия и нахождения параметров автоколебаний.

Курс теории колебаний, устойчивости движения и качественных методов исследования динамических систем читался в течение ряда лет на механико-математическом факультете ННГУ им. Н. И. Лобачевского профессором В. Д. Горяченко совместно с В. М. Сандаловым. Вадим Демьянович относил этот курс к *прикладной математике* и обращал внимание на недостаточное количество задачников по данному курсу. Это упущение частично ликвидируется в этом издании, которое посвящается светлой памяти В. Д. Горяченко.

1. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания

В дальнейшем остановимся на изучении динамики систем, в которых сравнительно медленные изменения состояния системы чередуются с быстрыми «скачкообразными». Такой характер колебаний обусловлен существенностью некоторых малых параметров на определенных этапах колебательного процесса. Пренебрежение каким-либо малым параметром математически выражается в том, что отбрасывается один из членов дифференциального уравнения, описывающего систему, именно тот его член, который содержит в качестве коэффициента пренебрегаемый параметр [1]. Это приводит к «вырожденной» динамической модели системы, не дающей возможности проследить за поведением системы во все моменты времени [2]. Для таких систем характерно присутствие двух масштабов времени и двух скоростей и ассоциирующихся с ними так называемых «быстрых» и «медленных» движений. Колебания, при которых идет чередование быстрых и медленных изменений переменных, называют разрывными или релаксационными колебаниями.

С математической точки зрения разрывные колебания могут возбуждаться в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с малыми коэффициентами при старших производных по времени [4].

Стоит отметить, что при исследовании сложных динамических систем часто, весьма эффективно, применяется данный принцип разделения движений. Применение этого принципа при обычно проводимых численными методами исследованиях сложных математических моделей высокого порядка позволяет оптимизировать алгоритм расчета за счет разделения процессов, имеющих различные характерные времена. Однако получаемые при этом точные частные решения не дают представления о зависимости поведения рассматриваемой системы от параметров, возмущений и начальных условий. В связи с этим важным является составление и анализ простых моделей, что позволяет с помощью аналитического рассмотрения получить практически необходимое качественное представление о рассматриваемых процессах. Это является основой для постановки и анализа численно получаемых решений сложных задач.

Примером может служить рассмотрение математической модели, описывающей динамику процессов в активной зоне ядерного реактора с учетом основных факторов, влияющих на процесс выделения тепла. Простота модели, введение малого параметра, использование разделения на быстрые и медленные движения дают возможность ее аналитического исследования. Результаты этого исследования, приведенные в работе Л. В. Смирнова [8], позволяют с качественных позиций продемонстрировать особенности и принципиальную возможность управления медленными процессами, как основы работы ядерных реакторов, и связать причину аварии на Чернобыльской АЭС с потерей устойчивости по быстрым процессам.

1. 1. «Быстрые» и «медленные» движения

Рассмотрим автономную динамическую систему (ДС) второго порядка, описываемую системой уравнений:

$$\{\mu\dot{x} = F(x,y), \dot{y} = G(x,y)\}, \qquad (1)$$

где μ – малый положительный параметр (определяет «малость» коэффициента при старшей производной), функции $F\,(x,y)$ и $G\,(x,y)$ ограничены и дифференцируемы во всей интересующей нас области фазового пространства системы (1).

При $0 < \mu \ll 1$ система (1) может быть разбита на две подсистемы: быстрых и медленных движений.

Подсистема быстрых движений имеет вид:

$$\left\{\dot{x} = \frac{1}{\mu}F(x,y_0), y = y_0 = \mathrm{const}\right\}. \qquad (2)$$

Отметим, что особыми точками системы (2) будут точки пересечения линий $y = y_0 = \mathrm{const}$ с кривой $F(x,y) = 0$ [2].

Из полученной системы можно сделать вывод: так как μ мало, в рассматриваемой области $\dot{x}$ велико ($\dot{x} \to \infty$ при $\mu \to 0$), то есть переменная x изменяется быстро, а скорость $\dot{y}$ остается равной нулю. Другими словами, в данной области за малое время переменная y не успевает изменяться, а переменная x меняется на конечные величины. Будем считать, что фазовые траектории быстрых движений расположены на прямых, параллельных оси Ox. При этом фазовая координата растет, если $F(x,y) > 0,$ и убывает при $F(x,y) < 0$.

Область фазового пространства вне малой окрестности кривой $F(x,y) = 0$ называется областью быстрых движений.

Для точек, принадлежащих кривой $F(x,y) = 0$, имеем подсистему медленных движений:

$$\{F(x,y) = 0, \dot{y} = G(x,y)\}. \qquad (3)$$

В данном случае происходит вырождение системы (1) и ее порядок уменьшается на единицу. Фазовые траектории медленных движений расположены на кривой $F(x,y) = 0$, при этом y растет там, где $G(x,y) > 0$ и убывает при $G(x,y) < 0$. Кривая $F(x,y) = 0$ со своей малой окрестностью называется областью медленных движений.

Кривая $F(x,y) = 0$ может быть разделена на участки F^+ – часть кривой $F(x,y) = 0$, к которой подходят траектории быстрых движений, и F^- – часть кривой $F(x,y) = 0$, от которой траектории быстрых движений уходят. Таким образом, точки кривой являются либо устойчивыми, либо неустойчивыми относительно быстрых движений.

1. 2. Графическое представление «быстрых» и «медленных» движений и разрывные автоколебания

Для наглядного представления построим на плоскости xOy кривую $F(x,y) = 0$ и прямые $y = \text{const}$, и, разделив кривую на участки F^+ и F^- и проставив направления убывания-возрастания на прямых $y = \text{const}$, получим фазовые траектории. Медленные процессы (система (3)) происходят по кривой $F(x,y) = 0$.

После окончания быстрого процесса по фазовой траектории $y = \text{const}$ на участках F^+ переменные x и y меняются в пределах данной кривой, в соответствии с системой (3). Медленный процесс заканчивается либо в устойчивом по медленным процессам состоянии равновесия на участке F^+, если оно имеется, либо, дойдя до границы между участками F^+ и F^-, уходит по траектории быстрых движений или к другой части кривой F^+ или в бесконечность.

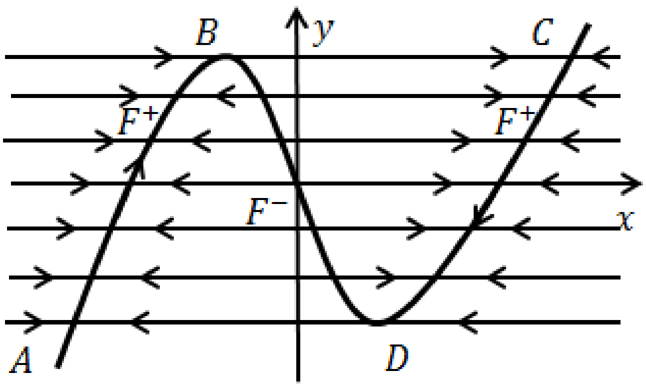

Рис. 1.1

На рис. 1.1 рассмотрен случай, когда изображающая точка по траектории быстрых движений входит в область медленных движений и движется в этой области, пока не достигнет границы между участками F^+ и F^-, после чего вновь срывается в область быстрых движений и т. д. Таким образом, при $\mu \to 0$ изображающая точка будет двигаться по траектории, состоящей из чередующихся кусков двух типов: из отрезков траекторий быстрых движений, каждый из которых пробегается мгновенно, и из отрезков траекторий медленных движений, проходимых изображающей точкой за конечные промежутки времени. Такие траектории являются математическими образами разрывных колебаний. Среди этих траекторий возможны и замкнутые траектории – разрывные предельные циклы (например, цикл ABCD).

1. 3. Примеры реализаций

Пример №1.

Срезы $F(x,y) = 0$ и $G(x,y) = 0$ заданы графически (рис. 1.2). В данном случае представлено поведение фазовых траекторий при возникновении автоколебаний и предельный цикл в виде замкнутой кривой, состоящей из участков быстрых и медленных движений. На участках F^+ кривой $F(x,y) = 0$ нет устойчивого по медленным процессам состояния равновесия. Крестиками на рис.1.2 отмечены неустойчивые состояния равновесия на кривой медленных движений, точками – устойчивые состояния равновесия.

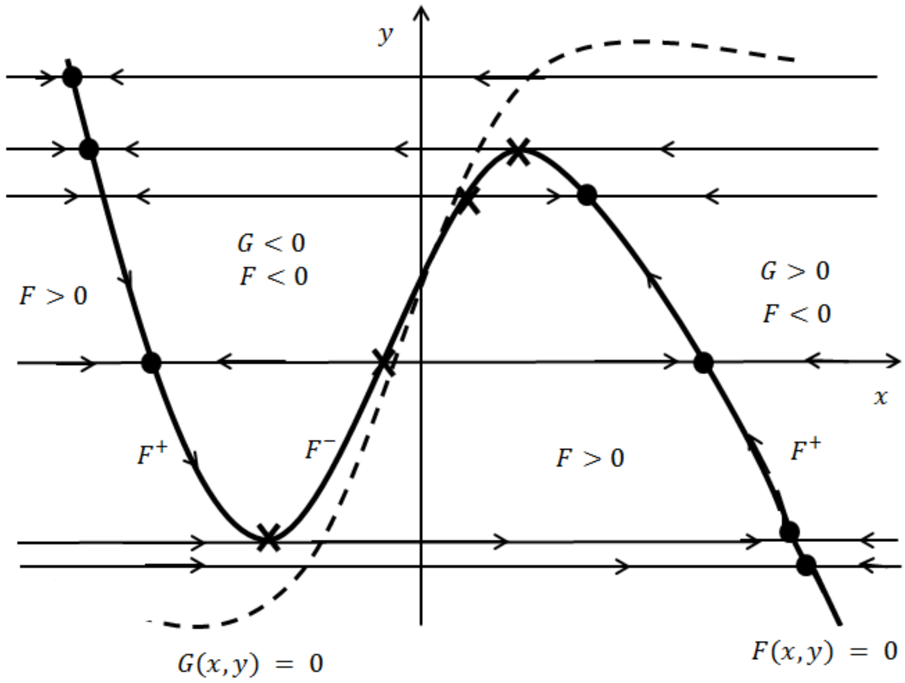

Рис. 1.2

На рис. 1.3 можно увидеть, что задание произвольных начальных условий (точка M) приводит к возникновению устойчивого предельного цикла ABCD, которому соответствует автоколебательный режим.

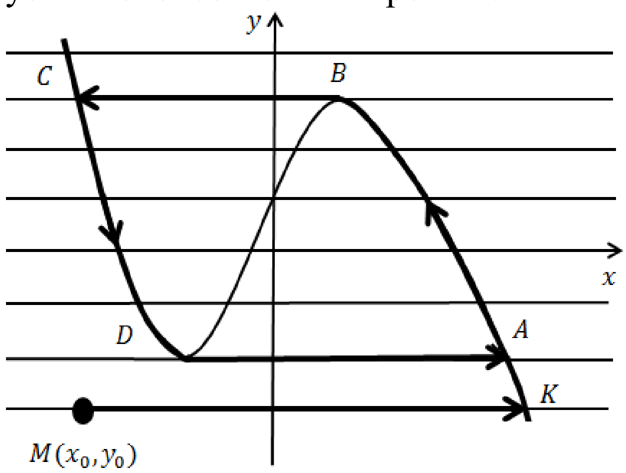

Рис. 1.3

Изображающая точка M с заданными начальными условиями движется по прямой быстрых движений до точки устойчивого состояния равновесия K, находящейся на кривой медленных движений. Затем, дойдя до неустойчивого состояния равновесия (точки B), срывается на прямую быстрых движений, мгновенно оказываясь в точке C (устойчивое состояние равновесия), расположенной на кривой медленных движений. Далее точка движется по кривой медленных движений к точке D (неустойчивое состояние равновесия) и, достигая ее, снова срывается на прямую быстрых движений, оказываясь в точке A (устойчивое состояние равновесия). Затем все повторяется.

В действительности траектория быстрых движений не является прямой, перемещение по траектории происходит не мгновенно, а за некоторый малый промежуток времени.

На рис. 1.4 схематично представлена осциллограмма переменной x, которая имеет пилообразную форму. Время, за которое изображающая точка проходит весь предельный цикл, можно представить в виде:

$T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$

Таким образом, рассмотренная система является автоколебательной с мягким режимом возбуждения, ABCD – устойчивый предельный цикл, которому отвечают разрывные автоколебания в динамической системе. Чем меньше μ, тем точнее приведенные рисунки отражают процессы в реальной системе.

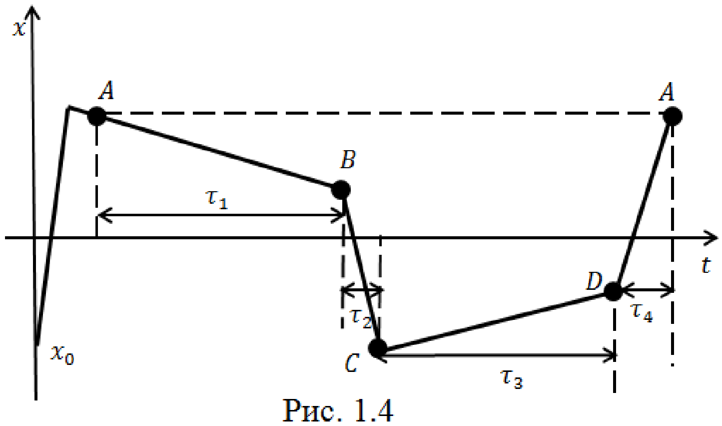

Рис. 1.4

Пример №2.

Функции $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$ заданы графически (рис. 1.5).

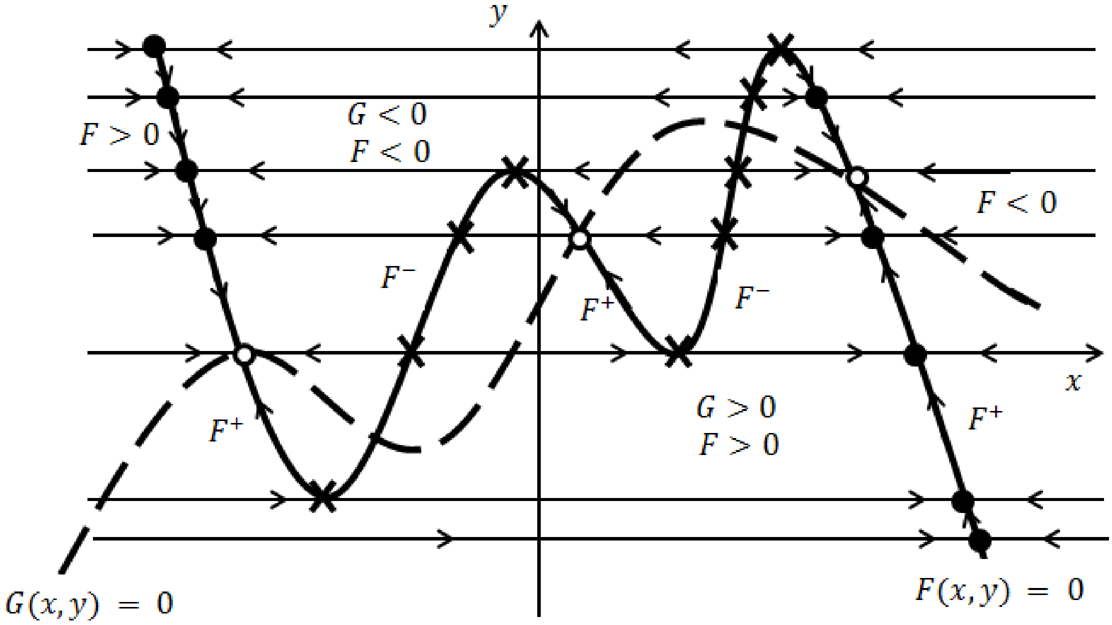

Рис. 1.5

Предельного цикла нет, так как медленные процессы на нескольких устойчивых по быстрым процессам участках F^+ стремятся к устойчивым по быстрым и по медленным движениям состояниям равновесия. Все фазовые траектории, даже если они содержат участки быстрых и медленных процессов, при любых начальных условиях приходят в одну из трех точек устойчивого состояния равновесия.

Система не автоколебательная, предельно ограниченная, диссипативная.

2. Примеры решения задач

Задача №1. Осциллятор с малой массой

$$\mu\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0, \qquad 0 < \mu \ll 1, h > 0, k > 0.$$

Решение: Запишем систему в форме Коши:

$$\{\mu\dot{y} = -hy - kx, \dot{x} = y\}.$$

Находим состояния равновесия системы, приравнивая правые части уравнений системы к нулю. В результате имеем единственное состояние равновесия $x = y = 0$.

Разбиваем исходную систему на подсистемы быстрых и медленных движений.

Подсистема быстрых движений:

$$\{x = \mathrm{const}, \mu\dot{y} = -hy - kx\}.$$

Подсистема медленных движений:

$$\{\dot{x} = y, -hy - kx = 0\}.$$

В данной задаче функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ имеют следующий вид:

$F(x,y) = -hy - kx,$

$G(x,y) = y.$

Построим эти функции в плоскости xy. Определяя знак функции $F(x,y)$ в каждой области плоскости, на которые ее разбивает прямая $F(x,y) = -hy - kx = 0$, и направление движения изображающей точки по траекториям быстрых движений, можно заметить, что все точки прямой $F(x,y) = 0$ являются устойчивыми относительно быстрых движений. Далее, определяя знак функции $G(x,y)$ в каждой из областей плоскости, на которые ее разбивает прямая $G(x,y) = y = 0$, можно указать направление движения изображающей точки по прямой медленных движений. Из рис. 2.1 можно сделать вывод, что состояние равновесия $O\ (0,0)$ является устойчивым как для быстрых движений, так и для медленных движений.

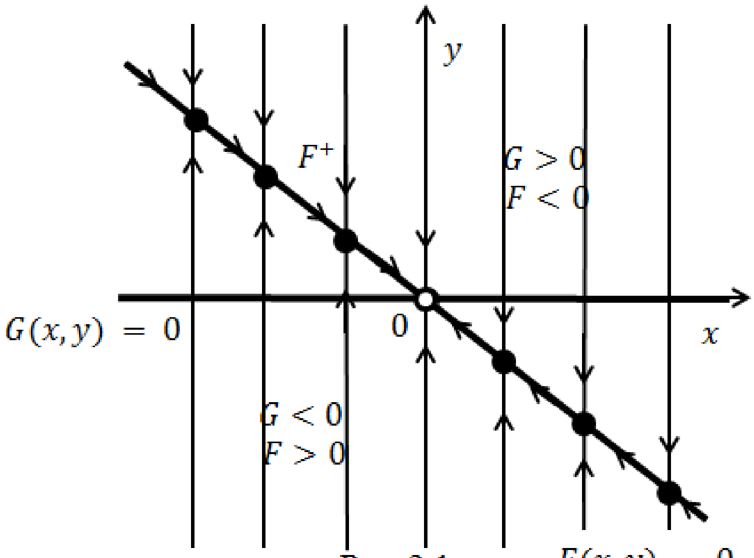

Рис. 2.1

Таким образом, при любых начальных условиях динамическая система придет в устойчивое состояние равновесия. Динамическая система является не автоколебательной, предельно ограниченной, диссипативной.

Задача №2. Исследовать возможность разрывных автоколебаний.

$$\{\mu\dot{x} = -x - y - k\varphi(x), \dot{y} = x\},$$

где $\varphi(x) = -x + \frac{x^3}{3}, k = \text{const}, 0 < \mu \ll 1$.

Решение: Система имеет единственное состояние равновесия $O\ (0,0)$.

Подсистема быстрых движений:

$$\{y = \text{const}, \mu\dot{x} = -x - y - k\varphi(x)\}.$$

Подсистема медленных движений:

$$\{\dot{y} = x, -x - y - k\varphi(x) = 0\}.$$

График функции $F(x,y) = 0$ определяется уравнением:

$$-x - y - k(-x + \frac{x^3}{3}) = 0.$$

График функции $G(x,y) = 0$ определяется уравнением: $x = 0$.

Участки F^+ и F^- определяются знаком производной функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = k - 1 - kx^2. \tag{4}$$

Построим график функции $F(x,y) = 0$, то есть $y = (k-1)x - -k\frac{x^3}{3} = 0$. Проанализируем знаки производной (4). В зависимости от значения k возможны три случая:

1. $0 < k < 1$.

В этом случае все точки прямой $F(x,y) = 0$ являются устойчивыми относительно быстрых движений. Состояние равновесия $O\ (0,0)$ устойчиво относительно как быстрых, так и медленных движений (рис. 2.2).

Таким образом, любые возмущения, возникающие в системе, заканчиваются в точке устойчивого состояния равновесия $O\ (0,0)$. Динамическая система является не автоколебательной, предельно ограниченной, диссипативной.

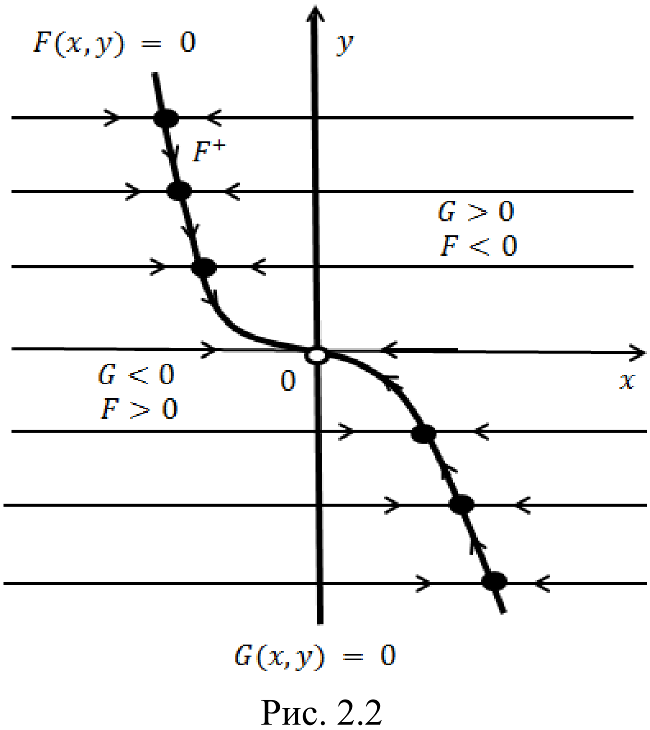

Рис. 2.2

2. $k < 0$.

На рис. 2.3 представлены траектории быстрых и медленных движений.

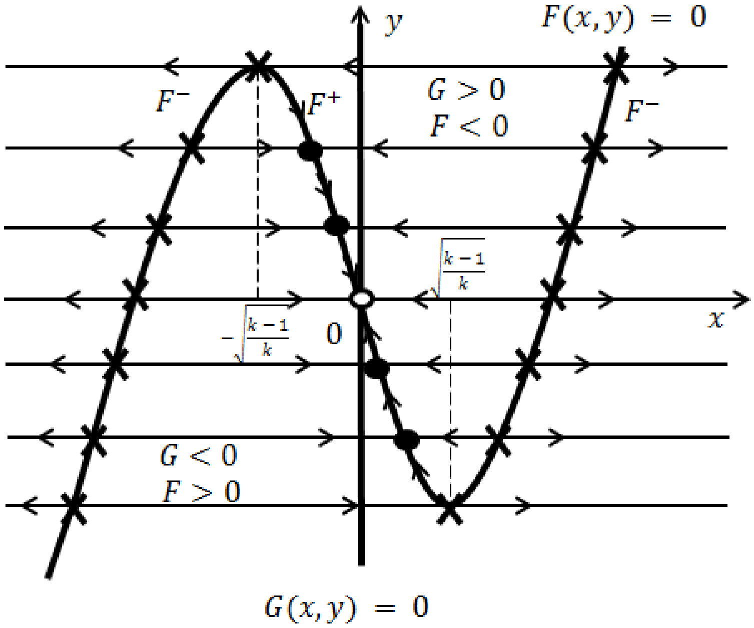

Рис. 2.3

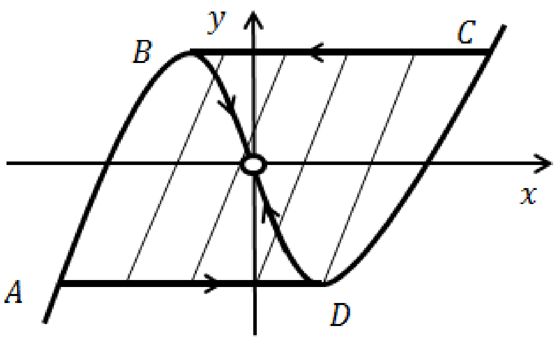

Рис. 2.4

В данном случае имеем неустойчивый разрывный предельный цикл ABCD (рис. 2.4). Заштрихованная область является областью притяжения состояния равновесия. Область вне предельного цикла ABCD – область траекторий быстрого движения.

Динамическая система не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.

3. $k > 1$.

На рис. 2.5. представлены траектории быстрых и медленных движений.

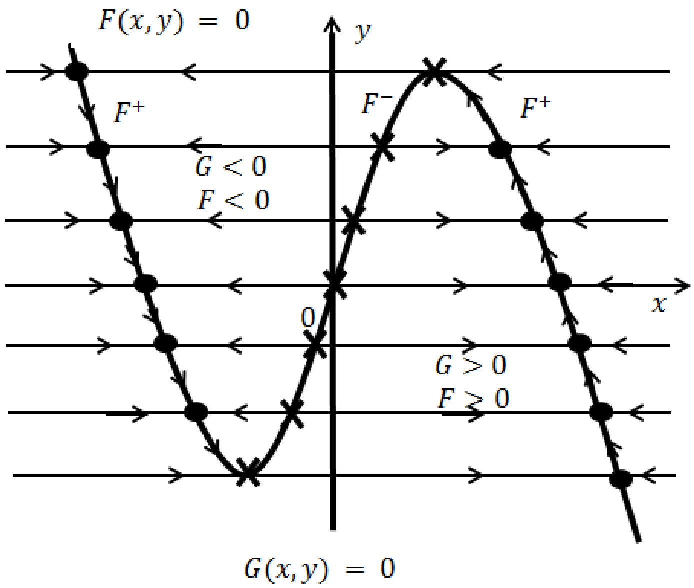

Рис. 2.5

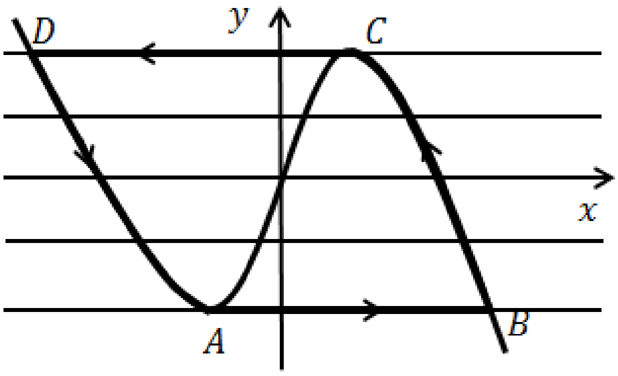

Рис. 2.6

В данном случае существуют разрывные автоколебания – предельный цикл ABCD (рис. 2.6); мягкий режим возбуждения автоколебаний. Состояние равновесия $O\,(0,\ 0)$ – неустойчивое. Динамическая система автоколебательная, не диссипативная, предельно ограниченная.

Время, за которое изображающая точка проходит весь предельный цикл, выглядит следующим образом:

$T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$ (рис. 2.7). Колебания $x\,(t)$ имеют пилообразную форму.

При $k < 1$ (рис. 2.2, 2.3) устойчивого предельного цикла нет. При $k > 1$ (рис. 2.5) имеет место устойчивый предельный цикл, в который изображающая точка приходит из любой точки фазовой плоскости. Физически ему отвечают разрывные автоколебания с мягким режимом возбуждения.

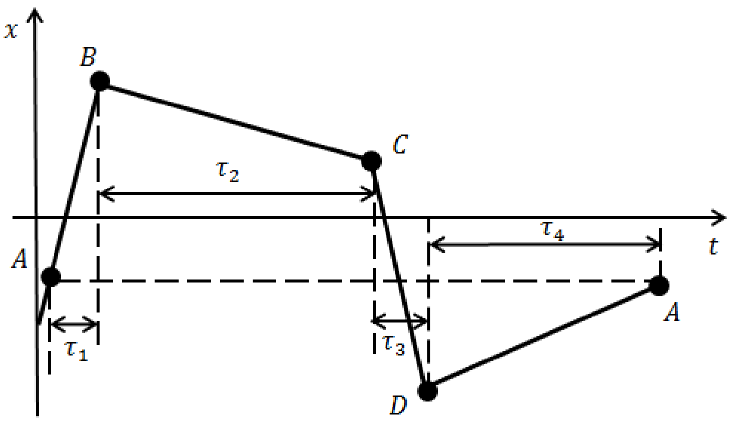

Рис. 2.7

Задача №3. Построить фазовый портрет динамической системы. Дать характеристику динамической системе. Указать область притяжения предельного цикла.
$\{\mu\dot{x} = y - \varphi(x), \dot{y} = ax, a < 0, 0 < \mu \ll 1\}$, где $\varphi(x)$ имеет вид как на рис. 2.8.

Решение: Система имеет единственное состояние равновесия $O\,\big(0,\ \ \varphi(0)\big)$.

График функции $F(x, y)\ =\ 0$ определяется уравнением $y = \varphi(x)$.

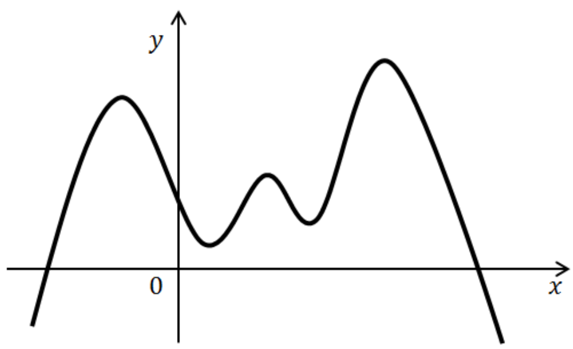

Рис. 2.8

График функции $G(x, y)\ =\ 0$ определяется уравнением $ax = 0$.

На рис. 2.9 представлены траектории быстрых и медленных движений.

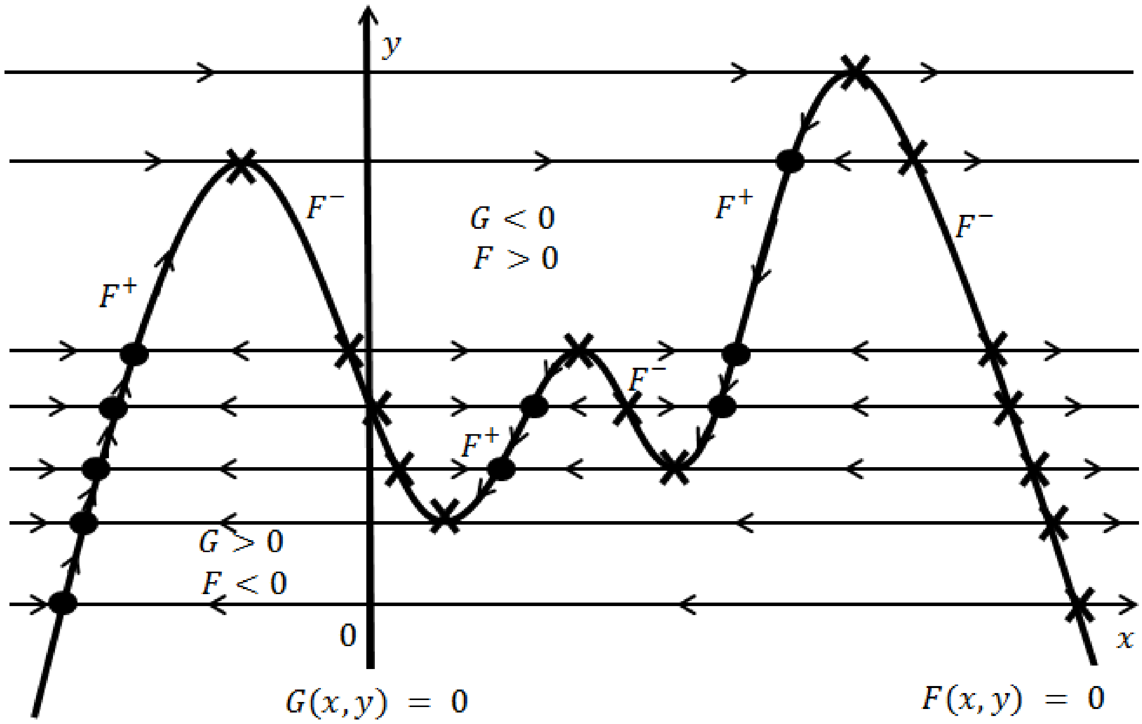

Рис. 2.9

$ABCDEF$ – устойчивый разрывный предельный цикл (рис. 2.10).

Заштрихованная область на рис. 2.11 – область притяжения предельного цикла. Динамическая система автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.

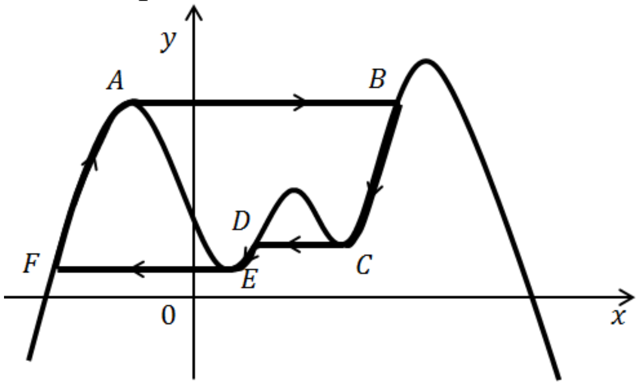

Рис. 2.10

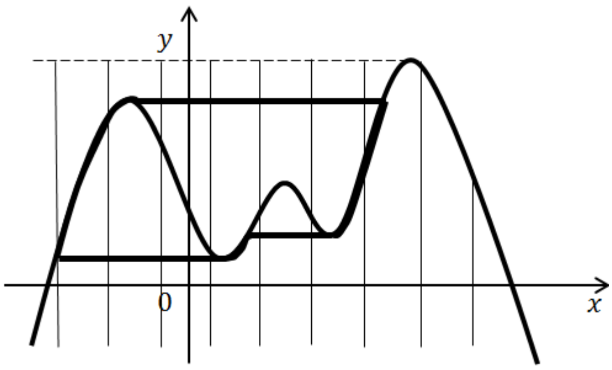

Рис. 2.11

3. Контрольные вопросы

1. Что такое динамическая система?
2. Какая ДС называется автоколебательной? Привести примеры автоколебательных систем.
3. Какая ДС называется диссипативной? Свойства диссипативных систем.
4. Какая ДС называется предельно ограниченной?
5. Что такое предельный цикл?
6. В чем отличие предельных циклов от периодических траекторий консервативных систем?
7. Что такое автоколебания?
8. Что такое разрывные колебания?
9. В чем математически выражается пренебрежение малым параметром?
10. Дать определение области медленных движений и области быстрых движений.
11. Как изменяются фазовые координаты в зависимости от знаков функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$?
12. В каких системах с математической точки зрения могут существовать разрывные колебания?
13. Какой вид имеют подсистема быстрых и подсистема медленных движений?
14. В каких случаях заканчивается медленный процесс?

4. Задачи для самостоятельной работы

1. Построить фазовый портрет динамической системы. Указать бифуркационное значение параметра a. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения предельных циклов. Дать характеристику динамической системы:
   $$\{\mu\dot{x} = y + F(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
   где $a \in R$, $a \neq 0$, а функция $F(x)$ имеет вид, как на рис. 4.1.

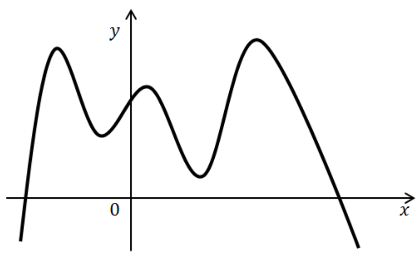

Рис. 4.1

2. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать область притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:
   $$\{\mu\dot{x} = y - \varphi(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
   где $a \in R$, $a \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ имеет вид, как на рис. 4.2.

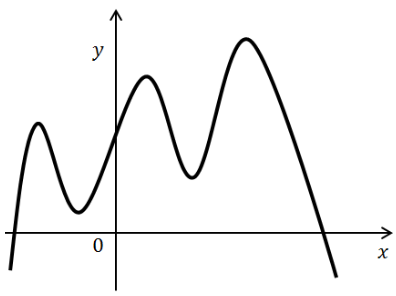

Рис. 4.2

3. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения предельных циклов. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y + F(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
где $a < 0$, а функция $F(x)$ имеет вид, как на рис. 4.3.

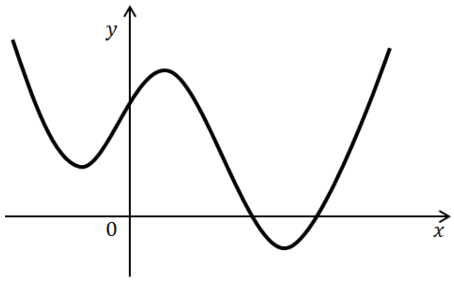

Рис. 4.3

4. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y + F(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
где $a \in R$, $a \neq 0$, а функция $F(x)$имеет вид, как на рис. 4.4.

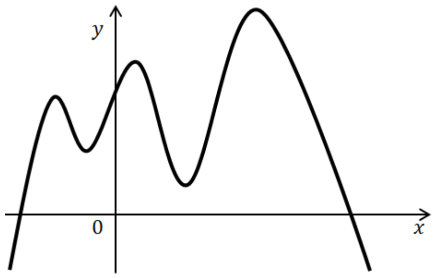

Рис. 4.4

5. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения предельных циклов. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y - \psi(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
где $a < 0$, а функция $\psi(x)$имеет вид, как на рис. 4.5.

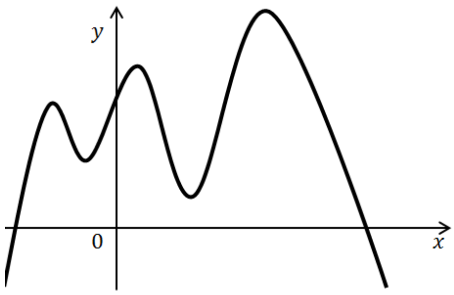

Рис. 4.5

6. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y - \varphi(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
где $a < 0$, а функция $\varphi(x)$имеет вид, как на рис. 4.6.

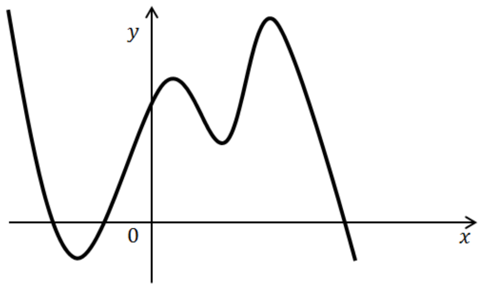

Рис. 4.6

7. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y - \varphi(x), \dot{y} = ax, 0 < \mu \ll 1\},$$
где $a \in R$, $a \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ имеет вид, как на рис. 4.7.

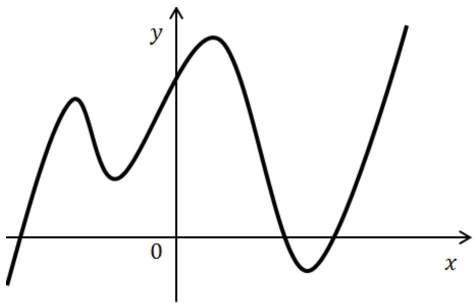

Рис. 4.7

8. Построить фазовый портрет динамической системы. Найти бифуркационные значения параметра a. Выяснить возможность разрывных ав-

токолебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = x(1 - x^2) - y, \dot{y} = x - ay, a > 0, 0 < \mu \ll 1\}.$$

9. Построить фазовый портрет динамической системы. Найти бифуркационные значения параметра b. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = x(1 - x^2) - y, \dot{y} = y - bx, b > 0, 0 < \mu \ll 1\}.$$

10. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y - x(x^2 - 5)(x^2 - 1), \dot{y} = ax, a < 0, 0 < \mu \ll 1\}.$$

11. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y - x(x^2 - 5)(x^2 - 1), \dot{y} = x - y, 0 < \mu \ll 1\}.$$

12. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y + x(x^2 - 9)(x^2 - 1), \dot{y} = ax, a \in R, a \neq 0{,}0 < \mu \ll 1\}.$$

13. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y + x(x^2 - 9)(x^2 - 1), \dot{y} = x - y, 0 < \mu \ll 1\}.$$

14. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y - x(x^2 - 9a^2)(x^2 - 4a^2), \dot{y} = x, a \in R, 0 < \mu \ll 1\}.$$

15. Построить фазовый портрет динамической системы. Указать области притяжения состояний равновесия. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = y + ax^2(1 - bx^2), \dot{y} = cx, a < 0, b < 0, c \neq 0{,}0 < \mu \ll 1\}.$$

16. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = x^3 - 3x^2 - x + 3 + y, \dot{y} = -x, 0 < \mu \ll 1\}.$$

17. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y - x(2 - 3x^2 + x^4), \dot{y} = x, 0 < \mu \ll 1\}.$$

18. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:

$$\{\mu\dot{x} = -y + e^{-2x}, \dot{y} = ax, a \in R, a \neq 0{,}0 < \mu \ll 1\}.$$

19. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = 2^{-5x} - y, \dot{y} = x, 0 < \mu \ll 1\}.$$
20. Построить фазовый портрет динамической системы. Выяснить возможность разрывных автоколебаний. Дать характеристику динамической системы:
$$\{\mu\dot{x} = y - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 4, \dot{y} = ax, a \in R, a \neq 0, 0 < \mu \ll 1\}.$$

5. Ответы и указания к решению

1. Состояние равновесия $O\ (0, -F(0))$ неустойчиво. $a = 0$ – бифуркационное значение параметра. Возможно два случая:
   a) $a < 0$. ДС автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
   b) $a > 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
2. Возможно два случая:
   a) $a < 0$. Состояние равновесия $O\ (0, \varphi(0))$ устойчиво относительно быстрых и медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
   b) $a > 0$. Состояние равновесия $O\ (0, \varphi(0))$ устойчиво относительно быстрых движений и неустойчиво относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
3. Состояние равновесия $O\ (0, -F(0))$ неустойчиво. ДС автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
4. Состояние равновесия $O\ (0, -F(0))$ неустойчиво. Возможно два случая:
   a) $a < 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
   b) $a > 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
5. Состояние равновесия $O\ (0, \psi(0))$ устойчиво относительно быстрых и медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
6. Состояние равновесия $O\ (0, \varphi(0))$ устойчиво относительно быстрых и медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
7. Возможно два случая:
   a) $a < 0$. Состояние равновесия $O\ (0, \varphi(0))$ устойчиво относительно быстрых и медленных движений. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.

b) $a > 0$. Состояние равновесия $O\ (0, \varphi(0))$ устойчиво относительно быстрых движений и неустойчиво относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.

8. $a = 1$ – бифуркационное значение параметра. Возможно два случая:
   a) $0 < a \leq 1$. Состояние равновесия $O_1(0,0)$ неустойчиво. ДС автоколебательная, не диссипативная, предельно ограниченная.
   b) $a > 1$. Состояния равновесия: $O_1(0,0)$ неустойчиво, $O_{2,3}(\pm\sqrt{1-\frac{1}{a}}, \pm\frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{1}{a}})$ устойчивы. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.
9. $b = 1$ – бифуркационное значение параметра. Возможно два случая:
   a) $0 < b < 1$. Состояния равновесия: $O_1(0,0)$ неустойчиво, $O_{2,3}(\pm\sqrt{1-b}, \pm b\sqrt{1-b})$ устойчивы относительно быстрых движений и неустойчивы относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
   b) $b \geq 1$. Состояние равновесия $O_1(0,0)$ неустойчиво. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
10. Состояние равновесия $O\ (0,0)$ устойчиво относительно быстрых движений и неустойчиво относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
11. Состояния равновесия $O_1(0,0)$, $O_2(-\sqrt{3+\sqrt{3}}, -\sqrt{3+\sqrt{3}})$, $O_5(\sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3}})$ устойчивы, $O_3(-\sqrt{3-\sqrt{3}}, -\sqrt{3-\sqrt{3}})$, $O_4(\sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{3-\sqrt{3}})$ неустойчивы. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.
12. Состояние равновесия $O(0,0)$ неустойчиво. Возможно два случая:
    a) $a < 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
    b) $a > 0$. ДС автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
13. Состояния равновесия $O_1(0,0)$, $O_2(-\sqrt{5+\sqrt{17}}, -\sqrt{5+\sqrt{17}})$, $O_5(\sqrt{5+\sqrt{17}}, \sqrt{5+\sqrt{17}})$ неустойчивы, $O_3(-\sqrt{5-\sqrt{17}}, -\sqrt{5-\sqrt{17}})$, $O_4(\sqrt{5-\sqrt{17}}, \sqrt{5-\sqrt{17}})$ устойчивы. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
14. Состояние равновесия $O(0,0)$ устойчиво. Возможно два случая:
    a) $a = 0$. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.
    b) $a \neq 0$. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.

15. Состояние равновесия $O(0,0)$ неустойчиво. Возможно два случая:
    a) $c < 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
    b) $c > 0$. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
16. Состояние равновесия $O(0,-3)$ устойчиво. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
17. Состояние равновесия $O(0,0)$ устойчиво. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.
18. Возможно два случая:
    a) $a < 0$. Состояние равновесия $O(0,1)$ устойчиво относительно быстрых движений и неустойчиво относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
    b) $a > 0$. Состояние равновесия $O(0,1)$ устойчиво. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
19. Состояние равновесия $O(0,1)$ устойчиво. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.
20. Возможно два случая:
    a) $a < 0$. Состояние равновесия $O(0,-4)$ устойчиво. ДС не автоколебательная, диссипативная, предельно ограниченная.
    b) $a > 0$. Состояние равновесия $O(0,-4)$ устойчиво относительно быстрых движений и неустойчиво относительно медленных движений. ДС не автоколебательная, не диссипативная, не предельно ограниченная.

Список литературы

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Издание второе. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 916 с.
2. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 385 с.
3. Вибрации в технике. Справочник, том 2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – Издание второе, переработанное и дополненное. – М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.
5. Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка // Радиофизика 1. – 1958. – № 1.
6. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975.
7. Некоркин В. И. Лекции по основам теории колебаний: Учебное пособие. – Нижний Новгород: издательство Нижегородского госуниверситета, 2012.– 311 с.
8. Смирнов Л. В. Математическое моделирование динамики ЯЭУ при проектировании и анализе запроектных и аварийных процессов. Часть 1. Исследование причин и начального этапа аварии на Чернобыльской АЭС. – Нижний Новгород: издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 48 с.

Александр Леонидович **Пригоровский**
Владимир Михайлович **Сандалов**
Татьяна Андреевна **Тананаева**

Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений

Часть 6. «Быстрые» и «медленные» движения. Разрывные колебания и автоколебания.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.