Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов
Светлана Серафимовна Круглова
Евгений Валентинович Круглов

Несобственные интегралы и ряды
Часть 2
Числовые и функциональные ряды

Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов

Рекомендовано Методической комиссией
механико-математического факультета

Нижний Новгород, 2014

Ряды вообще являются эффективным средством для приближённых вычислений, для решения всевозможных функциональных уравнений, исследования колебательных процессов и т.д. Сначала изучим ряды, членами которых являются числа: числовые ряды.

§ 1. Числовые ряды

1. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots. \tag{2.1}$$

Соединим их знаком +; полученное символическое выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{2.2}$$

называется *числовым рядом*. Числа (2.1) называются *членами ряда*: u_1 – первый член, u_2 – второй,…, u_n – n – ый или общий член ряда ($n = 1,2,\ldots$). Что понимать под символом (2.2), т.е. под «бесконечной суммой» чисел? Составим сумму n первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{2.3}$$

– она называется частичной или частной суммой ряда порядка n. Получили числовую последовательность $\{S_n\}$ ($n = 1,2,\ldots$).

Если существует (конечный) предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \equiv S$, то ряд называется *сходящимся*, а сам предел, т.е. число S, называется *суммой ряда*, и пишут

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{2.4}$$

Если же конечного предела частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся, он суммы (конечной) не имеет. Однако, если $S_n \to +\infty$ (или $S_n \to -\infty$), то говорят, что ряд расходится к сумме $S = +\infty$ (или $S = -\infty$). Нумерацию членов ряда иногда удобнее начинать не с 1, а с некоторого целого числа m: $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+n} + \ldots$.

Рассмотрение числовых рядов есть новая форма исследования числовых последовательностей, ибо: 1) каждому ряду (2.2) однозначно соответствует последовательность (2.3) (его частичных сумм) и 2) каждой заданной последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует ряд

$$S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) + \ldots$$

с частичной суммой S_n.

2. Ряд геометрической прогрессии. Рядом бесконечной геометрической прогрессии $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$ называется ряд

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \tag{2.5}$$

Частичная сумма порядка n при $q \neq 1$ есть

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^{n-1}\cdot q}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n. \qquad (2.6)$$

1) Пусть $|q|<1$ (в этом случае соответствующая геометрическая прогрессия называется убывающей). Тогда $q^n \to 0$ при $n\to\infty$, поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, значит, ряд сходится и имеет сумму $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Пусть $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$: конечного предела нет – ряд расходится.

3) При $q=1$ формулой (2.6) суммы пользоваться нельзя. В этом случае имеем ряд $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\,\text{раз}}+\ldots$ с частной суммой $S_n = na \to \infty$ при $n\to\infty$ (если $a\neq 0$), ряд расходится.

4) При $q=-1$ ряд (2.5) имеет вид $a-a+a-\ldots+(-1)^{n-1}a+\ldots$. У него $S_n = \begin{cases} a, \text{если } n \text{ нечётное}, \\ 0, \text{если } n \text{ чётное}, \end{cases}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (если $a\neq 0$).

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Ряд геометрической прогрессии (2.5) 1) в случае* $|q|<1$ *сходится и имеет сумму* $\dfrac{a}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \equiv a + aq + \ldots + aq^n + \ldots = \frac{a}{1-q},\ |q|<1; \qquad (2.7)$$

2) а при $|q|\geq 1$ *расходится (если* $a\neq 0$*).*

(Например, для $a=1$ и $|x|<1$, имеем $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. Этот результат можно получить формально делением «уголком» 1 на $(1-x)$.)

3. Остаток ряда.

Теорема 2.2. *Отбрасывание, добавление или изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость (а только на его сумму).*

Δ Это следует из того, что при достаточно больших n частичная сумма нового ряда отличается от соответствующей частичной суммы исходного ряда (2.2) на некоторое постоянное число A, поэтому эти частичные суммы одновременно имеют или нет предел при $n\to\infty$. Например, отбросим k первых членов ряда (2.2). Получим ряд

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+n} + \ldots. \qquad (2.8)$$

Его частичную сумму порядка n обозначим σ_n. Очевидно

$$S_{k+n} = S_k + \sigma_n. \qquad (2.9)$$

Поскольку $A \equiv S_k$ - фиксированное число, то последовательность S_m, где

$m = n + k$, и σ_n одновременно имеют предел при $n \to \infty$ или нет. ▲

Ряд (2.8) называется *k-ым остатком* ряда (2.2) или остатком ряда после *k*-ого члена. Допустим, что ряд (2.2) сходится, то ряд (2.8) тоже сходится, и сумму его обозначим r_k - она зависит от *k*. Из равенства (2.9) при $n \to \infty$ получим

$$S = S_k + r_k. \qquad (2.10)$$

Этот факт естественно записывать так

$$S = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{S_k} + \underbrace{u_{k+1} + \ldots}_{r_k}.$$

Из (2.10) при $k \to \infty$: $r_k = S - S_k \to S - S = 0$, т.е. *если ряд (2.2) сходится, то сумма* r_k *его остатка после k-ого члена стремится к нулю при* $k \to \infty$: $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 0$. Таким образом, какой бы малой погрешностью $\varepsilon > 0$ мы ни задались, по ней найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$\forall k > N(\varepsilon) \Rightarrow |r_k| \equiv |S - S_k| < \varepsilon,$$

так что с погрешностью ε имеем приближённое равенство

$$S \approx S_k,\ k > N. \qquad (2.11)$$

В этом – значение рядов для приближённых вычислений: сумму *S* находят примерно как S_k. Конечно, желательно, чтобы номер $k,\ k > N$, а значит *N*, можно было брать по возможности наименьшим. Встаёт вопрос о *скорости сходимости ряда*. Говорят, что если $r_k \to 0$ быстро (т.е. *N* невелико), то ряд быстро сходится; если же $r_k \to 0$ медленно (т.е. *N* велико), – то медленно сходится. Понятно, что лучше иметь дело с быстро сходящимися рядами. (Обычно в (2.10) вместо *k* пишут *n*.)

4. Арифметические действия над рядами. Сходящиеся ряды во многом ведут себя как конечные суммы чисел.

Теорема 2.3. *Если ряд (2.2) сходится и имеет сумму S, то при всяком* $C = const$ *сходится также ряд*

$$Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots \qquad (2.12)$$

и его сумма равна $C \cdot S$.

Δ Частичную сумму ряда (2.12) обозначим σ_n. Имеем: $\sigma_n = C \cdot S_n \to C \cdot S$ (при $n \to \infty$). ▲

Теорема 2.4. *Если ряды (2.2) и*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2.13)$$

сходятся и имеют суммы S и σ соответственно, то сходятся также ряды

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots, \qquad (2.14)$$

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots \qquad (2.15)$$

и их суммы соответственно равны $S + \sigma$ *и* $S - \sigma$ *(т.е. сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать).*

Δ Частичные суммы рядов (2.13), (2.14) и (2.15) обозначим σ_n, $\overline{S}_n$ и $\overline{\sigma}_n$ соответственно. Имеем: $\overline{S}_n = S_n + \sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S + \sigma$, $\overline{\sigma}_n = S_n - \sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - \sigma$. ▲

Подчеркнём, что для расходящихся рядов сказанное теряет смысл. Например, рассмотрим символы $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$, $\sigma = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots) = 2S$. Казалось бы, что $\sigma < S$, а с другой стороны $\sigma > S$ в два раза.

Понятно, что одна из первых и главных задач – установить признаки сходимости (и расходимости) рядов.

5. Теорема 2.5. (Необходимый признак сходимости ряда.) *Если ряд (2.2) сходится, то его общий член стремится к нулю при* $n \to \infty$*:* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Δ Наряду с S_n возьмём ещё частичную сумму $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$. В силу условия сходимости ряда, имеем $u_n \equiv S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. ▲

Следствие. Если общий член ряда *не стремится* к нулю, то ряд расходится.

Δ Допустим противное утверждению: пусть ряд сходится. Тогда по теореме 2.5 общий член должен стремиться к нулю – а это противоречит условию, что и доказывает теорему. ▲

Это следствие позволяет доказывать *расходимость* ряда - когда u_n *к нулю не стремится*. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ расходится, т.к. $u_n = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$.

Согласно теореме 2.5, для сходимости ряда необходимо, обязательно выполнение условия $u_n \to 0$. Однако, одного этого требования *не достаточно* для сходимости: в случае, когда $u_n \to 0$ есть ряды сходящиеся (например, ряд (2.5) при $|q| < 1$) и есть расходящиеся. Подтвердим последнее на двух примерах.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$; $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Оценим частичную сумму S_n снизу, заменив все n слагаемых наименьшим – это $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем: $S_n > \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \to \infty$ (при $n \to \infty$), ряд расходится.

2) Возьмём так называемый «*гармонический ряд*»:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots. \tag{2.16}$$

Здесь тоже $u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, и докажем, что *ряд расходится*. Известно, что $x > \ln(1+x)$, $x > 0$, см. [8, § 6.2], то

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ldots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln[2\cdot(1+\frac{1}{2})\ldots(1+\frac{1}{n})] = \ln(n+1) \to \infty,$$

следовательно, ряд расходится.

Исторически это был первый пример ряда, у которого общий член стремится к нулю, однако ряд расходится.

6. Между рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственными интегралами $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ существует глубокая аналогия. Если процесс суммирования по n заменить процессом интегрирования по x, то аналогами будут:

Общий член ряда u_n	Подынтегральная функция $f(x)$
Частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{k} u_n$	Собственный интеграл $\int\limits_a^{B} f(x)dx$
Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – как предел частичной суммы при $k \to \infty$	Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ – как предел собственного интеграла при $B \to \infty$
Остаток ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$	«Хвост интеграла» $\int\limits_B^{\infty} f(x)dx$

Простейшие теоремы о рядах сходны с теоремами о несобственных интегралах из § 1.1, п. 2, 3, 4, и доказываются так же, как и в § 1.1, с использованием указанной аналогии.

7. Ряды с положительными членами (положительные ряды).

Будем рассматривать ряды, члены которых неотрицательны:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0, \tag{2.17}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n \ge 0. \tag{2.18}$$

Теорема 2.6. (Первая теорема сравнения, «обычная»). *Пусть члены ряда (2.17) не превосходят соответствующих членов ряда (2.18), т.е.* $u_n \le v_n$ *(*$n = 1, 2, \ldots$*). Тогда*

1) если сходится ряд (2.18), то ряд (2.17) тем более сходится, причём $S \le \sigma$, *где* S *и* σ *– суммы рядов (2.17) и (2.18) соответственно.*

2) если расходится ряд (2.17), то расходится и ряд (2.18).

Δ Частичные суммы рядов (2.17) и (2.18) обозначим соответственно S_n и σ_n. 1) Дано, что ряд (2.18) сходится, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Члены ряда положительны, поэтому σ_n увеличивается с ростом n: последовательность

$\{\sigma_n\}$ возрастающая, и тогда $\sigma_n \le \sigma$. Так как $u_n \le v_n$, то $S_n \le \sigma_n$, значит $S_n \le \sigma$. Последовательность $\{S_n\}$ также возрастающая, и она ограничена сверху, поэтому имеет предел, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а это и означает, что ряд (2.17) сходится. Тогда из неравенства $S_n \le \sigma_n$ при $n \to \infty$ получаем: $S \le \sigma$.

2) В этом случае расходимость ряда (2.18) доказывается обычным рассуждением «от противного». ▲

Замечание. Для рядов (2.17) с положительными членами могут представиться только две возможности: 1) частичные суммы ограничены, $S_n \le M = const$, то ряд сходится, 2) S_n неограничены, а поскольку S_n возрастает, то $S_n \to +\infty$, –ряд расходится и $\lim S_n = +\infty$; в этом случае условно говорят, что сумма ряда равна $+\infty$ (или: ряд расходится к $+\infty$). Естественно, что сходимость или расходимость ряда с положительными членами отмечается соответственно соотношениями: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

Теорема 2.7. (Вторая теорема сравнения, предельная). *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = K$, $0 \le K \le \infty$ *(*$v_n \ne 0, \forall n > n_0$*), то:*
1) при $0 \le K < +\infty$ *из сходимости ряда (2.18) следует сходимость ряда (2.17);*
2) при $0 < K \le \infty$ *из расходимости ряда (2.18) вытекает расходимость ряда (2.17). Таким образом, если* $0 < K < +\infty$, *т.е. когда* $u_n \sim K \cdot v_n$ *при* $n \to \infty$, *оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство проводится по той же схеме, как и доказательство теоремы 1.2 для несобственных интегралов (см. § 1.1, п.3) с учётом указанной в п.6 аналогии.

Примеры. 1) $1 + \dfrac{1}{2\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}} + \ldots$. Поскольку $\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}} \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$, то члены этого ряда не превосходят соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ – а это есть ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2} < 1$, он сходится. Поэтому и первый ряд сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{\sqrt{n}}$, $x = const > 0$. При больших значениях n, $n > n_0$, члены ряда положительны (первые члены на сходимость не влияют), и $\sin\dfrac{x}{\sqrt{n}} < \dfrac{x}{\sqrt{n}}$, однако это неравенство ничего нам не даёт: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ расходится вместе с рядом

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, однако, о сходимости или расходимости исходного ряда сказать ничего нельзя, т.к. теорема сравнения 2.6 не работает. Применим предельную теорему 2.7: $\sin\frac{x}{\sqrt{n}} \sim \frac{x}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, в силу которой данный ряд расходится.

На теореме сравнения 2.6 основано доказательство следующих *достаточных признаков* Даламбера[1] и Коши сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Признак Даламбера. *Пусть для ряда (2.17) существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = L,\ 0 \le L \le +\infty\ (u_n > 0, \forall n \ge n_0). \tag{2.19}$$

Тогда:
1) если $L < 1$, то ряд сходится;
2) если $L > 1$ – ряд расходится;
3) в случае $L = 1$ признак ответа не даёт: здесь существуют ряды как сходящиеся, так и расходящиеся. (Это «сомнительный случай».)

Δ Пусть $L < 1$. Тогда можем взять число q такое, что $L < q < 1$. В силу определения предела (2.19) $\exists N : \forall n \ge N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < qu_n$.

Распишем это неравенство для разных значений $n = N, N+1, \ldots$:

$$\begin{gathered} u_{N+1} < qu_N \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N \\ -------------- \end{gathered} \tag{2.20}$$

и сравним ряды

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \tag{2.21}$$

$$u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \ldots. \tag{2.22}$$

(2.22) есть ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q \in (0;1)$ – он сходится. Члены ряда (2.21) в силу (2.20) не превосходят соответствующих членов ряда (2.22), поэтому ряд (2.21) тоже сходится – по теореме 2.6. Ряд (2.17) отличается от ряда (2.21) лишь на конечное число членов, поэтому по теореме 2.2 он сходится.

2) Пусть $L > 1$. Тогда для предела (2.19) найдётся номер *N*, начиная с которого, т.е. $\forall n > N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,\ u_{n+1} > u_n$. Отсюда видно, что члены ряда (2.17) растут, общий член не стремится к нулю, поэтому ряд расходится.

[1] Жан Лерон Даламбер (1717-1783) – французский математик и механик.

3) Пусть $L=1$. Здесь надо просто привести примеры ряда сходящегося и ряда расходящегося.

а) Было показано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. Для него

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\to 1=L.$$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots.;\ u_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, и частная сумма S_n порядка *n* преобразуется так:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

$\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, значит, ряд сходится. Находим:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{(n+2)}\to 1=L.$$

(В силу этого, в случае $L=1$ приходится прибегать к другим признакам.) ▲

<u>Примеры</u>. 1) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x>0$.

$u_n=\frac{x^n}{n!},\ u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=L<1$ – ряд сходится $\forall x>0$.

(Позднее покажем, что сумма этого ряда равна e^x.)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{\sqrt{n}}$. Очевидно, при $x=0$ ряд сходится. Пусть $x\neq 0$.

$u_n=\frac{(3x)^{2n}}{\sqrt{n}},\quad u_{n+1}=\frac{(3x)^{2n+2}}{\sqrt{n+1}},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(3x)^2\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}(3x)^2=L$. Отсюда:

- если $(3x)^2<1$, т.е. $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$, то ряд сходится;
- если $(3x)^2>1$, т.е. $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$, то ряд расходится;
- в случае $L=(3x)^2=1$ (т.е. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$) ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ – он расходится.

Признак Даламбера, как наиболее простой, при исследовании рядов на сходимость и расходимость употребляется чаще всего.

Признак Коши (радикальный). *Пусть для ряда (2.17) существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L,\ (0\le L\le\infty). \tag{2.23}$$

Тогда:
1) если $L<1$*, то ряд сходится;*
2) если $L>1$ *– ряд расходится;*
3) в случае $L=1$ *исследуемый ряд может оказаться сходящимся или расходящимся* (это сомнительный случай).

Δ 1) Пусть $L<1$. Возьмём число q такое, что $L<q<1$. В силу условия (2.23) $\exists N: \forall n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}<q$, откуда $u_n<q^n$, $n \geq N$, и сравним два ряда

$$u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots \text{ и}$$
$$q^n+q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots.$$

Второй ряд – это ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ ($q>0$) – он сходится, но тогда по теореме 2.6 сходится и первый ряд, ибо члены его не превосходят соответствующих членов второго ряда.

2) Пусть $L>1$. Тогда в силу определения предела найдётся N, что $\forall n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}>1$, откуда $u_n>1$ – общий член не стремится к нулю, ряд расходится.

3) При $L=1$ надо привести примеры двух рядов, из которых один сходится, а другой расходится.

а) Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, как мы видели, расходится. Для него $u_n=\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=n^{-\frac{1}{n}}=e^{-\frac{1}{n}\ln n}\to e^0=1=L$.

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, т.к. $\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n(n+1)}$ при $n\to\infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится, а $\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=n^{-\frac{2}{n}}=e^{-\frac{2}{n}\ln n}\to e^0=1=L$. ▲

Интегральный признак Маклорена-Коши. *Если члены ряда (2.17) представляют собой значения в целых точках* $x=n$ *некоторой положительной и убывающей функции* $f(x)$: $u_n=f(n)$*, то:*
1) если несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx \tag{2.24}$$

сходится, то и ряд (2.17) тоже сходится;
2) если же этот интеграл (2.24) расходится, то и ряд (2.17) тоже расходится,

Δ Доказательство проведём геометрически (для наглядности). Рассмотрим график функции $y=f(x)$, отметим ординаты в точках $x=n$: это $f(n)=u_n$, ($n=1,2,\ldots$) (рис. 2.1).

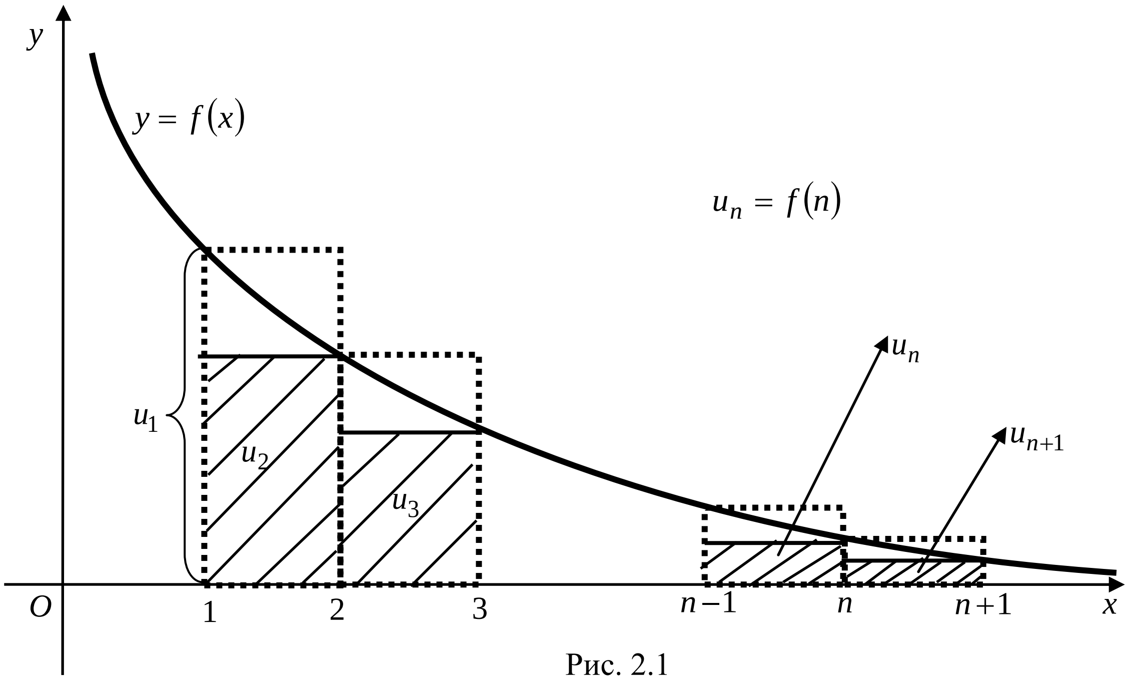

Рис. 2.1

1) Построим «входящие» прямоугольники с основаниями $[n, n+1]$. Их площади равны u_n, так что сумма площадей (т.к. $f(x)$ убывает) меньше площади криволинейной трапеции:

$$u_2 + u_3 + ... + u_n < \int_1^n f(x)dx < \int_1^\infty f(x)dx \equiv A = const\,.$$

Поэтому частичные суммы ряда (2.17) с положительными членами ограничены: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n < u_1 + A \equiv M = const$, следовательно, ряд сходится.

2) Пусть интеграл (2.24) расходится, а поскольку $f(x) > 0$, то он расходится к $+\infty$: $\int_1^\infty f(x)dx = +\infty$. Здесь строим «выходящие» прямоугольники (см. рис.2.1); очевидно, что $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n > \int_1^{n+1} f(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$; $S_n \to +\infty$, следовательно, ряд расходится. ▲

Понятно, что утверждение теоремы не изменится, если интегрирование в (2.24) начинать не с 1, а от некоторого числа $n_0 > 1$.

Оценка остатка ряда в признаке Маклорена – Коши.

Предполагаем, что интеграл (2.24) сходится. Оценим частичную сумму порядка k остатка r_n ряда (после n-ого члена). Строим «входящие» и «выходящие» прямоугольники. Сравнивая сумму площадей прямоугольников и криволинейных трапеций (см. рис. 2.2), находим

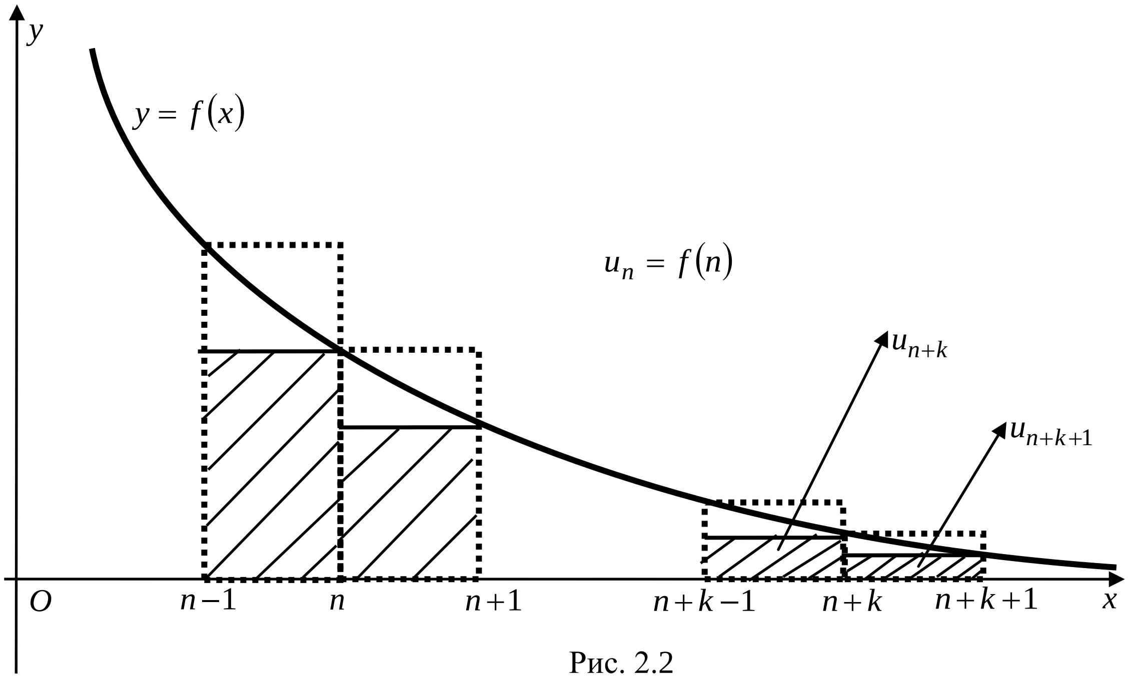

Рис. 2.2

$$\int_{n+1}^{n+k+1} f(x)dx < u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k} < \int_{n}^{n+k} f(x)dx.$$

Отсюда в пределе при $k\to\infty$ получим

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx < r_n \equiv u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots < \int_{n}^{\infty} f(x)dx. \qquad (2.25)$$

<u>Пример</u> – *обобщённый гармонический ряд*:

$$S(p)=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\ldots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ (p>0). \qquad (2.26)$$

Здесь $u_n=f(n)=\dfrac{1}{n^p}$, и можем взять $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ – это непрерывная положительная убывающая при $x\ge 1$ функция. Мы знаем (см. § 1.1, формула (1.10)), что

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \textit{при } p>1 \textit{ сходится} \\ \textit{при } p\le 1 \textit{ расходится.} \end{cases}$$

Поэтому *ряд* (2.26) *при* $p>1$ *сходится, а при* $p\le 1$ *расходится*. Ранее было показано, что для сходимости ряда (2.2) одного требования $u_n\to 0$ не достаточно. Из приведённого примера следует, что если $u_n\to 0$ медленно, то ряд может расходиться (случай $0<p\le 1$), если же $u_n\to 0$ достаточно быстро, то сходимость может иметь место (случай $p>1$).

Для ряда (2.26) признаки Даламбера и Коши бессильны: легко проверить, что $L=1$. Интегральный признак является универсальным, однако здесь возникает проблема исследования сходимости интеграла (2.24) .

Оценим n-ый остаток ряда (2.26):

$$\int\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx < r_n < \int\limits_{n}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx \Rightarrow \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}} < r_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

В частности, при $p=2$: $\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n}$; поэтому полагая $S(2)\approx 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$, делаем ошибку $r_4 < \frac{1}{4}$. А если надо найти $S(2)$ с точностью 0,01, то должны взять сумму 100 членов. (В главе 3 будет установлено, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.) Понятно, что обобщённый гармонический ряд медленно сходящийся (при $p>1$), однако, наряду с рядом геометрической прогрессии, он часто используется для доказательства сходимости или расходимости других рядов. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+5)}$ сходится, ибо члены его меньше соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ($p=3>1$). Отметим, что гармонический ряд (2.16) есть частный случай ряда (2.26): при $p=1$.

8. Знакочередующиеся ряды. Так называются ряды, знаки членов которого чередуются. Их удобно записывать в виде

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \qquad (2.27)$$

где $u_1\ge 0,\ u_2\ge 0,\ldots,u_n\ge 0,\ldots$ Сами члены ряда имеют вид $\pm u_n$, а u_n – их абсолютные величины.

Признак Лейбница (сходимости знакочередующихся рядов). *Пусть в знакочередующемся ряде (2.27): 1) абсолютные величины членов убывают, т.е.* $u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots$ *и 2)* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. *Тогда ряд сходится, его сумма положительна и меньше первого члена:* $0<S<u_1$.

Δ Рассмотрим частичные суммы чётного порядка

$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m})>0$; скобки положительны в силу условия 1), и последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастающая.

Запишем S_{2m} иначе: $S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-\ldots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}<u_1$. Итак, последовательность S_{2m} возрастает и ограничена, при этом $0<S_{2m}<u_1$. Следовательно, существует $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}\equiv S$ и $0<S<u_1$.

Теперь рассмотрим частичные суммы с нечётными номерами. Имеем $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}S$, в силу условия 2). Из сказанного заключаем, что $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. ▲

Ряд (2.27), удовлетворяющий условиям 1) и 2), называется рядом *лейбни-*

цевского типа. Оценим его остаток r_n. Имеем

$$r_n = \begin{cases} u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots, \textit{если } n \textit{ чётное} \\ -(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots), \textit{если } n \textit{ нечётное} \end{cases}.$$

В обоих случаях $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots < u_{n+1}$, ибо здесь имеем тоже ряд лейбницевского типа.

Вывод. Остаток ряда лейбницевского типа по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов: $|r_n| < u_{n+1}$.

Этим фактом часто пользуются на практике.

Пример. *Ряд Лейбница*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{2.28}$$

сходится – по признаку Лейбница. Пусть S – его сумма (позже установим, что $S = \ln 2$). Если взять $S \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, то ошибка этого равенства будет $|r_n| < \frac{1}{n+1}$.

В знакочередующихся рядах первый член не обязательно должен быть положительным: их можно записывать в виде

$$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots),\ u_n \ge 0\ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Замечание 1. Иногда указанный «Вывод» пытаются применить к произвольным рядам. Однако, это может привести к грубой ошибке: подсчитать приближённо не существующую или равную бесконечности сумму расходящегося ряда (у которого общий член стремится к нулю).

Замечание 2. В некоторых случаях исследовать сходимость несобственного интеграла можно с помощью рядов. Например, рассмотрим интеграл $B = \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx$, $\lambda > 0$. Из графика функции $y = f(x) = \frac{\sin x}{x^{\lambda}}$ (см. рис. 2.3) замечаем, что площади $u_1, u_2, u_3, \ldots$ убывают и $u_n \to 0$, следовательно, ряд $S = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$ сходится.

Понятно поэтому, что и интеграл сходится, причём его значение $B = S$.

9. Ряды с произвольными членами («произвольные» или знакопеременные ряды). Абсолютная сходимость.

Рассмотрим ряды, члены которых могут иметь любой знак. В них количество как положительных, так и отрицательных членов можно считать бесконечным (в силу теоремы 2.2). Исследуем вопрос о сходимости таких рядов.

Теорема 2.8 (Коши). *Если знакопеременный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{2.29}$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2.30}$$

сходится, то и данный ряд тоже сходится. При этом, если S – сумма ряда (2.29), а σ – сумма ряда (2.30), то $|S| \le \sigma$.

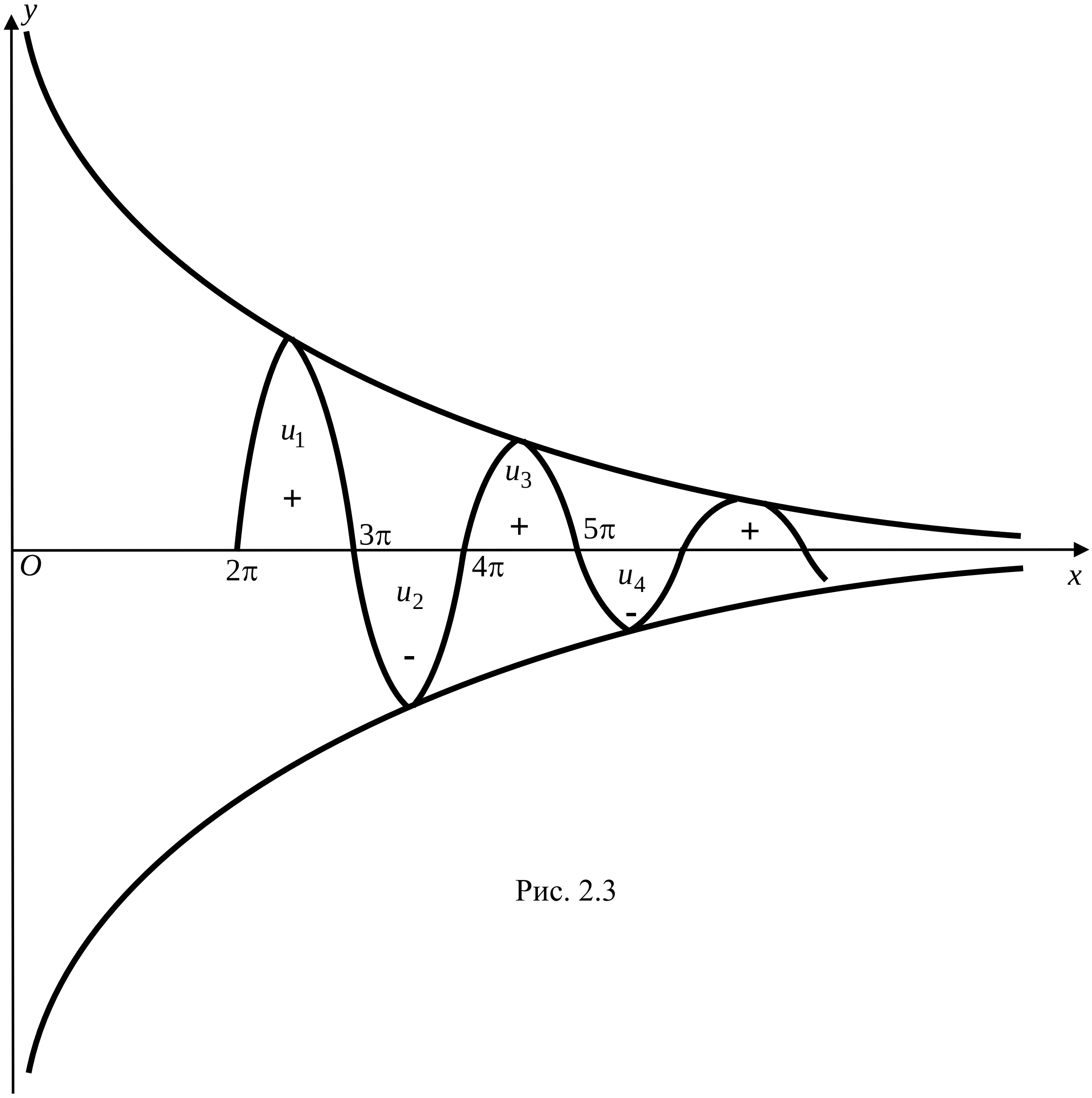

Рис. 2.3

Δ Обозначим S_n и σ_n частичные суммы *n*-го порядка рядов (2.29) и (2.30) соответственно. По условию ряд (2.30) сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, и поскольку $|u_n| \ge 0$, то $\sigma_n \le \sigma$.

Пусть S_n^+ - сумма положительных членов u_k, входящих в S_n, S_n^- – сумма абсолютных величин $|u_k|$ отрицательных членов. Тогда

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \tag{2.31}$$

$$\sigma_n = S_n^+ + S_n^-. \tag{2.32}$$

Из (2.32) замечаем, что $S_n^+ \le \sigma_n$, и потому $S_n^+ \le \sigma$; аналогично $S_n^- \le \sigma$. Суммы S_n^+ и S_n^- ограничены и растут с ростом *n*, поэтому имеют пределы; обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = S^-$. Тогда из (2.31) получаем, что

$$S_n = S_n^+ - S_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{} S^+ - S^-,$$

следовательно, ряд (2.29) сходится и его сумма $S = S^+ - S^-$. При этом $|S| = \left|S^+ - S^-\right| \le S^+ + S^- = \sigma$. ▲

Определение 1. Ряд (2.29) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов – т.е. ряд (2.30).

Пользуясь этим определением, теорему 2.8 можно сформулировать так: *абсолютно сходящийся ряд сходится*, или: *если ряд сходится абсолютно, то он тем более и просто сходится*.

Определение 2. Если ряд (2.29) сходится, а ряд (2.30) расходится, то данный ряд (2.29) называется *неабсолютно или условно сходящимся*.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ при $p>1$ сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, и при $0<p\le 1$ тоже сходится (по признаку Лейбница), но не абсолютно (т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ при $0<p\le 1$ расходится). В частности, ряд Лейбница (2.28) (случай $p=1$) – условно сходящийся.

Между абсолютно и условно сходящимися рядами существует глубокая разница: абсолютно сходящиеся ряды ведут себя как конечные суммы чисел, а условно сходящиеся – нет. Абсолютно сходящиеся ряды сходятся благодаря достаточно высокой скорости стремления к нулю их членов, а условно сходящиеся – за счёт взаимного погашения членов ряда. В частности, для абсолютно сходящихся рядов мы имели $|S| \le \sigma$ (см. теорему 2.8), т.е.

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots| \le |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \text{ или } \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ –}$$

модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей. Для условно сходящихся рядов это беспредметно уже потому, что ряд из модулей расходится. Ещё глубже указанную разницу выявляют следующие теоремы Дирихле и Римана.

Теорема Дирихле (переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда). *Для абсолютно сходящегося ряда характер сходимости и его сумма не меняются при любой перестановке его членов.* (Без доказательства.)

Теорема Римана (для условно сходящихся рядов). *Если ряд сходится условно, то каково бы ни было число A (включая $A=\pm\infty$), можно так переставить члены ряда, что сумма нового ряда будет в точности равна A*. (Без доказательства.)

Например, возьмём ряд Лейбница (2.28). Обозначим его сумму через *S*; $0<S<u_1=1$, так что $S\ne 0$. Понятно, что сумму ряда можно подсчитать по формуле $S=\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$, где

$$S_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}. \qquad (2.33)$$

Переставим члены ряда так, чтобы после одного положительного следовали два отрицательных, и покажем, что тогда сумма окажется $\frac{S}{2}$:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots. \qquad (2.34)$$

Обозначим сумму ряда (2.34) через A, и возьмём его частичную сумму A_{3m}. Запишем A_{3m}, сгруппировав по три члена (это сделать можно, т.к. сумма конечная):

$$A_{3m} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}S_{2m}.$$

Поскольку $A_{3m} \to A$, а $S_{2m} \to S$, то после перехода к пределу получаем, что $A = \frac{1}{2}S$ – сумма ряда после изменения порядка суммирования уменьшилась вдвое.

Итак, свойство конечных сумм чисел: «от перестановки слагаемых сумма не меняется» для бесконечных сумм не всегда имеет место.

Таким образом, с рядами следует обращаться осторожно. В силу подобных фактов в математике возникали и возникают парадоксы. Они связаны с тем, что законы, справедливые для какой-то совокупности объектов, без дополнительных ограничений могут быть неверны для других совокупностей. Например, чтобы обычные свойства конечных сумм и арифметических действий распространить на бесконечные суммы (ряды), в некоторых случаях требуется дополнительное условие *абсолютной* сходимости.

Отметим без доказательства ещё такое свойство:
абсолютно сходящиеся ряды можно почленно перемножать произвольным образом, например, так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_n v_k = (u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots +$$
$$+ (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) + \ldots,$$

причём, получающиеся ряды тоже абсолютно сходятся. (Индексы суммирования у исходных рядов обязательно должны быть разными; в каждой скобке сумма индексов сомножителей постоянна: соответственно 2, 3,..., n+1,….)

10. **<u>Признаки Даламбера и Коши</u>** <u>для произвольных рядов</u>.

Пусть для ряда (2.29) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \ \text{или} \ \lim \sqrt[n]{|u_n|} = L, \ (0 \le L \le +\infty).$$

Тогда:
1) если $L < 1$*, то ряд сходится и притом абсолютно, так как при этом сходится ряд (2.30);*

2) если $L>1$, то ряд (2.29) расходится, так как при $L>1$ у ряда (2.30) $|u_n| \not\to 0$ и потому $u_n \not\to 0$;
3) случай $L=1$ остаётся сомнительным, ибо он сомнительный уже для положительных рядов.

Примеры. 1) $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$; $u_n=\dfrac{x^n}{n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{n+1}=0<1$, следовательно, данный ряд сходится абсолютно при любых $x\in(-\infty,+\infty)$.

2) $x+\dfrac{x^2}{2}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}+\ldots$; $u_n=\dfrac{x^n}{n}$, $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|\cdot n}{n+1}=|x|$.

При $|x|<1$, т.е. $-1<x<1$, ряд сходится абсолютно; при $|x|>1$ расходится.

В сомнительном случае $L=|x|=1$: при $x=1$ ряд имеет вид $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ - это гармонический ряд, он расходится; при $x=-1$ имеем ряд $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n}+\ldots$ – это ряд Лейбница (с точностью до знака), он сходится условно. Ответ: данный ряд сходится при $-1\le x<1$.

Замечание. Отмеченная в п. 6 аналогия между рядами и несобственными интегралами не относится к вопросу об определении сходимости (или расходимости) по поведению общего члена u_n и функции $f(x)$. Именно, если u_n к нулю не стремится, то ряд расходится. Интеграл же может сходиться и когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$. Для функций, меняющих знак, это видели на примере интегралов Френеля (§ 1.4, п.3). Приведём пример с неотрицательной неограниченной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x\in[k-1,k-\dfrac{1}{2^{2k}}) \\ 2^k, x\in[k-\dfrac{1}{2^{2k}},k) \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Имеем:

$$\int\limits_0^n f(x)dx=\sum_{k=1}^n\int\limits_{k-1}^k f(x)dx=\sum_{k=1}^n\int\limits_{k-\frac{1}{2^{2k}}}^k 2^k\,dx=\sum_{k=1}^n 2^k\cdot\frac{1}{2^{2k}}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Отсюда: левая часть равенства при $n\to\infty$ имеет предел и можем заключить, что $\exists\int\limits_0^\infty f(x)dx=1$.

Однако, если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,\infty)$ и имеет предел

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится. (Предлагаем это доказать самостоятельно.) В то же время от функций $f(x)$, стремящихся к нулю при $x \to \infty$, есть интегралы сходящиеся и расходящиеся – см. (1.10).

§ 2. Функциональные ряды

1. Пусть все функции $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ определены на одном и том же множестве *E*. Тогда на этом множестве определён, имеет смысл, *функциональный* ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots. \tag{2.35}$$

Придавая *x* различные конкретные числовые значения, будем получать разные числовые ряды. Одни из них могут сходиться, другие расходиться.

Определение 3. Множество E_1 всех значений *x*, для которых ряд (2.35) сходится, называется *областью сходимости* этого функционального ряда (понятно, что $E_1 \subset E$).

Частичную сумму порядка *n* обозначим $S_n(x)$, остаток ряда $r_n(x)$:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \qquad r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots.$$

Если $x \in E_1$, то существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) \equiv S(x) \tag{2.36}$$

– это есть *сумма ряда*, она является функцией от *x*. Наглядны записи

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots,\ x \in E_1, \tag{2.37}$$

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{2.37$'$}$$

$r_n(x)$ – сумма остатка ряда.

Области сходимости могут быть самыми разными.

<u>Примеры</u>. 1) Ряд бесконечной геометрической прогрессии $1, x, x^2, \ldots$ сходится только при $|x| < 1$ и имеет сумму $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},\ -1 < x < 1. \tag{2.38}$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ имеет область сходимости $-1 \le x < 1$ (см. § 2.1, п.10).

3) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ сходится на всей оси: $-\infty < x < \infty$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$; $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$, $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x| \cdot n^2}{(n+1)^2} = |x|$. Поэтому: при $|x| < 1$

ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ – расходится. Если $|x|=1$, то $|u_n|=\dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится. Итак, область сходимости $E_1=\{-1\le x\le 1\}$.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x(x-1))^n$ - сходится только в двух точках: $x=0$ и $x=1$.

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{1+x^n}$; при $x=0$ ряд сходится, в точке $x=-1$ смысла не имеет, при $x=1$ ряд расходится: $u_n=\dfrac{1}{2}\not\to 0$; если $-1<x<1, x\neq 0$, то $u_n=\dfrac{x}{1+x^n}\xrightarrow[(n\to\infty)]{} x\neq 0$ – ряд расходится; если $|x|>1$, то ряд сходится (проверяется по признаку Даламбера). Итак, область сходимости $E_1=\{0\}\cup\{|x|>1\}$.

Изучение функциональных рядов есть иная форма изучения *функциональных последовательностей*: каждому ряду (2.35) однозначно соответствует последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм, и каждой данной последовательности $\{S_n(x)\}$ соответствует ряд

$$S_1(x)+[S_2(x)-S_1(x)]+[S_3(x)-S_2(x)]+\ldots+[S_n(x)-S_{n-1}(x)]+\ldots \quad (2.39)$$

с частичной суммой $S_n(x)$.

<u>Аналогия между функциональными рядами и несобственными интегралами, зависящими от параметра</u>.

Ряд и его сумма	Интеграл и его значение
$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$	$F(\alpha)=\int\limits_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$
Переменная x, индекс суммирования n	Параметр α, переменная интегрирования x
Общий член ряда $f_n(x)$	Подынтегральная функция $f(x,\alpha)$
Частичная сумма $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$	Интеграл $\int\limits_a^{B} f(x,\alpha)dx$
Остаток ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$	«Хвост» интеграла $\int\limits_B^{\infty} f(x,\alpha)dx$

Основываясь на этой аналогии, последующие теоремы 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 о рядах формулируются и доказываются подобно теоремам 1.10, 1.11, 1.12, 1.14 о несобственных интегралах, при аналогичных условиях.

2. Известно, что сумма конечного числа непрерывных на множестве E_1 функций есть тоже функция непрерывная на E_1. Для бесконечных сумм, т.е. для рядов, это, вообще говоря, неверно. Приведём *пример ряда из непрерывных функций, у которого сумма – функция разрывная*.

Возьмём ряд (2.39), у которого частичная сумма есть $S_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$; имеем $S_n(x) \to S(x) \equiv \begin{cases} 0, \text{если } |x|<1 \\ \dfrac{1}{2}, \text{если } |x|=1 \\ 1, \text{если } |x|>1 \end{cases}$. (Рис. 2.4)

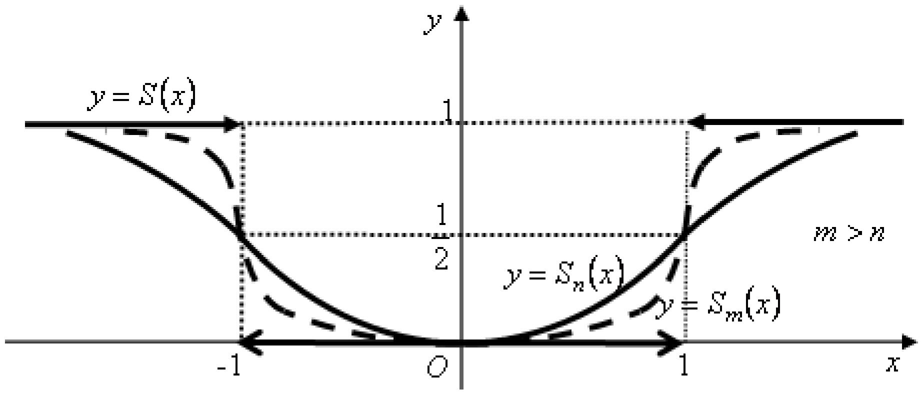

Рис. 2.4

Итак, ряд сходится и члены его непрерывны всюду, но сумма есть функция разрывная. Для подобных ситуаций характерно «вытягивание» графика частичных сумм по вертикали в окрестности точек разрыва суммы $S(x)$: здесь это точки $x = \pm 1$.

Естественно встаёт проблема: какое надо задать требование, чтобы функциональные свойства конечных сумм функций, как-то непрерывность, интегрирование, дифференцирование, *наверняка* сохранились бы и для бесконечных сумм. Таковым является условие *равномерной сходимости*.

3. Понятие равномерной сходимости ряда. Рассмотрим ряд (2.37), который *сходится* в области D (т.е. сходится в каждой точке $x \in D$, так что $D \subset E_1$), и имеет сумму $S(x)$. Для каждого числа $x \in D$ по определению предела (2.36) по любому наперёд заданному числу $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N, N = N(\varepsilon, x)$, такой что

$$\forall n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \qquad (2.40)$$

Этот номер $N(\varepsilon, x)$ зависит от *x*, вообще говоря: для разных $x = x_1, x_2, \ldots$ найдутся свои номера $N = N(\varepsilon, x_1)$, $N(\varepsilon, x_2), \ldots$, и может случиться, что *при изменении x* будет *по существу* $N(\varepsilon, x) \to \infty$, так что для подсчёта суммы по формуле

$S(x) \approx S_n(x)$ с ошибкой $|r_n(x)| < \varepsilon$ надо брать всё большие значения $n, n > N(\varepsilon, x)$. Понятно, что лучшей будет ситуация, когда найдётся номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий только от ε, один сразу для всех значений $x \in D$.

Определение 4. *Ряд (2.35) называется равномерно сходящимся в области D, если:*
1) он сходится в области D (сумму его обозначим $S(x)$ – см. (2.37)) и
2) если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от x, такой, что

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| \equiv |r_n(x)| < \varepsilon \tag{2.41}$$

сразу для всех $x \in D$.

Термин «*равномерно*» (по *x*, относительно *x*) можно толковать как «*одинаковость*» для всех, ряд сходится *одинаково быстро* $\forall x$: неравенство (2.41) выполняется *для всех* $x \in D$, начиная с одного и того же номера $n = N + 1$.

Пример. Рассмотрим ряд (2.39) с частичной суммой $S_n(x) = x^n$; $S_n(x) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \left\{\begin{matrix} 0, \text{ если } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ если } x = 1 \end{matrix}\right\} \equiv S(x)$. Докажем, что в окрестности точки $x = 1$ разрыва суммы сходимость неравномерная. Допустим противное: $\left|x^n - S(x)\right| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall x \in [0,1]$, в частности $\left|x^n\right| < \varepsilon$ при $0 \le x < 1$. Это должно выполняться $\forall \varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 0{,}5$. Фиксируем $n > N(\varepsilon)$ и будем менять *x*: при $x \to 1 - 0$ в пределе получим $1 < 0{,}5$, что неверно. Однако, сколь бы мало ни отступить от точки $x = 1$ влево, а именно, в любом замкнутом промежутке $0 \le x \le r < 1$ сходимость равномерная: здесь $\left|x^n\right| \le r^n < \varepsilon$ - это требование $\forall \varepsilon > 0$ выполнится, если $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln r} = N(\varepsilon)$ – от *x* не зависит. (Рис. 2.5.)

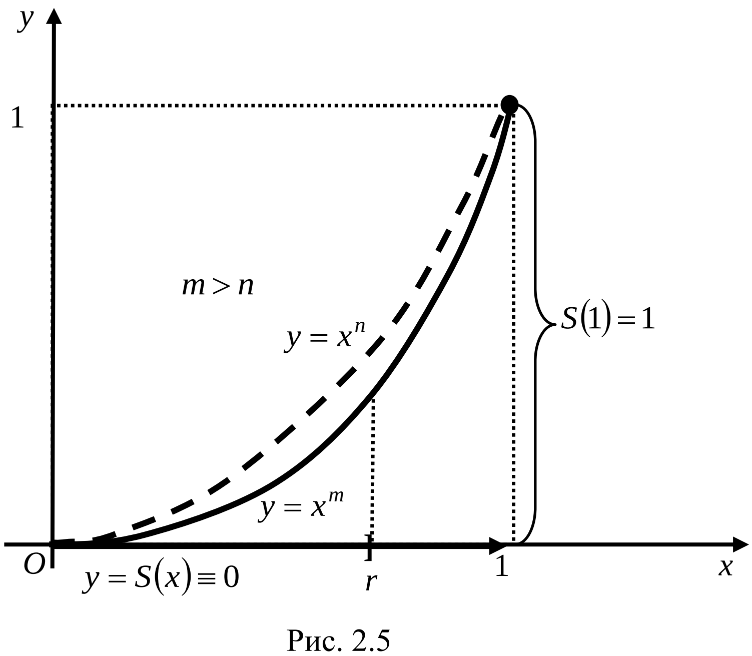

Рис. 2.5

4. Устанавливать равномерную сходимость непосредственно по определению дело весьма трудное. На практике часто это удаётся сделать с помощью простого, хотя только достаточного признака Вейерштрасса.

Теорема 2.9. (*Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). Пусть: 1) все члены ряда (2.35) для всех* $x \in D$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left| f_n(x) \right| \le u_n \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.42)$$

и 2) сходится числовой положительный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (2.43)$$

Тогда ряд (2.35) в области D сходится абсолютно и равномерно.

Δ Из условий (2.42) следует, что ряд (2.35) сходится, причём абсолютно, в каждой точке $x \in D$ – по теоремам 2.6 и 2.8. Запишем его в виде (2.37)-(2.37′) и остаток ряда (2.43) после *n*-ого члена обозначим R_n. В силу абсолютной сходимости ряда (2.37) и неравенств (2.42) имеем для всех $x \in D$

$$\left| r_n(x) \right| \le \left| f_{n+1}(x) \right| + \left| f_{n+2}(x) \right| + \ldots \le u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \equiv R_n .$$

Так как $R_n \to 0$ (в силу сходимости ряда (2.43)), то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow R_n < \varepsilon$, и потому $\left| r_n(x) \right| < \varepsilon, \ n > N(\varepsilon)$, сразу для всех $x \in D$. Это означает, что ряд (2.35) сходится равномерно в *D*: число *N* от *x* не зависит, ибо оно подобрано для числового ряда. ▲

При условии (2.42) и сходимости ряда (2.43) говорят, что ряд (2.35) мажорируется рядом (2.43), или что (2.43) служит мажорантным, или усиливающим, рядом для (2.35).

<u>Пример</u>. Ряд $\dfrac{\sin x}{1^2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ сходится равномерно на всей оси, так как $\left| \dfrac{\sin nx}{n^2} \right| \le \dfrac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

5. <u>Функциональные свойства равномерно сходящихся рядов</u>.

Теорема 2.10 (о непрерывности суммы ряда). *Если все члены ряда (2.37) непрерывны на промежутке D и на нём ряд сходится равномерно, то и его сумма* $S(x)$ *есть тоже функция непрерывная на промежутке D.*

Δ Пусть *x* – произвольная (но фиксированная) точка из *D*; даём ей приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in D$. Имеем

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \ S(x + \Delta x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x),$$

$$\Delta S(x) \equiv S(x + \Delta x) - S(x) = (S_n(x + \Delta x) - S_n(x)) + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

$$\left| \Delta S(x) \right| \le \left| S_n(x + \Delta x) - S_n(x) \right| + \left| r_n(x + \Delta x) \right| + \left| r_n(x) \right|. \qquad (2.44)$$

Возьмём сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. В силу условия равномерной сходимости ряда, по числу ε найдётся номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от $t \in D$, такой, что $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| r_n(t) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}, \forall t \in D$, в частности

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |r_n(x+\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ n > N(\varepsilon). \tag{2.45}$$

После этого зафиксируем $n > N(\varepsilon)$ и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$. Она непрерывна в точке x, как сумма конечного числа непрерывных функций. А значит, по числу $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta x| < \delta$ будет выполняться неравенство $|S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому, используя (2.45), из неравенства (2.44) найдём, что $|\Delta S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ при $|\Delta x| < \delta$.

Это и означает, что функция $S(x)$ непрерывна в точке x, а поскольку точка x – любая из D, то $S(x)$ непрерывна во всей области D. ▲

На основании теоремы 2.10, рассуждая «от противного», можем утверждать, что ряды из п.2 и п.3 в окрестности точек соответственно $x = \pm 1$ или $x = 1$ не сходятся равномерно.

Известно, что интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых. Для рядов же это не всегда верно.

Пример. Рассмотрим ряд (2.39) с частичной суммой $S_n(x) = 2xn^2 e^{-n^2x^2}$. Имеем: $S_n(x) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \equiv S(x)$ при всех x, включая $x = 0$. Проинтегрируем его почленно по промежутку [0,1]:

$$\int_0^1 S_1(x)dx + \int_0^1 (S_2(x) - S_1(x))dx + \ldots + \int_0^1 (S_n(x) - S_{n-1}(x))dx + \ldots . \tag{2.46}$$

Частичную сумму этого ряда обозначим σ_n – это конечная сумма. Имеем:

$$\sigma_n = \int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 2xn^2 e^{-n^2x^2} dx = -e^{-n^2x^2}\Big|_0^1 = 1 - e^{-n^2} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 \equiv \sigma \ –$$

это сумма ряда (2.46). Таким образом, $\int_0^1 S(x)dx = 0 \neq \sigma = 1$, т.е. интеграл от суммы $S(x)$ не равен сумме σ интегралов от слагаемых. Это можно пояснить тем, что сходимость в точке $x = 0$ создана искусственно: если убрать множитель x, то при $x = 0$ будем иметь $\bar{S}_n(0) = 2n^2 \to \infty$, так что соответствующий ряд в точке $x = 0$ будет расходящимся.

Теорема 2.11 (о почленном интегрировании ряда). *Если все члены ряда (2.37) непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и ряд на этом отрезке сходится равномерно, то*

$$\int_a^x S(x)dx = \int_a^x f_1(x)dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)dx + \ldots,\ x \in [a,b], \tag{2.47}$$

причём полученный ряд тоже сходится равномерно на $[a,b]$.

Говорят: при указанных условиях ряд можно почленно интегрировать, значки $\int$ и $\sum$ перестановочны (при $x=b$): $\int\limits_a^b (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Δ Частичную сумму ряда (2.47) обозначим $\sigma_n(x)$. Надо доказать, что ряд сходится равномерно на $[a,b]$ и $\sigma_n(x) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int\limits_a^x S(x)dx$.

Поскольку $\sigma_n(x)$ сумма конечная, то $\sigma_n(x) = \int\limits_a^x S_n(t)dt$. Имеем

$$\int\limits_a^x S(t)dt - \sigma_n(x) = \int\limits_a^x (S(t) - S_n(t))dt. \tag{2.48}$$

Так как по условию ряд (2.37) сходится равномерно на $[a,b]$, то взяв любое число $\varepsilon > 0$, мы по числу $\frac{\varepsilon}{b-a}$ можем найти такое $N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |S(t) - S_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, для всех $t \in [a,b]$. В таком случае из (2.48) $\forall n > N(\varepsilon)$ получим $\left|\int\limits_a^x S(t)dt - \sigma_n(x)\right| \le \int\limits_a^x |S(t) - S_n(t)|dt < \int\limits_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x-a) \le \varepsilon$. ▲

Упражнение. Где использовалась непрерывность слагаемых $f_n(x)$?

На основании теоремы 2.11 ряд в предыдущем примере не сходится равномерно на отрезке [0;1], именно, в окрестности точки $x=0$.

Замечание. На практике иногда приходится переставлять интегралы по бесконечному промежутку $[a,+\infty]$, $\int\limits_a^{\infty}()$, и $\sum\limits_1^{\infty}()$. По этому поводу имеется ряд теорем. Условий же, отмеченных в теореме 2.11, для этого недостаточно.

Теорема 2.12 (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть 1) члены ряда (2.37) на промежутке D непрерывны и имеют непрерывные производные* $f_1'(x)$, $f_2'(x)$,..., *2) сам ряд на промежутке D сходится , 3) а ряд из производных*

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots \tag{2.49}$$

на D сходится равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$. *Тогда в указанном промежутке сумма* $S(x)$ *ряда (2.37) дифференцируема и* $S'(x) = \sigma(x)$.

Говорят: при указанных условиях ряд (2.37) можно почленно дифференцировать, значки $\frac{d}{dx}$ и $\sum$ перестановочны: $\frac{d}{dx}(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{df_n(x)}{dx}$.

Δ Так как по условию ряд (2.49) сходится равномерно, то его сумма $\sigma(x)$ есть функция непрерывная в *D*. Возьмём конкретную точку x_0 и любую *x* из *D*.

Ряд (2.49) почленно проинтегрируем по промежутку $[x_0, x]$ - это можно сделать по теореме 2.11:

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(x)dx = \int_{x_0}^{x} f_1'(x)dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} f_n'(x)dx + \ldots = (f_1(x) - f_1(x_0)) + (f_2(x) - f_2(x_0)) + \ldots$$

$$+(f_n(x) - f_n(x_0)) + \ldots = (f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots) - (f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots) = \tag{2.50}$$

$$= S(x) - S(x_0).$$

Последнее следует из условия сходимости ряда (2.37). Именно, в ряде, имеющем место быть после второго знака равенства в (2.50), надо рассмотреть частичную сумму порядка n, в ней перегруппировать слагаемые и получить разность $S_n(x) - S_n(x_0)$, в которой перейти к пределу при $n \to \infty$. В левой части этого равенства интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции $\sigma(x)$ имеет производную (это $\sigma(x)$). Но тогда и равная ему правая часть имеет производную, и получаем $S'(x) = \sigma(x)$. ▲

<u>Замечания</u>. 1. При условиях теоремы 2.12 ряд (2.37) фактически будет равномерно сходящимся – по теореме 2.11, ибо он получается в результате почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда (2.49), с точностью до постоянного слагаемого $S(x_0)$.

2. Существенным недостатком теоремы 2.12 является то, что для проверки возможности почленного дифференцирования ряда (2.37) надо сначала его почленно продифференцировать и затем проверить, что полученный «производный» ряд (2.49) будет равномерно сходящимся. Последнее условие нельзя отбросить. Это подтверждает следующий <u>пример</u>.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^4 x}{n^2}$ сходится равномерно на всей оси – по признаку Вейерштрасса: $\left|\frac{\sin n^4 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. А «производный» ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cos n^4 x$ расходится при всяком x, ибо общий член не стремится к нулю.

3. «Тонкие признаки» равномерной сходимости рядов можно сформулировать по аналогии с несобственными интегралами.

4. Резюмируя изученное, можем сказать, что применимость действий Анализа к бесконечным суммам функций, т.е. функциональным рядам, обеспечивается свойством равномерной сходимости соответствующих рядов.

5. Для функциональных последовательностей $\{S_n(x)\}$ вводятся те же понятия, теоремы, что и для рядов – область сходимости $E_1 = \{x\}$: когда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, равномерной сходимости, интегрирования, дифференцирования и т.д. Эти вопросы для последовательностей можно свести к доказательству таких же предложений для рядов, и наоборот – на основе сказанного в п. 1.

§ 3 Степенные ряды. Ряды Тейлора

1. Важным и простейшим примером функциональных рядов являются *степенные ряды*, именно, ряды вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (2.51)$$

– это ряд по степеням $(x-a)$ или по системе степеней $\{(x-a)^n\}_{n=0}^{n=\infty}$; точка $x=a$ называется центром ряда, в ней ряд всегда сходится. Имея это в виду, в дальнейшем при исследовании ряда в случае необходимости будем считать, что $x \neq a$, не оговаривая этого специально каждый раз.

В частности, при $a=0$ имеем ряд по степеням *x*:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,. \qquad (2.52)$$

Числа $c_0, c_1, .. c_n, ...$ называются коэффициентами степенного ряда. Ряд (2.51) сводится к ряду (2.52) заменой $x-a$ на *x*, поэтому будем заниматься, для простоты, рядом (2.52). Выясним вопрос об области его сходимости.

Первая лемма Абеля[2]. *Если ряд* (2.52) *сходится в точке* $x_1 \neq 0$, *то он сходится, и притом абсолютно, при всех x, удовлетворяющих условию* $|x| < |x_1|$, *т.е. в открытом интервале* $-|x_1| < x < |x_1|$.

Δ По условию сходится ряд $c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n + \ldots$, поэтому его общий член стремится к нулю: $c_n x_1^n \to 0$, следовательно, последовательность $\{c_n x_1^n\}$ ограничена, т.е. $\exists M = const > 0$: $\left|c_n x_1^n\right| \leq M \quad (n = 0,1,2,\ldots)$.

Пусть x таково, что $|x| < |x_1|$. Общий член ряда (2.52) преобразуем и оценим следующим образом

$$\left|c_n x^n\right| = \left|c_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}\right| \leq M q^n, \qquad (2.53)$$

где $q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$. Положительный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится, как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ ($q \geq 0$). Тогда в силу неравенства (2.53) по первой теореме сравнения (теорема 2.6) сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n x^n\right|$, и потому по теореме 2.8 ряд (2.52) сходится абсолютно в промежутке $|x| < |x_1|$. ▲

---

[2] Нильс Хенрик Абель (1802-1829) – замечательный норвежский математик, много сделавший для развития разных областей математики. При жизни признан не был. Обращался к Гауссу – королю математиков, посылал труды в Парижскую академию наук, но к нему отнеслись невнимательно.

Следствие. Если ряд (2.52) расходится в точке x_2, то он расходится во всех точках x, для которых $|x| > |x_2|$.

Δ От противного: если бы ряд (2.52) сходился для какого-то x с $|x| > |x_2|$, то по лемме Абеля он сходился бы (абсолютно) и в точке x_2, что не так по условию. ▲

Теперь можно определить вид области сходимости степенного ряда. Возможны три случая.

I. Имеются точки $x_1 \neq 0$, в которых ряд (2.52) сходится (точки сходимости) и точки x_2, в которых ряд расходится (точки расходимости); понятно, что $|x_1| \leq |x_2|$. Определим число R из условия: $R = \sup\{|x_1|$: в точках x_1 ряд сходится$\}$, (или, что то же, $R = \inf\{|x_2|$: в точках x_2 ряд расходится$\}$). Используя понятие точной грани множества и первую лемму Абеля, нетрудно, рассуждая «от противного», установить, что ряд сходится абсолютно в каждой точке x с $|x| < R$ и расходится в каждой точке x с $|x| > R$. Интервал $-R < x < R$ называется *интервалом сходимости степенного ряда* (2.52), а число R – *радиусом сходимости*. (Рис. 2.6). Что касается концов $x = -R$ и $x = R$ интервала, то в них может быть всё, что угодно: расходимость, сходимость абсолютная или условная. На это указывают ранее приведённые примеры: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, $R = 1$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$, $R = 1$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $-1 \leq x < 1$, $R = 1$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $-1 < x \leq 1$, $R = 1$.

Рис. 2.6

II. Ряд всюду сходится; тогда считают $R = \infty$. Например, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < \infty$.

III. Ряд сходится только в своём центре $x = 0$, то считают $R = 0$. Например, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$; $u_n = n! x^n$, $L = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} (n+1) \cdot |x| = \infty$, *при* $x \neq 0$.

Итак, справедлива

Теорема 2.13 (об области сходимости степенного ряда). *Для всякого степенного ряда (2.52) существует число R,* $0 \leq R \leq \infty$, *такое, что в интервале*

$|x|<R$ *(при* $R>0$*) ряд сходится абсолютно, а вне его, когда* $|x|>R$ *(при* $R<\infty$*), расходится.* (В концах $x=\pm R$ может быть всё, что угодно.)

Упражнение. Доказать: если в точке x_1 ряд сходится условно, то $R=|x_1|$.

2. Вычисление радиуса сходимости в частных случаях. Пусть в ряде (2.52) все $c_n \neq 0$, начиная хотя бы с некоторого номера $n=n_0$ (ряд без пропусков, при $n \geq n_0$). *Допустим*, что существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A,\ 0\leq A\leq\infty. \qquad (2.54)$$

Тогда существует предел ($u_n = c_n x^n$)

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A\cdot|x|.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, 1) если $|x|<\frac{1}{A}$, т.е. $L<1$, то ряд сходится абсолютно, 2) если $|x|>\frac{1}{A}$, т.е. $L>1$, то ряд расходится. Отсюда $R=\frac{1}{A}$.

Аналогично, по признаку Коши, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = A, \qquad (2.55)$$

то $R=\frac{1}{A}$.

Вывод. Если существует предел (2.54) или (2.55), то радиус сходимости $R=\frac{1}{A}$. (Считается $R=0$ при $A=\infty$ и $R=\infty$ при $A=0$.) Здесь фактически доказали теорему (2.13) в частных случаях: когда существует предел (2.54) или (2.55).

Следствие. Если оба указанных предела существуют, то они равны:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|. \qquad (2.56)$$

На самом деле, имеет место более точный факт: если существует предел (2.54), то существует и предел (2.55), и они равны.

Примеры. 1) $\lim\sqrt[n]{n} = \lim\frac{n+1}{n} = 1.$

2) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$. Это ряд с пропусками, указанный «вывод» не применим. Поступаем обычным образом. Здесь $u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 = L < 1.$$ Ряд сходится для всех x, $R = \infty$. (Сумма этого ряда равна $\sin x$).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n\cdot 3^{2n}}$ – тоже ряд с пропусками; $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n\cdot 3^{2n}}$,

$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{3}\right)^2 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \left(\frac{x}{3}\right)^2 = L$. При $\left(\frac{x}{3}\right)^2 < 1$, т.е. $|x| < 3$, ряд сходится, при $\left(\frac{x}{3}\right)^2 > 1$, т.е. $|x| > 3$, ряд расходится. Отсюда $R = 3$, интервал сходимости $-3 < x < 3$. В обоих концах $x = \pm 3$ ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, он сходится (причём условно). Область сходимости $-3 \le x \le 3$.

3. Области равномерной сходимости степенного ряда.

Далее будем считать $R > 0$.

Вторая лемма Абеля. *Степенной ряд (2.52) сходится равномерно в любом замкнутом промежутке* $[a,b]$*, лежащем строго внутри интервала сходимости:* $[a,b] \subset (-R,R)$.

Δ Возьмём в интервале сходимости число $x_0 > 0$ такое, чтобы промежуток $[a,b]$ целиком лежал в промежутке $[-x_0, x_0]$ (рис. 2.7).

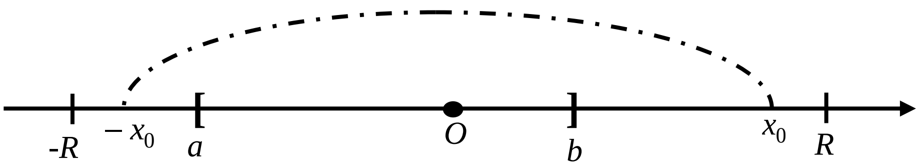

Рис. 2.7

В точке x_0 ряд сходится абсолютно (по теореме 2.13), т.е. сходится числовой ряд

$$|c_0| + |c_1 x_0| + \left|c_2 x_0^2\right| + \ldots + \left|c_n x_0^n\right| + \ldots. \tag{2.57}$$

Для всех точек $x \in [a,b]$ имеем $|x| \le |x_0|$, и потому $\left|c_n x^n\right| \le \left|c_n x_0^n\right|$, т.е. члены ряда (2.52) не превосходят по модулю соответствующих членов сходящегося числового ряда (2.57). Отсюда по признаку Вейерштрасса данный ряд (2.52) в промежутке $[a,b]$ сходится равномерно. ▲

В частности, ряд сходится равномерно *на всяком* замкнутом промежутке $[-r,r]$, где $r < R$, т.е. когда $|x| \le r < R$. Если ряд сходится на всей оси ($R = \infty$), то он сходится абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке.

Замечание. *Во всём интервале сходимости степенные ряды, вообще говоря, не сходятся равномерно.* Для доказательства рассмотрим ряд геометрической прогрессии (2.38); его остаток

$$r_n(x) \equiv x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x},\ -1 < x < 1.$$

Если бы ряд сходился равномерно во всём интервале $(-1,+1)$, то $\forall \varepsilon > 0$ нашёлся бы номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от *x*, что $|r_n(x)| \equiv \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| < \varepsilon,\ \forall n > N(\varepsilon)$, *для всех* $x \in (-1,1)$. Зафиксируем $n > N(\varepsilon)$, возьмём, например, $\varepsilon = 1$, и будем менять *x*; при $x \to 1-0$ получим $+\infty < \varepsilon = 1$, что абсурдно.

Иначе: убедимся, что такого $N(\varepsilon)$, не зависящего от *x*, чтобы неравенство $|r_n(x)| \equiv \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| < \varepsilon$ выполнялось $\forall n > N(\varepsilon)$ найти нельзя. Возьмём $0 < x < 1$. Пусть $r_n(x) \equiv \frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$; решим неравенство относительно *n*: $n > \frac{\ln(\varepsilon \cdot (1-x))}{\ln x} - 1 = \frac{\ln \varepsilon + \ln(1-x)}{\ln x} - 1 \equiv N(\varepsilon, x) \xrightarrow[(x \to 1-0)]{} +\infty$. Таким образом, номера $N(\varepsilon, x)$ по существу зависят от *x*, наибольшего среди них, не зависящего от *x*, и пригодного сразу для всех *x*, подобрать невозможно Ряд сходится неравномерно.

Итак: *ряд геометрической прогрессии* (2.38) *во всём интервале сходимости* $(-1;1)$ *не сходится равномерно.*

4. Теорема 2.14 (об интервале сходимости производного степенного ряда).

Производный степенной ряд

$$0 + c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots \qquad (2.57)$$

имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (2.52).

Δ Теорему докажем только в частном случае – при условии, что существует предел (2.54), так что $R = \frac{1}{A}$. Для ряда (2.57) запишем:

$$A_1 \equiv \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = A,$$

так что радиус сходимости производного степенного ряда есть $R_1 = \frac{1}{A_1}$ и потому $R_1 = R$. ▲

К ряду (2.57) можно снова применить теорему 2.14 и так далее. Области же сходимости самого ряда и его производных рядов могут отличаться, но только концами $x=\pm R$. Например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $-1\le x\le 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{x^{n-1}}{n^2}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$, $-1\le x<1$; $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot\frac{x^{n-2}}{n}$, $-1<x<1$. Здесь у всех трёх рядов общий интервал сходимости: $-1<x<1,\ R=1$.

5. Функциональные свойства степенных рядов.

Все члены $f_n(x)=c_n x^n$ ($n=0,1,2,\ldots$) степенного ряда (2.52) непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка на всей оси, тем более в любом интервале $(-R,R)$. На основании общих теорем 2.10, 2.11, 2.12, теоремы 2.14 и 2-ой леммы Абеля заключаем, что справедливы следующие свойства степенных рядов (с радиусом сходимости R, $R>0$):

1°. *Сумма $f(x)$ степенного ряда (2.52) есть функция непрерывная во всём интервале сходимости* $(-R,R)$ - так как $f(x)$ непрерывна на любом отрезке $[a,b]\subset(-R,R)$ (из-за равномерной сходимости ряда на $[a,b]\subset(-R,R)$), а любую точку $x\in(-R,R)$ можно поместить внутрь соответственно подобранного отрезка $[a,b]\subset(-R,R)$.

2°. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку $[a,b]$, лежащему в интервале сходимости* (однако, нельзя, вообще говоря, по всему интервалу $(-R,R)$, или $[0,R)$).

3°. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любом промежутке $[a,b]$, лежащем в интервале сходимости, и, следовательн, можно почленно дифференцировать во всём интервале сходимости, причём, сколь угодно раз, так что сумма степенного ряда имеет непрерывные производные любого порядка (бесконечно дифференцируема) в интервале сходимости.*

Можно сказать, что степенные ряды являются естественным обобщением многочленов (полиномов) и наиболее близки к ним по свойствам – в пределах интервала сходимости.

6. Ряды по степеням $(x–a)$. Пусть функция $f(x)$ *задана* как сумма степенного ряда (2.51):

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n. \quad (2.58)$$

Заменив $(x-a)$ на x, получим ряд (2.52). Тогда все предыдущие результаты вместо интервала $|x|<R$ справедливы для ряда (2.58) в интервале $|x-a|<R$, т.е. $a-R<x<a+R$ с центром в точке $x=a$ (полагаем, что радиус сходимости $R>0$).

Найдём формулы, связывающие коэффициенты с суммой ряда. По свойству 3° ряд (2.58) можно почленно дифференцировать в интервале сходимости $(a-R,a+R)$ любое число раз. Имеем

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+\ldots+nc_n(x-a)^{n-1}+\ldots,$$

$$f''(x)=2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3(x-a)+\ldots+n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}+\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 2c_{n+1}(x-a)+\ldots,$$

Здесь и в (2.58) положим $x=a$, тогда справа все слагаемые, кроме первого (свободного члена), обратятся в нуль и получим равенства:

$f(a)=c_0$, $f'(a)=c_1$, $f''(a)=2!c_2,\ldots,$ $f^{(n)}(a)=n!c_n,\ldots$.Отсюда

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ (n=0,1,2,\ldots). \tag{2.59}$$

Итак, справедлива

Теорема 2.15. *Если функция $f(x)$ представляет собой сумму степенного ряда (2.58) с радиусом сходимости $R>0$, то его коэффициенты c_n однозначно определяются через сумму по формулам (2.59).*

Теорема 2.16 (о единственности разложения функции в степенной ряд). *Существуют не более одного ряда по степеням $(x-a)$, имеющего своей суммой данную функцию $f(x)$.*

Δ 1) Если функция $f(x)$ не может быть представлена как сумма степенного ряда, то теорема доказана.

2) Пусть функция $f(x)$ представима как сумма степенного ряда (2.58). Предположим, что существует ещё одно разложение по степеням $(x-a)$:

$$f(x)=d_0+d_1(x-a)+d_2(x-a)^2+\ldots+d_n(x-a)^n+\ldots. \tag{2.60}$$

По теореме 2.16 обязательно $d_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Так что $c_n=d_n$, т.е. ряды (2.58) и (2.60) совпадают. ▲

Примечание. Теорема 2.16 на практике применяется так: если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\equiv\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n$,или, что то же (обозначим $c_n-d_n=e_n$), если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e_n(x-a)^n\equiv 0$, то $c_n=d_n$ или $e_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Это – обобщение известного свойства многочленов (когда ряд обрывается, становясь конечной суммой). На этом основано применение «метода неопределённых коэффициентов».

7. Ряды Тейлора. Пусть $f(x)$ *некоторая* заданная функция, *имеющая в точке $x=a$ производные любого порядка*. Тогда ей можно поставить в соответствие бесконечную последовательность чисел c_n, определяемых формулами (2.59), и степенной ряд (соответствие отмечается знаком ~):

$$f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots. \tag{2.61}$$

Коэффициенты c_n называют *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x=a$, а ряд – *рядом Тейлора* функции $f(x)$ по степеням $(x-a)$, или в окрестности точки a (или в точке a).

Согласно теореме 2.15, *любой степенной ряд с радиусом сходимости* $R>0$ *является рядом Тейлора для своей суммы. В этом смысле степенные ряды и ряды Тейлора можно не различать* (если $R>0$).

Говорят, что функция $f(x)$ *представима* рядом Тейлора или *разлагается* в ряд Тейлора в области D, содержащей точку a, если знак соответствия можно заменить знаком равенства:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,\ x\in D. \quad (2.62)$$

Выясним, какие же функции можно разложить в такой ряд. Прежде всего (см. свойство 3°) функция $f(x)$ *должна быть бесконечно дифференцируемой* (*иметь производные любого порядка*). Однако возникают вопросы: 1) сходится ли ряд (2.61), и при каких значениях x; 2) совпадает ли его сумма $S(x)$, если ряд сходится, с функцией $f(x)$. Оказывается, это не всегда имеет место.

<u>Примеры</u>. 1) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}\cos(n^2x)$; $\left|e^{-n}\cos(n^2x)\right|\le e^{-n}$ для всех $x\in(-\infty,+\infty)$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}$ сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно и равномерно на всей оси. Можно проверить, что это имеет место и для производных рядов. Так что $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Однако, можно доказать, что соответствующий этой функции ряд Тейлора $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ расходится всюду (кроме центра $x=0$).

2) $\chi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\ne 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$. Функция непрерывна везде, и в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)=0=\chi(0)$. Можно убедиться, что она имеет все производные в точке $x=0$, и $\chi^{(n)}(0)=0$. Соответствующий ряд Тейлора $\chi(x)\sim 0+0\cdot x+\ldots+0\cdot x^n+\ldots\equiv 0=S(x)$ сходится всюду, но его сумма $S(x)\ne\chi(x)$ (кроме точки $x=0$).

8. <u>Условия разложимости функции в ряд Тейлора</u>. Предполагаем, что функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в некотором интервале D и точка $a\in D$. Берём в этом интервале точку x и для неё запишем *формулу Тейлора*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (2.63)$$

$R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора; в форме Лагранжа он имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \exists\xi\in(a,x). \tag{2.64}$$

Многочлен Тейлора порядка n обозначим через $T_n(x)$ – это есть частичная сумма ряда Тейлора. Имеем

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x). \tag{2.65}$$

(Не следует путать $R_n(x)$ с остатком $r_n(x)$ ряда Тейлора.)

Отсюда: 1) если $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)=f(x)$, 2) и наоборот, если $T_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$, то $R_n(x)\to 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.17. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *разлагалась в ряд Тейлора (2.62) на промежутке* $D, a\in D$, *необходимо и достаточно, чтобы она имела на этом промежутке производные любого порядка и остаточный член её формулы Тейлора стремился к нулю при* $n\to\infty$*:*

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ x\in D. \tag{2.66}$$

Проверка условия (2.66) обычно затруднительна. Его, если это возможно, часто заменяют простым, хотя только достаточным, условием.

Теорема 2.18 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора). *Если в некотором промежутке D, содержащем точку* a, *все производные функции* $f(x)$ *по модулю равномерно ограничены, т.е. существует такое число* $M=const$, *что* $\forall x\in D$ *выполняется неравенство*

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\ \ (\ \ n=0,1,2,\ldots), \tag{2.67}$$

то функция разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки a, *именно: в области D.*

Δ Докажем, что при выполнении неравенств (2.67) выполняется условие (2.66). Остаточный член возьмём в форме Лагранжа (2.64). В силу (2.67) имеем

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\equiv u_n,$$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{|x-a|}{n+2}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}0=L<1$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ сходится, поэтому его общий член стремится к нулю, значит и $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, что и доказывает разложимость функции в ряд Тейлора (на основании теоремы 2.17). ▲

Замечание 1. Поскольку степенной ряд (2.62) сходится в некотором интервале $(a-R,a+R)$ (считаем $R>0$), то можно полагать, что $D=\{x:a-R<x<a+R\}$, и функцию $f(x)$ обычно отождествляют с суммой её сходящегося ряда Тейлора (в интервале D).

Замечание 2. Мы видели: если функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд (ряд Тейлора), то этот ряд единственный. Наоборот, данный степенной ряд может быть рядом Тейлора для бесконечного множества функций, например, функции $f(x)$ и $f(x)+C\chi(x)$, $\forall C = const$, где $\chi(x)$ функция из примера 2, п.7, имеют один и тот же ряд Тейлора (но сходится он только к $f(x)$).

Замечание 3. Первые три коэффициента ряда Тейлора имеют простой физический смысл. Именно, пусть функция $S = S(t)$ определяет зависимость пути от времени. Разложим её «на составные части» (в ряд Тейлора)

$$S = S(t) = S(t_0) + \frac{S'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{S''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{S'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \ldots .$$

Первый коэффициент $S(t_0) = S_0$ – начальный путь, второй $S'(t_0) = v(t_0) = v_0$ – начальная скорость, удвоенный третий $S''(t_0) = a(t_0) = a_0$ – начальное ускорение. В частности, если $S'''(t) \equiv 0$, т.е. ускорение постоянно, $a(t) \equiv const$, то отсюда при $t_0 = 0$ получаем известные формулы:

$$S = S_0 + v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2}, \quad S = v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2} \text{ (при } S_0 = 0\text{)}, \; S = a_0 \frac{t^2}{2} \text{(при } S_0 = v_0 = 0\text{)}.$$

Определение 5. Функция $f(x)$, которая в некотором интервале может быть представлена *своим* сходящимся рядом Тейлора, называется аналитической функцией в этом интервале.

9. Разложение в ряд Тейлора с центром $a = 0$ функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Наиболее употребительный случай, – когда $a = 0$, т.е. когда ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \; -R < x < R. \qquad (2.68)$$

Такой ряд называют также рядом Маклорена.

1) $f(x) = e^x$. Возьмём произвольный промежуток $[-\alpha, \alpha]$; в нём

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x \le e^\alpha = M .$$

Значит, тут функция разлагается в ряд Тейлора. Однако, любую точку x можно поместить в соответственно подобранный промежуток $[-\alpha, \alpha]$. Следовательно, e^x разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, то

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; -\infty < x < \infty. \qquad (2.69)$$

2) $f(x) = \sin x$. Здесь $\left| f^{(n)}(x) \right| \le 1 = M$ на всей оси, следовательно, $\sin x$ разлагается в ряд Тейлора на всей оси. Имеем: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x, \ldots$; далее производные повторяются. Вычисляем при $x = a = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0, \ldots$ – закономерность: все чётные производные равны нулю, а нечётные, чередуясь, $+1$ или -1. Итак,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, -\infty < x < \infty. \quad (2.70)$$

3) Разложение для $\cos x$ можно получить аналогично или дифференцируя почленно ряд (2.70):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ -\infty < x < \infty. \quad (2.71)$$

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ представима степенным рядом (2.68) с $R > 0$. Доказать: 1) если $f(x)$ чётная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то она разлагается в ряд только по чётным степеням x, 2) если $f(x)$ нечётная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$ (здесь автоматически $f(0) = 0$) – то только по нечётным степеням x. (Воспользоваться Примечанием к теореме 2.16.)

10. Биномиальный ряд. Если m натуральное число, то по формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)..2 \cdot 1}{m!} x^m \quad (2.72)$$

– это есть разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^m$.

Теперь возьмём функцию $f(x) = (1+x)^\mu$, где μ - любое число, отличное от 0,1,2,…. Находим все производные: $f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1}$, $f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, …, $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$, $f^{(n+1)}(x) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+x)^{\mu-n-1}, \ldots$ Вычислим их при $x = 0$, и получим ряд Тейлора для данной функции:

$$(1+x)^\mu \sim 1 + \mu \cdot x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \ldots. \quad (2.73)$$

Исследуем ряд (2.73) на сходимость. Это ряд без пропусков, то обозначая через c_n коэффициент при x^n, найдём (см. (2.54)) $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|\mu - n|}{n+1} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 \equiv A$. Следовательно, радиус сходимости $R = 1$, интервал сходимости $-1 < x < 1$. Для того, чтобы доказать, что ряд сходится к самой функции, покажем, что остаточный член формулы Тейлора $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ (см. теорему 2.17). Рассмотрим случай $0 \le x < 1$ и $R_n(x)$ возьмём в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!(1+\xi)^{-\mu+n+1}} x^{n+1},\ \exists \xi \in (0,1), \text{ так что } \xi > 0.$$

При достаточно больших n (когда $-\mu + n + 1 > 0$) имеем $(1+\xi)^{-\mu+n+1} > 1$ и

$$|R_n(x)| < \left|\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!} x^{n+1}\right|.$$

Под знаком модуля стоит общий член u_{n+1} ряда (2.73). Так как ряд сходится ($[0,1) \subset (-1,1)$ – это интервал сходимости), то $u_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, тогда и

$R_n(x)\to 0$. Если взять остаточный член в форме Коши, то можно доказать, что $R_n(x)\to 0$ и при $-1<x\le 0$ (доказательство опускаем).

Вывод. В интервале $-1<x<1$ справедливо разложение

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu\cdot x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.74)$$

– это есть *биномиальный ряд*, а его коэффициенты называют *биномиальными коэффициентами.*

Коэффициент при x^n обозначается $\begin{pmatrix}\mu\\ n\end{pmatrix}$. В случае $\mu=m=0,1,2,\ldots$, т.е. когда $\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}\equiv C_n^m$ $(m\le n)$ есть число сочетаний из n элементов по m, ряд (2.74) обрывается и становится конечной суммой (2.72). Можно доказать, что равенство (2.74) сохраняется в точке $x=1$ при $\mu>-1$ и в точке $x=-1$ при $\mu>0$.

11. Разложение в ряд Тейлора других элементарных функций. Вычислять все производные функции $f(x)$, а тем более проверять выполнимость условия $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ бывает затруднительно. Однако на основании теоремы единственности 2.16 получаем

Правило. Если каким-то образом найдено разложение функции в степенной ряд, то это и есть её ряд Тейлора.

При отыскании этих разложений широко используются действия над рядами, ранее найденные разложения, почленное интегрирование и дифференцирование.

Примеры. 1) Ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,\ \ -1<x<1. \qquad (2.75)$$

Дифференцируя этот ряд, найдём:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\ldots+(-1)^{n-1}n\,x^{n-1}+(-1)^n(n+1)x^n+\ldots,\ -1<x<1.$$

(Перепишите его, заменяя x на $(-x)$.)

2) В интервале $(-1;1)$ берём любую точку x и ряд (2.75) почленно проинтегрируем по промежутку $[0,x]$. Замечая, что $\int\limits_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$, *получим логарифмический ряд*:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\ -1<x\le 1. \qquad (2.76)$$

Этот ряд сходится и в точке $x=1$, и можно доказать, что равенство в таком случае сохранится, – так получим сумму ряда Лейбница:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots.$$

3) Для отыскания разложения функции $\operatorname{arctg} x$ используем метод *предварительного дифференцирования*: разложим в ряд производную (при этом используем ряд (2.75) с заменой x на x^2):

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,\ -1 < x < 1.$$

Отсюда, интегрируя, найдём

$$\operatorname{arctg} x \equiv \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Полученный ряд сходится в обоих концах: $x = \pm 1$, так что область сходимости здесь есть $-1 \le x \le 1$ (и в концах равенство сохраняется). При $x = 1$ имеем:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$ [3]

4) Пользуясь биномиальным рядом (2.74), в котором $\mu = -\frac{1}{2}$, и заменяя x на $(-x^2)$, получим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots,\ -1 < x < 1.$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \equiv \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ -1 \le x \le 1.$$

(На вопросах о преобразовании общего члена и сходимости в концах не останавливаемся.) При $x = \frac{1}{2}$ найдём $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{2^5} + \ldots$.

12. <u>Понятие о действиях над степенными рядами</u>.

I. <u>Умножение степенных рядов</u>. Пусть имеем два сходящихся степенных ряда

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots,\ |x-a| < R_1, \qquad (2.77)$$

$$\varphi(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \ldots + d_n(x-a)^n + \ldots,\ |x-a| < R_2. \qquad (2.78)$$

Так как они абсолютно сходятся, то, по крайней мере в интервале $|x-a| < R$, где $R = \min\{R_1, R_2\}$, их можно почленно перемножать:

$$f(x)\varphi(x) = c_0 d_0 + (c_0 d_1 + c_1 d_0)(x-a) + \ldots + (c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \ldots + c_n d_0)(x-a)^n + \ldots$$

<u>Например</u>, $e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots) = x + x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})x^3 + \ldots$.

II. <u>Деление степенных рядов</u>. Пусть даны разложения (2.77), (2.78) и $d_0 = \varphi(a) \ne 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x = a$ (в ней должно быть

---

[3] Буква π - от греческого Периферия – круг; обозначение в 1706 г. ввёл английский математик У. Джонсон, а употреблять стали после работ Эйлера.

$\varphi(x)\neq 0$) ряд для дроби $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ можно находить с помощью «деления уголком» как для многочленов или применить «метод неопределённых коэффициентов»: записываем разложение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=e_0+e_1(x-a)+e_2(x-a)^2+\ldots+e_n(x-a)^n+\ldots$ с неизвестными (искомыми) коэффициентами e_n. Умножаем его на ряд (2.78) и приравниваем к ряду (2.77). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a)$, получим систему линейных уравнений для определения e_n. Например, так можно получить разложение для функции $f(x)=\operatorname{tg}x$. Запишем

$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=$ $e_0+e_1x+e_2x^2+e_3x^3+\ldots$, откуда

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\equiv\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)(e_0+e_1x+e_2x^2+e_3x^3+\ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при $x^0,x^1,x^2,x^3,\ldots$, найдём $e_0=0, e_1=1, e_2=0, e_3-\dfrac{e_1}{2}=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow e_3=\dfrac{1}{3},\ldots$, так что $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+\ldots$. Функция $\operatorname{tg}x$ нечётная, поэтому разлагается в ряд по нечётным степеням x. Оказывается, что полученный ряд сходится в интервале $|x|<\dfrac{\pi}{2}$.

III. Подстановка ряда в ряд. Пусть

$$f(u)=c_0+c_1u+c_2u^2+\ldots,\ \varphi(x)=d_1x+d_2x^2+\ldots,\ (d_0=\varphi(0)=0),$$

причём ряды сходятся в некоторой окрестности начала. Тогда в некоторой окрестности точки $x=0$

$$f(\varphi(x))=c_0+c_1(d_1x+d_2x^2+\ldots)+\ldots+c_n(d_1x+d_2x^2+\ldots+d_kx^k+\ldots)^n+\ldots=$$
$$=c_0+c_1d_1x+(c_1d_2+c_2d_1^2)x^2+\ldots.$$

Например, $f(u)=e^u=1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\ldots$, $\varphi(x)=\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$,

$$e^{\sin x}=1+(\sin x)+\frac{1}{2!}(\sin x)^2+\ldots=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2+\ldots=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots.$$

Оказывается, этот ряд сходится на всей оси.

Замечание. Обосновать рассмотренные операции, определить радиус сходимости можно, если выйти в комплексную область – считать x комплексной переменной. Это устанавливается в курсе «Комплексный анализ» («Теория функций комплексной переменной»). Например, радиус сходимости ряда $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ есть $R=1$, т.к. в точках $x=\pm i$ знаменатель $1+x^2=0$ и функция теряет смысл (это её «особые точки»). Ряд сходится в круге $|x|<1$.

13. Приближённые вычисления с помощью рядов. Рядами удобно пользоваться для приближённого вычисления значений функций, интегралов, решения всевозможных функциональных уравнений и т.д. На практике обычно используются ряды по степеням x

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots = T_n(x) + r_n(x),\ -R < x < R;$$

$$T_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,\ r_n(x) = c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \ldots.$$

1) Для того, чтобы приближенно найти значение функции в точке x, полагаем $f(x) \approx T_n(x)$, при этом допускаем ошибку $\Delta = |r_n(x)|$; её надо оценить. Если ряд Лейбницевского типа, то $\Delta = |r_n(x)| \le |c_{n+1} x^{n+1}|$. В других случаях иногда удаётся оценить $|r_n(x)|$ с помощью ряда геометрической прогрессии, сумма которого легко находится, или же приходится оценивать остаточный член *формулы* Тейлора $\Delta_1 = |R_n(x)|$.

Пример. Найдём $\sin 10°$. Перейдём к радианной мере: $\left.\begin{matrix} 180° \sim \pi \\ 10° \sim x \end{matrix}\right| \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{18}$.

По формуле (2.70): $\sin 10° \equiv \sin\dfrac{\pi}{18} = \dfrac{\pi}{18} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^3 + \dfrac{1}{120}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^5 - \ldots$. Полагая $\sin\dfrac{\pi}{18} \approx \dfrac{\pi}{18} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^3$, делаем ошибку $\Delta_0 < \dfrac{1}{120}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^5 < \dfrac{1}{120}\left(\dfrac{4}{20}\right)^5 < 4\cdot 10^{-6}$, и тогда $\sin 10° \approx 0{,}173647$, причём верность первых четырёх знаков после запятой гарантирована.

2) Иногда удаётся найти разложение неэлементарных функций, заданных с помощью интеграла.

а) Заменим в ряде (2.69) x на $(-x^2)$, затем проинтегрируем почленно по промежутку $[0, x]$. Получим

$$\mathrm{Erf}(x) \equiv \int_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1},\ -\infty < x < \infty.$$

Эта функция нечётная, ряд лейбницевского типа; отсюда можно подсчитывать значения функции ошибок $\mathrm{Erf}(x)$ с любой степенью точности.

б) $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $F'(x) + 2xF(x) = 1$ и $F(0) = 0$; тогда $F'(0) = 1$. Используя метод неопределённых коэффициентов, решение уравнения ищем формально в виде ряда пока с неизвестными коэффициентами c_n:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ где } c_0 = 0,\ c_1 = 1.$$

Подставляя в уравнение, найдём для определения c_n рекуррентное соотношение $(n+2)c_{n+2} + 2c_n = 0$ (относится к разряду так называемых разностных уравнений). Так как $c_0 = 0$, то отсюда следует, что все чётные коэффициенты равны нулю: $c_{2k}=0$, а поскольку $c_1=1$, найдём нечётные коэффициенты c_{2k+1} $(k=0,1,2,\ldots)$. Получим для $F(x)$ ряд:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!},\ -\infty<x<\infty.$$

Имея в виду результат, можем заключить, что все проделанные операции законны.

в) Пользуясь разложением (2.70), найдём $\dfrac{\sin t}{t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ (включая $t=0$) и $\mathrm{si}(x)\equiv\int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt=\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ -\infty<x<\infty.$

Упражнение. Можно ли применить этот приём к интегралу $\int\limits_0^x\dfrac{\cos t}{t}dt$?

3) Решение алгебраических уравнений (отыскание неявной функции).

Найдём решение уравнения $y^5+y-x=0$ в окрестности точки $x=0$. Подставляя в уравнение значение $x=0$, получим $y^5+y=0$. Возьмём корень $y=0$, а решение (если оно существует) ищем в виде ряда по степеням x с учётом того, что $c_0=y(0)=0$:

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots. \tag{2.79}$$

Должно выполняться тождество

$$(c_1x+c_2x^2+\ldots)^5+(c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots)-x\equiv 0.$$

Пиравниваем коэффициенты при $x^1,x^2,\ldots$; найдём $c_1=1,c_2=0,c_3=0,c_4=0,$ $c_1^5+c_5=0\Rightarrow c_5=-1,\ldots$. Итак, $y=x-x^5+\ldots$.

Вопрос об области сходимости этого ряда остаётся открытым. Мы лишь предполагаем существование аналитического решения, но оно не всегда существует. Например, уравнение $y^3-x=0$ не имеет решения вида (2.79) (здесь тоже $y\big|_{x=0}=0)$, ибо это решение есть $y=\sqrt[3]{x}$.

4) Решение дифференциальных уравнений.

а) Решим задачу Коши: $y''+y^2-x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$. Решение ищем в виде ряда $y=c_2x^2+c_3x^3+\ldots$, т.к. здесь $c_0=y(0)=0$ и $c_1=y'(0)=0$. Подставляем в уравнение:

$$(2c_2+6c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\ldots)+(c_2x^2+c_3x^3+\ldots)^2-x=0.$$

Отсюда $2c_2=0$, $6c_3-1=0\Rightarrow c_3=\dfrac{1}{6}$, $c_4=c_5=0;\ 6\cdot 5c_6+c_2^2=0\Rightarrow c_6=0$, $7\cdot 6c_7+2c_2c_3=0\Rightarrow c_7=0$, $8\cdot 7c_8+c_3^2+2c_2c_4=0\Rightarrow c_8=-\dfrac{1}{6^2\cdot 7\cdot 8}$. Тогда

$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2016}x^8+\ldots$. Данное уравнение нелинейное и вопрос об области сходимости ряда открыт.

Можно применить «метод ряда Тейлора» или «метод последовательного дифференцирования».

Именно, пусть $y=y(x)$ есть решение. Подставляя его в уравнение, получим тождество по x. Дифференцируя его сколь угодно раз, подсчитываем производные в точке $x=0$, тем самым найдём коэффициенты и ряд Тейлора по степеням x. Прежде всего, из самого уравнения имеем $y''(0)=0 \Rightarrow c_2=0$. Далее $y'''+2yy'-1=0$, отсюда $y'''(0)=1$ и $c_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{1}{6}$; $y^{\mathrm{IV}}+2yy''+2(y')^2=0$, откуда $y^{\mathrm{IV}}(0)=0$ и т.д. Аналогично можно убедиться, что $c_5=c_6=c_7=0$ и подсчитать $y^{\mathrm{VIII}}(0)=-20$, откуда $c_8=-\frac{20}{8!}=\frac{1}{2016}$ и т.д.

б) Применение метода неопределённых коэффициентов особенно удобно для линейных уравнений. Например, найдём решение задачи Коши

$$y''=2xy'+4y,\; y(0)=0,\; y'(0)=1. \qquad (2.80)$$

Учитывая начальные условия, полагаем $y=x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$. Подставляя в уравнение (2.80) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, можно найти $c_2=0$, $c_3=1$, $c_4=0$, и, вообще, при степени x^n имеем: $n(n-1)c_n=(n-2)2c_{n-2}+4c_{n-2}$, откуда $c_n=\frac{2c_{n-2}}{n-1}$, и получим $c_{2k}=0$, $c_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!}$, $c_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!}$, $c_9=\frac{1}{4!}$, …, $c_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!}$. Таким образом,

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!}=xe^{x^2},\; -\infty<x<\infty.$$

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
8. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
9. Солдатов М.А., Круглова С.С., Левина Т.М. Интеграл Фурье. Ряды Фурье: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2011. – 59 с.
10. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
12. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
13. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950. – 456 с.