**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный**

**университет имени Н.И. Лобачевского»**

**Дзержинский филиал ННГУ**

**А.А. Алексеев**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

**Учебно-методическое пособие**

Рекомендовано объединенной методической комиссией Института открытого образования и филиалов университета для студентов филиалов ННГУ,

обучающихся по направлению подготовки

09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород

2019

УДК 512.1

ББК 22.141

А47

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. Автор: А.А. Алексеев. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2019. 52 с.

Рецензент: А.В. Калинин, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИИТММ ННГУ.

В настоящем пособии собраны задачи по элементарной математике для студентов 1-го курса филиалов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»; приведены методы решения различных задач курса, включены задания для самостоятельной работы и ответы к ним для самопроверки.

Пособие будет полезно в том числе студентам естественнонаучных направлений подготовки, желающим повторить школьную математику перед изучением математических дисциплин в вузе.

Ответственный за выпуск:

председатель объединенной методической комиссии Института открытого образования и филиалов университета Недорослова В.В.

УДК 512.1

ББК 22.141

© **Нижегородский государственный**

**университет им. Н.И. Лобачевского, 2019**

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………......4

§1. Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений………………5

§2. Иррациональные уравнения, неравенства, системы уравнений………........15

§3. Показательные уравнения, неравенства, системы уравнений ……………...21

§4. Логарифмические уравнения, неравенства, системы уравнений…………...24

§5. Тригонометрические уравнения, неравенства, системы уравнений………..30

§6. Метод математической индукции…………………………………………….42

§7. Числовые последовательности. Монотонные и ограниченные

последовательности………………………………………………………………...43

§8. Элементарные функции и графики………………………………….………..46

§9. Комплексные числа…………………………………………………………….48

Литература…………………………………………………………………….…….51

**Введение**

Дисциплина «Элементарная математика» изучается студентами 1-го курса филиалов ННГУ, обучающимися по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика». При этом, поскольку основным направлением изучения математики в старших классах является подготовка к ЕГЭ, то источниками информации являются варианты письменных экзаменов, которые имеются в огромном количестве. Подготовка происходит зачастую бессистемно, отдельные разделы школьной математики, знание которых потребуется в дальнейшем, остаются в стороне. Данное пособие ставит своей целью восполнить этот пробел. В нем представлены задачи, встречавшиеся в разное время на вступительных экзаменах по математике в ННГУ, охватывающие необходимые разделы школьной программы алгебры.

Учебно-методическое пособие «Сборник задач по элементарной математике» составлен в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» и рабочей программой дисциплины «Элементарная математика».

В настоящем пособии собраны задачи по элементарной математике для студентов 1-го курса филиалов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика»; приведены методы решения различных задач курса, включены задания для самостоятельной работы и ответы к ним для самопроверки.

Изучение дисциплины «Элементарная математика», безусловно, было бы полезно всем студентам 1-го курса естественнонаучных направлений подготовки, поэтому данное пособие рекомендуется первокурсникам для самостоятельной подготовки к изучаемой дисциплине.

§1. **Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений**

* 1. **Линейное уравнение**

**Определение.** Уравнение вида

(1)

называется линейным, или алгебраическим уравнением 1-й степени относительно неизвестного *х*. Исследование уравнения (1):

- если *,* то - единственное решение;

- если , то решениями уравнения являются все действительные числа;

- если , то уравнение решений не имеет.

* 1. **Квадратное уравнение**

**Определение**. Уравнение вида

*(* (2)

называется квадратным, или алгебраическим уравнением 2-й степени относительно неизвестного х.

Дискриминантом уравнения (2) называется выражение

- если , то уравнение (2) не имеет действительных корней;

- если , то уравнение (2) имеет два действительных корня

которые при *D* = 0 совпадают.

Если в уравнении (2) *a*=1, то квадратное уравнение называется приведенным и обычно записывается в виде

(3)

Для него имеет место теорема Виета: корни уравнения (3) удовлетворяют условиям

* 1. **Кубическое уравнение**

**Определение**. Уравнение вида

(4)

называется кубическим, или алгебраическим уравнением 3-й степени относительно неизвестного х. Не нарушая общности рассуждений, будем предполагать уравнение (4) приведенным, т. е. считаем *a* = 1, и после замены , получим уравнение

(5)

Пологая далее,, приходим к уравнению

В котором переменные *u* и *v* подчиним условиям:

Отсюда находим переменные *u* и *v*, а, следовательно, корни уравнения (5).

* 1. **Некоторые алгебраические уравнения 4-й степени**

**Определение.** Биквадратным уравнением 4-й степени называется уравнение вида

Заменой оно приводится к квадратному уравнению.

Возвратным уравнением 4-й степени называется уравнение вида

Записывая его в виде

и производя замену , приходим к квадратному уравнению.

Также к квадратному уравнению приводится и всякое уравнение вида

**Задачи.**

9. ;

11.

13. 14.

27. Найти два корня уравнения 28. Найти два корня уравнения

произведение которых равно 1. произведение которых равно 2.

29. Найти наименьшее из значений ***х***, 30. Найти наименьшее из значений ***z***,

для которых существуют ***y*** и ***z***, удо- для которых существуют ***x*** и ***y***, удо-

влетворяющие уравнению влетворяющие уравнению

31. Найти наименьшее значение 32. Найти наименьшее значение

выражения , если выражения , если

* 1. **Неравенства**

**Определение**. Высказывание вида или называется неравенством с одним неизвестным х.

Областью определения неравенства называется пересечение областей определения функций и

Значение называется решением неравенства, если при этом значении неравенство справедливо.

Два неравенства называются равносильными, если из справедливости одного следует справедливость другого и наоборот. Множества решений равносильных неравенств совпадают. При решении неравенства его преобразовывают к более простому виду с помощью равносильных преобразований.

Основным методом решения алгебраических неравенств является метод интервалов. Для решения неравенства

находим все действительные корни многочлена : кратности соответственно. Тогда многочлен можно представить в виде произведения сомножителей вида , , где

Все квадратные трехчлены в этом произведении положительны при всех х . А двучлены вида не меняют своего знака при четном k. Если же k – нечетное, то каждый такой двучлен положителен при и отрицателен при . Устанавливая знак многочлена на каждом из интервалов: , находим решение неравенства.

Замечание. При решении нестрогих неравенств следует обращать внимание на граничные точки интервалов.

**Задачи.**

**1.6. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля**

**Определение**. Модулем действительного числа х называется

При этом следует помнить, что .

Простейшие неравенства, содержащие знак модуля равносильны, соответственно,

При проведении алгебраических преобразований следует иметь в виду, что

**Задачи.**

65-66. Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции

* 1. **Системы алгебраических уравнений и неравенств**

**Линейная система двух уравнений с двумя неизвестными**

Системы вида

решаются либо методом подстановки, либо методом алгебраического сложения.

При этом:

- если , то система имеет единственное решение;

- если , то система имеет бесчисленное множество решений;

- если , то система не имеет решений.

Поскольку каждое из уравнений системы определяет на плоскости некоторую прямую, то эти случаи означают, что прямые либо пересекаются в одной точке, либо совпадают, либо параллельны.

**Нелинейные системы с однородным уравнением**

а). В системах вида

второе уравнение есть т.н. однородное уравнение второй степени, которое позволяет исключить одну из переменных, а именно, при имеем:

Отсюда (при очевидных условиях) можем найти:

Подставляя каждое из этих соотношений в первое уравнение системы, получим два квадратных относительно *х* уравнения. При *х* = 0 система решается еще проще.

б). Решение системы вида

сводится к предыдущему, если перейти к следствию, умножая первое уравнение на , второе - на -, и складывая полученные уравнения.

в). Нелинейные симметрические системы.

Системы уравнений

для которых справедливы равенства

называются симметрическими. Системы существенно упрощаются с помощью введения новых переменных по формулам

**Задачи.**

Найти и изобразить на плоскости ХОУ геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе:

Числа *х* и *у* удовлетворяют системе неравенств:

Показать, что при этом и Показать, что при этом

найти и найти

Среди всех решений системы неравенств

найти такое, для которого принимает найти такое, для которого принимает

наименьшее значение выражение наименьшее значение выражение

131. Дана система неравенств 132. Дана система неравенств

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) Всем трем неравенствам системы.

133-134. Найти все положительные решения системы

**Ответы к задачам §1.**

Уравнения.

**1.** 1; - 5; **2.** 2; 0,5. **3.** 3; **4.** 2; 4. **5.**  **6.**

**7. 8.**  **9.**  **10.** **11.** 2; 3. **12.**  -1; 3; **13. 14.** **15.** 1; 2. **16.** 2; 16; **17.** **18.** . **19.** **20.** -1; . **21.** **22.** 1; 2. **23.** 2. **24.** -2; 1; 4. **25.** -1; 2. **26.** 1. **27.** **28.** **29. 30.** **31.**  **32.**

Неравенства.

**33.**  **34.**  **35.**

**36.** **37.**

**38.**  **39.** **40.** **41.**

**42.**  **43.**

**44.**  **45.**

**46.** **47.**

**48.** **49.**  **50.**

Уравнения и неравенства с модулем.

**51.** -1; 3. **52.** **53.** **54.** **55.** -4; -2; 0; 2; 4. **56.** -6; 0; 6.

**57.** -12; 18. **58.** -8; 18. **59.** -2; 0. **60.** 1; 3.

**61.** 1; **62.** **63.** **64.**

**65.** Возрастает на (-2; убывает на (-

**66.** Возрастает на ( убывает на (-

**67.**  **68.**  **69.**

**70.**

**71.**  **72.**

**73.** **74.**

**75.** **76.**

**77.**  **78.**  **79.**  **80.**

**81.**

**82.**  **83.**

**84.** **85.**  **86.**  **87.**

**88.**

Системы уравнений и неравенств.

89. (3;2), (-3;-2); 90.

**91.** (2;1), (-2;-1); **92.** **93.** (0;0),

**94.** (0;0), **95.** (0; 0), ;

**96.** (0;0), (2;1), **97.** (6;9), (9;6); **98.** (1;2), (2;1);

**99.** (1;3), (3;1), (-1;-3), (-3;-1);

**100.** (1;2), (2;1); **101.** ;

**102.** **103.** (2;1); **104.** (-1;2); **105.**  **106.** **107.** (-1;1), (2;-0,5); **108.** (4;1), **109.** (1;2); **110.** (-4;2); **111.** (4;-3;0), (2;-1;2);

**112.** (2;3;3), (1;0;0), (1;3;0); **113.** (-1;0), **114.** (0;1); **115.** (1;2;3), (-1;-2;-3);

**116.** (1;3;2), (-1;-3;-2); **117.** (2;1;3); **118.** (3;2;1); **119.** ; **120.** (2;4), (-2;-4); **121.** (*a*; 2-*a*), **122.** (*a*; *a*-2), **123.**

**124.** **125.** **126.**  **127.** **128.**  **129.** **130.**

**131.** **132.**

**133.** (12; 6; 18); **134.**  (6; 12; 18).

**§2. Иррациональные уравнения, неравенства, системы уравнений**

**Определение:** Уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком радикала (корня), называется иррациональным.

**2.1. Освобождение от иррациональности уединением радикала**

**2.2. Метод подстановки**

Пример.

**2.3. Однородное уравнение**

Пример.

**2.4. Сведение к системе уравнений**

Избавиться от иррациональности можно путем сведения иррационального уравнения к системе уравнений. Следует помнить лишь об области определения уравнения.

Пример.

Замечания.

1. Выражение под знаком радикала четного порядка должно быть не отрицательным; при этом и сам радикал также является не отрицательным.

2. Выражение под знаком радикала нечетного порядка может иметь любой знак; при этом знак радикала совпадает со знаком подкоренного выражения.

3. Если одна из частей уравнения есть радикал (или сумма радикалов) четного порядка, то следует наложить ограничения на знак другой части уравнения. Это, как правило, сужает область существования решения уравнения.

**Задачи.**

Уравнения.

Неравенства.

99-100. Найти область определения и множество значений функции

101. Найти наибольшее значение функции

102.Найти наименьшее значение функции

Системы уравнений и неравенств.

Найти наибольшее значение , если

**Ответы к задачам §2.**

Уравнения.

**1.** -4. **2.** 6. **3.** 4. **4.** 4. **5.** 1. **6.** -8. **7.** 6. **8.** -0,5. **9.** 1. **10.** 2. **11.**

**12.**  **13.**  3. **14.** 6. **15.** . **16.**  1. **17.** -4; 3. **18.** 6; 8. **19.** 1. **20.** -1.

**21.** 0; **22.** 0; **23.** 3. **24.** 2. **25.** **26.** **27.** -3; 4.

**28.** -7; 2. **29.** 14. **30.** 13. **31.** **32.** **33.** . **34.**

**35.** 2; 5. **36.** 0,5; 5. **37.** 2. **38.** 3; 5. **39.** -0,2. **40.** **41.** 2. **42.** 3. **43.** 1. **44.** 2.

**45.** -6; 1. **46.** -4; -3. **47.** 2. **48.** 1. **49.** 5. **50.** 3. **51.** 0. **52.** 1,5. **53.** -2; 1.

**54.** -3; 2. 55. **56.**

Неравенства.

**57.** **58.** **59.**

**60.** **61.** *x* < 6. **62.** *x* < 3. **63.** 2,5 **64.**

**65.** **66.** **67.** **68.**

**69.** **70.** **71.** **72.**

**73.** **74.** **75.** **76.**

**77.** **78.** **79.** **80.** x = 0, x > 4.

**81.** **82.** **83.**

**84.** **85.** **86.**

**87.** **88.**

**89.**

**90.**  **91.**

**92.** **93.** **94.** **95.** **96.**

**97.** **98.** . **99.**

**100.** **101.** . **102.**

**103.** **104.**

Системы уравнений и неравенств.

**105.** (1;4), (4;1). **106.** (4; 1). **107.** (4; 1), . **108.** (5; 4), (-9; 25). **109.** **110.** (0; 0). **111.** **112.** **113.** (16; -3), (9; -4). **114.** (9; 2), **115.** (8; -1). **116.** (3; 2). **117.** (3; -6), (9; 0). **118.** (-3; 6), (9; 0). **119.** (2; 1). **120.** (3; 2). **121**. *x* = -3. **122.** *x* = -4. **123.** 89. **124.** 85.

§3. **Показательные уравнения, неравенства, системы уравнений**

**Определение**: Уравнение вида

и к ним приводящиеся, называются показательными. Оно равносильно уравнению

Приведем основные виды показательных уравнений.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

ибо

Показательные неравенства, как правило, приводятся к виду

При этом:

- если то оно равносильно неравенству

- если то оно равносильно неравенству

Частные виды показательных неравенств:

1. При имеет место:

2. При имеет место:

3. Показательно-степенное неравенство эквивалентно двум системам

Уравнения.

Неравенства.

(без помощи калькулятора);

Системы уравнений и неравенств.

**Ответы к задачам §3.**

Уравнения.

**1.** **2.** **3.** x = 1. **4.** x = 1,5. **5.** x = 0.

**6.** *x* = 0, *x*=0,5. **7.** *x* = -2, *x* = 2. **8.** *x* = -3, *x* = 3. **9.** *x* = 0. **10.** .

**11.** *x* = 1. **12.** *x* = 1. **13.** . **14.** . **15.** *x* = 0. **16.** *x* = 0.

**22.**  *x* = 2, *x* = 5. **23.** . **24.** **25.**  .

**26.** **27.** **28.** *x* = 2. **29.** *x* = 1, *x* = 3. **30.** *x* = -1, *x* = 2.

**31.**  **32.**

Неравенства.

**33.** *х* > 1. **34.** *х* > 2. **35.** *x* < 2. **36.** *x* < 3. **37.**

**38.** **39.** **40.**

**41.**  **42.** **43.** **44.**

**45.**  **46.** **47.**

**48.** **49.**

**50.** **51.**

**52.** **53.**

**54.**  **5.**  **56.** 1 < x .

**57.** 1 < x < 9. **58.** 0 < x < 25. **59.** **60.**

Системы.

**61.** (-2; 0). **62.** (-1; 2). **63.** (3; -1). **64.** (1; -1). **65.** (1; -3), (-6; -3). **66.** (-1; 3), (3; 3).

**67.** (2; 2). **68.** (3; -5). **69.** (1; 1; 1). **70.** (1; 1; 1).

§4. **Логарифмические уравнения, неравенства, системы уравнений**

**Определение**: Логарифмом положительного числа ***b*** по положительному основанию ***а***  показатель степени, в которую нужно возвести ***а,*** чтобы получить ***b***.

Логарифмы по основанию 10 называются десятичными и обозначаются ***lg***; логарифмы по основанию ***e*** называются натуральными и обозначаются ***ln***.

Логарифмическим уравнением называется уравнение вида

и приводящиеся к нему. При этом область определения уравнения задается неравенствами

За определение логарифма принимается основное логарифмическое тождество

Справедливы следующие свойства логарифмов:

2. Если основание , то большему числу соответствует больший логарифм, т. е.

3. Если , то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е.

4. при любом основании *а* ().

5. при любом а ().

6.

.

9. Формула перехода к другому основанию имеет вид:

В частности,

Приведем приемы решения некоторых логарифмических уравнений.

1. Потенцирование, т.е. переход от уравнения к уравнению

2. Переход к логарифмам по одному основанию (свойство 9).

3. Замена переменного: уравнение заменой сводится к уравнению с последующим решением одного или нескольких простейших логарифмических уравнений .

Уравнения.

15.

.

Неравенства.

Системы уравнений и неравенств.

139-140. Найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе

**Ответы к задачам §4.**

**1.** **2.** **3.** **4.** **5.** 8. **6.** -3. **7.** 1. **8.**

**9.** **10.** **11.** -1000. **12.** -5, **13.** -3. **14.** 4. **15.** -6,

**16.** 2, 2-2 **17.** **18.** **19.** **20.** **21.** 16. **22.** -5, 5.

**23.** 4. **24.** 5. **25.** **26.** **27.** -0,25. **28.** 0,7. **29.**  **30.**

**31.** **32.** 0,5, 4. **33.** -5, -3. **34.** -4. **35.**  4. **36.** **37.** 3. **38.** 2.

**39.** **40.** **41.** 1. **42.** 100. **43.** **44.** 2, 16. **45.** 1. **46.** 1. **47.**

**48.** . **49.** **50.** . **51.** **52.** **53.**  . **54.** . **55.** -2,5, **56.** . **57.** 2, 4. **58.** 4, 6. **59.** **60.** **61.** 1. **62.** 0,5.

**63.** 1. **64.** 6. **65.** **66.** **67.**

**68.** **69.** **70.** **71.** **72.** 1 < *x* < 3.

**73.** **74.** **75.** **76.**

**77.78.**

**79.** -0,5 < *x* < 0. **80.** 0,5 < *x* < 1. **81.** -4 < *x* < -3, *x* > 8. **82.**

**83.** **84.** . **85.**

**86.** **87.** **88.** x < -2, x > 0. **89.**

**90.** **91.** 0 < x < 1, **92.**

**93.** -2 < *x* < -1, -1 < *x* < -0,5, 0 < *x* < 4. **94.**

**95.** . **96.**

**97.** **98.** **99.** . **100.** . **101.**

**102.** **103.** . **104.** .

**105.** **106.** . **107.**

**108.** . **109.** *x* < -1, *x* > 1. **110.**  .

**111.** **112.** **113.** **114**. **115.** -1 < x < 1, 3 < x < 5. **116.** -1 < x < 4.

**117.** 1 < *x* < 4. **118.** **119.** -3 < *x* < -1. **120**. 1 < *x* < 3.

**121.** **122.**

**123.**  0 < x < 4, x = 8. **124.** **125.**

**126.** **127.**

**128.**  **129.** **130.**

**131.** . **132.**  133. 0 < x < 1.**134.** 0,5< x < 1.

**135.** . **136.** . **137.** ( -1, 0). **138.** ( -1, 0).

**139.** **140.** **141.** **142.**

**143.** **144.**

§ 5. **Тригонометрические уравнения, неравенства, системы уравнений**

Решение всех тригонометрических уравнений сводится, в конечном итоге, к решению простейших уравнений:

Преобразование тригонометрических выражений производится с помощью формул:

Рассмотрим некоторые методы решения тригонометрических уравнений.

1. Уравнения вида , где многочлен, соответствующей заменой приводятся к алгебраическому уравнению . Следует лишь учесть, что .

2. Уравнения, линейное относительно :.

Записав его в виде

и вводя обозначения

приходим к простейшему уравнению

которое имеет решения лишь при условии

3. Уравнения, однородные относительно , т.е. уравнения вида

При значения , для которых , не являются решениями исходного уравнения, поэтому поделив обе его части на , приходим к алгебраическому уравнению относительно При степень исходного уравнения понижается после вынесения общего множителя за скобку.

4. Уравнения, приводящиеся к однородному:

(с помощью основного тригонометрического тождества).

5. Если уравнение выражает связь между и , то заменой

оно сводится к алгебраическому уравнению.

6. В уравнениях, связывающих косинус двойного угла и четные степени синуса и (или) косинуса, то удобно пользоваться формулами понижения степени.

7. Всякое рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного и того же аргумента сводится к алгебраическому с помощью т.н. универсальной тригонометрической подстановки . При этом

8. Некоторые типы нестандартных тригонометрических уравнений решаются с помощью изучения области определения и множества значений входящих в него функций.

**Замечание.** Следует иметь ввиду, что ответы в тригонометрических уравнениях могут быть записаны по-разному. Так, например, даже решение простейшего уравнения можно записать в следующих формах:

и т.д.

Задачи.

;

173.

174.

175. 176.

177.

178.

179. ; 180.

181. 182.

183.

184.

185. 186.

187.

188.

189. 190.

191.

192.

193. 194.

195. 196.

197.

198.

199. 200.

201.

202.

203.

204.

205.

206. ;

207. 208.

209. 210.

211.

212.

213. 214.

215.

216.

217. 218. ;

219. 220. ;

221. 222. ;

223. 224.

225. 226. ;

227. ; 228. ;

229. 230. ;

231. 232. ;

233. ; 234.;

235. ; 236. ;

237. ; 238. ;

239. ;

240. ;

241. ; 242. ;

243. ; 244. ;

245. ; 246. ;

247. ; 248. ;

249. ; 250. ;

251. ; 252. ;

253. ; 254. ;

255. ; 256. ;

257. ;

258. ;

259. ; 260. ;

261. ; 262. ;

263. ; 264. ;

265. ;

266. ;

267. ; 268. ;

269. ; 270. ;

271. ; 272. ;

273. ;

274. ;

275. ; 276. ;

277. ; 278. ;

279. ; 280. .

**Ответы к § задачам 5**

(здесь всюду – целые числа).

**1.** **2.** **3.**

**4.** . **5.** **6.**

**7.** **8.**

**9.**  **10.**  **11.** **12.** **13.**

**14.** **15.** **16.**

**17.** **18.** **19.** **20.**

**21.** **22.** **23.**

**24.** **25.** **26.** **27.**

**28.** **29.** **30.** **31.**

**32.** **33.** **34.**

**35.** **36.** **37.**

**38.** **39.** **40.**  **41.**

**42.** **43.** **44.**

**45.** **46.** **47.** **48.** **49.**

**50.** **51.**  **52.** **53.**

**54.** **55.**  **56.**

**57.** **58.** **59.**

**60.** **61.** . **62.**

. **63.** **64.** **65.** **66.**

**67.** **68.** **69.** **70.** **71.**

**72.** **73.** **74.**

**75.** **76.**  **77.**

**78.**  **79.** **80.**

**81.** **82.**  **83.**

**84.** **85.** **86.** **87.** **88.** **89.**

**90.** **91.** **92.** **93.**

**94**. **95.** **96.** **97.** **98.**

**99.** **100.** **101.**

**102.** **103.**

**104.** **105.**

**106.** **107.** **108.** **109**.

**110.** **111.** **112.** **113.**

**114.** **115.**

**116.** **117.** **118.**

**119.** **120.**

**121.** **122.** **123.** **124.** **125.**

**126.**  **127.** **128.** **129.** **130.**

**131.** **132.**

**133.** **134.** **135**. **136.**

**137.**

**138.** **139.** **140.** **141.**

**142.** **143.** **144.** **145.**

**146.** **147.** **148.**

**149.** **150.** **151.** **152.**

**153.** **154.**  **155.** 3; **156.** 1;

**157.** **158.** **159.**

**160.** **161.** **162.**

**163.** **164.** **165.** **166.**

**167.** **168.** **169.** **170.**

**171.** **172.**

**173.**

**174.** . **175.** 0; **176.**

**177.** **178.** **179.**

**180.** **181.**

**182.** **183.**

**184.**

**185.** **186.** **187.** **188.**

**189.** **190.**

**191.** **192.**

**193.** **194.** **195**. **196.**

**197.** **198.** **199**.

**200.**  **201.** **202.**

**203.** **204.** **205.** **206.** **207.** **208.**

**209.** 210. **211**.

**212.** **213.** **214.**

**215.**  **216.** **217.** **218**.

**219.** **220.** .

**221**. **222.** **223**.

**224.** . **225.**

**226.** **227.** **228.**

**229.**  **230.**

**231.**

**232.**

**233.**  **234.**

**235.** **236.**

**237.** **238.**

**239.** **240.**  **241.**

**242.**

**243.**

**244.**

**245.** **246.**

**247.**  **248.** **249.** **250.**

**251.** **252.**

**253.**

**254.** **255**.

**256.** **257.**

**258.**.

**259.** **260.**

**261.** -1. **262.** **263.** . **264.** **265.** **266.**

**267.** 0; **268**. 0. **269.**  **270.** **271.** **272.** **273.**

**274.** **275.** **276.** **277.** . **278.** **279.** **280.** -3.

§6. **Метод математической индукции**

Пусть имеется некоторое высказывание (т.е. утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно), зависящее от натурального аргумента *n*. Тогда, если:

1. Утверждение истинно;

2. Из того, что утверждение – истинно, следует, что утверждение тоже истинно.

Тогда утверждение истинно при любом натуральном *n*.

Сформулированное утверждение обычно называют принципом полной математической индукции,

В некоторых случаях утверждение истинно лишь при , тогда пункт 2 подлежит проверке при .

Задачи.

Доказать равенства:

1. 2.

3. 4.

5. ;

6.

7. 8. ;

9. 10. .

Доказать неравенства:

11. 12.

13. 14. ;

15. 16.

17. 18.

19. 20.

Доказать, что при любом натуральном ***n***:

21. Число делится на 19;

22. Число делится на 6;

23. Число делится на 5; 24. Число делится на 11;

25. Число делится на 133;

26. . Число оканчивается цифрой 7 (*n* > 1).

§7. **Числовые последовательности. Монотонные и ограниченные**

**последовательности**

Если каждому натуральному поставлено в соответствие по некоторому закону действительное число , то говорят, что задана числовая последовательность. При этом - общий элемент или член последовательности, – его номер.

Существуют различные способы задания числовых последовательностей, среди которых наиболее распространенным и удобным для исследования является определение числовой последовательности с помощью формулы общего члена

где – заданная функция.

Числовая последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если существует действительное число *М* (*m*), что все элементы последовательности меньше *М* (больше *m*). Данное определение символически можно записать в виде:

Числовая последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т.е.

Числовая последовательность называется возрастающей (неубывающей), если для всех натуральных *n* выполнено неравенство

Числовая последовательность называется убывающей (невозрастающей), если для всех натуральных *n* выполнено неравенство

Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

Числовая последовательность может становиться монотонной лишь начиная с некоторого номера.

Число *M* называется верхней гранью числовой последовательности (обозначается ), если:

1). При любом натуральном *n* выполняется неравенство ;

2). Каково бы ни было положительное число можно указать такой номер , что выполняется неравенство .

Число *m* называется верхней гранью числовой последовательности (обозначается ), если:

1). При любом натуральном *n* выполняется неравенство ;

2). Каково бы ни было положительное число можно указать такой номер , что выполняется неравенство .

Доказать ограниченность последовательности:

1. 2.

3. 4.

5. 6.

.

Доказать неограниченность последовательности:

Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

Найти верхнюю (sup) и нижнюю (inf) грань последовательности:

§8. **Элементарные функции и графики**

**Определение**. Если каждому элементу *х* из числового множества *Х* поставлен в соответствие по некоторому закону единственный элемент *у* из числового множества *Y*, то говорят, что на множестве *Х* задана функция, которую обозначают обычно , или При этом множество *Х* – область определения функции, а *Y* – область ее изменения.

Графиком функции называется геометрическое место точек

Свойства функций.

1. Функция называется ограниченной сверху (снизу) если существует такое число *M* (*m*), что для всех имеет место неравенство

2. Функция называется ограниченной, если она ограничена как сверху, так и снизу, т.е. существуют числа *M* и *m*, что имеет место неравенство

.

3. Функция называется возрастающей (убывающей) на интервале если для любых двух значений имеет место неравенство .

4. Функция называется четной (нечетной), если для любого выполняется равенство

Замечание. Область определения четной и нечетной функций симметрична относительно начала координат. При этом график четной функции симметричен относительно оси *ОY*, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5. Функция называется периодической, если существует число такое, что для каждого значения также принадлежат и имеет место равенство (условие периодичности). При этом все числа вида также удовлетворяют этому условию.

Периодом функции называется наименьшее положительное число удовлетворяющее условию периодичности. Область определения периодической функции неограниченна.

Построить графики функций.

§ 9**. Комплексные числа**

**Определение**: Комплексным числом называется упорядоченная (т.е. взятая в определенном порядке) пара действительных чисел , или выражение вида , где символ ***i*** есть т.н. мнимая единица. Множество комплексных чисел обозначают ***С***. Действительные числа *а* и *b* называются, соответственно, действительной и мнимой частью комплексного числа , и обозначаются:

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е.

На множестве комплексных чисел *С* вводятся операции сложения и умножения:

- суммой двух комплексных чисел называется число

- произведением чисел называется число

Легко убедиться, что эти операции обладают свойствами:

- (коммутативность сложения и умножения);

- (ассоциативность сложения и умножения).

Для любых комплексных чисел существует комплексное число , такое, что . Это число называется разностью чисел и обозначается

.

Для любых комплексных чисел существует комплексное число , такое, что . Это число называется частным чисел и обозначается

Комплексное число отождествляют с действительным числом Множество действительных чисел является подмножемтвом множества комплексных чисел, т.е. Числа называются чисто мнимыми и обозначают

Числа и называются комплексно сопряженными, их произведение есть действительное число

Каждому комплексному числу может быть поставлена в соответствие тачка т.н. комплексной плоскости. Ее ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат – мнимой осью. Число удобно интерпретировать как вектор

Модулем комплексного числа называется длина соответствующего этому числу вектора и

Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси.

Действительная и мнимая части комплексного числа связаны с его модулем и аргументом формулами

Отсюда

Каждое комплексное число , отличное от нуля, может быть представлено в т.н. тригонометрической форме

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме,

равны тогда и только тогда, когда Кроме того,

(формула Муавра).

Каждое комплексное число , отличное от нуля, также может быть представлено в т.н. показательной форме:

При этом

Имеет место формула Эйлера:

и, в частности,

**Задачи.**

Вычислить:

Решить уравнения:

Изобразить следующие числа векторами, найти их модуль и аргумент, записать в показательной и тригонометрической формах:

Найти

Вычислить по формуле Муавра:

**Литература**

Основная литература:

1.Авдонин Н.И., Тихов М.В., Калинин А.В., Алексеев А.А., Новоженов М.М., Макеев Н.Г. Математика (по материалам вступительных испытаний в ННГУ).

Изд-во Нижегородского ун-та; 1997-2007 г.г.

2. Авдонин Н.И., Голубев В.К. 30 уроков репетитора по математике (по материалам вступительных экзаменов в вузы). Нижний Новгород, 1997 г. 304 с.

3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т.1, Москва, «Наука», 1984.

4. Кальней С.Г Математика: Учебное пособие: Том 1 / Кальней С.Г., Лесин В.В., Прокофьев А.А. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 352 с. (доступно в ЭБС «Znanium.com», режим доступа:

http://znanium.com/bookread2.php?book=520540). [Дата обращения: 25.01.2019]

5. Ячменев Л.Т. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ: Уч. пос. - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 336 с. (доступно в ЭБС «Znanium.com**»,** режим доступа:

<http://znanium.com/bookread2.php>? book=500649). [Дата обращения: 25.01.2019]

Дополнительная литература:

1. Журбенко Л.Н. Математика в примерах и задачах: Учебное пособие/ Журбенко Л. Н., Никонова Г. А., Никонова Н. В., Дегтярева О. М. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 372 с.:(доступно в ЭБС «Знаниум», режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=484735>
2. Данилов Ю.М. Математика: Учебное пособие / Ю.М. Данилов, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 496 с. (доступно в ЭБС «**Znanium.com**»**,** режим доступа:

<http://znanium.com/bookread2.php?book=539549>).

3. Филиппова Е.Е. Математика: Учебное пособие. - Вологда:ВИПЭ ФСИН России, 2015. - 378 с. (доступно в ЭБС «Znanium.com», режим доступа:

http://znanium.com/bookread2.php?book=899484). [Дата обращения: 03.09.2018]

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Автор: Алексеев Александр Артемьевич,

Учебно - методическое пособие

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.