МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2020

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО: Автор: Панкратов Е.Л. Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. - 12 с.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» НГТУ им. Р.Е. Алексеева М.Е. Елисеев.

Учебно-методическое пособие «Введение в теорию функций комплексного переменного» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с базовыми операциями над функциями комплексного переменного и комплексными числами. Для закрепления теоретических знаний в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Макарова С.Д.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В последнее время в различных физических, технических, экономических и ряде других приложениях получают все более широкое распространение функции комплексного переменного и комплексные числа. Данное пособие подготовлено для ознакомления студентов с базовыми операциями над функциями комплексного переменного и комплексными числами. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов) образовательного стандарта по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела «Введение в теорию функций комплексного переменного» дисциплины «Математика» студенты должны знать основные операции над функциями комплексного переменного и комплексными числами.

1. ***Комплексные числа***

Определение 1

Комплексным числом называется выражение $z=x+jy$, где x и y - действительные числа, j - мнимая единица, определяемая следующим образом $j^2=-1$.

Определение 2

Числа x и y называются действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются символами $x=Re(z)$ и $y=Im(z)$.

Определение 3

Если $y=0$, то z совпадает с действительным числом x. Если $x=0$, то z называется чисто мнимым и обозначается $z=jy$.

Определение 4

Комплексные числа $z_1=x_1+jy_1$ и $z_2=x_2+jy_2$ считаются равными, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Определение 5

Если $x_1=x_2$ и $y_1=-y_2$, то комплексное число $z_2=x_2+jy_2$ считается сопряжённым с $z_1=x_1+jy_1$. Сопряжённое с $z=x+jy$ обозначается следующим образом: $\overline{x+jy}$, т.е. $\overline{x+jy}=x-jy$.

Представление комплексного числа в полярных координатах

(*в тригонометрической форме*)

Для перехода от декартовых координат к полярным совместим полярную ось с положительной полуосью x, а полюс - с началом координат. Тогда, если обозначить через r полярный радиус и через φ - полярный угол точки z, тогда: $z=x+jy=r\,[cos(\varphi)+j\,sin(\varphi)]$. Полярный радиус называется модулем комплексного числа z и обозначается символом $|z|$. Угол φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $Arg(z)$. Модуль комплексного числа определён однозначно

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0.$$

Аргумент комплексного числа определён с точностью до любого слагаемого, кратного 2π

$$\varphi=Arg\left(z\right)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)+2k\pi, & -\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\dfrac{\pi}{2} \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)+2\left(k+1\right)\pi, & \dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq 3\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Здесь $arctg\ (z)$ обозначает главное значение $Arctg\ (z)$, т.е. $-\pi/2\leq\varphi\leq\pi/2$, k - произвольное целое число. Кроме символа $Arg\ (z)$, обозначающего всю совокупность значений аргумента, используется также символ $arg(z)$, обозначающий одно из значений $Arg\ (z)$. При этом, если необходимо, специально оговаривается, какое именно значение выбирается.

Формула Эйлера

Формулой Эйлера называется следующее соотношение

$$e^{j\varphi}=e^{j(\varphi+2\pi k)}=cos(\varphi)+j\,sin(\varphi)=cos(\varphi+2\pi k)+j\,sin(\varphi+2\pi k).$$

Операции над комплексными числами

Сложение

Определение 6

Суммой z_1+z_2 комплексных чисел $z_1=x_1+jy_1$ и $z_2=x_2+jy_2$ называется комплексное число $z=z_1+z_2=x_1+x_2+j\,y_1+j\,y_2$. Из данного определения вытекают следующие законы сложения

1) переместительный: $z_1+z_2=z_2+z_1$,

2) сочетательный: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

Пример 1

Если z_1и z_2 действительные числа, (т.е. $y_1=y_2=0$), то определение совпадает с определением сложения для действительных чисел.

Определение 7

Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел $z_1=x_1+j\,y_1$ и $z_2=x_2+j\,y_2$ можно найти такое число z, что $z_2+z=z_1$. Это число называется разностью чисел z_1 и z_2 и обозначается z_1-z_2. Очевидно, что $z_1-z_2=x_1-x_2+jy_1-jy_2$.

Умножение

Определение 8

Произведением двух чисел $z_1=x_1+j\,y_1$ и $z_2=x_2+j\,y_2$ называется следующее комплексное число $z=z_1z_2=(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)=x_1x_2-y_1y_2+j(x_1y_2+x_2y_1)$.

Следствием умножения являются следующие законы умножения

1) переместительный: $z_1z_2=z_2z_1$;

2) сочетательный: $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

3) распределительный: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

Пример 2

Если z_1 и z_2 - действительные числа (т.е. $y_1=y_2=0$), то их произведение определяется в рамках рассмотренной ранее стандартной процедуры.

Пример 3 Если $z_1=z_2=j$, то $j^2=-1$.

Пример 4 $z\,\bar{z}=x^2+y^2\geq 0$.

Умножение комплексных чисел также допускает обратную операцию. Пусть $z_2\neq 0$. Тогда можно найти такое число z, что $z_2z=z_1$, т.е.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+j\,y_1}{x_2+j\,y_2}.$$

Обычно результат деления комплексных чисел приводят к форме, у которой знаменатель является действительным. Такая форма получается умножением числителя и знаменателя в последнем соотношении на величину, сопряженную знаменателю, т.е.

$$\frac{x_1 + j\,y_1}{x_2 + j\,y_2} = \frac{(x_1 + j\,y_1)(x_2 - j\,y_2)}{(x_2 + j\,y_2)(x_2 - j\,y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - j\,x_1y_2 + j\,y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение в степень

Определение 9

Произведением n равных чисел z называется n-ой степенью числа z и обозначается символом z^n.

Определение 10

Обратная операция - извлечение корня - определяется следующим образом: число z_1 называется корнем n-ой степени из числа z_2, если $z_1^n = z_2$ (обозначается $\sqrt[n]{z}$ при произвольном n и $\sqrt{z}$ при n=2).

Формулы Муавра

Рассмотрим процедуру возведения комплексного числа в произвольную степень n полярных координатах $z=r[cos(\varphi)+j sin(\varphi)]$. Может быть показано, что

$$r^n[cos(\varphi)+j sin(\varphi)]^n=r^n[cos(n\varphi)+j sin(n\varphi)].$$

Соотношение для обратной операции имеет следующий вид

$$\sqrt[n]{r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right].$$

Два последних соотношения называются формулами Муавра.

Пример 5

Рассмотрим формулы Муавра для n=2

$$r^2[cos(\varphi)+j sin(\varphi)]^2=r^2[cos(2\varphi)+j sin(2\varphi)],$$

$$\sqrt{r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]} = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)\right].$$

Из определения умножения комплексных чисел следует, что при умножении чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Проверяя такое утверждение формальным перемножением, получаем

$$z_1z_2=r_1r_2\{[cos(\varphi_1)cos(\varphi_2)-sin(\varphi_1)sin(\varphi_2)]+j[sin(\varphi_1)cos(\varphi_2)+cos(\varphi_1)sin(\varphi_2)]\}=$$

$$=r_1r_2[cos(\varphi_1+\varphi_2)+sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Данное соотношение показывает, что при умножении комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 растягивается в $|z_2|$ раз и поворачивается против часовой стрелки на угол $arg(z_2)$.

Пример 6

Умножение числа z на j сводится к повороту (без растяжения) вектора z на прямой угол против часовой стрелки.

Логарифм комплексного числа

Логарифм комплексного числа $z=re^{j\varphi}$ вычисляется с помощью формулы

$$ln(z)=ln(r)+j\,\varphi+2\pi k.$$

Сумма первых двух слагаемых называется главным значением логарифма.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Рассмотрим плоскость декартовых координат $x\mathrm{O}y$ и будем изображать комплексное число $z=x+j\,y$ точкой с координатами (x,y). При этом действительные числа будут изображаться точками оси x (которая в дальнейшем будет называться действительной осью), а чисто мнимые числа - точками оси y (которая в дальнейшем будет называться мнимой осью). Такое изображение проиллюстрировано с помощью рис. 1.

Пример 7

Изображением числа j является точка (0,1), лежащая на мнимой оси.

Выполняется также и обратное утверждение, что каждой точке плоскости $x\mathrm{O}y$ с координатами (x,y) будет поставлено в соответствие определённое комплексное число $z=x+j\,y$. Таким образом, соответствие между множеством всех комплексных чисел и всех точек плоскости взаимно однозначное.

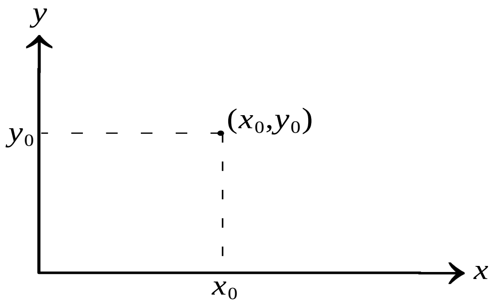

Рис. 1.

2. Функции комплексного переменного

Определение 11

Комплексная функция $w=f(z)=u\,(x,y)+j\,v\,(x,y)=|w|e^{j\varphi}$ $(z=x+j\,y)$ каждому значению независимой комплексной переменной z из некоторой области определения ставит в соответствие одно или несколько значений зависимой переменной w.

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Определение 12

Предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и равен w_0, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек δ-окрестности (кроме, может быть, самой точки z_0) соответствующие точки w лежат в ε-окрестности w_0, т.е. из неравенств $0<|z-z_0|<\delta$ вытекает $|f(z)-w_0|<\delta$.

Предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=u_0+j\,v_0=w_0$ существует тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$. Так как данное определение сводится к обычному определению предела действительных функций, то основные свойства предельного перехода сохраняются для функций комплексного переменного.

Пример 7

Найдём предел функции Жуковского $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ при $z\to 1$. Данный предел $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ равен 1.

Определение 13

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности z_0 (включая саму точку z_0) и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Для непрерывности функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в точке (x_0,y_0). Функция $f(z)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке данной области.

Дифференцирование функции комплексного переменного

Определение 14

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, если существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z).$$

Данный предел называется производной функции $f(z)$ в точке z. В терминах действительных функций условие дифференцируемости функции $f(z)$ может быть представлено в следующем виде

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Данное условие называется условием Коши-Римана. Свойства производных функции комплексного переменного аналогичны свойствам производных функции действительного переменного.

Пример 8

Вычислим производную функции $f(z)=e^z$. На первом этапе проверим, выполняется ли условие Коши-Римана. Подстановка рассматриваемой функции $f(z)=e^z=e^x[cos(y)+j\cdot sin(y)]$ в данное условие позволяет получить

$$\cos(y)\frac{\partial e^x}{\partial x}=e^x\frac{\partial\sin(y)}{\partial y},\ e^x\frac{\partial\cos(y)}{\partial y}=-\sin(y)\frac{\partial e^x}{\partial x}.$$

Поскольку оба уравнения удовлетворяются, функция $f(z)$ является дифференцируемой, а её производная равна $\frac{d\,e^z}{d\,z}=e^z$.

Интегрирование функции комплексного переменного

Определение 15

Пусть задана некоторая ориентированная кривая L и на ней - функция комплексного переменного $f(z)$. Интегралом от $f(z)$ вдоль L называется предел

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1}-z_k),$$

где $z_0=a$, z_1, …, $z_{n+1}=b$ - последовательные точки, разбивающие L на n участков, ξ_k произвольная точка, лежащая на участке $[z_k,z_{k+1}]$ кривой L, предел берётся в предположении, что $|z_{k+1}-z_k|\to 0$. Если L - кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ - кусочно-непрерывная и ограниченная функция, то данный интеграл всегда существует и может быть представлен в следующей форме

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \int\limits_{(L)} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + j\int\limits_{(L)} u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx.$$

<u>Пример 9</u>

Вычислим интеграл от функции $f(z)=e^z$ по контуру $y=x$ на отрезке от начала координат до $x=1$. Тогда получаем

$$\int\limits_{(L)} e^z dz = \int\limits_{(L)}\left[e^x+\cos(y)\right]dx - \sin(y)\,dy + j\int\limits_{(L)}\left[e^x+\cos(y)\right]dy + \sin(y)\,dx =$$

$$=\int_0^1\left[e^x+\cos(x)\right]dx - \int_0^1 \sin(y)\,dy + j\int_0^1\left[e^y+\cos(y)\right]dy + \int_0^1 \sin(x)\,dx = \left[e^x+\sin(x)\right]_0^1 +$$

$$+\cos(y)\Big|_0^1 + j\left[e^y+\sin(y)\right]_0^1 - j\cos(x)\Big|_0^1 = e+\sin(1)-1+\cos(1)-1+j\left[e+\sin(1)-1\right]-$$

$$-j\left[\cos(1)-1\right] = e+\sin(1)-2+\cos(1)+j\left[e+\sin(1)-\cos(1)\right].$$

При интегрировании функции комплексного переменного могут быть использованы стандартные методы вычисления соответствующих интегралов. В тоже время имеется специфический метод вычисления интеграла функции комплексного переменного: вычисление интегралов с помощью вычетов. Интегрирование с помощью вычетов применяется для функций, имеющих особые точки. Например, функция $f(z)=1/(z-3)$ имеет особую точку $z_0=3$.

<u>Определение 16</u>

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется значение следующего интеграла

$$\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),$$

где интегрирование ведется по замкнутому кусочно-гладкому контуру L, содержащему внутри себя точку z_0 и не содержащему других особых точек функции $f(z)$. При этом интегрирование ведётся в положительном направлении относительно области, содержащей точку z_0. Если контур L содержит внутри себя N особых точек z_i, то значение вычисляемого интеграла определяется суммой вычетов

$$\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z). \qquad (1)$$

Правила вычисления вычетов в точке $z_0\neq\infty$

1) Если точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$, то

$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

2) Если точка z_0 - полюс порядка $m \geq 1$ (например, функция $f(z)=1/(z-3)^3$ в точке $z_0=3$ имеет полюс третьего порядка) функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z=z_0} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)}.$$

Если $m=1$, тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z=z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right].$$

<u>Пример 10</u>

Рассмотрим вычисление интеграла $\oint\limits_{(L)} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} dz$, где контур L имеет вид: $|z-2|=3$. Подынтегральная функция данного интеграла аналитична внутри области, ограниченной замкнутым контуром L, за исключением точек $z_0=2$ и $z_0=-1$. Тогда в соответствии с соотношением (1) получаем

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} dz = 2\pi j \left\{ \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} \right\}.$$

Точка $z_0=2$ является полюсом второго порядка. Вычисление соответствующего вычета приводит к следующему результату

$$\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} (z-2)^2 \right] = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \frac{z+2}{z+1} = -\frac{1}{9}.$$

Точка $z_0=-1$ является полюсом первого порядка. Вычисление соответствующего вычета приводит к следующему результату

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} (z+1) \right] = \lim_{z \to -1} \frac{z+2}{(z-2)^2} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, интеграл $\oint\limits_{(L)} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} dz$ равен нулю:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z+2}{(z-2)^2(z+1)} dz = 0.$$

Ряды Тейлора и Лорана

Функцию $f(z)$, аналитическую в области $|z-a|<R$, можно представить в данной области в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

Коэффициенты данного ряда определяются с помощью следующего соотношения

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi\, j}\int\limits_{(L)}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}d\,s\,,\ n=0,\ 1,\ 2,\ ... \qquad (2a)$$

Ряд Лорана, являющийся обобщением ряда Тейлора, имеет следующий вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\,. \qquad (3)$$

Коэффициенты ряда Лорана определяются с помощью похожего соотношения

$$c_n=\frac{1}{2\pi\, j}\int\limits_{(L)}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}d\,s\,,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ... \qquad (3a)$$

Контур L в соотношениях (2a) и (3a) является простым замкнутым контуром, лежащим в области $|z-a|<R$, и охватывающим точку $z=a$.

Пример 11

Разложим функцию $f(z)=z^2\cos(1/z)$ в окрестности точки $z=0$. Для получения разложения данной функции воспользуемся классическим разложением функции $f(s)=cos(s)$ в степенной ряд: $\cos(s)=1-\frac{s^2}{2!}+\frac{s^4}{4!}-\frac{s^6}{6!}+...$ Полагая s=1/z, получаем разложение искомой функции в следующей форме: $z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right)=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\right.$

$\left.+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+...\right)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Сложить, перемножить, разделить друг на друга два комплексных числа $z_1=x_1+j\,y_1$ и $z_2=x_2+j\,y_2$, а также представить их в тригонометрической форме.

01.01. $z_1=2+3j$, $z_2=3+2j$	01.02. $z_1=5+6j$, $z_2=8+3j$	01.03. $z_1=2+j$, $z_2=1+6j$
01.04. $z_1=2$, $z_2=3-8j$	01.05. $z_1=5j$, $z_2=8+7j$	01.06. $z_1=2+j$, $z_2=3j$
01.07. $z_1=3+4j$, $z_2=2+7j$	01.08. $z_1=3-2j$, $z_2=3-8j$	01.09. $z_1=4+j$, $z_2=8+7j$
01.10. $z_1=3+4j$, $z_2=5+7j$	01.11. $z_1=8+3j$, $z_2=5+4j$	01.12. $z_1=3-2j$, $z_2=3-8j$
01.13. $z_1=3$, $z_2=6+3j$	01.14. $z_1=7+3j$, $z_2=2+j$	01.15. $z_1=5-3j$, $z_2=-3+j$
01.16. $z_1=2+7j$, $z_2=3-2j$	01.17. $z_1=2-7j$, $z_2=3+6j$	01.18. $z_1=5+j$, $z_2=3+8j$
01.19. $z_1=7+j$, $z_2=2+8j$	01.20. $z_1=1-3j$, $z_2=2+5j$	01.21. $z_1=3+5j$, $z_2=2-j$
01.22. $z_1=4+7j$, $z_2=3-8j$	01.23. $z_1=7+j$, $z_2=2-3j$	01.24. $z_1=1-j$, $z_2=3-5j$
01.25. $z_1=3+8j$, $z_2=2+5j$	01.26. $z_1=2+j$, $z_2=4+2j$	01.27. $z_1=5-2j$, $z_2=4+j$
01.28. $z_1=9+2j$, $z_2=7+3j$	01.29. $z_1=9+j$, $z_2=3-2j$	01.30. $z_1=7+21j$,$z_2=3+5j$.

II) Вычислить предел функции $f(z)$ при $z\to z_0$, а также найти производную и интеграл по контуру L от данной функции.

02.01. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[3,4]$, $y\in[3,4]$;

02.02. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[1,2]$, $y\in[3,4]$;

02.03. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[3,4]$, $y\in[3,4]$;

02.04. $f(z)=sh(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[3,4]$, $y\in[3,4]$;

02.05. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[3,4]$, $y\in[3,4]$;

02.06. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x^2$, $x\in[1,2]$, $y\in[1,2]$;

02.07. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x^2$, $x\in[1,2]$, $y\in[1,2]$;

02.08. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x^2$, $x\in[1,2]$, $y\in[1,2]$;

02.09. $f(z)=sh(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x^2$, $x\in[1,2]$, $y\in[1,2]$;

02.10. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: $y=x$, $x\in[3,4]$, $y\in[1,2]$;

02.11. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: первая четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

02.12. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: первая четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

02.13. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: первая четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

02.14. $f(z)=sh(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: первая четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

02.15. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: первая четверть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

02.16. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

02.17. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

02.18. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

02.19. $f(z)=sh(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

02.20. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

02.21. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

02.22. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

02.23. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

02.24. $f(z)=sh\,(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

02.25. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: дуга AB линии $y^3=x$, $A(1,1)$, $B(8,2)$;

02.26. $f(z)=cos(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: третья четверть эллипса $(x^2/4)+(y^2/9)=1$;

02.27. $f(z)=sin(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: третья четверть эллипса $(x^2/4)+(y^2/9)=1$;

02.28. $f(z)=z\cdot ln(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: третья четверть эллипса $(x^2/4)+(y^2/9)=1$;

02.29. $f(z)=sh(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: третья четверть эллипса $(x^2/4)+(y^2/9)=1$;

02.30. $f(z)=ch(z)$, $z_0=(1+j)\pi$, L: третья четверть эллипса $(x^2/4)+(y^2/9)=1$.

III) Разложить следующие функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$

03.01. $f(z)=cos(z+4)$; 03.02. $f(z)=cos^2(z)$; 03.03. $f(z)=exp(-z^2)$;

03.04. $f(z)=ln(1+z)$; 03.05. $f(z)=cos(z-1)$; 03.06. $f(z)=x\cdot exp(z)$;

03.07. $f(z)=ln(5-2z)$; 03.08. $f(z)=sin(z+3)$; 03.09. $f(z)=sin(z+1)$;

03.10. $f(z)=cos[(1+z)/2]$; 03.11. $f(z)=cos(3+z/2)$; 03.12. $f(z)=cos(3+z/2)$;

03.13. $f(z)=cos(z)+sin(z)$; 03.14. $f(z)=ln(2+z)$; 03.15. $f(z)=cos(1+z)$;

03.16. $f(z)=cos(z)+ln(z)$; 03.17. $f(z)=sin(z)+exp(z)$; 03.18. $f(z)=cos(z)+sin(z)$;

03.19. $f(z)=\sqrt{1+z^2}$; 03.20. $f(z)=(1+z^2)^{1,5}$; 03.21. $f(z)=\sin\left(\sqrt{1+z}\right)$;

03.22. $f(z)=cos(5z)+sin(z)$; 03.23. $f(z)=sin(z)+cos(3z)$; 03.24. $f(z)=sin(2z)+cos(z)$;

03.25. $f(z)=ln(1-z)$; 03.26. $f(z)=cos(1-z)$; 03.27. $f(z)=sin(z/2)$;

03.28. $f(z)=sin(1+z)$; 03.29. $f(z)=z^2cos(z)$; 03.30. $f(z)=sin(1-z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. - Москва: Наука. 1973.

2. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задача и упражнения. - Москва: Наука. 1981.

3. В.И. Смирнов. Курс высшей математики в 5-и томах. - Москва: Наука. 2008.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.