МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева
П.Б. Болдыревский

ВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 ВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А., Болдыревский П.Б. Учебное пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. - 113 с.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. Ю.А. Кузнецов
д.э.н., проф. Д.Н. Лапаев

Учебно-методическое пособие «Ведение в экономико-математическое моделирование» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальностей 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика», с базовыми экономико-математическими дисциплинами. Оно содержит основные понятия экономико-математического моделирования и финансовых вычислений, теории игр, линейного и нелинейного программирования. Для закрепления теоретических знаний в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственный за выпуск:
председатель Ученого совета Института экономики и предпринимательства,
А.О. Грудзинский.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В данном пособии рассмотрены экономико-математические модели, методы прогнозировании экономических процессов, а также методы их оптимизации. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенции ОПК-6 федерального государственного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика». В результате изучения раздела «Ведение в экономико-математическое моделирование» дисциплины «Математика» студенты должны знать основные виды экономико-математических моделей, уметь их использовать и анализировать. Для закрепления теоретических знаний по данному разделу математики в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенции ОПК-6 федерального государственного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика». В результате изучения раздела «Ведение в экономико-математическое моделирование» дисциплины «Математика» студенты должны знать основные понятия теории функций, дифференциального исчисления и применением дифференциального исчисления к исследованию функций, уметь решать практические задачи по данным темам.

1. *Основные понятия экономико-математическое моделирование*

1.1. Понятие модели

Определение 1

Математическая модель - приближенное описание объекта моделирования, выраженное с помощью математической символики.

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств:

линейные или нелинейные модели;

сосредоточенные или распределённые системы;

детерминированные или стохастические;

статические или динамические;

дискретные или непрерывные.

Возможны и смешанные типы: например, нелинейные модели с распределёнными параметрами. Следующая классификация моделей базируется на имеющихся на момент их использования фактов. К первому типу моделей относится гипотеза.

Гипотеза представляют собой пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным. К ним можно отнести, например, модель Солнечной системы по Птолемею и модель Коперника (усовершенствованная Кеплером), модель атома Резерфорда и модель Большого Взрыва. Модели-гипотезы в науке не могут быть доказаны раз и навсегда, можно лишь говорить об их опровержении или неопровержении в результате эксперимента. Если модель первого типа построена, то это означает, что она временно признаётся за истину и можно сконцентрироваться на других проблемах. Однако это не может быть точкой в исследованиях, но только временной паузой: статус модели первого типа может быть только временным.

Второй тип - феноменологическая модель, содержит механизм для описания явления, хотя этот механизм недостаточно убедителен, не может быть достаточно подтверждён имеющимися данными или плохо согласуется с имеющимися теориями и накопленным знанием об объекте. Поэтому феноменологические модели имеют статус временных решений. Считается, что ответ всё ещё неизвестен, и необходимо продолжить поиск «истинных механизмов». Ко второму типу можно отнести, например, модели теплорода и кварковую модель элементарных частиц. Роль модели в исследовании может меняться со временем, может случиться так, что новые данные и теории подтвердят феноменологические модели и те будут повышены до статуса гипотезы. Аналогично новое знание может постепенно прийти в противоречие с моделями-гипотезами первого типа, и те могут быть переведены во второй. Так, кварковая модель постепенно переходит в разряд гипотез; атомизм в физике возник как временное решение, но с ходом истории перешёл в первый тип. А вот модели эфира проделали путь от типа 1 к типу 2, а сейчас находятся вне науки.

При построении моделей популярна идея упрощения. Но упрощение бывает различным. Можно выделить три типа упрощений в моделировании.

Приближение. Третий тип моделей - приближения (“что-то считаем очень большим или очень малым”). Если можно построить уравнения, описывающие исследуемую систему, то это не значит, что их можно решить даже с помощью компьютера. Общепринятый прием в этом случае - использование приближений (моделей типа 3). Среди них модели линейного отклика. Уравнения заменяются линейными. Стандартный пример - закон Ома. Если мы используем модель идеального газа для описания достаточно разреженных газов, то это - модель типа 3 (приближение). При более высоких плотностях газа тоже полезно представлять себе более простую ситуацию с идеальным газом для качественного понимания и оценок, но тогда это уже тип 4.
Упрощение. Четвёртый тип - упрощение (“опустим для ясности некоторые детали”), в такой отбрасываются детали, которые могут заметно и не всегда контролируемо повлиять на результат. Одни и те же уравнения могут служить моделью типа 3 (приближение) или 4 (опустим для ясности некоторые детали) - это зависит от явления, для изучения которого используется модель. Так, если модели линейного отклика применяются при отсутствии более сложных моделей (то есть не производится линеаризация нелинейных уравнений, а просто ищутся линейные уравнения, описывающие объект), то это уже феноменологические линейные модели, и относятся они к следующему типу 4 (все нелинейные детали “для ясности” опускаем). Примеры: применение модели идеального газа к неидеальному, уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, большинство моделей физики твердого тела, жидкостей и ядерной физики. Путь от микроописания к свойствам тел (или сред), состоящих из большого числа частиц, очень длинен. Приходится отбрасывать многие детали. Это приводит к моделям четвёртого типа.
Эвристическая модель. Пятый тип - эвристическая модель (“количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела”), такая модель сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только “по порядку величины”. Типичный пример - приближение средней длины свободного пробега в кинетической теории. Оно даёт простые формулы для коэффициентов вязкости, диффузии, теплопроводности, согласующиеся с реальностью по порядку величины. Но при построении новой физики далеко не сразу получается модель, дающая хотя бы качественное описание объекта - модель пятого типа. В этом случае часто используют модель по аналогии, отражающую действительность хоть в какой-нибудь черте.
Аналогия. Тип шестой - модель-аналогия. подобие: равенство отношений; сходство предметов, явлений, процессов, величин и т. п. в каких-либо свойствах, а также познание путём сравнения. Например, увеличение или уменьшение сторон фигуры (прямоугольника и др.) в K раз при сохранении её формы позволяет исходную и конечную фигуру считать подобными.
Мысленный эксперимент. Седьмой тип моделей - мысленный эксперимент (“главное состоит в опровержении возможности”). Предположим, что в классической физике мы движемся за световой волной со скоростью света. Мы будем наблюдать периодически меняющееся в пространстве и постоянное во времени

электромагнитное поле. Согласно уравнениям Максвелла, этого быть не может. Тогда либо законы природы меняются при смене системы отсчёта, либо скорость света не зависит от системы отсчёта. Выбирается второй вариант.
Демонстрация возможности. Восьмой тип - демонстрация возможности ("главное - показать внутреннюю непротиворечивость возможности"), такого рода модели тоже мысленные эксперименты с воображаемыми сущностями, демонстрирующие, что предполагаемое явление согласуется с базовыми принципами и внутренне непротиворечиво. В этом основное отличие от моделей типа 7, которые вскрывают скрытые противоречия.

1.2. Экономико-математические модели и их классификация

Определение 2

Экономико-математическая модель - математическое описание экономического процесса или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи (поэтому часто термины "модель" и "задача" употребляются как синонимы). Существует еще несколько вариантов определения этого термина.

В самой общей форме модель - условный образ объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования. При построении модели предполагается, что её непосредственное изучение дает новые знания о моделируемом объекте. Все это полностью относится и к экономико- математической модели. Основные требования к данным моделям могут быть сформулированы следующим образом:

1. адекватность (соответствие модели своему оригиналу);
2. объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);
3. простота (не загруженность модели второстепенными факторами);
4. чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров);
5. устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);
6. универсальность (широта области применения).

Принято подразделять экономико-математические модели на две группы:

1. модели, отражающие преимущественно производственный аспект экономики;
2. модели, отражающие преимущественно социальные аспекты экономики.

Из моделей первой группы можно назвать модели долгосрочного прогноза сводных показателей экономического развития, межотраслевые модели, отраслевые модели оптимального планирования и размещения производства, а также модели оптимизации структуры производства в отраслях.

Из моделей второй группы наиболее разработаны модели, связанные с прогнозированием и планированием доходов и потребления населения, демографических процессов.

Существует большое число классификаций типов экономико-математических моделей, которые, однако, носят фрагментарный характер. И это, по-видимому, неизбежно, т. к. нереально охватить все многообразие социально-экономических задач, объектов и процессов, описываемых различными моделями. Имеющиеся модели можно условно представить в виде элементов следующей классификационной схемы.

1. Наиболее общее деление моделей - по способу отражения действительности:

1.1. Аналоговая модель (модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы).

1.2. Иконическая (Портретная) модель (модель, точно повторяющая структуру объекта и отношения между его элементами).

1.3. Концептуальная модель (принципиальная основа экономико-математической модели, предназначенной для реализации различными математическими и техническими средствами и, следовательно, для непосредственного решения задачи. Это предварительное, приближенное представление о рассматриваемом объекте или процессе; часто концептуальная модель имеет вид схемы, в которой фиксируются наиболее существенные параметры и связи между ними. На этом этапе ограничиваются обычно не количественными, а качественными категориями, т.е., напр., отмечают, что такая-то переменная возрастает при убывании значений другой (вид данной зависимости будет выяснено на следующих стадиях разработки модели)).

1.4. Структурная модель (один из основных типов экономико-математических моделей (при их классификации по способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и искомыми характеристиками) наряду с функциональными моделями. Структурная модель отражает структуру системы, подлежащей исследованию, ее внутренние параметры, характеристики внешних возмущений).

1.5. Функциональная модель (один из двух основных типов экономико-математических моделей (при их классификации по способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и искомыми характеристиками моделируемого объекта) наряду со структурными моделями. Функциональная модель описывает поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре. Если обозначить входы и выходы моделируемого объекта соответственно через X и Y, то построить функциональную модель - это значит отыскать оператор D, связывающий X и Y, т. е. $Y=D(X)$.

При изучении функциональной модели возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций объекта на воздействие внешней среды и, таким образом, открывается путь к анализу его структуры и формированию структурных моделей).

2. По предназначению (цели создания и применения) модели:

2.1. Балансовая модель (Система уравнений (балансовых соотношений, балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличия ресурса и его использования (напр., производства каждого продукта и потребности в нем, рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг). Соответствие здесь понимается либо как равенство, либо менее жестко - как достаточность ресурсов для покрытия потребности (и следовательно, наличие некоторого резерва)).

2.2. Описательная модель (модель, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объектов (в отличие от нормативных моделей, предназначенных для нахождения желательного, например, оптимального состояния объекта).

2.3. Имитационная модель (экономико-математическая модель изучаемой системы, предназначенная для использования в процессе машинной имитации. Она является по существу программой для компьютера, а эксперимент над ней состоит в наблюдении за результатами расчетов по этой программе при различных задаваемых значениях вводимых экзогенных переменных).

Имитационная модель является динамической моделью в том смысле, что в ней присутствует время - когда проигрывается серия вариантов развития исследуемого объекта. С другой стороны, имитационная модель, как правило, является адаптивной моделью, ибо совершенствуется, уточняется в процессе использования. Она может быть детерминированной, но чаще - вероятностной (т. е. содержащей стохастические элементы); часто она содержит наряду с машинными также блоки, где решения принимаются человеком.).

2.4. Информационная модель (совокупность сигналов, несущих информацию об объекте управления и внешней среде, организованная по определенным правилам. Телевизионное изображение цеха, система математических формул и базы данных, характеризующих экономические процессы на предприятии, общее представление руководителя о структуре предприятия - все это информационная модель разных типов, предназначенные для различных задач, технических средств и методов управления. Таким образом, это вся сумма сведений, знаний об объекте управления, а также о задачах, которые предстоит решать лицу, принимающему решение).

Более узко информационная модель - схема потоков информации, обращающейся в процессе управления объектом. Например, при создании АСУ формируется информационная модель предприятия в виде графа - схемы, описывающей процедуры разработки плана и связи между ними (в том числе обратные связи). Это способствует упорядочению процессов управления, повышению гибкости информационных связей, оперативности и согласованности принятия решений на разных уровнях системы.

2.5. Нормативная модель (в том числе Оптимальная модель, Оптимизационная модель) - модель, предназначенная для нахождения желательного состояния объекта (например, оптимального). Поскольку желательное состояние должно быть реальным и исходить из возможностей развития системы, нормативная модель должны сочетаться с описательными моделями.

3. По способу логико-математического описания моделируемых экономических систем:

3.1. Аналитическая модель (формула, представляющая математические зависимости в экономике и показывающая, что результаты (выходы) находятся в функциональной зависимости от затрат (входов). В самом общем виде ее можно записать так: $U=f(x)$, где x - совокупность (вектор) выходов; f - зависимость, которая записана в виде функции).

В моделях оптимизационных (а их большинство в экономико-математических исследованиях, в исследовании операций и т. д.) отыскивается такой вектор переменных $\boldsymbol{x}$, при котором критерий, характеризующий качество функционирования системы (обычно это скаляр, а не вектор) получает наибольшее или наименьшее значение (либо вообще достигает какого-то желательного уровня). Это записывается, например, для первого случая (максимизации) следующим образом:

$$u=f(x,y)\to max.$$

Здесь y - вектор переменных, не поддающихся управлению, но влияющих на u; f - функция, задающая отношения между всеми указанными величинами.

3.2. Вероятностная (Стохастическая) модель (модель, которая в отличие от детерминированной модели содержит случайные элементы. Таким образом, при задании на входе модели некоторой совокупности значений, на её выходе могут получаться различающиеся между собой результаты в зависимости от действия случайного фактора).

3.3. Детерминированная модель (аналитическое представление закономерности, операции и т. д., при которых для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат. Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированную систему).

3.4. Дискретная модель (экономико-математическая модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами. Может отображать как дискретные системы, так и непрерывные системы, которые для этого приводятся к дискретному виду с помощью представления непрерывных величин в качестве дискретных (путем введения разного рода шкал, балльных оценок и т. д.).

3.5. Линейная модель (модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно она может формулироваться в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений. Причем в ряде случаев нелинейность взаимозависимостей может приводиться к линейной форме путем математических преобразований переменных: например, в нелинейных соотношениях

$$y = \alpha\cdot e^{\beta x},\ y = \alpha\cdot x^{\beta},\ y = \alpha+\beta/x.$$

в первом и втором случаях логарифмирование обеих частей уравнений обеспечивает связь линейную в логарифмах $\ln y=\ln\alpha+\beta x$; $\ln y=\ln\alpha+\beta\ln x$, а в третьем - линейно зависимы y и $1/x$).

4. Модели с “бесконечным временем”

4.1. Статическая модель (экономико-математическая модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени. Такими моделями могут

описываться статические системы, но также и динамические системы - путем характеристики их состояния в заданный момент).
4.2. Точечная модель (упрощенная модель экономической системы без учета процессов транспортировки, связанных с тем, что хозяйство распределено по территории страны. Это бывает удобно для плановых расчетов и особенно в теоретических исследованиях экономики).
4.3. Трендовая модель (динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей (в частности, тренд средних величин этих показателей, их дисперсии, минимальных или максимальных уровней)).
5. По уровню моделируемого объекта в хозяйственной иерархии:
5.1. Глобальная модель (модели, отражающие процессы глобального характера (напр., модели Римского клуба)).
5.2. Макроэкономическая (Агрегатная) модель (экономико-математическая модель, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого. Макромодели оперируют крупноагрегированными, как правило, стоимостными показателями - агрегатами (например, валовой национальный продукт, валовые капиталовложения и др.)

Четкого разделения моделей на макромодели и микромодели на данный момент нет. К первым относятся наиболее обобщенные глобальные модели. Модели, в которых учитывается членение народного хозяйства на крупные подсистемы, напр. секторы (подразделения общественного производства), отрасли и регионы, то одни авторы относят их к микромоделям, другие - к макромоделям.

Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития народного хозяйства (например, агрегированные теоретико-аналитические модели теории экономического роста).

Важным полем применения макромоделей является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого применяются макроэкономические производственные функции, модели оптимизации соотношения нормы накопления и нормы потребления в национальном доходе и др. На Западе среди используемых для прогнозирования макроэконометрических моделей наиболее известны модели: Клейна - Голдбергера, Брукингская, Уортонская в США; хозяйственного развития Голландии; Канадская модель.

По характеру зависимостей макромодели (как и всякие модели) могут быть детерминированными и вероятностными (стохастическими), по роли временного фактора - статическими и динамическими, по представлению переменных (включая переменную времени) - дискретными и непрерывными.

5.3. Микроэкономическая модель (экономико-математическая модель, отражающая функционирование и структуру отдельного элемента экономической системы, взаимодействие его с другими элементами системы в процессе ее функционирования (см. Макроподход и микроподход). Четкого отграничения микромоделей от макромоделей нет. Как правило, этот термин относят к изучению деятельности таких ведущих звеньев экономики, как домашнее хозяйство (потребитель) и фирма (производитель). Домашнее хозяйство стремится к максимизации полезности, фирма - к максимизации прибыли. Соответственно, к микроэкономической модели относят, например, модели спроса и потребления, поведения фирмы, ценообразования, рынка товаров, рынка капиталов и других частных рынков).

Микроэкономическая модель описывает поведение конкретных экономических объектов (вплоть до отдельной личности - потребителя или производителя), принимающих решения (осуществляющих выбор возможных альтернатив) в условиях функционирования социально-экономической системы. Каждый объект получает, или покупает, или добывает каким-то иным путем нужную ему информацию, распределяет имеющиеся ресурсы, разрабатывает правила выбора альтернатив и стратегию дальнейших действий и т.д. Исходя из этого, можно выделить три существенные области применения микроэкономической модели: ценообразование, принятие решений об объеме производства и продаж, распределение доходов. Отличие микроэкономической модели от макромоделей: большая зависимость от внешней среды, дезагрегация показателей. Так же как и макроэкономические модели, микромодели могут быть статическими и динмическими, детерминированными и вероятностными, дискретными и непрерывными.

1.3. Экономико-математическое моделирование и его основные этапы

Определение 3

Экономико-математическое моделирование - описание экономических процессов и явлений в виде экономико-математических моделей. (Иногда тем же термином обозначают также реализацию экономико-математической модели на ЭВМ, т. е. искусственный эксперимент или машинную имитацию, машинное решение экономико-математической задачи.)

Как и всякое моделирование, экономико-математическое моделирование основывается на принципе аналогии, т. е. возможности изучения объекта (почему-либо трудно доступного для исследований) не непосредственно, а через рассмотрение другого, подобного ему и более доступного объекта, его модели. В данном случае таким более доступным объектом является экономико-математическая модель. При построении моделей те или иные теории или гипотезы благодаря формализации и квантификации становятся обозримыми, уточняются, и это способствует лучшему пониманию изучаемых проблем. Моделирование оказывает и обратное влияние на исследователей, требуя четкости формулировки исследовательской задачи, строгой логичности в построении гипотез и концепций.

Практическими задачами моделирования являются, во-первых, анализ экономических объектов; во-вторых, экономическое прогнозирование, предвидение развития хозяйственных процессов; в-третьих, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Последнее, впрочем, требует пояснения. Далеко не во всех случаях данные, полученные из экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Гораздо чаще они используются в качестве “консультирующих” средств: принятие же самих управленческих решений остается за человеком. Это объясняется чрезвычайной сложностью экономических и (шире) социально-экономических процессов. Экономико-математическое моделирование, таким образом, является лишь компонентом, хотя и очень важным, в человеко-машинных системах планирования и управления народным хозяйством и экономическими единицами разного уровня.

Основные этапы экономико-математического моделирования

Процесс экономико-математического моделирования проходит ряд этапов:

1. идентификацию объекта;
2. спецификацию модели;
3. идентификацию и оценку параметров модели;
4. установление зависимостей между ними;
5. проверку.

Весь этот процесс обычно повторяется многократно, и с каждым циклом модель уточняется, особенно когда дело идет о модели, предназначенной для практических расчётов. В последнем случае к модели предъявляются дополнительные требования со стороны технологии алгоритмизации и программирования.

На каждом этапе построения моделей соблюдаются определенные правила их испытания, проверки. При этом обнаруживаются и устраняются недостатки, наиболее типичными из которых являются четыре: включение в модель несущественных (для данной задачи) переменных, невключение в модель существенных переменных, недостаточно точная оценка параметров модели, недостатки в структуре модели, т. е. неправильное определение зависимостей между переменными, а в случае оптимизации - зависимости принятого критерия от управляемых и неуправляемых переменных.

Усложняя модель, чтобы сделать ее более точной и подробной, необходимо знать, компенсирует ли полученная точность результатов возросшие вычислительные трудности. И наоборот, решая исключить какой-то элемент из модели, чтобы сделать ее проще, необходимо оценить потери в ее достоверности, т. е. не обойдутся ли они дороже, чем выигрыш от упрощения расчетов.

1.4. Математическая экономика и ее основные задачи

<u>Определение 4</u>

Математическая экономика - сфера теоретической и прикладной научной деятельности, целью которой является математически формализованное описание экономических объектов, процессов и явлений.

Вместе с эконометрикой и исследованием операций математическая экономика является разделом математических методов в экономике - научного направления на стыке экономики и математики. Математические методы позволяют чётко, просто, строго и обобщённо формулировать ключевые теоретические положения и делать на их основе практические выводы. Наряду с простейшими геометрическими методами в рамках математической экономики применяются методы интегрального и дифференциального исчисления, матричной алгебры, математического программирования, прочие вычислительные методы, составляются и решаются рекуррентные и дифференциальные уравнения.

Основные задачи математической экономики:

- разработка математических моделей экономических объектов, систем и явлений (общих и частных задач экономики при различных условиях, предпосылках и на различных уровнях);
- изучение поведения участников экономики (условий существования оптимальных решений и их признаков, а также методов их вычисления в моделях потребления, фирмы, совершенной и несовершенной конкуренции и др.);
- изучение описательных моделей экономики (модели планирования, "затраты-выпуск", расширяющейся экономики, экономики благосостояния и роста и др.);
- анализ экономических величин и статистических данных (эластичности, средних и предельных величин, регрессионный и корреляционный анализ и прогнозирование экономических факторов и показателей).

1.5. Исследование операций, его главные задачи

Определение 5

Исследование операций - метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений.

Необходимость количественных оценок в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций позволяют определить исследование операций как теорию принятия оптимальных решений. Исследование операций позваляет математически формализовать принятия решений.

Описание всякой задачи исследования операций включает задание компонент (факторов) решения (которые можно понимать как его непосредственные последствия; обычно, хотя и необязательно, компоненты решения являются численными переменными), налагаемых на них ограничений (отражающих ограниченность ресурсов) и системы целей. Всякая система компонент решения, удовлетворяющих всем ограничениям, называется допустимым решением. Каждой из целей соответствует целевая функция, заданная на множестве допустимых решений, значения которой выражают меру осуществления цели. Сущность задачи исследования операций состоит в нахождении наиболее целесообразных, оптимальных решений. Поэтому задачи исследования операций обычно называются оптимизационными.

Типичные задачи, связанные с исследованием операций:

1. план снабжения предприятий;
2. постройка участка магистрали;
3. продажа сезонных товаров;
4. снегозащита дорог;
5. противолодочный рейд;
6. выборочный контроль продукции;
7. Медицинское обследование;

8. библиотечное обслуживание.

Характерная особенность исследования операций - системный подход к поставленной проблеме и анализ. Системный подход является главным методологическим принципом исследования операций. Он заключается в следующем. Любая задача, которая решается, должна рассматриваться с точки зрения влияния на критерии функционирования системы в целом. Для исследования операций характерно то, что при решении каждой проблемы могут возникать новые задачи. Важной особенностью исследования операций есть стремление найти оптимальное решение поставленной задачи (принцип "оптимальности"). Однако на практике такое решение найти невозможно по таким причинам:

1. слабое развитие методов, дающих возможность найти глобально оптимальное решение задачи;
2. ограниченность существующих ресурсов (к примеру, ограниченность машинного времени ЭВМ), что делает невозможным реализацию точных методов оптимизации.

В таких случаях ограничиваются поиском не оптимальных, а достаточно хороших, с точки зрения практики, решений. Приходится искать компромисс между эффективностью решений и затратами на их поиск. Исследование операций дает инструмент для поиска таких компромиссов.

1.6. Классификация задач исследования операций

а) классификация по содержательной постановке:
1. задачи оптимального распределения ресурсов;
2. задачи управления запасами;
3. задачи календарного планирования (теория расписаний);
4. задачи сетевого планирования;
5. задачи массового обслуживания;

б) классификация по учёту динамики изучаемой системы:
1. динамические;
2. статические;

в) классификация по числу лиц, осуществляющих решение
1. индивидуальный выбор (один или группа людей с одинаковыми интересами);
2. коллективный выбор (группа лиц с противоположными интересами);

г) классификация по числу критериев:
1. однокритериальные;
2. многокритериальные;

д) классификация с точки зрения информированности исследователя об обстановке операции;
1. задачи в условиях определенности;
2. задачи в условиях риска;
3. задачи в условиях неопределенности.

Неконтролируемые факторы, определяющие тип задачи, делятся на три группы:
1. фиксированные (значение которых известно);
2. случайные (с заданным законом распределения);
3. неопределенные, для которых известен лишь диапазон (область) изменения.

Неопределенные факторы в свою очередь делятся на
1. факторы связанные с действием людей, противостоящих оперирующей стороне - стратегия противника, обладающего своими активными действиями;
2. факторы, связанные с недостаточной изученностью процесса;
3. факторы, отражающие нечеткость знания цели операции или критерия эффективности.

1.7. Примеры задач математической экономики

1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Предположим, что имеется n различных отраслей $O_1, O_2, \ldots, O_n$. x_i - общий объём продукции i-ой отрасли за данный промежуток времени (так называемый валовый выпуск i-ой отрасли); x_{ij} - объём продукции i-ой отрасли, расходуемый j-ой отраслью в процессе производства; y_i - объём продукции i-ой отрасли, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере (объём конечного потребления). Для i-ой отрасли должно выполняться соотношение баланса $i = \overline{1,n}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \,. \tag{1}$$

Данное соотношение означает, что валовый выпуск x_i расходуется на производственное $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ и непроизводственное потребление y_i. Считая, что материальные издержки пропорциональны объёму производимой продукции, можно записать:

$$x_{ij}=a_{ij}x_j \; (i = \overline{1,n}), \tag{2}$$

где a_{ij} - коэффициенты прямых затрат (коэффициенты материалоёмкости). Для всех i получаем систему уравнений, аналогичных уравнению (1):

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + y_1; \; x_2 = \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + y_2; \; \ldots; \; x_n = \sum_{j=1}^{n} x_{nj} + y_n \,. \tag{3}$$

В матричной форме данную систему уравнений можно записать:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}\,, \tag{3a}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица прямых затрат, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валового выпуска, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного потребления. Все элементы данных матриц неотрицательны, что следует из экономического смысла. Уравнение (3a) можно преобразовать к следующей форме:

$$\vec{x} = (I - A)^{-1} \vec{y}\,. \qquad (3б)$$

Пример 1

Исследуем на продуктивность матрицу $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. В данном случае $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $(E\text{-}A)^{-1}$ существует и равна $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}$. Данная обратная матрица неотрицательна, что позволяет считать матрицу A продуктивной.

Пример 2

Исследуем на продуктивность матрицу $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. В данном случае $E - A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $(E\text{-}A)^{-1}$ существует и равна $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ \dfrac{50}{3} & 20 \end{pmatrix}$.

Данная обратная матрица неотрицательна, что позволяет считать матрицу A продуктивной.

Пример 3

Исследуем на продуктивность матрицу $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. В данном случае $E - A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & -7 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $(E\text{-}A)^{-1}$ существует и равна $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}667 & -0{,}778 \\ -0{,}667 & 0{,}889 \end{pmatrix}$. Данная обратная матрица отрицательна, что не позволяет считать матрицу A продуктивной.

2. Линейная модель торговли

Рассмотрим процесс взаимных закупок товаров. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые обозначим соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров. Рассмотрим линейную модель обмена. Её второе название: модель международной торговли.

Пусть a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Введём матрицу коэффициентов a_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Тогда если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне её (можно это трактовать как торговый бюджет), то справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{5}$$

Матрица (4) со свойством (5) называется структурной матрицей торговли. Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли определяется соотношением:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,. \tag{6}$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли формулируется естественным образом: для каждой страны её бюджет должен совпадать с выручкой от торговли (при учёте только торговли), т.е. $P_i = x_i$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = x_i, \; i = \overline{1,n} \,. \tag{7}$$

Введём вектор бюджетов $\vec{x}$, каждая компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны. Тогда можно записать:

$$A\vec{x} = \vec{x} \,. \tag{8}$$

Из данного уравнения следует, что собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий её собственному значению $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли. Уравнение (8) запишем в следующей форме:

$$(A - E)\,\vec{x} = 0 \,. \tag{8a}$$

<u>Пример 4</u>

Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 \text{ (усл. ден. ед.)}. \tag{9}$$

Для определения данных бюджетов решим уравнение (8a), имеющее для рассматриваемого примера следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг рассматриваемой матрицы A равен трём, то одна из неизвестных является свободной переменной и остальные выражаются через неё. Решая систему уравнений, например, методом Гаусса, находим компоненты вектора $\vec{x}$

$$x_1 = \frac{140}{121}c,\ x_2 = \frac{146}{121}c,\ x_3 = \frac{20}{11}c,\ x_4 = c.$$

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджетов (9), найдём величину c: c=1210. С учётом полученного значения c окончательно получаем:

$$x_1=1400,\ x_2=1460,\ x_3=2200,\ x_4=1210.$$

Пример 5

Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=5230 \text{ (усл. ден. ед.).} \qquad (10)$$

Для определения данных бюджетов решим уравнение (8*а*), имеющее для рассматриваемого примера следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг рассматриваемой матрицы A равен трём, то одна из неизвестных является свободной переменной и остальные выражаются через неё. Решая систему уравнений, например, методом Гаусса, находим компоненты вектора $\vec{x}$:

$$x_1=3{,}6775c,\ x_2=3{,}5c,\ x_3=0{,}04c,\ x_4=c.$$

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджетов (10), найдём величину c: $c\approx 636{,}45$. С учётом полученного значения c окончательно получаем:

$$x_1\approx 2340{,}53;\ x_2\approx 2227{,}56;\ x_3\approx 25{,}46;\ x_4\approx 636{,}45.$$

Пример 6

Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=6450 \text{ (усл. ден. ед.).} \tag{11}$$

Для определения данных бюджетов решим уравнение (8*a*), имеющее для рассматриваемого примера следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг рассматриваемой матрицы A равен трём, то одна из неизвестных является свободной переменной и остальные выражаются через неё. Решая систему уравнений, например, методом Гаусса, находим компоненты вектора $\vec{x}$

$$x_1=0,495c,\ x_2=0,757c,\ x_3=0,573c,\ x_4=c.$$

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджетов (10), найдём величину c: $c\approx1686,27$. С учётом полученного значения c окончательно получаем:

$$x_1\approx834,70,\ x_2\approx1276,51,\ x_3\approx966,23,\ x_4\approx1686,27.$$

1.8. Математическое программирование

<u>Определение 6</u>

Математическое программирование - это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления организационными системами (предприятия, фирмы, банки и др.).

<u>Определение 7</u>

В рамках математического программирования определяются экстремальные (наибольшие и наименьшие) значений функции, на неизвестные которой наложены ограничения. Рассматриваемая функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

<u>Замечание 1</u>

Если целевая функция и ограничения линейные, программирование называется линейным.

<u>Определение 8</u>

Математическое выражение целевой функции и её ограничений называется математической моделью экономической задачи.

Цель математического программирования - изучение и анализ систем организационного управления, отыскание в них оптимизационных задач, постановка и внедрение которых могут оправдать затраты на создание автоматических систем управления в условиях, когда имеют место ограничения технико-экономического или какого-либо другого характера.

Таким образом, предмет математического программирования - это системы организационного управления (организации), которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой подразделений, причем интересы подразделений не всегда согласуются между собой и могут быть противоположными.

Математическую модель математического программирования проиллюстрируем на примере задачи линейного программирования. Целевая функция задачи линейного программирования

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min) \qquad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m,\ ,\ x_j \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \qquad (13)$$

где x_j - неизвестные, a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины. Все или некоторые уравнения системы ограничений могут быть записаны в виде неравенств.

<u>Определение 9</u>

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений.

<u>Определение 10</u>

Множество допустимых решений образует область допустимых решений.

<u>Определение 11</u>

Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется оптимальным решением задачи линейного программирования и обозначается $\vec{x}_{opt}$.

<u>Определение 12</u>

Базисное допустимое решение $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots 0)$ является опорным решением, где r - ранг системы ограничений.

<u>Определение 13 (виды математических моделей)</u>

Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то такая модель называется канонической. Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи линейного программирования является неканонической.

Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+1}. Если знак неравенства $\leq$, то балансная переменная вводится со знаком “+”. Если знак неравенства $\geq$, то балансная переменная вводится со знаком “-”. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

1.9. Этапы построения математической модели

Для того, чтобы составить математическую модель задачи линейного программирования, необходимо

- ввести обозначения переменных;
- исходя из цели исследований, составить целевую функцию;
- учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.

1.10. Примеры математических моделей задач линейного программирования в экономике

Задача о банке

Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 100 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 35 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Кредиты должны быть неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы - ценные бумаги, чтобы компенсировать не ликвидность кредитов. В нашем примере ликвидное ограничение таково: ценные бумаги должны составлять не менее 50% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 - средства в млн д.е., размещенные в кредитах, x_2 - средства, вложенные в ценные бумаги. Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max,$$

где c_1 - доходность кредитов; c_2 - доходность ценных бумаг. Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$. Учитывая балансовое, кредитное и ликвидное ограничения, получим систему ограничений неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 \ge 35 \\ x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

<u>Замечание 2</u> Система ограничений, в зависимости от условий задачи, может содержать не только линейные неравенства, но и линейные уравнения.

Задача о диете (задача о составлении кормовой смеси)

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 500 г = 0,5 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. В табл. 1 приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать: не менее 0,8% кальция (от общего веса смеси) не менее 22% белка (от общего веса смеси) не более 5% клетчатки (от общего веса смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица 1

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,38	-	-	0,40
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,002	0,08	0,40

Математическая формулировка задачи. Введём следующие обозначения: x_1 - содержание известняка в смеси (кг); x_2 - содержание зерна в смеси (кг); x_3 - содержание соевых бобов в смеси (кг); общий вес смеси, еженедельно расходуемый на кормление цыплят: $20000 \times 0{,}5 = 10000$ кг. Ограничения, связанные с содержанием кальция, белка и клетчатки в кормовом рационе, имеют вид:

$$\begin{cases} 0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \ge 0{,}008 \times 10000 \\ \qquad 0{,}09x_2 + 0{,}22x_3 \ge 0{,}22 \times 10000 \\ \qquad 0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \le 0{,}05 \times 10000 \end{cases}$$

Окончательный вид математической формулировки задачи:

$$min \to f(\boldsymbol{x}) = 0{,}04x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}40x_3$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ 0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \ge 80 \\ \qquad 0{,}09x_2 + 0{,}22x_3 \ge 2200 \\ \qquad 0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \le 500 \\ x_i > 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

Задача линейного программирования о распределении ресурсов в общем виде

В общем случае задача оптимального распределения ресурсов формулируется следующим образом. Предприятие распоряжается ресурсами различных типов. Среди таких ресурсов могут быть материально-вещественные (в нашем примере - сырье), энергетические, трудовые, технические, финансовые и другие, не участвовавшие в нашем примере. Ресурсы каждого типа могут быть разделены на классы. Сырье - по видам сырья, трудовые - по профессиям и квалификации работников, технические - по техническим характеристикам, финансовые - по источникам финансирования и т.п. Пусть в результате такой классификации, такого разделения получилось m видов ресурсов.

Пронумеруем все виды ресурсов числами от 1 до m, буквой i будем обозначать номер вида ресурса. Таким образом, i удовлетворяет неравенству $1 \le i \le m$. Заметим, что ресурсы разных видов могут измеряться в различных единицах (тоннах, кубометрах, человеко-часах, рублях, штуках и др.).

В течение планового периода предприятие обладает некоторыми доступными объемами ресурса каждого вида. Объем ресурса i-го вида, измеренный в единицах соответствующих данному виду ресурса, обозначим посредством b_i. Индекс i около буквы b указывает, что доступные объемы ресурсов разных видов могут быть различными.

Из этих ресурсов предприятие способно изготавливать различную продукцию (пусть на примере печенья и бисквитов). Обозначим буквой n общее число видов продукции, которые может выпустить предприятие из имеющихся ресурсов. Занумеруем все виды продукции числами от 1 до n. Буквой j будем обозначать номер вида продукции, так что выполняется неравенство $1 \le j \le n$. Продукция, как и ресурсы, может измеряться в различных единицах.

Пусть c_j - цена, по которой предприятие реализует каждую единицу продукции j-го вида. Индекс j около буквы с указывает, что цена разных видов продукции может быть различной.

Производство продукции требует затрат ресурсов. Объем затрат зависит от вида ресурса, вида продукции и количества единиц продукции. Обозначим посредством a_{ij} норму затрат ресурса i-го вида на производство продукции j-го вида. Другими словами, a_{ij} - это количество ресурса i-го вида, затрачиваемое при производстве единицы продукции j-го вида.

Задача оптимального использования ресурсов, задача производственного планирования, состоит в том, чтобы определить, какую продукцию и в каком объеме следует изготовить предприятию из имеющихся ресурсов с тем, чтобы доход от реализации продукции был наибольшим.

Построим математическую модель задачи. Сначала введем переменные. Посредством x_j обозначим искомый объем выпуска продукции j-го вида. Математическую модель можно теперь записать в следующей форме:

$$max \to c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{15}$$

Верхняя строка записи говорит о максимизации целевой функции. Сама целевая функция представляет собой обычно сумму произведений цен на объем выпуска для различных видов продукции, то есть доход предприятия от продажи изготовленной продукции. В качестве коэффициентов целевой функции часто используют величину маржи от продажи единицы продукции соответствующего вида. В этом случае целевая функция представляет собой маржинальную прибыль.

Фигурная скобка объединяет систему ограничений задачи, неравенства, входящие в систему, соответствуют различным видам ресурсов. Каждое такое неравенство говорит о том, что суммарное количество ресурса, используемое в производстве различных видов продукции, не превосходит общего запаса этого ресурса.

В последней строке системы ограничений указано, что количества производимой продукции не могут быть отрицательными. Заметим, что равенство нулю здесь не запрещено, то есть некоторые (или даже все) виды продукции предприятие может и не выпускать, хотя они и доступны для выпуска.

Экономическая задача поиска плана производства продукции, дающего наибольший доход, превращается в математическую задачу поиска максимального значения целевой функции от n переменных при условии, что значения этих переменных подчинены системе ограничений, имеющих форму неравенств. Всякий набор значений переменных $(x_1, x_2, \dots , x_n)$ называется планом задачи. Те планы, которые удовлетворяют системе ограничений, называются допустимыми планами. Оптимальным планом называется тот из допустимых планов, который дает наибольшее значение целевой функции среди всех ее значений на допустимых планах. Само это наибольшее значение целевой функции, то есть значение целевой функции на оптимальном плане, называется оптимумом задачи.

Целью решения задачи производственного планирования является нахождение оптимального плана и оптимального решения для её математической модели.

1.11. Методы линейного программирования

Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом

Если число переменных в задаче линейного программирования равно двум, а ограничениями является система неравенств, то задачу можно решать графическим методом.

Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом.

1) Записывают уравнения прямых (14), соответствующих ограничениям (15), и строят их на плоскости x_1Ox_2.

2) Определяют области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбирают произвольную точку на плоскости x_1Ox_2 и подставляют её координаты в первую часть одного из неравенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка; в против-

ном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (15).

3) Определяют область допустимых решений задачи как область пересечения полуплоскостей, соответствующих т ограничениям задачи.

4) Определяют направление возрастания (убывания) целевой функции f. Это можно сделать двумя способами. Можно построить нормаль, его направление показывает направление возрастания функции f, и противоположном направлении функция убывает. Можно просто построить две линии уровня функции $f=K_1$, $f=K_2$; (K_1,K_2 - произвольные константы, $K_1 \neq K_2$), и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции.

5) Определяют граничную точку (точки) области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

6) Вычисляют значения найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Пример 7

При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса заданы в приведённой ниже таблице.

Таблица 2

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары 1-го вида	2-го вида	Общее количество ресурсов
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида - 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальную прибыль.

Это задача составления плана реализации товара при n=2, m=4. Математическая модель имеет вид

$$P=2x_1+3x_2 \rightarrow max.$$

В модели управляющие переменные x_1, x_2 - количество реализуемых изделий первого и второго вида, соответственно, P - прибыль. Система неравенств включает ограничения по ресурсам. Количество ресурсов на реализацию товаров первого и второго вида не превышает общего количества ресурсов каждого типа.

В модели управляющие переменные x_1, x_2 - количество реализуемых изделий первого и второго вида, соответственно, P - прибыль. Система неравенств включает ограничения по ресурсам. Количество ресурсов на реализацию това-

ров первого и второго вида не превышает общего количества ресурсов каждого типа.

<u>Графическое решение:</u> Построим в плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений. Каждое неравенство системы (15) определяет в плоскости x_1Ox_2 полуплоскость, лежащую выше или ниже прямой, определяемой соответствующим уравнением. Построим прямые (см. приведённый ниже рисунок).

Рассмотрим точку с координатами $x_1=0$; $x_2=0$. Подставив их в первое неравенство, получаем $0\le 12$ – верно, следовательно, искомая полуплоскость лежит ниже прямой $2x_1+2x_2=12$; остальные полуплоскости находятся аналогичным образом. Область OABCD является областью допустимых решений задачи. Для нахождения максимального значения P проверим граничные точки из области решений. Построим две линии уровня (см. рис.):

$$2x_1+3x_2=6;\ 2x_1+3x_2=13.$$

Функция P возрастает в направлении нормали $\vec{n}=\{2,3\}$ следовательно, минимум находится в точке (0,0). Максимум определяем, передвигая нашу линию уровня в направлении вектора параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна её точка будет принадлежать области допустимых решений. В данном случае это точка: $x_1=4$, $x_2=2$; при этом $P=2\times4+3\times2=14$. Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 14 усл. ед. надо продать 4 изделия первого вида и 2 изделия второго вида. Изложенный выше графический метод применим для решения задач линейного программирования следующего вида:

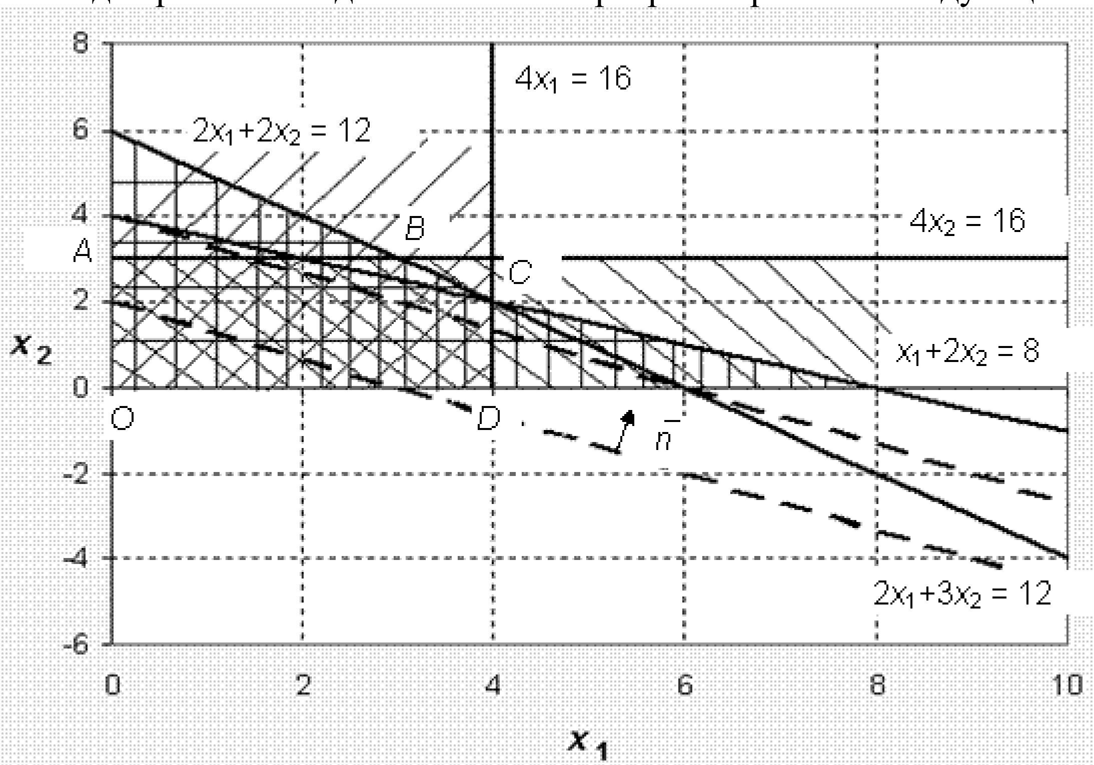


Рис. 1.

$$f=c_1x_1+c_2x_2\rightarrow max(min);\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом

Симплекс-метод - это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения. Данный метод является методом целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует. Основное содержание симплексного метода заключается в следующем:

1. Указать способ нахождения оптимального опорного решения.
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному, т.е. указать способ улучшения опорного решения.
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор опорных решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии оптимального решения.

Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования

1. Привести задачу к каноническому виду.
2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений).
3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода.
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.
5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

Пример 8

Решить симплексным методом задачу:

$$Z(x)=9x_1+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5 \to max.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30 \\ x_i \ge 0, \ \forall i \end{cases}$$

Для решения данной задачи приводим её к каноническому виду. Для этого в левую часть первого ограничения-неравенства вводим дополнительную переменную x_6 с коэффициентом +1. В целевую функцию переменная x_6 входит с коэффициентом нуль (т.е. не входит). Получаем:

$$Z(x)=9x_1+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5+0x_6 \to max.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30 \\ x_i \geq 0,\ \forall i \end{cases}$$

Находим начальное опорное решение. Для этого свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю $x_1=x_2=x_3=0$. Получаем опорное решение X_1=(0,0,0,24,30,6) с единичным базисом $B_1=(A_4,A_5,A_6)$. Вычисляем оценки разложений векторов условий по базису опорного решения по формуле:

$$\Delta_k=C_bX_k\text{-}c_k,$$

где: $C_b=(c_1,c_2,...,c_m)$ - вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $X_k= (x_{1k},x_{2k},...,x_{mk})$ - вектор разложения соответствующего вектора $A_к$ по базису опорного решения; $C_к$ - коэффициент целевой функции при переменной $x_к$; $\Delta_1=C_b{\cdot}X_1\text{-}c_1$=(0,3,2)·(1,1,2)-9=0+3+4-9= -2, $\Delta_2=C_b{\cdot}X_2\text{-}c_2$=(0,3,2)·(-2,-2,1)-5=0+6+2-5=3, $\Delta_3=C_b{\cdot}X_3\text{-}c_3$=(0,3,2)·(2,1,-4)-4=0+3-8-4=-9, $\Delta_4=C_b{\cdot}\ X_4\text{-}c_4$=(0,3,2)·(0,1, 0)-3=0+3+0-3=0, $\Delta_5=C_b{\cdot}X_5\text{-}c_5$=(0,3,2)·(0,0,1)-2=0+0+2-2=0, $\Delta_6=C_b{\cdot}X_6\text{-}c_6$=(0,3,2)· (1, 0,0)-0=0+0+0-0=0.

Оценки векторов, входящих в базис, всегда равны нулю. Опорное решение, коэффициенты разложений и оценки разложений векторов условий по базису опорного решения записываются в симплексную таблицу:

Таблица 3

			9	5	4	3	2	0		
B	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_1	θ_3
A_6	0	6	1	-2	2	0	0	1	6	3
A_4	3	24	1	2	1	1	0	0	24	24
A_5	2	30	2	1	-4	0	1	0	15	-
Δ_k		132	-2	2	-9	0	0	0		

Сверху над таблицей для удобства вычислений оценок записываются коэффициенты целевой функции. В первом столбце "B" записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях ограничениях. Во втором столбце таблицы "C_b" записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных в том же порядке. При правильном расположении коэффициентов целевой функции в столбце "C_b" оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равных нулю.

В последней строке таблицы с оценками Δ_k в столбце "A_0" записываются значения целевой функции на опорном решении $Z(X_1)$.

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум оценки Δ_1=-2, Δ_3=-9 для векторов A_1 и A_3 отрицательные.

По теореме об улучшении опорного решения, если в задаче на максимум хотя бы один вектор имеет отрицательную оценку, то можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше.

Определим, введение какого из двух векторов приведет к большему приращению целевой функции. Приращение целевой функции находится по формуле: ΔZ_k=-$\theta_k\Delta_k$. Вычисляем значения параметра θ_{01} для первого и третьего столбцов по формуле: θ_k=-$\Delta_k/\Delta Z_k$. Получаем θ_1=6 при A_1=1, θ_3=3 при A_1=1 (таблица 3). Находим приращение целевой функции при введении в базис первого вектора ΔZ_1=-6×(-2)= 12, и третьего вектора ΔZ_3=-3×(-9)=27. Тогда для более быстрого приближения к оптимальному решению необходимо ввести в базис опорного решения вектор A_3 вместо первого вектора базиса A_6, так как минимум параметра θ_3 достигается в первой строке (A_1=1). Производим преобразование Жордана (Жордана-Гаусса) с элементом X_{13}=2, получаем второе опорное решение X_2=(0,0,3,21,42,0) с базисом B_2=(A_3,A_4,A_5) (таблица 4).

Таблица 4

B	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_2
A_3	4	3	1/2	-1	1	0	0	1/2	-
A_4	3	21	1/2	3	0	1	0	-1/2	7
A_5	2	42	4	-3	0	0	1	2	-
Δ_k		159	5/2	-6	0	0	0	9	

Это решение не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет отрицательную оценку Δ_2= - 6. Для улучшение решения необходимо ввести вектор A_2 в базис опорного решения.

Определяем номер вектора, выводимого из базиса. Для этого вычисляем параметр θ_2 для второго столбца, он равен 7 при A_1=2. Следовательно, из базиса выводим второй вектор базиса A_4. Производим преобразование Жордана-Гаусса (метод полного исключения) с элементом x_{22}=3, получаем третье опорное решение X_3=(0,7,10,0,63,0), B_2=(A_3,A_2,A_5) (таблица 5).

Таблица 5

B	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	4	10	2/3	0	1	1/3	0	1/3
A_2	5	7	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
A_5	2	63	9/2	0	0	1	1	3/2
Δ_k		201	7/2	0	0	2	0	7/2

Это решение является единственным оптимальным, так как для всех векторов, не входящих в базис оценки положительные Δ_1=7/2, Δ_4=2, Δ_6=7/2. В результате решения данной задачи получаем: *max* $Z(X)$=201 при X=(0,7,10,0,63).

1.12. Нелинейное программирование

Нелинейное программирование - случай математического программирования, в котором целевой функцией или ограничением является нелинейная функция.

Задача нелинейного программирования ставится как задача нахождения оптимума определённой целевой функции при выполнении условий где - параметры, - ограничения, - количество параметров, - количество ограничений. В задаче нелинейного программирования оптимум не обязательно лежит на границе области, определённой ограничениями.

Одним из методов решения задач нелинейного программирования является метод неопределенных множителей Лагранжа. Данный метод используется и для нахождения условного экстремума функций. В рамках данного метода составим функцию Лагранжа в виде линейной комбинации исследуемой функции и функций взятых с коэффициентами , называемыми множителями Лагранжа: $L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_s)=F(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g(x_1,...,x_n)$. Далее составим систему из уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа Если полученная система имеет решение относительно параметров $\tilde{x}_i$ и $\tilde{\lambda}_j$ тогда точка $\tilde{x}_i$ может быть условным экстремумом, то есть решением исходной задачи. Необходимо заметить, что это условие является необходимым, но не достаточным.

В качестве примера рассмотрим двумерный случай. Пусть требуется найти экстремум функции при условии, заданном уравнением . Будем считать, что (*i*) функция непрерывно дифференцируема; (*ii*) функция непрерывно дифференцируема, т.е. задаёт гладкую кривую из точек на плоскости функцию Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=g(x,y)=0 \end{cases}$$

В полученной системе первые два уравнения эквивалентны необходимому условию локального экстремума, а третье - соответствует связи . Из данной системы уравнений можно найти координаты точек
На основе метода множителей Лагранжа можно получить достаточное условие существования условного экстремума, требующие анализа (в простейшем случае) вторых производных функции Лагранжа. Оно может быть сформулировано следующим образом: если $\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$ в точке , удовлетворяющей необходимому условию экстремума, то при отрицательном значении второй производной по переменной *x* в рассматриваемой точке имеется максимум, а в противоположном случае - минимум; если разность $\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 F(x,y,\lambda)}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ отрицательна, то в этом случае экстремум в рассматриваемой точке отсутствует. Равенство нулю последнего соотношения не позволяет сделать однозначный вывод о наличие экстремума.

1.13. Основные понятия теории двойственности

Определение 14

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие некоторую другую задачу линейного программирования, называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Связь исходной и двойственной задач заключается главным образом в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Двойственная задача использует те же параметры, что и исходная. Её решение может быть получено одновременно с решением исходной задачи.

Прямая задача

Сколько изделий и какой конструкции x_j ($j = 1, \ldots, n$) необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях c_j ($j = 1, \ldots, n$) единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов b_i ($i = 1, \ldots, m$) максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

$$Z(x)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to max;\ x_j \geq 0,\ j=1, \ldots, n$$

Двойственная задача

Какие цены y_i на единицу каждого из ресурсов нужно назначить при заданных количествах ресурсов b_i и величинах стоимости продукции c_j, чтобы продать ресурсы было бы не менее выгодно, чем производить продукцию?

$$f=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \to min$$

Пример 9

Записать математическую модель двойственной задачи линейного программирования по заданной прямой:

$$Z(x)=2x_1-3x_2-2x_3+x_4 \to min.$$

$$\begin{cases} -2x_1+4x_2+x_3-x_4 \leq 2 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=5 \\ 3x_1-5x_2-x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Т.к. прямая задача является задачей минимизации, двойственная задача будет задачей максимизации.

Система ограничений прямой задачи состоит из трёх ограничений. Следовательно, в двойственной задаче будут три переменные y_1, y_2, y_3. Систему ограничений прямой задачи надо вначале привести к стандартному виду, т.е. в задаче на минимум все ограничения должны быть вида $\geq$ или $=$. Тогда в двойственной задаче на максимум все ограничения будут вида $\leq$ или $=$.

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2-x_3+x_4 \geq -2 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=5 \\ 3x_1-5x_2-x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Составляем систему ограничений двойственной задачи. Матрица коэффициентов при неизвестных в неравенствах двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи, неравенства меняются на противоположные, а свободные члены совпадают с коэффициентами целевой функции прямой задачи. Если переменная прямой задачи $x_i \geq 0$, то i-е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством, если x_i - любое число, то i-е условие двойственной задачи представляет собой уравнение. Если j-е соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка j-го ресурса - переменная $y_j \geq 0$, если j-е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_j - любое число. Таким образом, система ограничений двойственной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ -4y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 = -2 \\ y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи будут свободные члены в системе ограничений прямой задачи. Записываем математическую модель двойственной задачи линейного программирования. Целевая функция двойственной задачи:

$$Z(y)=-2y_1+5y_2+y_3 \rightarrow max.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 2 \\ -4y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 = -2 \\ y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Экономико-математическая модель транспортной задачи

Общая постановка транспортной задачи линейного программирования. Транспортная таблица

Под названием "транспортная задача" объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены с помощью симплексного метода. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи нестандартна, что приводит к необходимости применять специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Формулировка транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у k поставщиков в объемах a_1 , a_2,..., a_k. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах b_1, b_2, ..., b_n. Известны c_{ij}, i=1, 2, ..., k и j=1, 2, ..., n - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблицу

Таблица 6

	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	…	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_k	c_{k1}	c_{k2}	…	c_{kn}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A=(a_1,a_2,...,a_k)$, вектора запросов потребителей $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ и матрицы стоимостей $C=\{c_{ij}\}$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

Математическая модель транспортной задачи

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} ..,i=1, 2, ..., k, j=1, 2, ..., n - объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные можно записать в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

или

	b_1	b_2	…	b_n
a_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
a_2	x_{21}	…	…	x_{2n}
…	…	…	…	…
a_k	x_{k1}	x_{k2}	…	x_{kn}

Так как произведение $c_{ij}x_{ij}$. определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция задачи имеет вид:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} .$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из k уравнений описывает тот факт, что запасы всех k поставщиков вывозятся полностью:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i .$$

Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей:

$$\sum_{i=1}^{k}x_{ij}=b_j .$$

Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок, математическую модель задачи можно записать так:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \ ;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,\ 2,\ ...,\ k;\ \sum_{i=1}^{k}x_{ij}=b_j,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ x_{ij}\geq 0,\ i=1,\ 2,\ ...,\ k,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n.$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j .$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель - закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель - открытой.

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные $X=\{x_{ij}\}$ задачи удовлетворяющие системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ \sum_{i=1}^{k}x_{ij}=b_j,$$

условиям неотрицательности $x_{ij}\geq 0$ и обеспечивающие минимум целевой функции

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \ .$$

Математическая модель транспортной задачи может быть записана в векторном виде. Для этого рассмотрим матрицу A системы уравнений-ограничений задачи.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} & \ldots & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{array} \\
A= & \begin{pmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Сверху над каждым столбцом матрицы указана переменная задачи, коэффициентами при которой являются элементы соответствующего столбца в уравнениях системы ограничений. Каждый столбец матрицы A, соответствующий переменной x_{ij}, является вектором-условием задачи и обозначается через A_{ij}. Каждый вектор имеет всего $k+n$ координат, и только две из них, отличные от нуля, равны единице. Первая единица вектора A_{ij} стоит на i-м месте, а вторая - на $(k+j)$-м месте, т.е.

Индекс

координаты

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ \ldots \\ i \\ \ldots \\ k \\ k+1 \\ \ldots \\ k+j \\ \ldots \\ k+n \end{matrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_i \\ \ldots \\ a_k \\ b_1 \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Таким образом в векторной форме задача будет выглядеть следующим образом:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow\min\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_{ij}=A_0;\ x_{ij}\geq 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пример 10

Составим математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в следующей таблице Таблица 7

	20	30	40
40	3	5	6
50	4	6	10

Для решения данной задачи введём переменные задачи (матрицу перевозок) $X=\{x_{ij}\}$

Таблица 8

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}

Запишем матрицу стоимостей

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X:

$$F(X)=3x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+4x_{21}+6x_{22}+10x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам 1-го поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X - запасам 2-го поставщика. Следовательно:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=40;\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=50.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью. Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11}+x_{21}=20;\ x_{12}+x_{22}=30;\ x_{31}+x_{32}=40.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью. Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1,\ 2,\ j=1,2,3.$$

Следовательно, математическая модель рассматриваемой задачи такова: найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции:

$$F(X)=3x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+4x_{21}+6x_{22}+10x_{23}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} = 40 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=50 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ +x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{21} = 40 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности $x_{ij}\geq 0$, (i=1, 2; j=l,2,3).

<u>Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи.</u>

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей: $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Метод потенциалов при решении транспортной задачи линейного программирования

Метод потенциалов относится к группе методов последовательного приближения. Вначале отыскивается исходный допустимый план перевозок, который, как плавило, не является оптимальным, а затем по определенной итеративной процедуре этот план доводится до оптимального варианта. Для описания алгоритма используем формульно-словесный способ. Рассмотрим пример транспортной задачи (табл. 9).

Таблица 9

Исходная транспортная матрица

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		40	80	110	50	90
A_1	100	10	9	8	5	3
A_2	150	4	7	13	6	2
A_3	90	8	6	9	7	1
A_4	30	5	4	7	9	2

В табл. 9 по строкам матрицы представлены пункты (станции) отправления от A_1 до A_4 и объемы погрузки в тоннах - 100, 150, 90, 30 т, а по столбцам - пункты (станции) назначения от B_1 до B_5 и объемы выгрузки - 40, 80, 110, 50, 90 т. Данная транспортная задача является сбалансированной (a_i=b_j=370 т), поэтому добавлять фиктивного потребителя ФВ или фиктивного поставщика ФА не требуется. На пересечении строк и столбцов в клетках матрицы в маленьких квадратиках записаны показатели критерия оптимальности транспортной задачи, например, затраты на перевозку единицы груза или кратчайшие расстояния между соответствующими пунктами (станциями) погрузки и выгрузки. Расстояние между станцией погрузки A_1 и станцией выгрузки B_1, как следует из матрицы, равно 10 (или 100, 1000 и т. д.) км, потом – 9, 8, 5 км и т. д. Тогда целью, решения задачи явится отыскание совокупности объемов перевозок между всеми пунктами (станциями) погрузки и выгрузки (корреспонденций), обеспечивающей минимальный объем перевозочной работы (грузооборота) в тонно-километрах. Любую совокупность корреспонденций, обеспечивающую весь объем перевозок, будем называть планом, а совокупность, обеспечивающую минимум грузооборота, - оптимальным планом перевозок.

Алгоритм решения транспортной задачи линейного программирования будем описывать по операциям с присвоением номера и названия.

Операция 1. Построение опорного плана

Опорным, называется любой допустимый, как правило, не оптимальный план, который является исходным для последующего решения. Для построения опорного плана существует ряд методов. Самый простой из них - метод северо-западного угла (табл. 10).

Таблица 10

Метод северо-западного угла

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		40	80	110	50	90
A_1	100	10 40	9 60	8	5	3
A_2	150	4	7 20	13 110	6 20	2
A_3	90	8	6	9	7 30	1 60
A_4	30	5	4	7	9	2 30

Берем "северо-западную" клетку матрицы - это клетка A_1B_1 и записываем в нее максимально возможную поставку - 40 т (объем выгрузки 40 т, ресурсы станции погрузки 100 т). Поскольку ресурсы станции погрузки A_1 не исчерпаны, следуем по первой строке вправо и записываем в клетку A_1B_2 корреспонденцию равную максимально возможной величине - 60 т. Таким образом получается, что ресурсы станции A_1 полностью использованы, однако спрос станции выгрузки B_2 не удовлетворен. Тогда от клетки A_1B_2 опускаемся вниз до клетки A_2B_2 и записываем в нее поставку равную 20 т. Описанным способом следуем далее до последней «юго-западной» клетки матрицы. В результате получаем допустимый план перевозок груза. Грузооборот или функционал транспортной задачи (сумма произведений корреспонденций на расстояние, рассчитанная по таблице 10) составит:

$$F_{сев\text{-}зап.}=40\cdot10+60\cdot9+20\cdot7+110\cdot13+20\cdot6+30\cdot7+60\cdot1+30\cdot2=2960\ \textit{ткм}.$$

После расстановки корреспонденции матрица проверяется на вырождение, т. е. должно выполняться условие

$$m+n\text{-}1=N_{баз},$$

где m - количество строк, n - количество столбцов, $N_{баз}$ - количество базисных клеток.

Другими словами, количество клеток матрицы, содержащих корреспонденции, должно быть равно сумме строк и столбцов без единицы. В нашем случае это условие соблюдается: 8=4+5 –1. План транспортной задачи, отвечающий условию (n+m-1) называют базисным. Базисными также называются клетки матрицы, содержащие поставки. Клетки, в которых поставки отсутствуют, называются небазисными.

Метод северо-западного угла имеет существенный недостаток. При его использовании не учитываются значения показателей критерия оптимальности в клетках матрицы. Поэтому поставки могут попасть в "дорогие" клетки с заведомо высокой ценой или большим расстоянием. Опорный план, полученный с использованием данного метода, как правило, далек от оптимального, что обусловливает большой объем последующих расчетов для доведения его до оптимального. Описанный метод обычно не применяется.

Наиболее предпочтительным при ручном решении транспортных задач считается метод минимальной стоимости или, как его еще называют, метод наименьшего элемента в матрице. Данный метод заключается в следующем. В транспортной матрице выбирается клетка с минимальной стоимостью (расстоянием). В нашем случае это клетка A_3B_5. В нее записывается максимально возможная поставка - это 90 т (таблица 11).

Таблица 11

Добавление нулевой поставки

Пункт отправления	Пункт назначения	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		40	80	110	50	90
A_1	100	10	9	8 50	5 50	3
A_2	150	4 40	7 50	13 60	6	2
A_3	90	8	6	9	7	1 90
A_4	30	5	4 30	7	9	2

Таким образом, причиной вырождения плана транспортной задачи является наличие поставщиков и потребителей с равными объемами погрузки и выгрузки или равными объемами сумм погрузки и выгрузки по нескольким станциям в разнообразных комбинациях. Такие случаи необходимо уметь находить для того, чтобы правильно определять места для нулевых поставок. В процессе решения задачи возможны случаи, когда число базисных клеток превышает величину "n+m-1". Это означает появление ошибки вследствие того, что при построении опорного плана в какую-то клетку была введена не максимально возможная поставка.

Операция 2. Проверка плана на оптимальность

Операция 2.1. Расчет потенциалов

Проверка плана транспортной задачи в описываемом методе на оптимальность осуществляется с помощью потенциалов. Потенциалы - числа, которые по определенным правилам назначаются каждой строке и каждому столбцу. Потенциалы строк обозначим u_i, потенциалы столбцов - v_j. Они могут принимать любые значения. Однако удобнее работать с положительными, целыми и относительно небольшими числами. Такой потенциал первоначально назначается любой строке или столбцу. Представляет интерес следующая последовательность действий. Выберем базисную клетку с максимальным расстоянием. В рассматриваемой матрице это клетка A_2B_3. Присвоим строке, в которой находится эта клетка, потенциал, равный 0 (u_3=0). Далее можно рассчитать потенциалы столбцов по базисным клеткам строки 3 с помощью следующего соотношения: $v_j=u_i+c_{ij}$. Потенциал первого столбца $v_1=u_2+c_{21}$=0+4=4; второго: $v_2=u_2+c_{22}$=0+7= 7; третьего: $v_3=u_3+c_{23}$=0+13=13; пятого: $v_5=u_2+c_{25}$=0+2=2.

Рассчитанные потенциалы записываем напротив соответствующих столбцов ниже матрицы. Поскольку по всем базисным клеткам строки 2 потенциалы столбов найдены, переходим к расчету потенциалов строк 2.

Потенциал строки 1 рассчитываем по найденному потенциалу столбца 3 и базисной клетке A_1B_3 с помощью следующего соотношения: $u_i=v_j-c_{ij}$, где $u_1=v_3-c_{31}$=13-8=5. Для строки 3 потенциал будет равен: $u_3=v_5-c_{35}$=2-1=1. Также рассчитываем потенциалы для всех строк и столбцов (таблица 12). Таблица 12

Расстановка потенциалов и перераспределение поставок

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		40	80	110	50	90	u_i
A_1	100	10	9	8 100 50 +	5 50 −	3	5
A_2	150	4 40	7 50	13 10 60 −	6 * +50	2 0	0
A_3	90	8	6	9 *	7 *	1 90	1
A_4	30	5	4 30	7 *	9	2	3
	v_j	4	7	13	10	2	

Операция 2.2. Проверка небазисных клеток на соответствие их условию оптимальности

Оптимальный план транспортной задачи должен отвечать критерию оптимальности, который выражается в том, соответствуют ли небазисные клетки матрицы условию, формулируемому следующим образом: $v_j-u_i \le c_{ij}$.

Если данное условие для всех небазисных клеток выполняется, то план является оптимальным, а если нет, хотя бы для одной клетки, то план не оптимален. Иначе говоря, существует некоторый план с меньшим функционалом. Разность потенциалов может интерпретироваться как некоторая условная цена перевозки единицы продукции по маршруту, связывающему соответствующие станции "i" и "j". Если она ниже c_{ij}, значит, использование данного маршрута не улучшит план, а если c_{ij} ниже разности потенциалов, т.е. указанное выше условие не выполняется, следовательно, существует план лучше рассчитанного, который необходимо отыскать. Проверим последнее условие для табл. 12.

Клетка A_1B_1: 4-5<10, условие выполняется.

Клетка A_1B_2: 7-5<9, условие выполняется и т. д.

Если для всех небазисных клеток условие 3 выполняется, то рассматриваемый план будет оптимален. Дальнейшие действия переходят по алгоритму к операции 4.

Однако для рассматриваемого примера это не так. Не выполняется условие для клетки A_2B_4 (10-0>6), клетки A_3B_3 (13-1>9), а также для клеток A_3B_4, A_4B_3, из чего следует, что разработанный опорный план не оптимален. Отметим эти клетки.

Операция 3. Улучшение плана

Из-за неоптимальности полученного плана, дальнейшие действия алгоритма состоят в его преобразовании в лучшую сторону или просто улучшения.

Операция 3.1. Построение цепи (контура, цикла) перераспределения поставок

Улучшение плана осуществляется по одной из небазисных клеток, для которой условие оптимальности оказалось невыполненным. В нашем плане имеется четыре такие клетки. Выбираем одну из них, для которой условие оптимальности не выполняется в наибольшей степени. В нашем плане это клетка A_2B_4. Для нее условие оптимальности не выполнено на 4 единицы (10-0-6=4). Для этой клетки строим цепь перераспределения поставок. Цепь перераспределения поставок это такая замкнутая ломаная линия, которая проходит по клеткам матрицы ходом шахматной ладьи. В вершинах контура обязательно лежит одна небазисная клетка (несоответствующая условию оптимальности, найденная ранее), а остальные соответствуют только базисным клеткам. Линии контура могут пересекаться. Для небазисной клетки A_2B_4 цепь будет проходить по клеткам A_1B_4, A_1B_3, A_2B_3 (таблица 13).

Возможные варианты построения цикла перераспределения Таблица 13

Пункт назначения / Пункт отправления		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
A_3	a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
A_4	a_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}

В нашем случае форма цепи простая. Однако цепь может иметь любую форму, в том числе и причудливую (см. табл. 13). Её нужно научиться отыскивать, используя эвристические подходы. При этом необходимо учитывать, что каждая небазисная клетка транспортной матрицы обязательно имеет одну цепь перераспределения поставок.

Операция 3.2. Перераспределение поставок

Перераспределение поставок (см. табл. 12) производится по цепи. На первом этапе определим объем перераспределения поставок. Для этого присвоим клеткам - вершинам цепи - знаки. В небазисную клетку A_2B_4 ставим "+", поскольку в нее будет вводиться поставка. Далее, чередуя "+" с "–", расставляем знаки по остальным вершинам контура. Величина объема перераспределения поставок принимается равной минимальной поставке в отрицательной клетке. Для нашего случая это 50 единиц груза. Перераспределение заключается в том, что к поставкам в положительных клетках найденный объем прибавляется, а для отрицательных клеток отнимается. Результат представлен в таблице 12.

Функционал F' нового плана, представленного в таблице 12 (выделенные поставки), составляет 1950 ткм, что на 200 ткм меньше значения функционала F предыдущего плана. Полученный улучшенный план, представленный в таблице 12, в свою очередь, требует проверки на оптимальность, поэтому необходимо вернуться к операции 2.

Совокупность действий, описанных в операциях 2 и 3, в процессе решения задачи повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. Эта совокупность носит итеративный (циклический) характер, поэтому она называется итерацией. Через определенное число итераций план становится оптимальным. После этого осуществляется переход от второй операции к четвертой (табл. 14).

Повторение операций 2, 3 Таблица 14

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		40	80	110	50	90	u_i
A_1	100	[10]	[9]	100 [8]	[5]	[3]	**5**
A_2	150	40 [4]	**60** ~~50~~ + [7]	~~10~~ – [13]	50 [6]	0 [2]	**0**
A_3	90	[8]	[6]	* [9]	[7]	90 [1]	**1**
A_4	30	[5]	**20** ~~30~~ – [4]	* **10** + [7]	[9]	[2]	**3**
	v_j	**4**	**7**	**13**	**6**	**2**	

От матрицы к матрице грузооборот (затраты на транспортировку) должны снижаться. Если план не оптимален, то необходимо произвести повторный расчёт потенциалов, проверить небазисные клетки на соответствие условию оптимальности.

Покажем дальнейшее решение задачи, основываясь на данных таблицы 12. Результат действий второй и третьей итераций приведен в табл. 14.

Проверка плана на оптимальность свидетельствует о том, что для двух клеток условия оптимальности не выполняются. После перераспределения поставок по клетке A_4B_3, получаем новый план (таблица 15).

Оптимальный план поставок Таблица 15

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
		40	80	110	50	90	u_i
A_1	100	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	100 $\boxed{8}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	2
A_2	150	40 $\boxed{4}$	60 $\boxed{7}$	$\boxed{13}$	50 $\boxed{6}$	0 $\boxed{2}$	0
A_3	90	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	90 $\boxed{1}$	1
A_4	30	$\boxed{5}$	20 $\boxed{4}$	10 $\boxed{7}$	$\boxed{9}$	$\boxed{2}$	3
	v_j	4	7	10	6	2	

Проверка плана перевозок на оптимальность по условию v_j-$u_i \leq c_{ij}$ показала, что для всех небазисных клеток матрицы условия оптимальности выполняются. Функционал F оптимального плана равен 1920 ткм. Таким образом, получен план перевозок, обеспечивающий минимальный объем перевозочной работы для транспортировки всего груза между станциями погрузки и выгрузки.

1.14. Основные понятия динамического программирования

Динамическое программирование

Динамическое программирование в теории управления и теории вычислительных систем - это способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Он применим к задачам с оптимальной подструктурой, выглядящим как набор перекрывающихся подзадач, сложность которых чуть меньше исходной. В этом случае время вычислений, по сравнению с "прямыми" методами, можно значительно сократить.

Ключевая идея в динамическом программировании достаточно проста. Как правило, чтобы решить поставленную задачу, требуется решить отдельные части задачи (подзадачи), после чего объединить решения подзадач в одно общее решение. Часто многие из этих подзадач одинаковы. Подход динамического программирования состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только один раз, сократив тем самым количество вычислений. Это особенно полезно в случаях, когда число повторяющихся подзадач экспоненциально велико.

Идея динамического программирования

Оптимальная подструктура в динамическом программировании означает, что оптимальное решение подзадач меньшего размера может быть использовано для решения исходной задачи. К примеру, кратчайший путь в графе (см. рис. 1) из одной вершины (обозначим s) в другую (обозначим t) может быть найден так: сначала считаем кратчайший путь из всех вершин, смежных с s, до t, а затем, учитывая веса ребер, которыми s соединена со смежными вершинами, выбираем лучший путь до t (через какую вершину лучше всего пойти). В общем случае мы можем решить задачу, в которой присутствует оптимальная подструктура, проделывая следующие три шага.

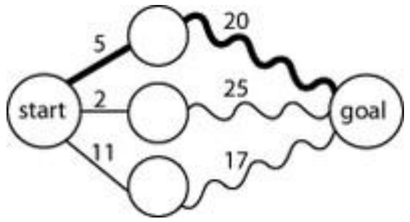


Рис.2. Нахождение кратчайшего пути в графе из одной вершины в другую, используя оптимальную подструктуру; прямая линия обозначает кратчайший путь между вершинами, которые она соединяет (промежуточные вершины пути не показаны); волнистая линия обозначает длинный путь; жирной линией обозначен итоговый кратчайший путь

1. Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера.
2. Нахождение оптимального решения подзадач рекурсивно, проделывая такой же трехшаговый алгоритм.
3. Использование полученного решения подзадач для конструирования решения исходной задачи.

Подзадачи решаются делением их на подзадачи ещё меньшего размера и т. д., пока не приходят к тривиальному случаю задачи, решаемой за константное время (ответ можно сказать сразу). К примеру, если нам нужно найти $n!$, то тривиальной задачей будет 1!=1 (или 0!=1).

Перекрывающиеся подзадачи в динамическом программировании означают подзадачи, которые используются для решения некоторого количества задач (не одной) большего размера (то есть мы несколько раз проделываем одно и то же). В качестве примера может быть рассмотрено вычисление последовательности Фибоначчи (Числа Фибоначчи - элементы числовой последовательности 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, …) в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел), $F_3=F_2+F_1$ и $F_4=F_3+F_2$ - даже в таком тривиальном случае вычисления всего двух чисел Фибоначчи мы уже посчитали F_2 дважды. Если продолжать дальше и вычислять F_5, то F_2 будет вычисляться ещё два раза, так как для вычисления F_5 будут нужны опять F_3 и F_4. Получается следующее: простой рекурсивный подход будет расходовать время на вычисление решения для задач, которые он уже решал.

Чтобы избежать такого хода событий мы будем сохранять решения подзадач, которые мы уже решали, и когда нам снова потребуется решение подзадачи, мы вместо того, чтобы вычислять его заново, просто достанем его из памяти. Этот подход называется кэширование (кэш - промежуточный буфер с быстрым доступом, содержащий информацию, которая может быть запрошена с наибольшей вероятностью. Доступ к данным в кэше осуществляется быстрее, чем выборка исходных данных из более медленной памяти или удаленного источника, однако её объём существенно ограничен по сравнению с хранилищем исходных данных). Можно проделывать и дальнейшие оптимизации - например, если мы точно уверены, что решение подзадачи нам больше не потребуется, можно выкинуть его из памяти, освободив её для других нужд, или если процессор простаивает и мы знаем, что решение некоторых, ещё не посчитанных подзадач, нам понадобится в дальнейшем, мы можем решить их заранее.

Подводя итоги вышесказанного можно сказать, что динамическое программирование пользуется следующими свойствами задачи:

- перекрывающиеся подзадачи;
- оптимальная подструктура;
- возможность запоминания решения часто встречающихся подзадач.

Динамическое программирование обычно придерживается двух подходов к решению задач:

- нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи. Используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач;
- восходящее динамическое программирование: все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи. Этот способ лучше нисходящего программирования в смысле размера необходимого стека и количества вызова функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить, решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Языки программирования могут запоминать результат вызова функции с определенным набором аргументов (меморизация), чтобы ускорить "вычисление по имени". В некоторых языках такая возможность встроена (например, Scheme, Common Lisp, Perl), а в некоторых требует дополнительных расширений (C++).

Известны сериальное динамическое программирование, включённое во все учебники по исследованию операций, и несериальное динамическое программирование (НСДП), которое в настоящее время слабо известно, хотя было открыто в 1960-х годах.

Обычное динамическое программирование является частным случаем несериального динамического программирования, когда граф взаимосвязей переменных - просто путь. НСДП, являясь естественным и общим методом для учета структуры задачи оптимизации, рассматривает множество ограничений и/или целевую функцию как рекурсивно вычислимую функцию. Это позволяет находить решение поэтапно, на каждом из этапов используя информацию, полученную на предыдущих этапах, причём эффективность этого алгоритма прямо зависит от структуры графа взаимосвязей переменных. Если этот граф достаточно разрежен, то объём вычислений на каждом этапе может сохраняться в разумных пределах.

Одним из основных свойств задач, решаемых с помощью динамического программирования, является аддитивность. Неаддитивные задачи решаются другими методами. Например, многие задачи по оптимизации инвестиций компании являются неаддитивными и решаются с помощью сравнения стоимости компании при проведении инвестиций и без них.

1.15. Классические задачи динамического программирования

Задача о наибольшей общей подпоследовательности

Задача нахождения наибольшей общей подпоследовательности - задача поиска последовательности, которая является подпоследовательностью нескольких последовательностей (обычно двух). Часто задача определяется как поиск всех наибольших подпоследовательностей. Это классическая задача информатики, которая имеет приложения, в частности, в задаче сравнения текстовых файлов, а также в биоинформатике.

Полный перебор

Существуют разные подходы при решении данной задачи при полном переборе - можно перебирать варианты подпоследовательности, варианты вычеркивания из данных последовательностей и т. д. Однако в любом случае, время работы программы будет экспонентой от длины строки.

Метод динамического программирования

Вначале найдём длину наибольшей подпоследовательности. Допустим, мы ищем решение для случая (n_1,n_2), где n_1, n_2 - длины первой и второй строк. Пусть уже существуют решения для всех подзадач (m_1,m_2), меньших заданной. Тогда задача (n_1,n_2) сводится к меньшим подзадачам следующим образом:

$$f(n_1,n_2)=\begin{cases}0, & n_1=0\vee n_2=0\\ f(n_1-1,n_2-1)+1, & s[n_1]=s[n_2]\\ \max\left(f(n_1-1,n_2),\, f(n_1,n_2-1)\right), & s[n_1]\neq s[n_2]\end{cases}.$$

Теперь вернемся к задаче построения подпоследовательности. Для этого в существующий алгоритм добавим запоминание для каждой задачи той подзадачи, через которую она решается. Следующим действием, начиная с последнего элемента, поднимаемся к началу по направлениям, заданным первым алгоритмом, и записываем символы в каждой позиции. Это и будет ответом в данной задаче. Время работы алгоритма будет $O(n_1,n_2)$.

Таблица 16

		A	B	C	D
	0	0	0	0	0
D	0	←0	←0	←0	←0
C	0	←0	←0	↖ 1	←1
B	0	←0	↖ 1	←1	↖ 2
A	0	↖ 1	←1	←1	↑2

Задача поиска наибольшей увеличивающейся подпоследовательности

Задача поиска наибольшей увеличивающейся подпоследовательности состоит в нахождении наиболее длинной возрастающей подпоследовательности в данной последовательности элементов.

Следует заметить, что подпоследовательность может и не являться подстрокой (то есть, её элементы не обязательно идут подряд в исходной последовательности). Формально, для строки x длины n необходимо найти максимальное число l и соответствующую ему возрастающую последовательность индексов $i_1, ..., i_l$, таких что $x[i_k]< x[i_{k+1}]\forall k\in 1, ..., l$. Наибольшая увеличивающая подпоследовательность имеет применения в физике, математике, теории представления групп, теории случайных матриц. В общем случае известно решение этой задачи за время $n\cdot log(n)$ в худшем случае.

Приведем алгоритм решения задачи, работающий за $O(n \cdot \log(n))$.
Для строки x будем хранить массивы M и P длины n. $M[i]$ содержит индекс наименьшего по величине из последних элементов возрастающих подпоследовательностей x_{nj} длины i, ($\forall j \in 1, ..., i$: $x[n_j] \leq M[i]$), найденных на данном шаге. $P[i]$ хранит индекс предшествующего символа для наидлиннейшей возрастающей подпоследовательности, оканчивающейся в i-й позиции. На каждом шаге будем хранить текущий максимум длины подпоследовательности и соответствующий индекс конечного символа, не забывая поддерживать свойства массивов. Шаг представляет собой переход к следующему элементу строки, для каждого перехода потребуется не более логарифма времени (бинарный поиск по массиву M).

$L=index=M[0]=0$
for $i=1$ to n
поиск наибольшего индекса $j \leq L$, удовлетворяющего $X[M[j]]<X[i]$
P[i]=M[j]
if $j=L$ or $X[i]<X[M[j+1]]$ (нашли более оптимальную подпоследовательность)
$M[j+1]=i$
$L=max\{L,j+1\}$

После выполнения алгоритма, L - длина искомой подпоследовательности, сами же элементы можно получить, разворачивая P рекурсивно из элемента *index*.

Задача о редакционном расстоянии (расстояние Левенштейна)

Расстояние Левенштейна (также редакционное расстояние или дистанция редактирования) между двумя строками в теории информации и компьютерной лингвистике - это минимальное количество операций вставки одного символа, удаления одного символа и замены одного символа на другой, необходимых для превращения одной строки в другую.

Расстояние Левенштейна и его обобщения активно применяется:

- для исправления ошибок в слове (в поисковых системах, базах данных, при вводе текста, при автоматическом распознавании отсканированного текста или речи).
- для сравнения текстовых файлов утилитой diff и ей подобными. Здесь роль "символов" играют строки, а роль "строк" - файлы;
- в биоинформатике для сравнения генов, хромосом и белков.

С точки зрения приложений определение расстояния между словами или текстовыми полями по Левенштейну обладает следующими недостатками:

1. При перестановке местами слов или частей слов получаются сравнительно большие расстояния;
2. Расстояния между совершенно разными короткими словами оказываются небольшими, в то время как расстояния между очень похожими длинными словами оказываются значительными.

<u>Редакционное предписание</u>

Редакционным предписанием называется последовательность действий, необходимых для получения из первой строки второй кратчайшим образом. Обычно

действия обозначаются так: **D** (англ. *delete*) - удалить, **I** (англ. insert) - вставить, **R** (*replace*) - заменить, **M** (*match*) - совпадение.
Например, для 2-х строк "CONNECT" и "CONEHEAD" можно построить следующую таблицу преобразований:

M	M	M	I	R	M	R	R
C	O	N	N	E	C	T	
C	O	N	E	H	E	A	D

Найти только расстояние Левенштейна - более простая задача, чем найти ещё и редакционное предписание (подробнее см. ниже).

Обобщение

Разные цены операций

Цены операций могут зависеть от вида операции (вставка, удаление, замена) и/или от участвующих в ней символов, отражая разную вероятность мутаций в биологии, разную вероятность разных ошибок при вводе текста и т. д. В общем случае:

$w(a,b)$ - цена замены символа a на символ b

$w(\varepsilon,b)$ - цена вставки символа b

$w(a,\varepsilon)$ - цена удаления символа a

Необходимо найти последовательность замен, минимизирующую суммарную цену. Расстояние Левенштейна является частным случаем этой задачи при

$w(a,a)=0$

$w(a,b)=1$ при $a \neq b$

$w(\varepsilon,b)=1$

$w(a,\varepsilon)=1$

Как частный случай, так и задачу для произвольных w, решает алгоритм Вагнера - Фишера, приведённый ниже. Здесь и ниже мы считаем, что все w неотрицательны, и действует правило треугольника: если две последовательные операции можно заменить одной, это не ухудшает общую цену (например, заменить символ x на y, а потом с y на z не лучше, чем сразу x на z).

Транспозиция

Если к списку разрешённых операций добавить транспозицию (два соседних символа меняются местами), получается расстояние Дамерау - Левенштейна. Для неё также существует алгоритм, требующий O(MN) операций. Дамерау показал, что 80 % ошибок при наборе текста человеком являются транспозициями. Кроме того, расстояние Дамерау - Левенштейна используется и в биоинформатике.

Формула

Здесь и далее считается, что элементы строк нумеруются с первого, как принято в математике, а не с нулевого, как принято в языках C, C++, C#, Java.

Пусть S_1 и S_2 - две строки (длиной M и N соответственно) над некоторым алфавитом, тогда редакционное расстояние (расстояние Левенштейна) $d(S_1,S_2)$ можно подсчитать по следующей рекуррентной формуле $d(S_1,S_2)=D(M,N)$, где

$$D(i,j)=\begin{cases}0 & ; i=0, j=0\\ i & ; j=0, i>0\\ j & ; i=0, j>0\\ \min\begin{pmatrix}D(i,j-1)+1,\\ D(i-1,j)+1, & ;\ j>0, i>0\\ D(i-1,j-1)+m(S_1[i],S_2[j])\end{pmatrix}\end{cases},$$

где $m(a,b)$ равна нулю, если $a=b$ и единице в противном случае; $min(a,b,c)$ возвращает наименьший из аргументов.

Здесь шаг по i символизирует удаление (D) из первой строки, по j - вставку (I) в первую строку, а шаг по обоим индексам символизирует замену символа (R) или отсутствие изменений (M). Очевидно, справедливы следующие утверждения: $d(S_1,S_2)\geq||S_1|-|S_2||$, $d(S_1,S_2)\leq max(|S_1|, |S_2|)$, $d(S_1,S_2)=0\Leftrightarrow S_1=S_2$.

Задача о порядке умножения матриц

Задача о порядке умножения матриц - классическая задача динамического программирования, в которой дана последовательность матриц A_1, A_2, ... A_n и требуется минимизировать количество скалярных операций для вычисления их произведения. Матрицы предполагаются совместимыми по отношению к матричному умножению (то есть количество столбцов A_{i-1} совпадает с количеством строк A_i матрицы).

Постановка задачи

Произведение матриц - операция, которая принимает на вход две матрицы размером $k\times m$ и $m\times n$ и возвращает матрицу размером $k\times n$, потратив на это kmn операций умножения.

Когда матрицы велики по одному измерению и малы по другому, количество скалярных операций может зависеть от порядка умножений матриц. Пусть, нам даны 3 матрицы A_1, A_2, A_3 размерами соответственно 10×100, 100×5 и 5×50. Существует 2 способа их умножения (расстановки скобок): $((A_1A_2)A_3)$ и $(A_1(A_2A_3))$. В первом случае нам потребуется $10\cdot100\cdot5+ 10\cdot5\cdot50 =7500$ скалярных умножений, а во втором случае $100\cdot5\cdot50+10\cdot100\cdot50= 75000$ умножений - разница в порядок.

Пусть даны n матриц: A_1: $p_0\times p_1$, A_2: $p_1\times p_2$, ..., A_n: $p_{n-1}\times p_n$. Требуется определить, в каком порядке перемножать их, чтобы количество операций умножения было минимальным.

Решение задачи

Разберём 2 способа решения задачи.

Перебор всех вариантов расстановки скобок

Оценим, сколько же нужно перебрать вариантов расстановки. Обозначим через $P(n)$ количество способов расстановки скобок в последовательности, состоящей из n матриц. Когда матрица одна, то расставлять нечего, вариант один. Если n ≥2, то количество вариантов, которым можно расставить скобки является произведением количества вариантов, которым можно расставить скобки в составляющих результирующую матрицу произведениях (т.к. если $A_3=A_2 \times A_1$, то количество вариантов, которым мы можем получить матрицу A_3 равно произведению количества способов получить матрицу A_1 на количество способов получить A_2). Разбиение на матрицы, A_1 и A_2 может производиться на границе k-й и $(k+1)$-й матриц для $k=1, 2, ..., n-1$. Получаем рекуррентное соотношение:

$$P(n)=\begin{cases}1, \ n=1\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k), \ n\geq 2\end{cases}.$$

Решением аналогичного рекуррентного соотношения является последовательность чисел Каталана, возрастающая как $\Omega(4^n/n^{1,5})$. Зависимость получается экспоненциальная, непригодная для практического применения в программах. Разберём более эффективный способ.

Динамическое программирование

1. Сведение задачи к подзадачам

Обозначим результат перемножения матриц $A_i\ A_{(i+1)}...A_j$ через $A_{i...j}$, где $i\leq j$. Если $i<j$, то существует такое k, которое разбивает $A_{i...j}$ между матрицами A_k и A_{k+1}, $i\leq k<j$. То есть для вычисления $A_{i...j}$ надо сначала вычислить $A_{i...k}$, потом $A_{k+1...j}$ и затем их перемножить. Выбор k является аналогом расстановки скобок между матрицами. Выбрав некоторое k мы свели задачу к двум аналогичным подзадачам для матриц $A_{i...k}$ и $A_{k+1...j}$.

2. Рекурсивное решение

Обозначим через $m[i,j]$ минимальное количество скалярных умножений для вычисления матрицы $A_{i...j}$. Получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$m[i,j]=\begin{cases}0, & i=j\\ \min\limits_{i\leq k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_k p_j\}, & i<j\end{cases}.$$

Объясняется оно просто: для того, чтобы найти произведение матриц $A_{i...j}$ при $i=j$ не нужно ничего делать - это и есть сама матрица A_i. При нетривиальном случае мы перебираем все точки разбиения матрицы $A_{i...j}$ на матрицы $A_{i...k}$ и $A_{k+1...j}$, ищем количество операций, необходимое чтобы их получить и затем перемножаем для получения матрицы $A_{i...j}$.(Оно будет равно количеству операций, потраченное на решение подзадач + стоимость умножения матриц $A_{i...k}\ A_{k+1...j}$). Считаем, что размеры матриц заданы в массиве p и размер матрицы A_i равен $p_{i-1}\times p_i$. Как обычно рекурсивный метод нельзя использовать напрямую - он будет экспоненциальным из-за большого количества перекрывающихся подзадач.

2. *Элементы теории игр*

2.1. Основные понятия теории игр

В экономической практике часто имеют место конфликтные ситуации. Игровые модели - это, в основном, упрощенные математические модели конфликтов. В отличие от реального конфликта игра ведётся по четким правилам. Для моделирования конфликтных ситуаций разработан специальный аппарат - математическая теория игр. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками. Каждая формализованная игра (модель) характеризуется:

1. количеством субъектов - игроков, участвующих в конфликте;
2. вариантом действий для каждого из игроков, называемых стратегиями;
3. функциями выигрыша или проигрыша (платежа) исхода конфликта.

Определение 15

Игра, в которой участвуют два игрока A и B называется парной. Если же количество игроков больше двух, то это игра множественная. Мы будем рассматривать модели только парных игр.

Определение 16

Игра, в которой выигрыш одного из игроков точно равен проигрышу другого, называется антагонистической игрой или игрой с нулевой суммой. Рассмотрение моделей начнем с рассмотрения моделей антагонистических игр.

Провести моделирование (решить) антагонистической игры - указать стратегии для каждого игрока, удовлетворяющие условию оптимальности, т.е. игрок A должен получить максимальный гарантированный выигрыш, какой бы своей стратегии не придерживался игрок B, а игрок B должен получить минимальный проигрыш, какой бы своей стратегии не придерживался игрок A. Оптимальные стратегии характеризуются устойчивостью, то есть ни одному из игроков не выгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Замечание 2 Различают игры кооперативные и некооперативные, с полной информацией и не полной. В игре с полной информацией перед каждым ходом каждый игрок знает все возможные ходы (стратегии поведения) и выигрыши. В кооперативных играх допускается возможность предварительных переговоров между игроками. Мы будем рассматривать некооперативные игры с полной информацией.

Математическая теория игр является разделом математики, изучающей принятие решений в конфликтных ситуациях. Определим основные понятия теории игр.

Определение 17

Игра - упрощенная формализованная модель конфликтной ситуации. Игрок - одна из сторон в игровой ситуации. В зависимости от постановки задачи, стороной может выступать коллектив или даже целое государство.

Каждый игрок может иметь свои стратегии. Стратегией i-го игрока x_2 называется одно из возможных решений из множества допустимых решений этого игрока.

По количеству стратегий игры делятся на конечные, в которых число стратегий ограничено, и бесконечные, которые имеют бесконечно много различных стратегий.

Каждый из n участников игры может выбирать свою стратегию. Совокупность стратегий $x = x_1, x_2, ..., x_n$, которые выбрали участники игры, называется игровой ситуацией.

Оценить ситуацию x с точки зрения преследуемых линейным программированием целей можно, построив целевые функции (или критерии качества), ставящие в соответствие каждой ситуации x числовые оценки $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ (например, доходы фирм в ситуации x или их затраты и т. д.).

Тогда цель i - го участника формализуется следующим образом: выбрать такое свое решение x_i, чтобы в ситуации $x = x_1, x_2, ..., x_n$ число $f_i(x)$ было как можно большим (или меньшим). Однако достижение этой цели от него зависит лишь частично, поскольку другие участники игры влияют на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей (оптимизируют свои целевые функции). Значение целевой функции в той или иной игровой ситуации можно назвать выигрышем игрока в этой ситуации.

<u>Определение 18</u>

По характеру выигрышей игры можно разделить на игры с нулевой и ненулевой суммой. В играх с нулевой суммой сумма выигрышей в каждой игровой ситуации равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой называются антагонистическими. В этих играх выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В играх с ненулевой суммой в выигрыше или проигрыше могут оказаться все участники игры.

По виду функции выигрышей игры можно разделить на матричные, биматричные, непрерывные, сепарабельные и т. д.

<u>Определение 19</u>

Матричными играми называются конечные игры двух игроков с нулевой суммой. В этом случае номер строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i игрока 1, а номер столбца - номеру стратегии B_j игрока 2.

Элементами матрицы a_{ij} является выигрыш игрока 1 для ситуации (реализации стратегий) A_iB_j. В силу того, что рассматривается матричная игра с нулевой суммой, выигрыш игрока 1 равен проигрышу игрока 2.

Можно показать, что всякая матричная игра с известной матрицей платежей сводится к решению задачи линейного программирования. Поскольку в прикладных задачах экономики и управления ситуации, сводящиеся к матричным играм, встречаются не очень часто, мы не будем останавливаться на решении этих задач.

<u>Определение 20</u>

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. В этом случае для каждой игровой ситуации A_iB_j каждый из игроков имеет свой выигрыш a_{ij} для первого игрока и b_{ij} - для второго игрока. К биматричной игре сводится, например, поведение производителей на рынках несовершенной конкуренции.

Рассмотрим конечную игру двух игроков A и B, в которой игрок A может применить одну из m стратегий

$$A_1, A_2, ..., A_m,$$

а игрок B - одну из n стратегий

$$B_1, B_2, ..., B_m.$$

Будем предполагать везде далее, что игрок A выигрывает, а игрок B проигрывает.

Определение 21

Пусть каждая из сторон выбрала стратегии A_i и B_j соответственно (i, j фиксированы, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Через a_{ij} обозначим исход игры (сумму выигрыша игрока A или, что то же, сумму проигрыша игрока B). Предположим, что нам известны значения a_{ij} при всех $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Эти значения можно записать в виде матрицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы - стратегиям игрока B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу будем называть платёжной матрицей.

Определение 22

Величина

$$\alpha = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le j\le n} a_{ij}\right\}$$

называется нижней чистой ценой игры или максимином, а величина

$$\beta = \min_{1\le j\le n}\left\{\max_{1\le i\le m} a_{ij}\right\}$$

называется верхней чистой ценой игры или минимаксом.

Определение 23

Чистую стратегию игрока A, гарантирующую ему максимальный выигрыш, называют максиминной, а чистую стратегию игрока B, гарантирующую ему минимальный проигрыш, - минимаксной стратегией.

Определение 24

Максиминная и минимаксная стратегии называются оптимальными стратегиями игроков A и B соответственно.

Определение 25

Принцип, который определяет выбор игроками своих оптимальных стратегий, называют принципом минимакса.

По степени неполноты информации, которой обладают игры, игры делятся на стратегические и статистические.

Определение 26

Стратегические игры - это игры в условиях полной неопределенности.

Определение 27

Статистические игры - это игры с частичной неопределенностью. В статистической игре всегда имеется один активный игрок, имеющий свои стратегии и цели. Другим игроком (пассивным, не преследующим своих целей) является природа. Этот игрок реализует свои стратегии (состояния природы) случайным образом, причем вероятность реализации того или иного состояния можно оценить с помощью статистического эксперимента.

Поскольку с теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений, то в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только этого класса игр.

2.2. Чистые и смешанные стратегии

Определение 28

Пусть имеется два игрока. Чистой стратегией игрока I является выбор одной из n строк матрицы выигрышей А, а чистой стратегией игрока II является выбор одного из столбцов этой же матрицы. Оптимальные чистые стратегии игроков отличаются от смешанных наличием обязательного единичного значения вероятностей i-ой стратегии p_i=1, q_i=1.

Определение 29

Седловая точка – это пара оптимальных стратегий (A_i,B_j). В этом случае число a=b называется (чистой) ценой игры (нижняя и верхняя цена игры совпадают). Это означает, что матрица содержит такой элемент, который является минимальным в своей строке и одновременно максимальным в своем столбце.

Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	a=min(A_i)
A_1	8	7	0	6	0
A_2	6	8	5	10	5
b=max(B_i)	8	8	5	10	0

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры a= $max(a_i)$ = (0,5,0) = 5, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры b = $min(b_j)$ = (8,8,5,10) = 5. Седловая точка (2,3) указывает решение на пару альтернатив (A_2,B_3). Цена игры равна 5.

Определение 30

p_i - вероятность применения i-ой стратегии первым игроком, q_i - вероятность применения i-ой стратегии вторым игроком. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $P(p_i,q_i)$. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока $Q(p_i, q_i)$.

Пример 11

По платёжной матрице найти оптимальные чистые стратегии, используя принцип строгого доминирования.

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	1	2	5
B_2	2	0	0	3
B_3	-3	-5	-5	-2
B_4	0	-2	-2	1

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях. Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a=min(A_i)$
A_1	3	1	2	5	1
A_2	2	0	0	3	0
A_3	-3	-5	-5	-2	-5
A_4	0	-2	-2	1	-2
$b=max(B_i)$	3	1	2	5	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=min(a_i)=1$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_1. Верхняя цена игры $b=max(b_j)=1$. Седловая точка (1,1) указывает решение на пару альтернатив (A_1,B_2). Цена игры равна 1.

2. Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы. Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Считается, что *i-я* стратегия 1-го игрока доминирует его *k-ю* стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех $j \leq N$ и хотя бы для одного j $a_{ij} > a_{kj}$. В этом случае говорят также, что *i-я* стратегия (или строка) - доминирующая, *k-я* - доминируемая.
Считается, что *j-я* стратегия 2-го игрока доминирует его *l-ю* стратегию, если для всех $j \leq M$ $a_{ij} \leq a_{il}$ и хотя бы для одного i $a_{ij} < a_{il}$. В этом случае *j*-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, *l*-ю - доминируемой.
Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_2 (все элементы строки 1 больше или равны значениям 2-ой строки), следовательно исключаем 2-ую строку матрицы. Вероятность $p_2=0$.
Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_3 (все элементы строки 1 больше или равны значениям 3-ой строки), следовательно исключаем 3-ую строку матрицы. Вероятность $p_3=0$.

3	1	2	5
0	-2	-2	1

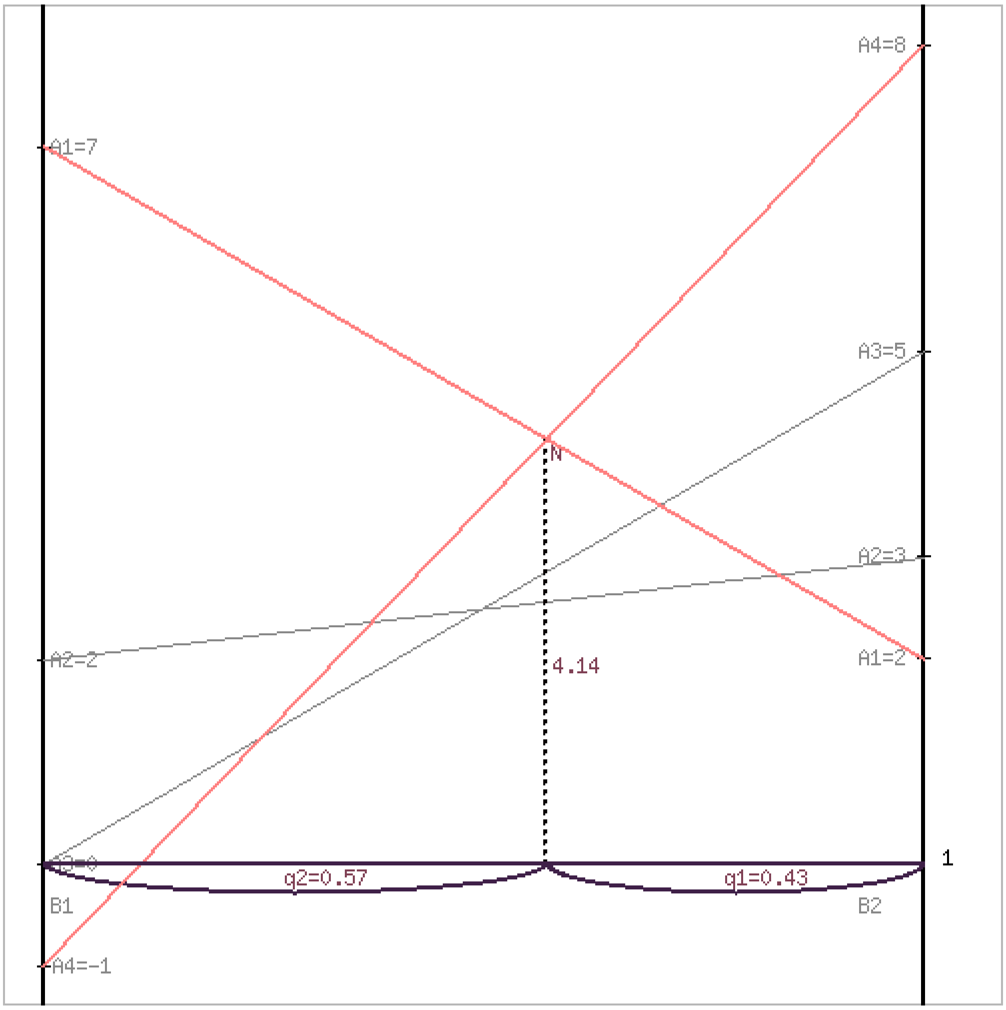
С позиции проигрышей игрока *B* стратегия B_1 доминирует над стратегией B_2 (все элементы столбца 1 больше элементов столбца 2), следовательно исключаем 1-й столбец матрицы. Вероятность $q_1=0$.
С позиции проигрышей игрока *B* стратегия B_4 доминирует над стратегией B_1 (все элементы столбца 4 больше элементов столбца 1), следовательно исключаем 4-й столбец матрицы. Вероятность $q_4=0$.

1	2
-2	-2

Игра 4×4 сведена к игре 2×2.

3. Находим решение игры в смешанных стратегиях.

Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:



1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $x=0$) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 ($x=0$). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1=(p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2.

Решение игры ($2xn$) проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.
Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, для которой можно записать следующую систему уравнений: p_1=1, p_2=0. Цена игры, y =1.Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответст-

вующую систему уравнений q_1=1, q_1+q_2=1. Решая эту систему, находим: q_1=1, q_2=0.

Ответ: Цена игры: y=1, векторы стратегии игроков: $Q(1,0)$, $P(1,0)$.

4. Проверим правильность решения игры с помощью критерия оптимальности стратегии.

$\sum a_{ij}q_i \le v$ $\qquad\qquad \sum a_{ij}p_i \le v$

$M(P_1;Q)=(1\bullet 1)+(2\bullet 0)=1=v$

$M(P_2;Q)=(-2\bullet 1)+(-2\bullet 0)=-2\le v$

$M(P;Q_1)=(1\bullet 1)+(-2\bullet 0)=1=v$

$M(P;Q_2)=(2\bullet 1)+(-2\bullet 0)=2\ge v$

Все неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, следовательно, решение игры найдено верно. Поскольку из исходной матрицы были удалены строки и столбцы, то найденные векторы вероятности можно записать в виде: $P(1,0,0,0)$, $Q0,1,0,0)$.

Пример 12

По платёжной матрице найти нижнюю и верхнюю цену игры. При наличии седловой точки записать векторы оптимальных чистых стратегий P^*, Q^*.

	R_1	R_2	R_3
S_1	-6	-5	0
S_2	-8	-3	-2
S_3	-3	-2	3

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	$a=min(A_i)$
A_1	-6	-5	0	-6
A_2	-8	-3	-2	-8
A_3	-3	-2	3	-3
$b=max(B_i)$	-3	-2	3	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=max(a_i)=-3$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_3. Верхняя цена игры $b=min(b_j)=-3$. Седловая точка (-3,-3) указывает решение на пару альтернатив (A_3,B_1). Цена игры равна -3.

Ответ: P(0,0,1), Q(1,0,0)

<u>Пример 13</u>

По платёжной матрице найти векторы оптимальных стратегий P^*, Q^*и цену игры. Кто из игроков оказывается в выигрыше?

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	-6	-6	2	4
S_2	2	-2	7	-1

Решение:

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

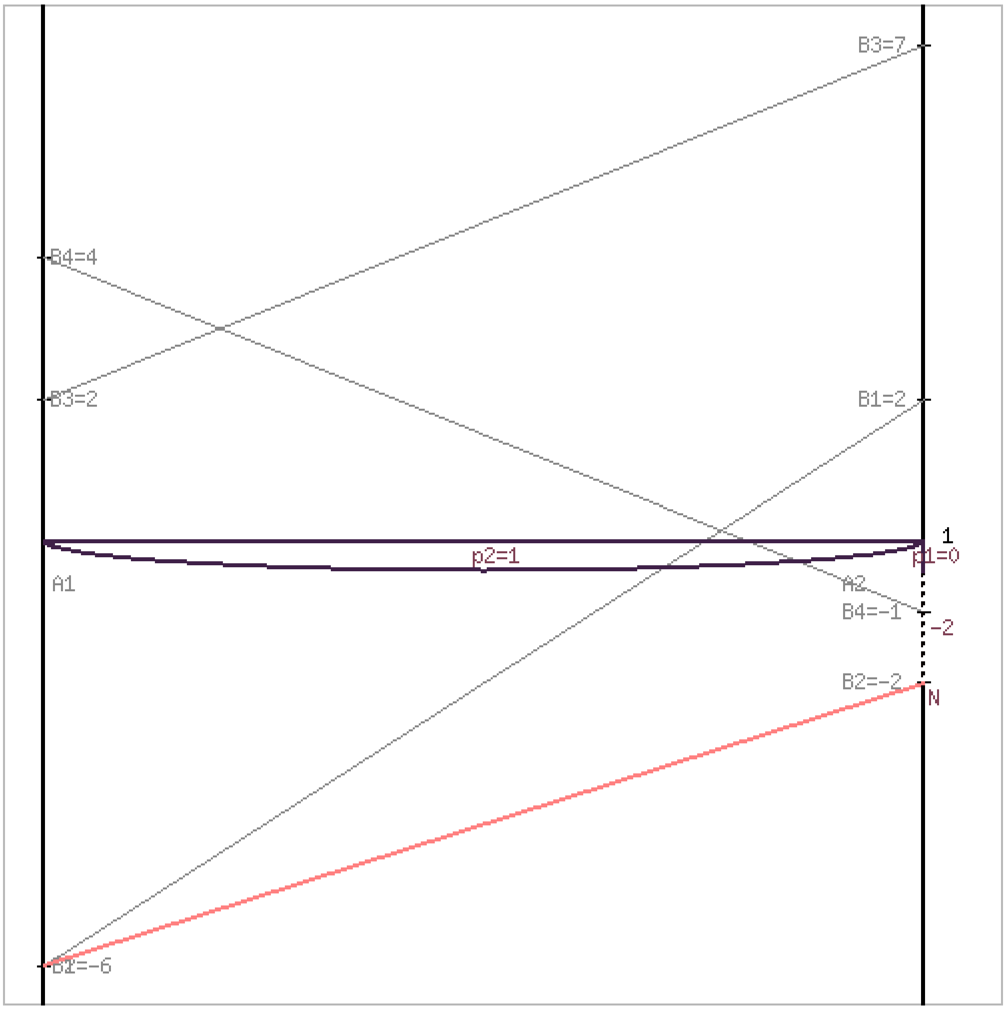
Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a=min(A_i)$
A_1	-6	-6	2	4	-6
A_2	2	-2	7	-1	-2
$b=max(B_i)$	2	-2	7	4	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $a=max(a_i)=-2$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_2. Верхняя цена игры $b=min(b_j)=-2$. Седловая точка (2,2) указывает решение на пару альтернатив (A_2,B_2). Цена игры равна -2.

3. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:

1. В декартовой системе координат по оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка $x=0$) соответствует стратегии A_1, правый - стратегии A_2 ($x=1$). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1=(p_1,p_2)$.

2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии A_2. Решение игры ($2 x n$) проводим с позиции игрока A, придерживающегося максиминной стратегии. Доминирующихся и дублирующих стратегий ни у одного из игроков нет.



Максиминной оптимальной стратегии игрока A соответствует точка N, для которой можно записать следующую систему соотношений: p_1=0; p_2=1. Цена игры, y=-2.

Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока B, записав соответствующую систему уравнений, исключив стратегию B_1, B_3, B_4, которая дает явно больший проигрыш игроку B, и, следовательно, q_1=0, q_3=0, q_4=0, q_2=1.

Ответ: цена игры: y=-2, векторы стратегии игроков: Q(0,1,0,0), P(0,1).

4. Проверим правильность решения игры с помощью критерия оптимальности стратегии.

$\sum a_{ij} q_i \leq v$ $\qquad\qquad$ $\sum a_{ij} p_i \leq v$

$M(P_1;Q)=(-6\bullet 0)+(-6\bullet 1)+(2\bullet 0)+(4\bullet 0)=-6\leq v$

$M(P_2;Q)=(2\bullet 0)+(-2\bullet 1)+(7\bullet 0)+(-1\bullet 0)=-2=v$

$M(P;Q_1)=(-6\bullet 0)+(2\bullet 1)=2\geq v$

$M(P;Q_2)=(-6\bullet 0)+(-2\bullet 1)=-2=v$

$M(P;Q_3)=(2\bullet 0)+(7\bullet 1)=7\geq v$

$M(P;Q_4)=(4\bullet 0)+(-1\bullet 1)=-1\geq v.$

Все неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, следовательно, решение игры найдено верно.

5.8. Понятие и критерии статистических игр

При решении ряда задач оптимизации может возникнуть проблема принятия решений в условиях неопределённости. Очень часто неопределённость, сопровождающая ту или иную операцию, связана с недостаточной осведомлённостью об условиях, в которых она будет проводиться. Так, например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на продукцию определённого вида и т.п. Во всех подобных случаях условия выполнения операции зависят от объективной действительности, которую в теории игр принято называть "природой". Соответствующие ситуации называют "играми с природой" или "статистическими играми".

"Природа" в теории игр рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, поведение которой хотя и неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам. Рассмотрим подобную ситуацию.

Определение 31

Пусть сторона A имеет m возможных стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$. О состоянии "природы" П можно сделать n предположений $П_1, П_2, ..., П_n$. Для каждой пары стратегий A_i, $П_j$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) существует функция $f(A_i,П_j)$, которая является случайной величиной и называется функцией потерь.

Пусть удаётся определить величину a_{ij} - эффективность решения A_i в условиях $П_j$ - для всех комбинаций пар стратегий A_i, $П_j$. В этом случае платёжная матрица игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В теории статистических игр, помимо платёжной матрицы, используется и, так называемая, матрица рисков или матрица сожалений.

Определение 32

Риском стороны A при использовании стратегии A_i в условиях $П_j$ называется величина $r_{ij}=\beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j=\max\limits_{1\leq i\leq m} a_{ij}$ - максимальный выигрыш стороны A в состоянии "природы" $П_j$.

Рассмотрим критерии выбора оптимальной стратегии в статистической игре.

1. Наиболее просто решается задача о принятии решения в условиях неопределённости, когда, хотя и неизвестны условия выполнения операции $П_1, П_2, ..., П_n$,

но известны их вероятности q_1, q_2, ..., q_n соответственно. В этом случае в качестве показателя эффективности естественно взять математическое ожидание выигрыша

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ .$$

1.1. По критерию Байеса, за оптимальную чистую стратегию принимается чистая стратегия A_i при которой величина $\bar{a}_i$ достигает наибольшего значения. С помощью этого критерия задача принятия решения в условиях неопределённости сводится к задаче принятия решения в условиях определённости, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Следует отметить, что, по критерию Байеса, оптимальной будет та стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \ .$$

Это связано с тем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

1.2. Вероятности q_1, q_2, ..., q_n состояний "природы" Π_1, Π_2, ..., Π_n могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями "природы". Однако часто об этих состояниях нет никаких представлений. В подобных случаях состояния могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие – менее правдоподобными. Для того чтобы наши субъективные представления формализовать численно, могут применяться различные технические приёмы. Так, если мы не можем предпочесть ни одной гипотезы, то естественно положить состояния "природы" равновероятными

$$q_1=q_2=...=q_n=1/n.$$

Этот подход получил название <u>принципа недостаточного основания Лапласа</u>. В этом случае, как и по критерию Байеса, оптимальной считается та стратегия, при которой максимизируется средняя величина выигрыша.

2. Пусть теперь вероятности состояний "природы" неизвестны. Рассмотрим критерии, которые можно использовать для определения оптимальной стратегии в этом случае.

<u>2.1. Максиминный критерий Вальда.</u>

Согласно этому критерию, в качестве оптимальной выбирается та стратегия A_i, при которой минимальный выигрыш максимален, т.е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем максимин

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le i \le n} a_{ij} \right\}.$$

Если руководствоваться этим критерием, нужно всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален.

2.2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Этот критерий рекомендует в условиях неопределённости выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (т.е. тогда, когда риск максимален):

$$\rho = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le i \le n} r_{ij} \right\}$$

Сущность этого критерия состоит в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения. Критерии Вальда и Сэвиджа относятся к группе критериев крайнего пессимизма.

2.3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица.

По критерию Гурвица, оптимальной является та стратегия A_i для которой принимает наибольшее значение величина

$$\lambda \cdot \min_{1 \le i \le n} a_{ij} + (1-\lambda) \max_{1 \le i \le n} a_{ij},$$

где $\lambda \in [0,1]$.

При λ=1 критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при λ=0 - в критерий крайнего оптимизма, рекомендующий ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален.

Пример 14

Планируется проведение операции в заранее неясных условиях, относительно которых можно сделать различные предположения $П_1$, $П_2$, $П_3$. Задана платёжная матрица

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Найдём оптимальную стратегию, пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при λ=0,6.

Решение.

1. Критерий Вальда. В каждой строке платёжной матрицы выбираем наименьший выигрыш и из полученных значений берём наибольшее:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}45 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} 0{,}15 \\ 0{,}20 \\ 0{,}25\ * \\ 0{,}05 \end{array}$$

Следовательно, согласно критерию Вальда, оптимальной является стратегия A_3.

2. Критерий Сэвиджа. Построим сначала матрицу сожалений $[r_{ij}]_{4\times3}$. Для этого вычислим максимальные выигрыши стороны при трёх различных состояниях "природы":

$$\beta_1 = \max\{a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}\} = \max\{0{,}20; 0{,}75; 0{,}25; 0{,}85\} = 0{,}85\ ;$$

$$\beta_2 = \max\{a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}\} = \max\{0{,}30; 0{,}20; 0{,}80; 0{,}05\} = 0{,}80\ ;$$

$$\beta_3 = \max\{a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}\} = \max\{0{,}15; 0{,}35; 0{,}25; 0{,}45\} = 0{,}45 .$$

Теперь можем вычислить элементы матрицы сожалений:

$$r_{11} = \beta_1 - a_{11} = 0{,}65 ,\ r_{12} = \beta_2 - a_{12} = 0{,}50 ,\ r_{13} = \beta_3 - a_{13} = 0{,}30 ,$$
$$r_{21} = \beta_1 - a_{21} = 0{,}10 ,\ r_{22} = \beta_2 - a_{22} = 0{,}60 ,\ r_{23} = \beta_3 - a_{23} = 0{,}10 ,$$
$$r_{31} = \beta_1 - a_{31} = 0{,}60 ,\ r_{32} = \beta_2 - a_{32} = 0{,}00 ,\ r_{33} = \beta_3 - a_{33} = 0{,}20 ,$$
$$r_{41} = \beta_1 - a_{41} = 0{,}00 ,\ r_{42} = \beta_2 - a_{42} = 0{,}75 ,\ r_{43} = \beta_3 - a_{43} = 0{,}00 .$$

Матрица сожалений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}00 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

В каждой строке матрицы сожалений выберем наибольший риск и из полученных значений отметим наименьшее:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}00 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}00 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} 0{,}65 \\ 0{,}60 \\ 0{,}60\ * \\ 0{,}75 \end{array}$$

Следовательно, согласно критерию Сэвиджа, оптимальными являются стратегии A_2 и A_3.

3. Критерий Гурвица. В каждой строке платёжной матрицы определяем наименьший и наибольший выигрыши α_i и ω_i соответственно, а затем для каждой строки вычисляем величину $0{,}6\alpha_i$+$0{,}4\omega_i$ и отмечаем из последней совокупности чисел наибольшее значение:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}35 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}25 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}45 \end{pmatrix} \begin{array}{|l|l|l} 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}21 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}42 \\ 0{,}25 & 0{,}80 & 0{,}47\ * \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}37 \end{array}$$

Следовательно, согласно критерию Гурвица при λ =0,6оптимальной является стратегия A_3.

2.3. Планирование эксперимента в условиях неопределённости

Пусть некоторую операцию предстоит осуществить в недостаточно ясных условиях. Необходимо выяснить, имеет ли смысл для уточнения условий в этой ситуации предпринимать некоторый эксперимент. Рассмотрим случай идеального эксперимента, приводящего к точному знанию того состояния "природы" Π_j которое имеет место в данной ситуации.

Пусть задана платёжная матрица $[a_{ij}]_{m\times n}$, а также известны вероятности q_j всех состояний "природы" Π_j ($j = \overline{1,n}$). Обозначим через C затраты на проведение эксперимента.

Сравним средний выигрыш с проведением эксперимента и средний выигрыш без проведения эксперимента. Если дополнительно не проводить эксперимента, то в качестве оптимальной необходимо выбрать ту стратегию A_i, для которой достигается

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \tag{16}$$

Это и будет выигрыш без проведения эксперимента. Теперь предположим, что произведён эксперимент и установлено, какое из состояний $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ является действительным состоянием "природы". Пусть этим состоянием является $П_j$, тогда выигрыш будет определяться величиной

$$\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}.$$

Осредним этот выигрыш с весами, равными вероятностям q_j:

$$q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + ... + q_n\beta_n.$$

С учётом стоимости эксперимента средний выигрыш с применением эксперимента равен величине

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \beta_j - C. \tag{17}$$

Тогда, если величина, выражаемая формулой (17), больше величины, выражаемой формулой (16), то эксперимент следует проводить, а если наоборот, то эксперимент проводить не следует:

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\} < \sum_{j=1}^{n} q_j \beta_j - C,$$

откуда получим неравенство

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\beta_j - a_{ij} \right) \right\}.$$

По определению, величина β_j-a_{ij} выражает риск r_{ij}, поэтому из последнего неравенства получим оценку вида

$$C < \min_i \left\{ \bar{r}_i \right\}.$$

Получаем следующий вывод: эксперимент целесообразно проводить в том случае, когда затраты на его осуществление меньше величины минимального среднего риска.

Пример 15

Рассматривается статистическая игра, условия которой заданы таблице. Определим, является ли целесообразным проведение "идеального" эксперимента, стоимость которого в тех же единицах, в которых выражен выигрыш, составляет 0,5.

A_i $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	9	4	1	5
A_2	3	8	3	4

A_3	2	6	4	6
Вероятности состояний "природы" q_j	0,1	0,2	0,5	0,2

Решение Платёжная матрица игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица сожалений в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим значение среднего риска, для чего определим средние риски при всех состояниях «природы»

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} 0{,}1\cdot 0+0{,}2\cdot 4+0{,}5\cdot 3+0{,}2\cdot 1=2{,}5=\bar{r}_1 \\ 0{,}1\cdot 6+0{,}2\cdot 0+0{,}5\cdot 1+0{,}2\cdot 2=1{,}5=\bar{r}_2 \\ 0{,}1\cdot 7+0{,}2\cdot 2+0{,}5\cdot 0+0{,}2\cdot 0=1{,}1=\bar{r}_3 \end{array}\right.$$

Тогда $\min\limits_{1\le i\le 3}\{\bar{r}_i\}=1{,}1$. Поскольку $C=0{,}5<\min\limits_{i}\{\bar{r}_i\}=1{,}1$ можно сделать вывод о целесообразности проведения идеального эксперимента.

2.4. Решение матричных игр

Рассмотрим конечную игру двух игроков *A* и *B*, в которой игрок *A* может применить одну из *m* стратегий

$$A_1, A_2, ..., A_m,$$

а игрок *B* - одну из *n* стратегий

$$B_1, B_2, ..., B_m.$$

Будем предполагать везде далее, что игрок *A* выигрывает, а игрок *B* проигрывает.

В теории матричных игр можно показать, что $\alpha \le \beta$ ($\alpha=\max\limits_{1\le i\le m}\left\{\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}\right\}$, $\beta=\min\limits_{1\le j\le n}\left\{\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}\right\}$). Решение матричной игры, т. е. нахождение наилучших способов её ведения, производится по–разному, в зависимости от того, $\alpha=\beta$ или $\alpha<\beta$. Рассмотрим эти случаи.

1. Если $\alpha=\beta$, то величина $\alpha=\beta=V$ называется ценой игры. Подобные игры называются играми с седловой точкой, а элемент платёжной матрицы a_{ij}, соответствующий максиминной (A_i) и минимаксной (B_j) стратегиям игроков, называется седловым элементом (седловой элемент - это элемент платёжной матрицы, наименьший в своей строке и наибольший в своём столбце).

Замечание Оптимальные стратегии игроков в играх с седловой точкой обладают тем свойством, что отклонение от своей оптимальной стратегии только одного игрока может лишь ухудшить положение отклонившегося.

2. Решение матричной игры с $\alpha<\beta$ находят, используя так называемые смешанные стратегии игроков - случайное чередование отдельных чистых стратегий с определённой вероятностью.

Смешанную стратегию игрока A, состоящую из чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$, будем обозначать как вектор

$$p=(p_1, p_2, ..., p_m).$$

Смешанную стратегию игрока B, состоящую из чистых стратегий $B_1, B_2, ..., B_n$ с соответствующими вероятностями $q_1, q_2, ..., q_n$ будем обозначать как вектор

$$q=(q_1, q_2, ..., q_m).$$

При этом, по свойствам вероятности случайного события, необходимо учитывать, что

$$p_i\geq 0,\ q_j\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} p_i =1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j =1.$$

Применение игроком A отдельной чистой стратегии A_i ($i=\overline{1,m}$) можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии, в которой вероятность применения им стратегии A_i равна единице, а вероятности применения других стратегий равны нулю. Следовательно, величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B) является случайной величиной с возможными значениями a_{ij} элементов платёжной матрицы.

<u>Определение 33</u>

Средняя величина выигрыша (проигрыша) является функцией от смешанных стратегий и имеет вид

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Данная функция называется платёжной функцией игры с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$. Пусть $p^*=(p_1, p_2, ..., p_m)$, $q^*=(q_1, q_2, ..., q_m)$ - оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно. Справедливы неравенства:

$$f(p,q^*)\leq f(p^*,q^*)\leq f(p^*,q),$$

которые означают, что применение игроком A оптимальной смешанной стратегии p^* гарантирует ему выигрыш, не меньший, чем при применении им любой другой стратегии p; в свою очередь, применение игроком B оптимальной смешанной стратегии q^* гарантирует ему проигрыш, не больший, чем при применении им любой другой стратегии q. Величина $\mathbf{V}=f(p^*,q^*)$ в этом случае определяет цену игры.

Определение 34
Совокупность оптимальных смешанных стратегий p^*, q^* и цены игры **V** составляет решение матричной игры.
Оптимальные стратегии и цена игры обладают следующими основными свойствами:
1) $\alpha \le \mathbf{V} \ge \beta$;
2) оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* в матричной игре с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$ и ценой игры V будут оптимальными и в матричной игре с платёжной матрицей $[b\cdot a_{ij}+c]_{m\times n}$ и с ценой игры $b\cdot\mathbf{V}+c$, где b и c - постоянны числа, $b\neq 0$;
3) применение игроком оптимальной смешанной стратегии, если только он придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, гарантирует ему неизменный выигрыш, равный цене игры, независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за рамки своих активных стратегий.

Замечания
1. На основании свойства 2) платёжную матрицу, содержащую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.
2. На основании свойства 3) матричную игру можно упростить, выявив доминирование одних стратегий над другими. Рассмотрим такую ситуацию.

Определение 35
Для игры с платёжной матрицей $[a_{ij}]_{m\times n}$ рассмотрим две стратегии игрока A: A_p и A_k такие, что

$$a_{pj} \ge a_{kj},\ j = \overline{1,n}\ .$$

Стратегия A_p называется доминирующей, а стратегия A_k - доминируемой. Если для той же матричной игры рассмотреть две стратегии игрока B: B_s и B_r такие, что

$$a_{is} \le a_{ir},\ i = \overline{1,m}\,,$$

то стратегия B_s называется доминирующей, а стратегия B_r - доминируемой.

Определение 36
Если в платёжной матрице есть одинаковые строки (столбцы), то соответствующие стратегии игрока A (игрока B) называются дублирующими.
Определение 37
В матричной игре доминируемые и дублирующие стратегии называются излишними, поэтому их можно опускать, упрощая тем самым матричную игру. Для этого в платёжной матрице вычёркивают строки или столбцы, соответствующие излишним стратегиям игроков.

3. Основы финансовых вычислений

Финансовые вычисления - раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса. Это выражается в решении следующих задач:

1. исчисление будущей суммы денежных средств, находящихся во вкладах, займах или ценных бумагах путем начисления процентов;
2. учет векселей;
3. определение параметров сделки исходя из заданных условий;
4. определение эквивалентности параметров сделки;
5. анализ последствий изменения условий финансовой операции;
6. исчисление обобщающих показателей финансовых потоков;
7. определение параметров финансовой ренты;
8. разработка планов выполнения финансовых операций;
9. расчет показателей доходности финансовых операций.

3.1. Дисконтирование денежных потоков

Расчет показателей для оценки выгодности реального инвестирования базируется на концепции оценки стоимости денег во времени. Данная концепция исходит из предпочтительности денег сегодня, а не завтра. Многие предприниматели придерживаются этой логики, поскольку:

1) существует риск, что деньги могут быть не получены в будущем;
2) если деньги имеются в наличии сегодня, то их можно выгодно инвестировать для получения дохода в будущем.

При оценке инвестиционного проекта часто приходится сравнивать потоки денежных средств (поступления от проекта и расходы на его осуществление) при различных вариантах его реализации. Чтобы такие сравнения имели смысл, денежные потоки сопоставляют в какой-то один период времени. Для сравнения можно выбрать любой момент времени, но для удобства берут нулевой период, т. е. начало осуществления проекта. Будущие потоки денежных средств должны быть приведены (дисконтированы) к настоящему моменту времени. В этих целях используют следующие формулы:

$$БС=НС\times(1+r)^t;\ НС=БС/(1+r)^t,$$

где *БС* - будущая денежная сумма (будущая стоимость); *НС* - настоящая (текущая) стоимость денежной суммы; r - норма дисконта или ставка доходности, доли единицы; t - продолжительность расчетного периода, число лет (месяцев).

Будущая стоимость инвестиций - сумма, в которую превратятся деньги, вложенные сегодня, через определенный промежуток времени при установленной процентной (дисконтной) ставке. Процент может быть простым и сложным. Простой процент начисляют только на основную сумму инвестированных средств. Сложный процент - на основную сумму и проценты предшествующих периодов.

Текущая (настоящая) стоимость денежных средств представляет собой произведение будущей и коэффициента дисконтирования:

$$НС = БС \times КД,$$

где *КД* - коэффициент дисконтирования, доли единицы.

Коэффициент дисконтирования всегда меньше единицы, так как в противном случае сегодня деньги стоили бы меньше, чем завтра.
Таким образом, дисконтированием денежных потоков называют приведение их разновременных (относящихся к разным шагам расчета) значений к их ценности на определенный момент времени. Последний характеризуют моментом приведения и обозначают через t_0. Момент приведения может не совпадать с базовым моментом. Дисконтирование применяют к денежным потокам, выраженным в текущих или дефлированных ценах, и в единой валюте.
Ключевым экономическим нормативом, используемым для дисконтирования, является норма дисконта (r), выраженная в долях единицы, или в процентах в год. Дисконтирование денежного потока на шаге m осуществляют путем умножения его значения ($ДП_m$) на коэффициент дисконтирования (a_m), рассчитываемый по формуле:

$$a_m = 1/(1+r)^{t_m - t_0},$$

где t_m - момент окончания шага m; r - норма дисконта, доли единицы в год; t_m-t_0 - период времени, годы.

Норма дисконта (r) является определяемым внешними условиями основным экономическим параметром, используемым при оценке эффективности проекта. В ряде случаев значение нормы дисконта может выбираться неодинаковым для разных шагов расчета (переменная норма дисконта). Это может быть целесообразно в ситуациях:
1) переменного по времени риска;
2) переменной по времени структуры капитала при оценке коммерческой эффективности проекта.

Различают следующие нормы дисконта: коммерческую, участника проекта, социальную и бюджетную. Коммерческую норму дисконта используют при оценке коммерческой эффективности проекта. Ее определяют с учетом альтернативной (т.е. связанной с другими проектами) эффективности использования капитала. Норма дисконта участника проекта выражает эффективность участия в данном проекте предприятий или иных участников. Ее выбирают сами участники. При отсутствии четких предпочтений вместо нее можно использовать коммерческую норму дисконта.
Социальную (общественную) норму дисконта применяют при расчете показателей общественной эффективности. Она характеризует минимальные требования общества к социальной эффективности проекта. Социальную норму дисконта утверждает Правительство РФ в увязке с прогнозами экономического и социального развития страны.

На региональном уровне общественная норма дисконта может корректироваться органами представительной и исполнительной власти субъектов РФ.
Бюджетную норму дисконта выражают показателем бюджетной эффективности проекта. Ее устанавливают федеральные и региональные органы исполнительной власти.

3.2. Аннуитетный и дифференцированный платёж

Определение 38
Аннуитет - это одинаковый по сумме ежемесячный платёж. То есть при аннуитетном платеже вы каждый месяц платите одинаковую сумму (кредит + проценты по нему) независимо от оставшейся суммы задолженности.
Другой способ погашения кредита - это дифференцированный платёж, то есть выплата процентов на оставшуюся задолженность. При дифференцированных платежах ваша сумма ежемесячных выплат будет уменьшаться к концу срока кредита, поскольку вы будете выплачивать проценты за кредит на оставшуюся сумму задолженности. Например, погасив 80% кредита, вы будете платить проценты за оставшуюся сумму (20%).
Для самих банков выгоднее применять аннуитетные платежи, поскольку в этом случае они получают больше прибыли по процентам. Заемщикам же аннуитетные платежи выгоднее в том плане, что удобнее каждый месяц платить одну и ту же сумму, чем каждый раз разную и уточнять, сколько же ему надо внести в следующий месяц.

Формула аннуитетного платежа

В соответствии с формулой аннуитетного платежа размер периодических (ежемесячных) выплат будет составлять:

$$A = K \cdot S,$$

где A - ежемесячный аннуитетный платёж, K - коэффициент аннуитета, S - сумма кредита. Коэффициент аннуитета рассчитывается с помощью следующего соотношения:

$$K = \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

где n - количество периодов, в течение которых выплачивается кредит, i - месячная процентная ставка по кредиту. Она равна 1/12 годовой ставки.

Поскольку периодичность платежей по кредиту - ежемесячно, то ставка по кредиту (i) берётся месячная. Если процентная ставка 12% годовых, то месячная ставка:

$$i = 12\% / 12 \text{ мес} = 1\%.$$

С помощью приведённой выше формулы аннуитетного платежа можно узнать ежемесячную сумму, которую необходимо платить, чтобы погасить кредит.

Пример 13

Допустим, что в банке взят кредит на сумму 30 000 рублей под 18% годовых сроком на 3 года. В данном случае исходные данные:

S=30 000 рублей;

i=1,5% (18%/12 мес)=0,015;

n=36 (3 года × 12 мес).

Подставляем эти значения в формулу и определяем коэффициент аннуитета:

$$K = \frac{0{,}015 \cdot (1+0{,}015)^{36}}{(1+0{,}015)^{36} - 1} = 0{,}03615.$$

Размер ежемесячных выплат:

$$A = K \cdot S = 0{,}03615 \cdot 30000 = 1084{,}57 \text{ рублей}.$$

3.3. Инфляция

Определение 39

Инфляция - процесс общего роста цен, приводящего к снижению покупательной способности номинальной денежной единицы.

Сущность инфляции

Под инфляцией понимается обесценивание денег, когда на ту же самую сумму некоторое время спустя можно купить меньше товара. Инфляция возникает при нарушении баланса между товарным и денежным потоками. Внешним признаком инфляции служит непрерывный рост общего уровня цен, охватывающий все рынки и все товары, в течение достаточно длительного промежутка времени.

Для обеспечения баланса товаров и денег общая сумма денег в стране с учетом их оборачиваемости за год должна быть такова, чтобы можно было выкупить произведенные за год инвестиционные и потребительские товары (стоимость расходуемых материалов входит в стоимость упомянутых товаров), т.е. валовой внутренний (общественный) продукт (ВВП). Именно это положение реализуется в основном макроэкономическом уравнении:

$$Mv = PY, \qquad (18)$$

где M - общая масса денег, находящихся в обращении; v - скорость оборота денег за год; P - общий уровень цен (например, индекс цен по отношению к ценам базового года); Y - натуральное значение ВВП (например, ВВП в неизмененных ценах базового года).

Необходимо учитывать выпуск облигаций, состояние рынка ценных бумаг, внешнюю торговлю. Соотношение (18) обычно записывается в форме:

$$M = kPY,$$

где k - коэффициент, зависящий от скорости оборота денег (обратно пропорционально) и от других перечисленных факторов.
Для включения инфляционных процессов достаточно, чтобы совокупный спрос превосходил совокупное предложение. По источникам этого превышения инфляции делятся на инфляцию спроса и инфляцию предложения.
Типы инфляции

Инфляция спроса возникает тогда, когда темпы роста совокупного спроса превышают темпы роста ВВП. Увеличение совокупного спроса может произойти за счет роста ряда показателей, главными из которых являются фонд потребления, инвестиции, государственные расходы, чистый экспорт. Из уравнения (18) видно, что при увеличении левой части (как за счет роста скорости оборота денег, так и за счет увеличения денежной массы) правая часть при фиксированном объеме выпуска товаров Y может возрасти лишь за счет роста цен.

Инфляция предложения вызывается ростом издержек производства и, как следствие, сокращением совокупного предложения. Два самых важных источника роста издержек: повышение номинальной заработной платы и увеличение цен на сырье и энергоносители. Если денежная масса или объем выпуска товаров остались неизменными, то единственным средством для обеспечения равенства (18) служит рост цен.

Учет инфляции в финансовых вычислениях

В рассматриваемых ранее методах наращивания все денежные величины измерялись по номиналу. То есть, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый операцией. Однако в современных условиях инфляция в денежных отношениях играет заметную роль, и без ее учета конечные результаты часто представляют собой условную величину.
Инфляцию необходимо учитывать по крайней мере в двух случаях:
1) при расчете наращенной суммы денег;
2) при измерении реальной эффективности (доходности) финансовой операции.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 16
Пусть сегодня получено 150 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,5 раза (или повышение на 50%), индекс цен (J_p) равен 1,5, индекс покупательной способности денег (J_c) равен 1/1,5. Следовательно, реальная покупательная способность 150 тыс. руб. составит $C=S/J_p$=150/1,5 =100 тыс. руб. в деньгах с покупательной способностью двухлетней давности.
Для количественной характеристики инфляции используется также относительный прирост цен - темп инфляции за исследуемый период (измеряется в процентах).
Определение 40
Под темпом инфляции h понимается относительный прирост цен за период:

$$h=\frac{P(t)-P(s)}{P(s)}\times 100,$$

где $P(t)$ - новые цены в условиях инфляции; $P(s)$ - старые цены.

Имеется связь между индексом цен (J_p) и темпом инфляции h: J_p=1+h или h=J_p-1. Обычно темп инфляции измеряется в процентах и определяется следующим образом: h=100(J_p-1). Тогда: J_p=1+h/100.

Пример 17

Если темп инфляции за период равен 30%, то это означает, что цены выросли в 1,3 раза. Если h - постоянный (неизменный) ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за один период, то за n таких периодов получим: $J_p=(1+h/100)^n$ или $J_p=(1+h)^n$.

Пример 18

Постоянный темп инфляции 5% в месяц. Определить рост цен за год.

В данном случае рост цен определяется соотношением: $J_p=(1+0{,}05)^{12}=1{,}796$. Таким образом, действительный годовой темп инфляции равен h = 100 (J_p-1)=100(1,796-1)=79,6%.

Следует заметить, что инфляция является цепным процессом. Следовательно, индекс цен за несколько периодов равен произведению цепных индексов цен:

$$J_p=\prod_1^n\left(1+\frac{h_t}{100}\right),$$

где h_t - темп инфляции в период t и при неизменном темпе прироста цен h (h_t=$const$=h) имеем: $J_p=(1+h/100)^n$.

Постоянное значение темпа инфляции (за отдельный период) определяется через индекс цен с помощью соотношения

$$h=\left(\sqrt[n]{J_p}-1\right)\times 100.$$

Инфляция и начисление по простым процентам

Если наращение производится по простой ставке, то наращенная сумма с учетом покупательной способности равна:

$$C=\frac{S}{J_p}=P\frac{1+ni}{J_p}=\frac{(1+ni)P}{(1+h/100)^n}. \tag{19}$$

где $k=(1+ni)/J_p$ - коэффициент наращения с учетом инфляции. Из соотношения (19) следует, что увеличение наращенной суммы с учетом ее инфляционного обеспечения имеет место только тогда, когда $1+ni>J_p$.

Определим критическое значение годовой процентной ставки i^*, при котором в условиях инфляции эффективность от операции наращения равна нулю. Эффективность от операции будем измерять годовой процентной ставкой:

$$i_{эф}=\frac{C-P}{nP},\ i_{эф}=0 \text{ при } C=P, \text{ т.е. } k=\frac{1+ni}{J_p}=1.$$

Следовательно, годовая процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию определяется через индекс цен и равна

$$i^{*}=(J_p-1)/n.$$

Владельцы денег не могут смирится с их инфляционным обесцениванием и предпринимают различные попытки компенсации потерь.

Применяется способ компенсации потерь от снижения покупательной способности денег при начислении простых процентов.

Наиболее распространенной является корректировка ставки процента, по которой производится наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой инфляционной премии.

<u>Определение 41</u>

Инфляционная премия - дополнительный доход, выплачиваемый (или предусмотренный к выплате) инвестору с целью возмещения его потерь от обесценения денег в связи с инфляцией. Уровень этого дохода обычно приравнивается к темпу инфляции.

Скорректированная таким образом ставка называется брутто-ставкой. Брутто-ставка, которую обозначим r, находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто - ставке множителю наращения по реальной ставке процента.

При наращении <u>по простым</u> процентам получаем:

$$1+nr=(1+ni)J_p, \tag{20}$$

где J_p - индекс цен за учитываемый период. Тогда

$$r=[(1+ni)J_p-1]/n.$$

Наращение по ставке r не только компенсирует инфляцию, но и обеспечивает номинальную доходность i.

Инфляция и начисление по сложным процентам

Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока с учетом инфляционного обеспечения определяется с помощью следующего соотношения:

$$C=\frac{S}{J_p}=P\frac{(1+i)^n}{J_p}=P\left(\frac{1+i}{1+h/100}\right)^n. \tag{21}$$

Величина, на которую умножается P в формуле (21), представляет собой множитель наращения, учитывающий ожидаемый уровень инфляции.

Критическое значение годовой процентной ставки i^{*}, при которой в условиях инфляции эффективность от операции наращения равна нулю, определяется при $k=(1+i)^n/J_p=1$, $i^{*}=\sqrt[n]{J_p}-1$ или через темп инфляции:

$$i^{*}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}-1=\frac{h}{100}.$$

Таким образом, годовая процентная ставка сложных процентов, обеспечивающая нулевую эффективность операции в условиях инфляции, совпадает с темпом инфляции, выраженным в долях единицы. Применяют два способа компенсации потерь от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

1. *Корректировка ставки процента, по которой производится наращение* (*увеличение ставки на величину так называемой инфляционной премии*)

Определим брутто-ставку r при условии полной компенсации инфляции. При наращении по сложной процентной ставке находим брутто-ставку из равенства

$$r+1=(1+i)(1+h/100)$$

или

$$r+1=(1+i)(1+h)=1+i+h+ih,$$

где i - реальная ставка. Тогда

$$r = i + \frac{h}{100} + \frac{i\,h}{100}$$

или

$$r=i+h+ih. \qquad (22)$$

Последние два слагаемых определяют инфляционную премию.

Последнее соотношение называется формулой Фишера. Данное соотношение связывает номинальную процентную ставку i с реальной i^* и темпом инфляции h. Для расчета ставки может быть использовано более простое соотношение:

$$r=i+h/100. \qquad (23)$$

Далее рассмотрим как совместно влияют сложная ставка i и темп инфляции h на значение этого множителя $ih/100$ (или ih). Если среднегодовой темп инфляции равен процентной ставке, то роста реальной суммы не произойдет - наращение будет поглощаться инфляцией, и тогда, $C = P$. Если же $h/100>i$, то наблюдается "эрозия" капитала – его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда $h/100<i$, происходит реальный рост, реальное накопление.

Формула (22) по сравнению с (23) содержит один дополнительный член, которым при незначительных величинах i и h можно пренебречь. Если же они значительны, то ошибка (не в пользу владельца денег) станет существенной. Например, даже при i=5% и h=1% "вклад" этого произведения в брутто-ставку составит 0,0005, или 0,05%. Брутто-ставка в этом случае равна 6,05% (вместо 15% по формуле (22)). Однако при годовой инфляции в 100% и той же исходной ставке наращения брутто-ставка увеличивается уже до 0,05+1+0,05=1,1 т.е. до 110%.

Пример 19

Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?

Решение Брутто - ставку вычислим по формуле (23)

$$r = i + h + ih = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}32.$$

Инфляционная премия составит:

$$h + ih = 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}22.$$

В договоре следует проставить ставку сложных процентов, равную 32% годовых, при этом инфляционная премия будет равна 22%.

2. *Индексация (корректировка) первоначальной суммы P*

В рассматриваемом случае величина множителя наращения P, учитывающего ожидаемый уровень инфляции, корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда получаем:

$$C = PJ_p(1+i)^n,\ C = PJ_p(1+h)^n(1+i)^n.$$

Очевидно, что при больших темпах инфляции корректировка (индексация) ставки имеет смысл только для кратко - или в крайнем случае среднесрочных операций.

Пример 20

Кредит в размере 500 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 20% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 15% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.

Решение Множитель наращения определяется с помощью следующего соотношения:

$$J_p(1+i)^n = (1+h)^n(1+i)^n = (1+0{,}15)(1+0{,}2) = 1{,}9.$$

Наращенная сумма:

$$C = PJ_p(1+i)^n = 500 \times 1{,}9 = 950 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Множитель наращения, учитывающий инфляцию, составляет 1,9. Наращенная сумма - 950 тыс. руб.

Оценка реальной годовой ставки процента

Иногда приходится решать обратную задачу: находить реальную годовую ставку процента в условиях инфляции. Аналогичный по содержанию показатель, но при начислении простых процентов, определяется с помощью следующего соотношения:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p} - 1\right) \text{ или } i = \frac{\left\lfloor (1+nr)/(1+h)^n \right\rfloor - 1}{n}.$$

Как видим, реальная доходность здесь зависит от срока операции. Положительной простая ставка i может быть только при условии, что $1+nr > J_p$. Компенсации инфляции можно достичь и путем индексации исходной суммы задолженности.

Если r объявленная норма доходности (или брутто-ставка), то реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки i можно определить при наращении сложных процентов на основе соотношения (22):

$$i=\frac{1+r}{1+h/100}-1 \text{ или } i=\frac{1+r}{1+h}-1=\frac{r-h}{1+h}.$$

Пример 21

На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 12% годовых. Инфляция составляет 10% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=2$.

Решение При начислении простых процентов годовая реальная ставка определяется с помощью следующего соотношения:

$$i=\frac{(1+nr)/(1+h)^n-1}{n}=\frac{(1+0{,}24)/(1+0{,}1)^2-1}{2}=0{,}0124.$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется по формуле:

$$i=\frac{r-h}{1+h}=\frac{0{,}12-0{,}1}{1+0{,}1}=0{,}0182.$$

Реальная ставка простых процентов составляет 1,24%, сложных 1,82%.

3.4. Эластичность и ее применение

Определение 42

Показатель эластичности определяется как относительное изменение значения одной величины в ответ на изменение значения другой, сопоставляемой с ней при анализе, величины. В аналитическом выражении эластичность (например, величины спроса Q по цене P (или просто ценовая эластичность спроса) может быть найдена из соотношения относительных изменений объема спроса и цены:

$$\varepsilon=\frac{\Delta Q}{Q}\Bigg/\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q}=\frac{Q_1-Q_0}{P_1-P_0}\frac{P}{Q}.$$

Потребность оценить эластичность возникает при проведении экономических расчетов и особенно при прогнозировании различных важных для производителей и потребителей процессов для того, чтобы определить общий вид функций спроса и предложения и выяснить, как сильно будет реагировать в каждом данном конкретном случае величина спроса или предложения на изменения соответствующих факторов. Другими словами, насколько значительными окажутся при этом ее ответные изменения. Чувствительность одного фактора к поведению другого лучше всего определять исходя не только из абсолютных, но и из относительных изменений их обоих.

Определение 42*а* (ценовая эластичность спроса)

Иногда эластичность спроса определяется как величина изменения в процентах спроса при изменении цены на 1%.

Дуговая и точечная оценки эластичности

При этом конкретная методика подсчета конкретного коэффициента эластичности будет зависеть от того, насколько значительными являются расхождения начальных и конечных значений рассматриваемых величин P и Q. Если они не-

велики, то в формулу эластичности могут быть поставлены просто либо их начальные значения P_0 и Q_0, либо конечные - P_1 и Q_1, ведь полученные значения коэффициента эластичности при этом будут не слишком различаться (обычно используют начальные значения, так как это позволяет сравнивать несколько вариантов изменений при принятии экономических решений).
В таком случае можно говорить о точечной эластичности. При этом мы в праве перейти от приращений объема спроса и цены к их дифференциалам.
В том же случае, когда рассматриваемые изменения δQ и δD оказываются значительными, значения коэффициента эластичности при использовании начальных и конечных величин предложения (спроса) и цены могут существенно расходиться. Тогда лучше определять дуговую эластичность, используя средние величины $Q_a v$ и $P_a v$:

$$\varepsilon = \frac{\delta Q}{\delta P} \frac{P_a v}{Q_a v},$$

где $Q_a v = (Q^1 + Q^0)$, $P_a v = (P^1 + P^0)/2$, .

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0} \frac{P_1 + P_0}{Q_1 + Q_0}$$

Таким образом, при небольших изменениях рассматриваемых величин обычно используется формула точечной эластичности, а при значительных (например, более 5% от исходных величин) - дуговой эластичности.
При исследовании чувствительности находящихся в функциональных зависимостях сопоставляемых величин используют эластичности функций. Эластичность функции $y=f(x)$ показывает относительное изменение значения функции y в расчете на единицу относительного изменения аргумента x. Если эластичность переменной y по переменной x обозначить $\varepsilon_x(y)$, то, используя определение эластичности, получаем:

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\delta y}{\delta x} \frac{x}{y}.$$

Если $f(x)$ считать общей (совокупной) величиной (как, например, общая или совокупная выручка), то $M(f)=dy/dx$ - соответствующая ей предельная величина (например, предельная выручка, или дополнительная выручка dy от дополнительной единицы dx), а $A(f)$ - средняя величина (средняя выручка, или выручка в среднем на единицу x, равная y/x, в нашем примере это - цена). Таким образом, эластичность функции равна отношению предельной и средней величин.
С учетом того, что в соответствии с законом спроса изменения величины спроса и цены данного товара разнонаправлены, коэффициент ценовой эластичности спроса должен быть отрицательным.
Для упрощения анализа знак “-” иногда опускают и далее используется абсолютное значение (модуль) коэффициента эластичности $|e|$.

Абсолютное значение коэффициента эластичности может изменяться в диапазоне от 0 до ∞, однако важной границей является 1, поскольку она разделяет реакцию, превышающую исходный импульс, и менее чувствительные ответные изменения.

При $|e| < 1$ степень изменения, например, объема спроса меньше исходного изменения цены. Тогда, мы имеем дело с товаром неэластичного (жесткого) спроса.

При единичном значении эластичности ($|e|=1$) исходный импульс и ответная реакция совпадают по относительной величине. Если же $|e|\geq 1$, то получаем товар эластичного (гибкого) спроса. Предельными случаями являются

1. нулевая эластичность: в этом случае кривая спроса (или предложения) строго вертикальна: $d\,Q = 0$ при любых изменениях цены, то есть величина спроса или предложения не реагирует на изменения цены; в тоже время получаем бесконечную эластичность;
2. кривая спроса (или предложения) строго горизонтальна: $d\,Q = \infty$ при самых незначительных изменениях цены, то есть объем спроса или предложения при малейшем соответственном росте или падении цены снизится до 0.

Кривые же спроса и предложения с постоянной эластичностью - это графики степенных функций. Для спроса это - гипербола: $f(x)$~$1/x^a$, где $a>0$.

Отсюда следует, что кривая спроса с единичной эластичностью - это гипербола с показателем степени $-a=-1$: Для предложения: $f(x)\sim x^a$, где $a>0$.Тогда отсюда следует, что кривая предложения с единичной эластичностью - это график линейной функции, выходящей из начала координат. Виды эластичности спроса и предложения. Наиболее часто используется понятие прямой эластичности спроса по цене, или просто ценовой эластичности спроса -отношение относительного изменения объема спроса на данный товар к относительному изменению его цены: $\Delta Q/\Delta P$.

Перекрестная ценовая эластичность

Следующим видом эластичности спроса является перекрестная ценовая эластичность, которая определяется как относительное изменение величины спроса на один товар (например, А), деленное на относительное изменение цены другого товара (например, Б):

$$e_{ij} = \frac{\Delta Q_i / Q_i}{\Delta P_j / P_j}.$$

Коэффициент перекрестной эластичности может быть положительным, отрицательным и нулевым.

1. Если $e_{ij}>0$, то товары i и j называют *взаимозаменяемыми* , повышение цены j-того товара ведет к увеличению спроса на i-тый (например, различные виды топлива).
2. Если $e_{ij}<0$, то товары i и j называют *взаимодополняющими*, повышение цены j-того товара ведет к падению спроса на i-тый (например, автомашины и бензин).

3. Если e_{ij}=0, то такие товары называют *независимыми*, повышение цены одного товара не влияет на объем спроса на другой (например, хлеб и цемент).

Эластичность спроса по доходу

Эластичность спроса по доходу показывает, на сколько процентов изменится величина спроса при изменении дохода на 1 %. Она зависит от следующих факторов:

1. значимость товара для бюджета семьи;
2. является ли товар предметом роскоши или предметом первой необходимости;
3. консерватизм во вкусах.

Определив эластичность спроса по доходу, можно определить, относится ли данный товар к категории нормальных или малоценных. Основная масса потребляемых товаров относится к категории нормальных. С ростом доходов мы больше покупаем одежду, обувь, высококачественные продукты питания, товары длительного пользования. Есть товары, спрос на которые обратно пропорционален доходам потребителей. К ним относятся: вся продукция секонд-хенд и некоторые виды продовольствия (дешёвая колбаса, приправа). Математически эластичность спроса по доходу может быть выражена следующим образом:

$$E_I = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}.$$

Таким образом, эластичность спроса по доходу показывает степень изменения спроса в ответ на изменение доходов потребителей. В зависимости от свойств благ эластичность спроса на эти блага по доходу может быть различной.

1. Нормальное (полноценное) благо: E_I>0. Объём спроса увеличивается при увеличении дохода потребителя.
2. Предмет роскоши: E_I>1. Объём спроса увеличивается при увеличении дохода потребителя.
3. Товар первой необходимости: 0<E_I<1. Объём спроса изменяется на меньший процент, чем доход. Т.е. при увеличении дохода в определённое число раз, спрос на заданный товар увеличится в меньшее число раз.
4. Неполноценное (низшее) благо: E_I<0. Объём спроса падает, при увеличении дохода потребителя. Примером может служить рынок потребления перловки.
5. Нейтральное благо: E_I=0. Нет прямой зависимости между потреблением этого блага и изменением дохода.

Необходимо заметить, что и предметы роскоши и товары первой необходимости являются нормальными (полноценными) благами, так как условие E_I>0 содержит оба условия, и E_I>1, и 0<E_I<1.

Эластичность предложения

Эластичность предложения является положительной, поскольку цена и величина предложения изменяются в одном направлении. Она зависит от ряда факторов, в том числе от самой возможности и затрат на длительное хранение данного товара, условий его производства и гибкости реакции последнего на изменения рыночной конъюнктуры (особенно возможностей переналаживания оборудования и переквалификации рабочих либо привлечения новых факторов производства). Еще большую, чем для спроса, роль играет при этом фактор времени, поскольку чаще всего предложение менее изменчиво по сравнению со спросом. Очевидно, что с расширением границ временного интервала эластичность предложения, как правило, повышается.

Применение

Коэффициенты эластичности различных видов широко применяются в научной и практической экономической деятельности. Они позволяют переводить на язык конкретных цифровой связи между самыми разнообразными экономическими явлениями и процессами. Но кроме непосредственного использования показатели эластичности нередко привлекаются и для других направлений микроанализа. Одной из существенных проблем, очень часто возникающей при принятии экономических решений, является изменение выручки продавца (или, что то же самое, расходов покупателя) при изменении им цены данного товара. Важной оказывается возможность определить направление такого изменения, то есть заранее сказать, будет ли при этом выручка расти или падать, исключительно исходя из ценовой эластичности спроса. Выручка (R) определяется произведением проданного количества товара на его цену: $R = P\cdot Q$. Поведение функции R при росте ее аргумента P, как известно, можно определить исходя из знака ее производной (когда производная положительна, функция возрастает, когда отрицательна - функция убывает). Если при этом вспомнить, что Q - это функция спроса ($Q=f(P)$), то для нахождения ответа на вопрос о росте или снижении выручки будет достаточно определить знак производной произведения функций $R=P\cdot Q=P\cdot f(P)$.

Поскольку Q всегда положительно, знак производной функции выручки зависит от выражения $(1+e)$.Здесь возможны три случая:

1. Неэластичный спрос: $|e|<1$: $e>-1$, $(1+e)>0$ и $R'>0$. При росте цены выручка увеличивается, а при снижении - падает.
2. Спрос единичной эластичности: $|e|=1$: $e=-1$, $(1+e)=0$ и $R'=0$.Тогда выручка не изменяется ни при росте, ни при падении цены.
3. Эластичный спрос: $|e|>1$: $e<-1$, $(1+e)<0$ и $R'<0$. Здесь при росте цены выручка сокращается, а при снижении - растет. Отсюда можно сделать вывод: при неэластичном спросе ($|e|<1$) продавцам выгодно повышение цен (их выручка при этом увеличивается), а покупателям - их снижение (расходы сокращаются). При эластичном спросе ($|e|>1$) все наоборот.

3.5. Функции полезности, кривые безразличия, функции спроса

Рыночный спрос зависит от решений отдельных потребителей. Делая выбор, люди руководствуются своими потребностями и количеством имеющихся у них денег. В связи с этим возникает вопрос поиска некоей основы для соизмерения различных потребностей. В конце XIX в. в качестве такой основы была предложена полезность.

Определение 43

Полезность данного блага (набора благ) - это степень удовлетворения им той или иной потребности.

Полезность субъективна, поскольку определяется индивидуальными предпочтениями того или иного индивида. Обычно оценивается полезность не отдельного блага, а набора благ. Дело в том, что удовлетворение потребителя обычно зависит от того, вместе с какими другими благами данное благо потребляется.

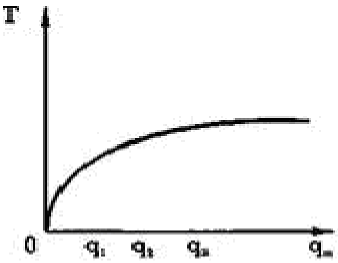
Задача отдельного потребителя состоит в том, чтобы при ограниченных ресурсах приобрести набор благ, приносящий ему наибольшее удовлетворение. Увеличивая получаемую таким образом полезность, потребитель максимизирует свое благосостояние.

Определение 44

Функция полезности - функция, показывающая убывание предельной полезности блага с ростом его количества:

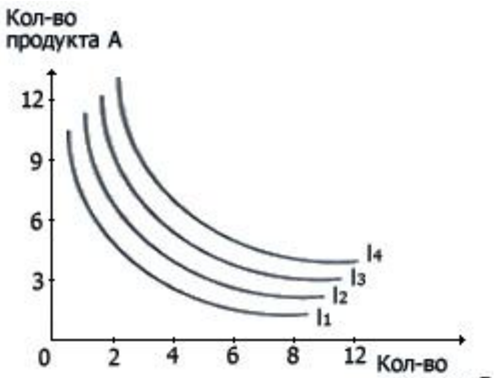
$$M=dT/dq,$$

где M - предельная полезность, она равна частной производной общей полезности T данного блага.



Определение 45

Кривые безразличия - представляют собой совокупность точек на координатной плоскости, каждая из которых является потребительским набором, обеспечивающим потребителю одинаковый уровень удовлетворения его потребностей (или если пользоваться терминологией кардиналистского направления, одинаковую полезность). Форма кривой безразличия отдельного потребителя определяется исключительно его вкусами и предпочтениями и не зависит от доходов или цен на потребляемые товары.



Определение 46

Совокупность кривых безразличия, описывающих поведение одного потребителя, составляет его карту безразличия.

Исходные аксиомы анализа

Построение и анализ этих кривых основывается на следующих допущениях, или аксиомах:

1. Аксиома рациональности потребителя как экономического субъекта.
2. Аксиома непрерывности.

Все товары можно непрерывно разбить на всё более мелкие единицы, так что размеры единиц, в которых продается товар, не сдерживают потребителей.

3. Аксиома возможности выбора.

Предполагает способность человека однозначно ответить на вопрос, какой из предложенных потребительских наборов, A или B, является для него более предпочтительным. При этом обязательным будет выбор одного из трех вариантов ответа: либо набор A предпочтительней набора B ($A > B$), либо набор B предпочтительней набора A ($A < B$), либо наборы A и B имеют одинаковую полезность для потребителя ($A=B$).

4. Аксиома транзитивности.

Согласно этой аксиоме для любых трех потребительских корзин (наборов) A, B и C, если потребитель предпочитает набор A в большей степени, чем набор B, и набор B в большей степени чем набор C, то он однозначно предпочитает потребительских набор A в большей степени, чем набор C. То есть если $A>B$ и $B>C$ значит $A>C$.

То же самое справедливо и для правила: если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$.

5. Аксиома ненасыщенности.

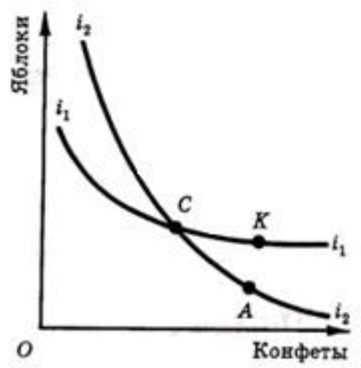
Для любого набора A всегда существует набор B, более предпочтительный для потребителя. Это означает, что у потребителя нет порога насыщения и он всегда предпочитает иметь большее количество товаров меньшему. При этом, если количество хотя бы одного из товаров, входящих в потребительскую корзину возрастет, уровень его удовлетворения увеличится.

Свойства кривых безразличия стандартного вида

Выполнение выше названных ограничений обуславливает следующие свойства стандартных кривых безразличия:

1. Кривая безразличия является непрерывной функцией, а не набором дискретных точек.
2. Для любого заданного уровня полезности может быть проведена своя кривая безразличия, отражающая различные комбинации двух товаров, обеспечивающих потребителю одинаковый уровень удовлетворения.
3. Кривые безразличия описывающие поведение одного потребителя никогда не пересекаются.

Предположим, что две кривые безразличия с разными уровнями полезности имеют одну общую точку C. Отметим на графике еще две произвольные (A и K). Потребительские наборы A и C лежат на одной кривой безразличия и при-носят одинаковое удовлетворение потребителю. Тогда в соответствие с аксиомой транзитивности $A=C$ и $C=K$, т.е. $A=K$, что противоречит положению точек на графике.

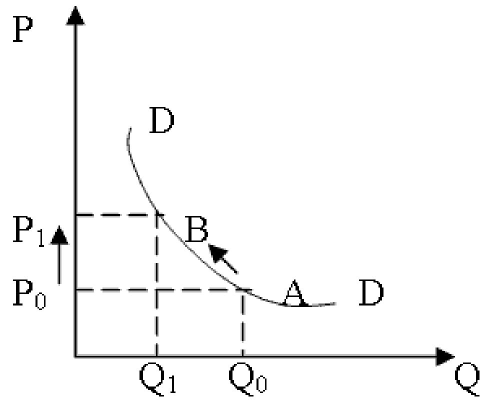


Кривые безразличия не имеют участков возрастания. Если бы участок возрастания существовал, то при движении вдоль него увеличивалось бы количество как первого товара (яблоки), так и второго товара (конфеты), то есть в соответствие с аксиомой ненасыщенности возросла бы степень удовлетворения потребителя, а степень должна быть постоянной на всем протяжении кривой безразличия. Отрицательный наклон кривой безразличия отражает возможность замещения потребителем одного товара другим для поддержания уровня своего удовлетворения постоянным.

Кривые безразличия нестандартного вида

Форма кривых безразличия и их наклон в данной точке определяется исключительно потребительскими предпочтениями. Для отдельных товаров в силу их специфических характеристик кривые безразличия могут иметь вид, отличный от стандартного.

Также графически может быть изображена зависимость объема спроса на отдельные товары и услуги (потребительские блага) от комплекса факторов, влияющих на него.



Определение 47

Кривая спроса показывает зависимость между рыночной ценой и величиной спроса на данный товар. Движение вдоль кривой спроса - это изменение величины спроса при изменении цен, т.е. количества товара, которое готовы приобрести покупатели.

Определение 48

Изменение спроса - это смещение самой кривой спроса, преимущественно оно отражает влияние неценовых факторов (исключением является изменение цен на связанные товары). Например, увеличение доходов потребителей вызывает смещение кривой спроса вправо.

Обратная зависимость динамики спроса от уровня цен определяется тремя причинами:

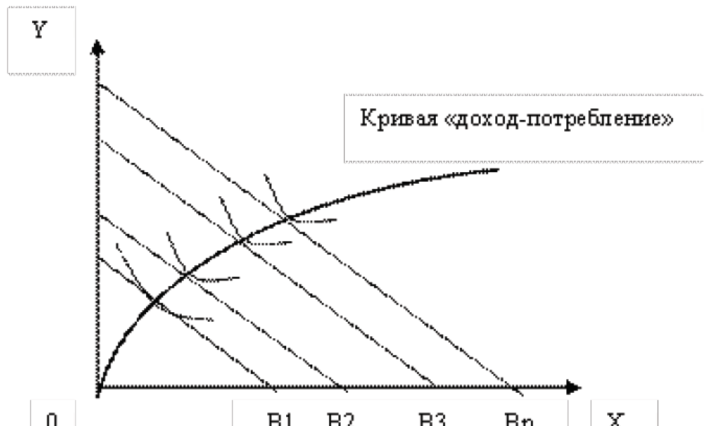
1. снижение цены увеличивает число покупателей;
2. расширяет их покупательную способность;
3. делает выгодным приобретение дополнительных единиц подешевевшего товара.

Кривые "доход-потребление", кривые "цены - потребление"

Увеличение денежного дохода означает смещение бюджетной линии вправо вверх. Аналогичный результат может быть достигнут при снижении цен обоих продуктов, что также означает увеличение реального дохода. При уменьшении денежного дохода или росте цен бюджетная линия смещается влево вниз.

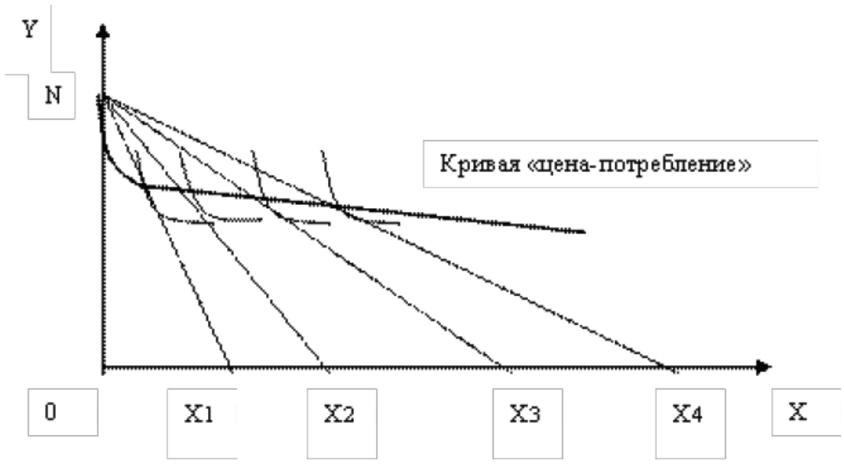
С ростом реального дохода бюджетное ограничение сдвигается последовательно в положение B_1, B_2, B_3, …, B_n. Точки касания кривых безразличия с бюджетными ограничениями показывают последовательные положения равновесия потребителя в соответствии с ростом его дохода.

Эта кривая, названная Дж. Хиксом "доход-потребление", в американской литературе получила название кривой уровня жизни. Если кривая "доход-потребление" - луч, выходящий из начала координат под углом 45° , это значит, что с ростом дохода потребитель в одинаковой пропорции увеличивает потребление и блага *X*, и блага *У*. Если же покупки увеличиваются непропорционально, то изменяется угол наклона кривой.



Предположим в качестве постоянной величины доход потребителя, а в качестве переменной возьмем цену блага X. Допустим, что цена блага X снижается, т.е. $P^1_x > P^2_x > P^3_x > P^4_x$ и т.д.

Например, 1 единица блага X стоила 100 $, а теперь стоит 50 $. Это значит, что за 100$ покупатель может купить 2 единицы блага X. Графически это выглядит как сдвиг бюджетного ограничения из положения NX_1 в положение NX_2 (см. приведенный ниже рисунок). Дальнейшее снижение цены соответственно отражают прямые NX_3, NX_4 и т.д. Соединив точки касания кривых безразличия с бюджетными ограничениями, мы получим кривую "цена-потребление".



3.6. Производственные функции

Производственная функция представляет собой математическую модель, характеризующую зависимость объема выпускаемой продукции от объема трудовых и материальных затрат. Модель может быть построена как для отдельной фирмы и отрасли, так и для всей национальной экономики. Рассмотрим производственную функцию, включающую два фактора производства - затраты капитала K и трудовые затраты L, определяющие объем выпуска Q. Тогда можно записать:

$$Q=f(K,L).$$

Определенного уровня выпуска можно достигнуть с помощью различного сочетания капитальных и трудовых затрат. Кривые, описываемые условиями $j(K,L)=const$, называются изоквантами. Обычно предполагается, что по мере роста значений одной из независимых переменных предельная норма замещения данного фактора производства уменьшается. Поэтому при сохранении постоянного объема производства экономия одного вида затрат, связанная с увеличением затрат другого фактора, постепенно уменьшается. На примере производственной функции Кобба - Дугласа рассмотрим основные выводы, которые можно получить исходя из предложений о том или ином виде производственной функции. Производственная функция Кобба - Дугласа, включающая два фактора производства, имеет вид:

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где A, α, β - параметры модели. Величина A зависит от единиц измерения Q, K и L, а также от эффективности производственного процесса.

При фиксированных значениях K и L более высокое значение имеет та функция Q, которая характеризуется большей величиной параметра A, следовательно, и производственный процесс, описываемый такой функцией, более эффективен. Описываемая производственная функция однозначна и непрерывна (при положительных K и L). Параметры α и β называют коэффициентами эластичности. Они показывают, на какую величину в среднем изменится Q, если α или β увеличить на 1%.

Рассмотрим поведение функции Q при изменении масштабов производства. Предположим, что затраты каждого фактора производства увеличились в c раз. Тогда новое значение функции будет определяться следующим образом:

$$Q_1 = A(CK)^{\alpha}(CL)^{\beta} = CK^{\alpha+\beta}Q.$$

При этом, если $\alpha+\beta=1$, то уровень эффективности не зависит от масштабов производства. Если $\alpha+\beta<1$, то средние издержки, рассчитанные на единицу продукции, растут, а при $\alpha+\beta>1$ - убывают по мере расширения масштабов производства. Следует отметить, что эти свойства не зависят от численных значений K, L производственной функции. Для определения параметров и вида производственной функции необходимо провести дополнительные наблюдения. Как правило, пользуются двумя видами данных - динамическими (временными) рядами и данными одновременных наблюдений (пространственной информацией). Динамические ряды экономических показателей характеризуют поведение одной и той же фирмы во времени, тогда как данные второго вида обычно относятся к одному и тому же моменту, но к различным фирмам. В случаях когда исследователь располагает временным рядом, например годовыми данными, характеризующими деятельность одной и той же фирмы, возникают трудности, с которыми не пришлось бы столкнуться при работе с пространственными данными. Так, относительные цены со временем становятся иными, а следовательно, меняется и оптимальное сочетание затрат отдельных факторов производства. Кроме того, с течением времени изменяется и уровень административного управления. Однако основные проблемы при использовании временных рядов порождаются последствиями технического прогресса, в результате которого меняются нормы затрат производственных факторов, соотношения, в которых они могут замещать друг друга, и параметры эффективности. Вследствие этого с течением времени могут меняться не только параметры, но и формы производственной функции. Поправка на технический прогресс может быть введена с помощью некоторого временного тренда, включаемого в состав производственной функции. Тогда:

$$Q_t = \varphi(K_t, L_t, t).$$

Производственная функция Кобба - Дугласа с учетом технического прогресса имеет вид:

$$Q_t = Ae^{\theta}K_t^{\alpha}L_t^{\beta}.$$

В этом выражении параметр θ, с помощью которого характеризуется технический прогресс, показывает, что объем выпускаемой продукции ежегодно увеличивается на θ процентов независимо от изменений в затратах производственных факторов и, в частности, от размера новых инвестиций. Такая форма технического прогресса, не связанная с какими-либо затратами труда или капитала, называется "нематеризованным техническим прогрессом". Однако подобный подход не вполне реалистичен, так как новые открытия не могут повлиять на функционирование старых машин, а расширение объема производства возможно только посредством новых инвестиций. При другом подходе к учету технического прогресса для каждой "возрастной группы" капитала строят свою производственную функцию. В этом случае функция Кобба - Дугласа будет иметь вид:

$$Q_t(v)=Ae^{\theta v}K_t^{\alpha}(v)L_t^{\beta}(v),$$

где $Q_t(v)$ - объем продукции, произведенной за период t на оборудовании, введенном в строй в период v; $L_t(v)$ - трудовые затраты в период t на обслуживание оборудования, введенного в строй в период v, и $K_t(v)$ - основной капитал, введенный в строй в период v и использованный в период t. Параметр v в такой производственной функции отражает состояние технического прогресса. Затем для периода t строится агрегированная производственная функция, представляющая собой зависимость совокупного объема выпускаемой продукции Q_t от общих затрат труда L_t, и капитала K_t на момент t. При использовании для построения производственной функции пространственной информации, т.е. данных о нескольких фирмах, соответствующих одному и тому же моменту времени, возникают проблемы другого рода. Так как результаты наблюдений относятся к разным фирмам, то при их использовании предполагается, что поведение всех фирм может быть описано с помощью одной и той же функции. Для успешной экономической интерпретации полученной модели желательно, чтобы все эти фирмы принадлежали одной и той же отрасли. Кроме того, считается, что они располагают примерно одинаковыми производственными возможностями и уровнями административного управления. Рассмотренные выше производственные функции носили детерминированный характер и не учитывали влияния случайных возмущений, присущих каждому экономическому явлению. Поэтому в каждое уравнение, параметры которого предстоит оценить, необходимо ввести и случайную переменную е, которая будет отражать воздействие на процесс производства всех тех факторов, которые не вошли в состав производственной функции в явном виде. Таким образом, в общем виде производственную функцию Кобба - Дугласа можно представить как:

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\varepsilon}.$$

Мы получили степенную регрессионную модель, оценки параметров которой A, α и β можно найти методом наименьших квадратов, лишь прибегнув предварительно к логарифмическому преобразованию. Тогда для i-го наблюдения имеем:

$$lnQ_i = lnA + \alpha \cdot lnK_i + \beta \cdot lnL_i + \varepsilon_i,$$

где Q_i, K_i и L_i - соответственно объемы выпуска, капитальных и трудовых затрат для i-го наблюдения ($i = 1, 2, ..., n$), а n - объем выборки, т.е. число наблюдений, используемых для получения оценок $\hat{A}$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ - параметров производственной функции. Относительно ε_i обычно предполагается, что они взаимно независимы между собой и $\varepsilon_i \in N(0,\sigma)$. Исходя из априорных соображений значения α и β должны удовлетворять условиям $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Если предположить, что с изменением масштабов производства уровень эффективности остается постоянным, то, приняв, что $\beta = 1 - \alpha$, получаем:

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}e^{\varepsilon}$$

или

$$Q/L = A(K/L)^{\alpha}e^{\varepsilon}$$

и

$$ln(Q) = lnA + \alpha \cdot ln(K/L) + \varepsilon.$$

3.7. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции

Желание получить максимально возможную прибыль приводит к необходимости выбирать поведение коммерческих фирм. Выбор модели поведения определяется двумя главными обстоятельствами:

- временным фактором (короткий или длительный период);
- видом конкуренции (совершенная или несовершенная).

<u>В короткий период</u> при необходимости увеличения объема производства, фирма может достичь этого, увеличивая лишь переменные факторы (труд, материалы, сырье и т.п.). Постоянные факторы (размеры сооружений, количество машин) изменить фирма не успевает.

<u>В длительный период</u> необходимо изменять поведение фирмы: в ответ на постоянно изменяющийся уровень производства она имеет возможность изменить все факторы производства. Поэтому все они становятся переменными. В этот период фирма стремится минимизировать затраты, комбинируя факторы, замещая труд капиталом, и наоборот.

Поведение фирмы зависит от типа конкуренции на рынке. Рассмотрим рациональное поведение фирмы в условиях <u>совершенной конкуренции</u>. Следует отметить цель фирмы: максимизировать разрыв между ценами и издержками.

На рынке совершенной конкуренции ни одна из фирм не влияет на цену своей продукции. Для увеличения прибыли предприниматель может только изменить объемы производства. Для того, чтобы определить количество продукции, которую фирма должна производить и продавать, чтобы получить максимальную прибыль, необходимо сравнить рыночную цену на продукт и предельные издержки фирмы. Если фирма будет увеличивать на одну, две, три и т.д. единицы свою продукцию, то каждая следующая единица (скажем, каждый новый телевизор) будет увеличивать общий доход и общие издержки. Если предельный доход больше предельных издержек, то каждый произведенный новый телевизор добавляет к общему доходу величину больше той, что он прибавляет к общим издержкам. Значит, разность между предельным доходом *MR* (marginal revenue) и предельными издержками *MC* (marginal cost), т.е. прибыль *P* (profit), увеличивается:

$$P=MR-MC.$$

Обратное происходит, когда предельные издержки выше предельного дохода. Если $P>MC$, то производство необходимо расширять. Если $P<MC$, то производство надо сокращать. Точка равновесия фирмы и максимальной прибыли достигается в случае равенства предельного дохода и предельных издержек. Когда фирма достигла такого соотношения, она не станет увеличивать производство, выпуск будет стабильным, отсюда и название "равновесие фирмы":

$$MR=MC.$$

Рациональное поведение фирмы в условиях несовершенной конкуренции отличается от рационального поведения фирмы в условиях совершенной конкуренции. На монополистическом рынке фирма влияет на цену своей продукции. Если на рынке совершенной конкуренции дополнительный доход от продаж следующих одна за другой единиц продукции неизменен и равен рыночной цене, то на монополистическом рынке увеличение продаж снижает цену, а значит - и дополнительный, т.е. предельный доход. Это возникает потому, что при насыщенном рынке монополист может увеличить производство, только снижая цены.

Существует два способа определения объема производства, при которых фирма получит максимальную прибыль:

1. в рамках первого способа сравнивают валовой доход и валовые издержки при каждом объеме производства;
2. в рамках второго способа определяют оптимальный объем производства, сравнивая предельный доход и предельные издержки.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль в условиях несовершенной конкуренции, объемы производства и реализации следует увеличивать до тех пор, пока предельные издержки, связанные с производством каждой дополнительной единицы продукции, не будут меньше, чем предельный доход, получаемый от реализации этой единицы продукции: если $MS>MC$, производство следует расширять; если $MR<MC$, производство следует сокращать; если $MR=MC$, фирма получает максимальную прибыль.

3.8. Модели общего экономического равновесия

Модель общего экономического равновесия Вальраса

Хозяйство региона состоит из l домашних хозяйств, потребляющих n разновидностей благ, для изготовления которых применяется m различных факторов производства. Предпочтения домашних хозяйств относительно благ и факторов производства заданы их функциями полезности:

$$U_i=U(Q_{i1},Q_{i2},...,Q_{in},F_{i1},F_{i2},...,F_{im});\ i=1,\ 2,...,\ l,$$

где Q_{ij} - количество j-го блага ($j = 1, 2,..., n$), потребляемого i-м индивидом; F_{it} - количество t-го фактора производства (t=1,2,..., m), имеющегося у индивида.

Бюджет потребителя формируется в результате продажи принадлежащих ему факторов производства:

$$M_i = \sum_{t=1}^{m} r_t F_{it} .$$

При заданной функции полезности индивида и его бюджетном ограничении можно вывести индивидуальные функции спроса на блага и предложения факторов производства. В модели общего равновесия эти функции принимают с учетом взаимозависимости всех цен они и равенства вид:

$$Q_{ij}^{D}=f(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ j=1,2,...,n;$$

$$F_{it}^{D}=\varphi(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ t=1,2,...,m.$$

Рыночные функции спроса и предложения образуются в результате сложения индивидуальных функций:

$$Q_j^D = \sum_{i=1}^{l} Q_{ij}^D ,\ j=1,2,...,n;$$

$$F_t^D = \sum_{i=1}^{m} F_{it}^D ,\ t=1,2,...,m.$$

Каждый вид благ производится многими конкурирующими фирмами по технологии, представленной соответствующей производственной функцией. Для упрощения модели предполагается, что каждая фирма производит лишь один вид благ. При заданной технологии и известных ценах благ и факторов производства фирма, максимизирующая прибыль, формирует функцию предложения блага и функцию спроса на факторы. Сумма предложений всех фирм, производящих одно и то же благо, образует отраслевое предложение:

$$Q_j^{S}=\phi(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ j=1,2,...,n;$$

$$F_t^{S}=\psi(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ t=1,2,...,m.$$

На основе выведенных функций строится микроэкономическая модель общего экономического равновесия, состоящая из трех групп уравнений, представляющих:

1) условия равновесия на рынках благ:

$$Q_j^{D}(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m)=Q_j^{S}(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ j=1,2,...,n; \tag{24}$$

2) условия равновесия на рынках факторов производства:

$$F_t^{D}(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m)=F_t(P_1,P_2,...,P_n,r_1,r_2,...,r_m),\ t=1,2,...,m; \tag{25}$$

3) бюджетные ограничения фирм в условиях совершенной конкуренции в виде равенства общей выручки общим затратам:

$$P_j Q_j^S = \sum_{t=1}^{m} r_t F_{jt}^D ,\ j=1,2,...,n. \tag{26}$$

Система уравнений (24)-(26) содержит $(2n+m)$ неизвестных (P_j, r_t, Q_i) и столько же уравнений. Но независимыми являются только $(2n+m-1)$ уравнений. Это является следствием бюджетного ограничения каждого потребителя.

Так, если в экономике используются два фактора производства (L,K) и производятся два блага (A,B), то для каждого экономического субъекта выполняется равенство:

$$P_A Q_A^D + P_B Q_B^D + r_L L^D + r_K K^D = P_A Q_A^S + P_B Q_B^S + r_L L^S + r_K K^S. \qquad (27)$$

Последнее соотношение показывает, что расходы субъекта на покупку благ и факторов производства (левая часть) равны его доходам от продажи благ и предоставления услуг труда и капитала (правая часть). Соотношение (27) может быть также представлено в следующей форме:

$$P_A\left(Q_A^D - Q_A^S\right) + P_B\left(Q_B^D - Q_B^S\right) + r_L\left(L^D - L^S\right) + r_K\left(K^D - K^S\right) = 0. \qquad (28)$$

В скобках представлен результат сделок экономического субъекта на каждом из рынков. Из-за бюджетного ограничения суммарный результат равен нулю. Сложив результаты сделок всех участников на всех рынках, получим следующее равенство:

$$P_A\left(Q_{A,\Sigma}^D - Q_{A,\Sigma}^S\right) + P_B\left(Q_{B,\Sigma}^D - Q_{B,\Sigma}^S\right) + r_L\left(L_\Sigma^D - L_\Sigma^S\right) + r_K\left(K_\Sigma^D - K_\Sigma^S\right) = 0. \qquad (29)$$

Каждое из слагаемых правой части равенства (29) характеризует конъюнктуру на отдельном рынке. Если оно равно нулю, то на рынке достигнуто равновесие; в противном случае на рынке существует дефицит или избыток. Из равенства вытекают два важных свойства региональной экономики:

1. при отсутствии общего экономического равновесия сумма избытков на одних рынках равна сумме дефицитов на других;
2. если некоторая система цен обеспечивает равновесие на любых трех рынках (превращает в нуль разность в любых трех скобках равенства (29)), то равновесие будет и на четвертом рынке (нулю будет равна и разность в четвертой скобке). Этот вывод, верный для любого числа рынков, назван законом Вальраса.

В соответствии с законом Вальраса система уравнений (24)-(26) содержит только $(2n+m-1)$ независимых уравнений. Чтобы она могла иметь решение, необходимо либо добавить еще одно независимое уравнение, либо исключить одно неизвестное. Первый вариант используется в макроэкономике; в качестве дополнительного берется уравнение, определяющее равенство спроса и предложения на денежном рынке. Второй вариант применяется в микроэкономике. Для объяснения микроэкономических явлений достаточно знать систему относительных цен, которая основана на том, что определенное количество одного товара служит масштабом цен при измерении ценности всех других товаров. Цена избранного товара принимается за единицу и в системе уравнений (24)-(26) число неизвестных оказывается равным числу независимых уравнений. При наложении ряда экономически приемлемых ограничений на характер функций и значения аргументов модели типа (24)-(26), можно определить вектор равновесных цен.

Модель Эрроу-Дебрё (*Эрроу-Дебрё-МакКензи*)

Модель Эрроу-Дебрё - статическая экономическая модель общего равновесия в условиях совершенной конкуренции. В модели присутствуют индивиды-потребители, которые могут свободно обмениваться экономическими благами и фирмы-производители экономических благ, доходы которых распределяются между индивидами (каждый индивид владеет определённой долей дохода фирм). В предпосылках модели Кеннет Эрроу и Жерар Дебрё (а также независимо от них МакКензи) доказали существование общего равновесия (равновесного вектора цен и распределения благ).

Производители В экономике действуют n фирм, выпускающих q видов продукции. Технологическое множество j-ой фирмы обозначим Y^j. Технологические множества фирм предполагаются замкнутыми и ограниченными и включают нулевой вектор (допустимость бездеятельности). Сумма Минковского технологических множеств фирм представляет общеэкономическое технологическое множество Y, являющееся выпуклым множеством.

Обозначим вектор цен p. Тогда py^j - прибыль j-ой фирмы при чистом выпуске $y^j \in Y^j$. Фирмы максимизируют свою прибыль. Зависимость решения данной задачи от заданного вектора цен является функцией предложения $\bar{y}(p)$. Соответственно функция совокупного предложения равна $\bar{y}(p) = \sum_j \bar{y}^j$. Функции предложения являются однородными нулевой степени.

Потребители В экономике действуют также m индивидов (потребителей) с начальными запасами благ z^i функциями полезности $u^i(x)$, где x - q-мерный вектор потребления, являющийся подмножеством R^q_+. Предполагается, что функции полезности имеют все частные производные и для любого заданного v множество векторов x, таких, что $u^i(x)>v$, является строго выпуклым.

Доход потребителя M^i состоит из стоимости начальных запасов $M^i_z = pz^i$ и доходов от участия в фирмах: $M^i_y = \sum_j \alpha_{ij} p \bar{y}^j(p)$, где α_{ij} - фиксированная доля участия (в прибыли) i-го потребителя в j-ой фирме.

Каждый потребитель решает задачу максимизации полезности при бюджетном ограничении $px^i \le M^i$. Решения этой задачи в зависимости от данного вектора цен $\bar{x}^i(p)$ представляют собой функции индивидуального спроса потребителей, а их сумма $\bar{x}(p)$ - функция совокупного спроса. Функции спроса являются однородными нулевой степени.

Функция избыточного спроса Функция совокупного избыточного спроса определяется следующим образом:

$$F(p) = \bar{x}(p) - \bar{y}(p) - z,$$

где z - суммарные начальные запасы потребителей.

По закону Вальраса при неотрицательном векторе цен p должно выполняться равенство:

$$pF(p)=0.$$

Рынки В модели предполагается, что существуют все рынки благ от которых зависят функции полезности и технологические множества, и все рынки являются связанными, то есть любое благо можно свободно обменять на любое другое благо. Предполагается, что каждый экономический субъект "достаточно мал", то есть каждый исходит из того, что он не может влиять на цены благ (для каждого из них вектор цен задан экзогенно) - условие совершенной конкуренции на рынках. Каждый субъект обладает полной информацией относительно цен и характеристик благ. Кроме этого предполагается, что отсутствуют транзакционные издержки и экстерналии.

Теорема Эрроу - Дебрё

В экономике Эрроу - Дебрё ситуация называется равновесной, если для равновесного вектора цен p^* индивидуальный спрос x^{*i} и предложение y^{*i} для потребителей и фирм соответственно являются решениями соответствующих задач оптимизации при равновесных ценах, выполнен закон Вальраса при равновесных ценах и в экономике отсутствует дефицит благ, то есть $x^* \leq y^* + z$.

Теорема Эрроу - Дебрё состоит в том, что при описанных предположениях в данной модели всегда существует экономическое (статическое) равновесие (неотрицательный вектор цен, удовлетворяющий условиям равновесия). Доказательство теоремы основано на теореме Какутани о неподвижной точке многозначного (точечно-множественного) отображения.

3.9. Проценты и процентные ставки

Определение 48

Процентная ставка - это определенная сумма, выплачиваемая заемщиком кредитору за пользование кредитом в течение определенного времени, и рассчитанная в процентном выражении к размеру кредита. Понятно, что данная закономерная плата за получение определенного блага, неумолимо увеличивает размер кредита, и, чем больше срок кредита, тем больше размер процентов.

Начисление процентов по кредиту

Стандартную формулу расчета процентов можно представить следующим образом:

$$S_{пр} = (S_{кр}/T_{кр}) \times ((\%\ год/12\ месяцев) \times T_{кр}),$$

где $S_{пр}$ - сумма процента, $S_{кр}$ - тело кредита, $T_{кр}$ - срок кредита (в месяцах), % год - ставка процента (годовых).

Пример 22

Пусть взят кредит в банке на сумму 50 000 рублей ($S_{кр}$) на три года (36 месяцев - $T_{кр}$) под 18 процентов годовых (% год). Зная данные условия и располагая формулой расчета процентов можно рассчитать размер первого платежа, который будет составлять:

$$S_{пр}=(50\ 000/36)\times((0{,}18/12)\times 36)=750 \text{ рублей.}$$

В дальнейшем расчет процентов будет производиться на оставшуюся сумму кредита, методы расчета которой будут представлены ниже.

Необходимо заметить, что рассчитанная таким способом сумма - это все лишь проценты. Как уже говорилось в Примере 22, размер процентов зависит от суммы кредита. Так как в каждом последующем месяце она все меньше и меньше, то закономерно, что и процент, а, соответственно, и размер выплат, должен уменьшаться. Однако существует несколько методик выплаты тела кредита, которые оказывают должное влияние на выявленную закономерность.

Методы расчета платежей непосредственно по телу кредита

1. стандартная схема - ежемесячный возврат равной части кредита, меняется лишь размер выплат по процентам (тело кредита гасится на протяжении всего срока использования займа равными частями, тогда как процент, также выплачиваемый ежемесячно, начисляется на остаточную сумму кредита, соответственно, размер общего платежа постоянно меняется);
2. аннуитетный платеж (происходит ежемесячное погашение кредита и процентов равными частями, то есть сумма обязательного платежа одинаковая на протяжении всего срока пользования займом).

Пример 23 Расчет процентов по кредиту по первой, стандартной схеме (данные для расчетов взяты из Примера 22)

Так как тело кредита выплачивается равными частями в течение всего срока кредитования (36 месяцев), то определить размер ежемесячных платежей по кредиту не сложно.

В данном случае ежемесячный платеж по кредиту равен 1 389 рублей (50 000 / 36 месяцев). При стандартной схеме расчёта выплат по кредиту, проценты за Х-тый месяц начисляться на сумму, которая должна остаться после оплаты в этом же, Х-том, месяце обязательного платежа по телу кредита.

Далее, пользуясь стандартной формулой расчета процента, можно рассчитать размер процента по кредиту, который будет выплачен в первый месяц (причем, не забывайте, проценты рассчитываются уже на 48 611 рублей):

$$S_{пр}=((50\ 000-1389)/36)\times((0{,}18/12)\times 36)=729 \text{ рублей.}$$

Соответственно, полный первый платеж будет составлять 2118 рублей (1 389+ 729). При расчете платежей во второй месяц размер процентной ставки необходимо рассчитывать уже на последующую остаточную стоимость кредита - 47 222 рубля.

$$S_{пр}=((48\ 611-1389)/36)\times((0{,}18/12)\times 36)=708 \text{ рублей.}$$

Полный платеж за второй месяц пользования кредитом будет составлять 2097 рублей. Произведя расчет суммы процентов по кредиту и тела кредита за все 36 месяцев (таблица 1), можно сделать вывод, что через три года, заемщик вернет в банк уже не 50 000 рублей, а 63 124, где 13 124 рубля – это процент по кредиту. Получается, что за использование кредита заемщик заплатил 26,25% от суммы займа. И это не считая различных комиссий за проведение платежных операций и т.д.

Месяц	Остаточная сумма кредита	Платеж в счет погашения тела кредита	Платеж в счет погашения процентов по кредиту	Общий ежемесячный платеж	Месяц	Остаточная сумма кредита	Платеж в счет погашения тела кредита	Платеж счет погашения процент по кред ту
1	50000	1389	729	2118	19	24998	1389	354
2	48611	1389	708	2097	20	23609	1389	333
3	47222	1389	687	2076	21	22220	1389	312
4	45833	1389	667	2056	22	20831	1389	292
5	44444	1389	646	2035	23	19442	1389	271
6	43055	1389	625	2014	24	18053	1389	250
7	41666	1389	604	1993	25	16664	1389	229
8	40277	1389	583	1972	26	15275	1389	208
9	38888	1389	562	1951	27	13886	1389	187
10	37499	1389	542	1931	28	12497	1389	167
11	36110	1389	521	1910	29	11108	1389	146
12	34721	1389	500	1889	30	9719	1389	125
13	33332	1389	479	1868	31	8330	1389	104
14	31943	1389	458	1847	32	6941	1389	83
15	30554	1389	437	1826	33	5552	1389	62
16	29165	1389	417	1806	34	4163	1389	42
17	27776	1389	396	1785	35	2774	1389	21
18	26387	1389	375	1764	36	1385	1385	0
						Сумма	50000	13124

Пример 24 Расчет процентов по кредиту по второй, аннуитетной схеме (данные для расчетов взяты из Примера 22)

Оплата, как тела кредита, так и процентов, при такой схеме погашения кредита, производиться по другой системе. Удобство аннуитетной системы платежей заключается в том, что заемщик выплачивает банку ежемесячно одну и ту же сумму.

Согласно данному способу расчета платежей, клиент ежемесячно будет вносить в банк 1 807 рублей на протяжении всего срока кредитования. Данную сумму мы получили, используя формулу расчета платежей, применяющуюся при аннуитетной схеме погашения кредита:

$$S_{плат}=S_{кр}\times\%\ мес/[1-(1/(1+\%\ мес))^{T_{кр}}],$$

где $S_{плат}$ - размер ежемесячного платежа, $S_{кр}$ - тело кредита, % мес - месячная ставка процента (годовая / 12), $T_{кр}$ – срок кредита (в месяцах). Подставляя значения примера в данную формулу, можно получить следующее:

$$S_{плат}=50\ 000\times(0{,}18/12)\%\ мес/[1-(1/(1+(0{,}18/12)))^{36}]=1808.$$

Данная формула достаточно сложная и при расчете используется много округлений. При таком способе оплаты, через три года заемщик вернет банку 65 074 рубля (1 808 × 36), где 15 074 - это процент за пользование кредитом. Получается, что переплата составит 30,15% от суммы кредита.

Примеры 23 и 24 показывают, что сумма переплат по стандартной схеме расчёта платежей (Пример 23) меньше, чем при аннутитетной (Примеры 24), однако преимуществом последней является то, что размер ежемесячных платежей в первой половине срока кредита будет меньше, чем при стандартных выплатах (но во второй половине больше).

Начисление сложных процентов

Определение 49

Сложные проценты - способ начисления процентов, в рамках которых проценты прибыли в конце каждого периода прибавляются к основной сумме и полученная величина в дальнейшем становится исходной для начисления новых процентов. Соотношение для вычисления сложных процентов:

$$B = A\left(1+\frac{P}{100\%}\right)^n,$$

где B - будущая стоимость, A - текущая стоимость, P - процентная ставка за расчетный период (день, месяц, год, ...), n - количество расчетных периодов.

Вывод формулы вычисления сложных процентов

Для вычисления значения за один период воспользуемся формулой для вычисления числа, которое на заданный процент больше от исходного числа:

$$B_1 = A\left(1+\frac{P}{100\%}\right)^n,$$

для второго периода

$$B_2 = B_1\left(1+\frac{P}{100\%}\right)^n,$$

. . .

для n-го периода

$$B_n = B_{n-1}\left(1+\frac{P}{100\%}\right)^n.$$

<u>Пример 25</u>

Найти прибыль от 30000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

<u>Решение</u> Используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$B = 30000\left(1+\frac{10\%}{100\%}\right)^3 = 30000\cdot(1{,}1)^3 = 39930.$$

Прибыль равна: 39930-30000=9930.

<u>Пример 26</u>

Зная что годовая процентная ставка депозита равна 12%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.

<u>Решение</u> Если положить в банк А рублей, то через год получим:

$$B = A\left(1+\frac{12\%}{100\%}\right).$$

Если проценты начислялись каждый месяц с процентной ставкой x, то по формуле сложных процентов через год (12 месяцев):

$$B = A\left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12}.$$

Приравняв эти величины получим уравнение, решение которого позволит определить месячную процентную ставку:

$$A\left(1+\frac{12\%}{100\%}\right) = A\left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12},\ 1{,}12\left(1+\frac{12\%}{100\%}\right) = \left(1+\frac{x}{100\%}\right)^{12},$$

$$x = \left(\sqrt[12]{1{,}12}-1\right)\cdot 100\% \approx 0.9488792934583046.$$

<u>Ответ:</u> месячная процентная ставка равна 0.9488792934583046%.

<u>Пример 27</u>

В банк на депозит на 3 года положили 30000 рублей под 10% годовых.

а) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом?

б) Какая будет разница через 10 лет?

<u>Решение</u>

а) Для первого случая используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$B = 30000\left(1+\frac{10\%}{100\%}\right)^{3} = 30000\cdot(1{,}1)^{3} = 39930\,.$$

Прибыль в этом случае равна: 39930-30000=9930. Во втором случае годовой доход будет равен:

$$B = 30000\frac{10\%}{100\%} = 3000\,.$$

В рассматриваемом случае прибыль за три года будет равна:

3000×3=9000.

Первый метод будет выгоднее второго на:

9930-9000=930 рублей.

б) Для первого случая используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$B = 30000\left(1+\frac{10\%}{100\%}\right)^{10} = 30000\cdot(1{,}1)^{10} \approx 77812.27\,.$$

Прибыль в этом случае равна: 77812.27-30000=47812.27. Во втором случае годовой доход будет равен:

$$B = 30000\frac{10\%}{100\%} = 3000\,.$$

В рассматриваемом случае прибыль за десять лет будет равна:

3000×10=30000.

Первый метод будет выгоднее второго на: 47812.27-30000=17812.27 рублей.

Ответ: а) 900 рублей; б) 17812.27 рублей.

3.10. Дисконтирование

Расчет показателей для оценки выгодности реального инвестирования базируется на концепции оценки стоимости денег во времени. Данная концепция исходит из предпочтительности денег сегодня, а не завтра. Многие предприниматели придерживаются этой логики, поскольку:

1) существует риск, что деньги могут быть не получены в будущем;
2) если деньги имеются в наличии сегодня, то их можно выгодно инвестировать для получения дохода в будущем.

При оценке инвестиционного проекта часто приходится сравнивать потоки денежных средств (поступления от проекта и расходы на его осуществление) при различных вариантах его реализации. Чтобы такие сравнения имели смысл, денежные потоки сопоставляют в какой-то один период времени. Для сравнения можно выбрать любой момент времени, но для удобства берут нулевой период, т. е. начало осуществления проекта. Будущие потоки денежных средств должны быть приведены (дисконтированы) к настоящему моменту времени. В этих целях используют следующие формулы:

$$БС=НС\times(1+r)^t,\ НС=БС/(1+r)^t,$$

где *БС* - будущая денежная сумма (будущая стоимость); *НС* - настоящая (текущая) стоимость денежной суммы; r - норма дисконта или ставка доходности, доли единицы; t - продолжительность расчетного периода, число лет (месяцев).

Будущая стоимость инвестиций - сумма, в которую превратятся деньги, вложенные сегодня, через определенный промежуток времени при установленной процентной (дисконтной) ставке. Процент может быть простым и сложным. Простой процент начисляют только на основную сумму инвестированных средств. Сложный процент - на основную сумму и проценты предшествующих периодов.

Текущая (настоящая) стоимость денежных средств представляет собой произведение будущей и коэффициента дисконтирования:

$$НС=БС\times КД,$$

где *КД* - коэффициент дисконтирования, доли единицы.

Коэффициент дисконтирования всегда меньше единицы, так как в противном случае сегодня деньги стоили бы меньше, чем завтра.

Таким образом, дисконтированием денежных потоков называют приведение их разновременных (относящихся к разным шагам расчета) значений к их ценности на определенный момент времени. Последний характеризуют моментом приведения и обозначают через t_0. Момент приведения может не совпадать с базовым моментом. Дисконтирование применяют к денежным потокам, выраженным в текущих или дефлированных ценах, и в единой валюте.

Ключевым экономическим нормативом, используемым для дисконтирования, является норма дисконта (r), выраженная в долях единицы, или в процентах в год. Дисконтирование денежного потока на шаге m осуществляют путем умножения его значения ($ДП_m$) на коэффициент дисконтирования (a_m), рассчитываемый по формуле:

$$a_m = \frac{1}{(1+r)^{t_m - t_0}},$$

где t_m - момент окончания шага m; r - норма дисконта, доли единицы в год; t_m-t_0 - период времени, годы.

Норма дисконта (r) является экзогенно задаваемым основным экономическим параметром, используемым при оценке эффективности проекта.

В ряде случаев значение нормы дисконта может выбираться неодинаковым для разных шагов расчета (переменная норма дисконта). Это может быть целесообразно в ситуациях:

1. переменного по времени риска;
2. переменной по времени структуры капитала при оценке коммерческой эффективности проекта.

Различают следующие нормы дисконта: коммерческую, участника проекта, социальную и бюджетную. Коммерческую норму дисконта используют при оценке коммерческой эффективности проекта. Ее определяют с учетом альтернативной (т.е. связанной с другими проектами) эффективности использования капитала.

Норма дисконта участника проекта выражает эффективность участия в данном проекте предприятий или иных участников. Ее выбирают сами участники. При отсутствии четких предпочтений вместо нее можно использовать коммерческую норму дисконта.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача о банке

1. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 250 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 100 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 70% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.
2. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 140 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 60 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 45% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.
3. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 220 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 80 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 55% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.
4. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 180 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 120 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 60% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.
5. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитными составляют 50 млн д.е. Часть этих средств, но не менее 100 млн д.е., должна быть размещена в кредитах. Ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Задача о диете (задача о составлении кормовой смеси)

1. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 10 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,6 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым

требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из инградиентов и удельную стоимость каждого инградиента. Смесь должна содержать: не менее 0.7% кальция (от общего веса смеси) не менее 20% белка (от общего веса смеси) не более 6% клетчатки (от общего веса смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх инградиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица

Инградиент	Содержание питательных веществ (кг/инградиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,41	-	-	0,40
Зерно	0,002	0,11	0,03	0,15
Соевые бобы	0,003	0,003	0,09	0,40

2. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 12 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,65 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из инградиентов и удельную стоимость каждого инградиента. Смесь должна содержать: не менее 0,7% кальция (от общего веса смеси) не менее 23% белка (от общего веса смеси) не более 5% клетчатки (от общего веса смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх инградиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица

Инградиент	Содержание питательных веществ (кг/инградиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,4	-	-	0,37
Зерно	0,0015	0,10	0,025	0,14
Соевые бобы	0,0025	0,0015	0,07	0,45

3. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 15 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,65 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каж-

дом из ингрaдиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать: не менее 0,5% кальция (от общего веса смеси) не менее 21% белка (от общего веса смеси) не более 4,5% клетчатки (от общего веса смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх ингрaдиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица

Ингрaдиент	Содержание питательных веществ (кг/ингрaдиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,32	-	-	0,32
Зерно	0,0015	0,14	0,025	0,21
Соевые бобы	0,003	0,0025	0,05	0,41

4. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 15 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,65 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингрaдиентов и удельную стоимость каждого ингрaдиента. Смесь должна содержать: не менее 0,55% кальция (от общего веса смеси) не менее 25% белка (от общего веса смеси) не более 4% клетчатки (от общего веса смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх ингрaдиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица

Ингрaдиент	Содержание питательных веществ (кг/ингрaдиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,35	-	-	0,38
Зерно	0,001	0,12	0,02	0,2
Соевые бобы	0,002	0,0013	0,06	0,43

5. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 15 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 0,45 кг. Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингрaдиентов. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингрaдиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать: не менее 0,5% кальция (от общего веса смеси) не менее 21% белка (от общего веса смеси) не более 43% клетчатки (от общего веса

смеси). Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица

Ингрaдиент	Содержание питательных веществ (кг/инградиента)			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	(руб./кг)
Известняк	0,37	-	-	0,34
Зерно	0,0012	0,12	0,023	0,18
Соевые бобы	0,0025	0,0018	0,07	0,41

Транспортная задача

1. Груз яблок сосредоточен у 4 поставщиков в объемах 5 т, 3 т, 1 т, 2 т. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах 1,5 т, 3,8 т, 2,4 т, 1,3 т, 2 т. Известны c_{ij}, i=1, 2, 3, 4 и j=1, 2, 3, 4, 5 - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи представлены в следующей таблице

Таблица

	1,5 т	3,8 т	2,4 т	1,3 т	2 т
5 т	1300 руб.	1150 руб.	1400 руб.	1230 руб.	1530 руб.
3 т	850 руб.	1000 руб.	1250 руб.	1030 руб.	1320 руб.
1 т	700 руб.	800 руб.	570 руб.	870 руб.	1150 руб.
2 т	970 руб.	950 руб.	1100 руб.	920 руб.	1220 руб.

2. Груз груш сосредоточен у 4 поставщиков в объемах 3 т, 2 т, 0,7 т, 0,5 т. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах 1,3 т, 2,5 т, 0,4 т, 0,5 т, 0,5 т. Известны c_{ij}, i=1, 2, 3, 4 и j=1, 2, 3, 4, 5 - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи представлены в следующей таблице

	1,3 т	2,5 т	0,4 т	0,5 т	0,5 т
3 т	700 руб.	850 руб.	230 руб.	420 руб.	600 руб.
2 т	630 руб.	770 руб.	170 руб.	330 руб.	640 руб.
0,7 т	450 руб.	520 руб.	240 руб.	270 руб.	510 руб.
0,5 т	400 руб.	500 руб.	120 руб.	280 руб.	420 руб.

3. Груз персиков сосредоточен у 4 поставщиков в объемах 3 т, 4 т, 2 т, 5 т. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах 2 т, 3 т, 5,5 т, 2,5 т, 1 т. Известны c_{ij}, i=1, 2, 3, 4 и j=1, 2, 3, 4, 5 - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены

и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи представлены в следующей таблице Таблица

	2 т	3 т	5,5 т	2,5 т	1 т
3 т	1200 руб.	1400 руб.	2100 руб.	1300 руб.	600 руб.
4 т	1400 руб.	1500 руб.	2200 руб.	1450 руб.	750 руб.
2 т	1000 руб.	1300 руб.	1800 руб.	1100 руб.	470 руб.
5 т	1600 руб.	1800 руб.	2500 руб.	1600 руб.	900 руб.

4. Груз апельсинов сосредоточен у 4 поставщиков в объемах 1 т, 1,5 т, 1,7 т, 0,8 т. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах 1 т, 1,5 т, 2 т, 0,2 т, 0,3 т. Известны c_{ij}, i=1, 2, 3, 4 и j=1, 2, 3, 4, 5 - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи представлены в следующей таблице

Таблица

	1 т	1,5 т	2 т	0,2 т	0,3 т
1 т	820 руб.	850 руб.	1100 руб.	300 руб.	200 руб.
1,5 т	780 руб.	800 руб.	1300 руб.	440 руб.	300 руб.
1,7 т	750 руб.	630 руб.	1400 руб.	500 руб.	320 руб.
0,8 т	905 руб.	780 руб.	850 руб.	360 руб.	270 руб.

5. Груз мандаринов сосредоточен у 4 поставщиков в объемах 1 т, 2 т, 3 т, 4 т. Данный груз необходимо доставить и потребителям в объемах 2 т, 3 т, 4 т, 0,5 т, 0,5 т. Известны c_{ij}, i=1, 2, 3, 4 и j=1, 2, 3, 4, 5 - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи представлены в следующей таблице Таблица

	2 т	3 т	4 т	0,5 т	0,5 т
1 т	570 руб.	600 руб.	650 руб.	300 руб.	300 руб.
2 т	1140 руб.	1200 руб.	1300 руб.	600 руб.	600 руб.
3 т	1710 руб.	1800 руб.	1950 руб.	900 руб.	900 руб.
4 т	2280 руб.	2400 руб.	2600 руб.	1200 руб.	1200 руб.

Задача о наибольшей общей подпоследовательности

1. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены первой последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. В третьей строке задана длина второй последовательности m ($1 \leq m \leq 1000$). В четвертой строке записаны члены второй последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей общей подпоследовательности, или 0, если такой не существует.

Входные данные	Выходные данные
3	2
1, 2, 3	
4	
4, 2, 3, 1	

2. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \le n \le 1000$). Во второй строке записаны члены первой последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. В третьей строке задана длина второй последовательности m ($1 \le m \le 1000$). В четвертой строке записаны члены второй последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей общей подпоследовательности, или 0, если такой не существует.

Входные данные	Выходные данные
7	3
432, 251, 463, 259, 42, 1327, 899	
10	
23, 495, 463, 259, 42, 289, 255, 1002, 3, 47	

3. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \le n \le 1000$). Во второй строке записаны члены первой последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. В третьей строке задана длина второй последовательности m ($1 \le m \le 1000$). В четвертой строке записаны члены второй последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей общей подпоследовательности, или 0, если такой не существует.

Входные данные	Выходные данные
6	4
105, 43, 22, 17, 29, 83	
9	
29, 73, 105, 43, 22, 17, 19, 27, 32	

4. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \le n \le 1000$). Во второй строке записаны члены первой последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. В третьей строке задана длина второй последовательности m ($1 \le m \le 1000$). В четвертой строке записаны члены второй последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей общей подпоследовательности, или 0, если такой не существует.

Входные данные	Выходные данные
5	2
3, 7, 9, 5, 1	
3	
2, 3, 7,	

5. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности

($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены первой последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. В третьей строке задана длина второй последовательности m ($1 \leq m \leq 1000$). В четвертой строке записаны члены второй последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей общей подпоследовательности, или 0, если такой не существует.

Входные данные	Выходные данные
7	3
1023, 757, 2432, 3121, 8923, 629, 7623	
5	
4032, 8923, 629, 7623, 5947	

Задача поиска наибольшей увеличивающейся подпоследовательности

1. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей увеличивающейся подпоследовательности.

Входные данные	Выходные данные
5	3
693, 895, 793, 926, 1225	

2. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей увеличивающейся подпоследовательности.

Входные данные	Выходные данные
7	5
83, 25, 27, 43, 89, 139, 110	

3. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей увеличивающейся подпоследовательности.

Входные данные	Выходные данные
5	3
143, 422, 26, 83, 92	

4. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены последовательности - целые числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей увеличивающейся подпоследовательности.

Входные данные	Выходные данные
7	4
232, 647, 923, 822, 823, 921, 1025	

5. Входные данные: в первой строке задана длина n первой последовательности ($1 \leq n \leq 1000$). Во второй строке записаны члены последовательности - целые

числа, не превосходящие по модулю 10000. Выходные данные: вывести длину наибольшей увеличивающейся подпоследовательности.

Входные данные	Выходные данные
5	2
3, 7, 5, 9, 3	

<u>Задача на нахождение оптимальных чистых стратегий</u>

По платёжной матрице найти оптимальные чистые стратегии, используя принцип строгого доминирования.

Вариант 1

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	3	4	2
B_2	7	5	1	4
B_3	5	1	0	6
B_4	-1	2	4	7

Вариант 2

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	2	7	1
B_2	-2	4	3	0
B_3	2	7	1	4
B_4	8	5	-3	4

Вариант 3

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	4	3	1	1
B_2	2	3	-2	1
B_3	5	2	1	4
B_4	2	0	3	2

Вариант 4

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	0	-3
B_2	-3	5	1	4
B_3	2	2	1	5
B_4	4	2	1	0

Вариант 5

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	5	2	0	1
B_2	4	3	1	1
B_3	0	3	2	-3
B_4	2	3	-3	2

Вариант 6

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	1	3	5
B_2	-1	0	2	2
B_3	-3	-1	2	4
B_4	2	3	0	1

Вариант 7

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	3	2	-2	4
B_2	4	0	0	3
B_3	2	3	1	2
B_4	2	4	1	0

Вариант 8

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	2	3	1	4
B_2	3	2	0	-2
B_3	1	1	-3	2
B_4	2	-1	0	0

<u>Задача на нахождение нижней и верхней цен игры</u>

По платёжной матрице найти нижнюю и верхнюю цену игры. При наличии седловой точки записать векторы оптимальных чистых стратегий P^*, Q^*.

Вариант 1

	R_1	R_2	R_3
S_1	3	2	4
S_2	7	3	0
S_3	2	1	1

Вариант 2

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	1	-3
S_2	4	0	2
S_3	6	4	3

Вариант 3

	R_1	R_2	R_3
S_1	0	2	6
S_2	1	7	0
S_3	2	-4	4

Вариант 4

	R_1	R_2	R_3
S_1	2	1	-3
S_2	4	0	2
S_3	6	4	3

Вариант 5

	R_1	R_2	R_3
S_1	7	3	2
S_2	4	0	1
S_3	6	2	2

Вариант 6

	R_1	R_2	R_3
S_1	5	4	3
S_2	2	1	-4
S_3	3	4	1

<u>Задача на нахождение векторов оптимальных стратегий</u>

По платёжной матрице найти векторы оптимальных стратегий P^*, Q^*и цену игры. Кто из игроков оказывается в выигрыше?

Вариант 1

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	3	1	4
S_2	3	-2	1	0

Вариант 2

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	3	2	5	4
S_2	-3	0	2	1

Вариант 3

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	4	5	3	1
S_2	0	2	4	-3

Вариант 4

	R_1	R_2	R_3	R_4
S_1	5	2	1	3
S_2	4	3	0	2

Вариант 5

	R_1	R_2	R_3	R_4

Вариант 6

	R_1	R_2	R_3	R_4

Вариант 7

	R_1	R_2	R_3	R_4

Вариант 8

	R_1	R_2	R_3	R_4

S_1	4	2	5	6	S_1	6	4	8	-3	S_1	3	2	1	4	S_1	2	7	5	4
S_2	-3	0	-1	4	S_2	2	7	1	4	S_2	5	7	9	-2	S_2	-3	2	1	6

Задача на определение оптимальной стратегии

Планируется проведение операции в заранее неясных условиях, относительно которых можно сделать различные предположения $П_1$, $П_2$, $П_3$. Задана платёжная матрица. Найдём оптимальную стратегию, пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при заданном λ. Платёжные матрицы:

Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3 Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}23 \\ 0{,}27 & 0{,}43 & 0{,}35 \\ 0{,}45 & 0{,}50 & 0{,}65 \\ 0{,}22 & 0{,}25 & 0{,}53 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}23 \\ 0{,}03 & 0{,}37 & 0{,}45 \\ 0{,}22 & 0{,}13 & 0{,}40 \\ 0{,}23 & 0{,}35 & 0{,}82 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}35 & 0{,}24 \\ 0{,}43 & 0{,}42 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}23 & 0{,}14 \\ 0{,}27 & 0{,}28 & 0{,}40 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}30 \end{pmatrix};$$

Вариант 5 Вариант 6 Вариант 7 Вариант 8

$$\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}38 & 0{,}15 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}35 \\ 0{,}55 & 0{,}15 & 0{,}15 \\ 0{,}14 & 0{,}11 & 0{,}55 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}30 \\ 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}23 \\ 0{,}20 & 0{,}19 & 0{,}26 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}11 & 0{,}15 \\ 0{,}27 & 0{,}33 & 0{,}40 \\ 0{,}02 & 0{,}53 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}35 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}20 \\ 0{,}14 & 0{,}11 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 \\ 0{,}10 & 0{,}09 & 0{,}26 \end{pmatrix};$$

λ=0,5; λ=0,4; λ=0,3; λ=0,7; λ=0,35; λ=0,25; λ=0,7; λ=0,8.

Задача на определение целесообразности проведения "идеального" эксперимента

Рассматривается статистическая игра, условия которой заданы таблице. Определим, является ли целесообразным проведение "идеального" эксперимента, стоимость которого в тех же единицах, в которых выражен выигрыш, составляет V.

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	6	8
A_2	5	7	1	9
A_3	8	3	2	1
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,7	0,3	0,1

A_i, $П_j$, V=0,3	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	5	7	4
A_2	3	6	2	1
A_3	4	7	1	2
Вероятности состояний "природы" q_j	0,5	0,2	0,1	0,3

A_i, $П_j$, V=0,2	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	3	1	4
A_2	7	5	4	2
A_3	5	6	4	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,1	0,15	0,2

A_i, $П_j$, V=0,1	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	4	3	2	1
A_2	5	7	4	3
A_3	6	2	2	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,3	0,1	0,4	0,4

A_i, $П_j$, V=0,6	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	2	3	5	6
A_2	3	1	2	4
A_3	5	4	6	3
Вероятности состояний "природы" q_j	0,4	0,3	0,1	0,2

Определение покупательной способности

1. Пусть сегодня получено 200 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,25 раза. Определить индекс цен, индекс покупательной способности денег, реальную покупательная способность.
2. Пусть сегодня получено 100 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,2 раза. Определить индекс цен, индекс покупательной способности денег, реальную покупательная способность.
3. Пусть сегодня получено 150 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,3 раза. Определить индекс цен, индекс покупательной способности денег, реальную покупательная способность.
4. Пусть сегодня получено 170 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,4 раза. Определить индекс цен, индекс покупательной способности денег, реальную покупательная способность.
5. Пусть сегодня получено 100 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,6 раза. Определить индекс цен, индекс покупательной способности денег, реальную покупательная способность.

Определение индекса цен

1. Темп инфляции за период равен 20%. Определить индекс цен J_p.
2. Темп инфляции за период равен 25%. Определить индекс цен J_p.
3. Темп инфляции за период равен 35%. Определить индекс цен J_p.
4. Темп инфляции за период равен 40%. Определить индекс цен J_p.
5. Темп инфляции за период равен 15%. Определить индекс цен J_p.

Определение темпа инфляции

1. Постоянный темп инфляции 7% в месяц. Определить рост цен за год.
2. Постоянный темп инфляции 6% в месяц. Определить рост цен за год.
3. Постоянный темп инфляции 4% в месяц. Определить рост цен за год.
4. Постоянный темп инфляции 10% в месяц. Определить рост цен за год.
5. Постоянный темп инфляции 8% в месяц. Определить рост цен за год.
6. Предполагается, что темп инфляции составит 15% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?
7. Предполагается, что темп инфляции составит 25% в год. Какую ставку слож-

ных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?

8. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 5%? Чему равна инфляционная премия?
9. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 15%? Чему равна инфляционная премия?
10. Предполагается, что темп инфляции составит 30% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 15%? Чему равна инфляционная премия?

Ставка процентов

1. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 11% годовых. Инфляция составляет 17% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=3$.
2. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 10% годовых. Инфляция составляет 8% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=4$.
3. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 15% годовых. Инфляция составляет 12% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=2$.
4. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 14% годовых. Инфляция составляет 11% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=2$.
5. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 12\5% годовых. Инфляция составляет 7% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n=5$.
6. Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 10% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 5% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.
7. Кредит в размере 350 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 15% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 7% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.
8. Кредит в размере 450 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 25% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 10% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.
9. Кредит в размере 550 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 15% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 20% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.
10. Кредит в размере 600 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность опера-

ции должна составлять 15% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 7% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.

Расчет суммы первого платежа по кредиту

1. Пусть взят кредит в банке на сумму 40 000 рублей ($S_{кр}$) на 30 месяцев под 15 процентов годовых (% год). Рассчитать размер первого платежа.
2. Пусть взят кредит в банке на сумму 45 000 рублей ($S_{кр}$) на 48 месяцев под 16 процентов годовых (% год). Рассчитать размер первого платежа.
3. Пусть взят кредит в банке на сумму 50 000 рублей ($S_{кр}$) на 30 месяцев под 10 процентов годовых (% год). Рассчитать размер первого платежа.
4. Пусть взят кредит в банке на сумму 40 000 рублей ($S_{кр}$) на 10 месяцев под 20 процентов годовых (% год). Рассчитать размер первого платежа.
5. Пусть взят кредит в банке на сумму 10 000 рублей ($S_{кр}$) на 15 месяцев под 5 процентов годовых (% год). Рассчитать размер первого платежа.

Расчет процентов по кредиту

Расчитать проценты по кредиту по стандартной и аннуитетной схемам с параметрами для предыдущих примеров.

Расчет прибыли от депозита

1. Найти прибыль от 20000 рублей положенных на депозит на 2 года под 8% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.
2. Найти прибыль от 15000 рублей положенных на депозит на 2,5 года под 7% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.
3. Найти прибыль от 10000 рублей положенных на депозит на 3 года под 6% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.
4. Найти прибыль от 20000 рублей положенных на депозит на 4 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.
5. Найти прибыль от 15000 рублей положенных на депозит на 1,5 года под 6% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

Расчет эквивалентной месячной процентной ставки

1. Зная что годовая процентная ставка депозита равна 10%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.
2. Зная что годовая процентная ставка депозита равна 8%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.
3. Зная что годовая процентная ставка депозита равна 11%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.
4. Зная что годовая процентная ставка депозита равна 16%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.
5. Зная что годовая процентная ставка депозита равна 9%, найти эквивалентную ей месячную процентную ставку.

Расчет прибыли

1. В банк на депозит на 2 года положили 40000 рублей под 10% годовых. (*i*) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? (*ii*) Какая будет разница через 10 лет?
2. В банк на депозит на 4 года положили 50000 рублей под 8% годовых. (*i*) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? (*ii*) Какая будет разница через 10 лет?
3. В банк на депозит на 3 года положили 60000 рублей под 15% годовых. (*i*) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? (*ii*) Какая будет разница через 10 лет?
4. В банк на депозит на 3 года положили 35000 рублей под 7% годовых. (*i*) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? (*ii*) Какая будет разница через 10 лет?
5. В банк на депозит на 2 года положили 45000 рублей под 12% годовых. (*i*) Найти насколько прибыльнее был бы вариант, когда годовой доход добавлять к счету, на который в будут начисляться проценты, чем вариант, когда проценты каждый год забираются клиентом? (*ii*) Какая будет разница через 10 лет?

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Под ред. Кремера Н.Ш. – М., Юрайт, 2012.

2. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справочное пособие для бакалавров / Под ред. Кремера Н.Ш. - М., Юрайт, 2012.

Дополнительная литература

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008.

2. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Математика в экономике. Математические методы и модели. - М., Издательство: Финансы и статистика, 2007.

3. Солодовников А.С. Математика в экономике. Ч. 1,2 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Брайлов. - М.: Финансы и статистика, 2000.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**
Павел Борисович **Болдыревский**

ВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.