МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.С. Костромина
О.А. Кузенков

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЧАСТЬ 1

МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2021

УДК 517
ББК 22.161
К-72

К-72 Костромина О.С., Кузенков О.А. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». ЧАСТЬ 1. МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 24 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Грезина**

Учебно-методическое пособие содержит комплекс теоретических вопросов с ответами по дисциплине «Математический анализ», устанавливающий минимальные требования к знаниям и умениям студента, необходимые для успешного освоения данной дисциплины.

Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплину «Математический анализ», и студентов первого курса ИИТММ дневной формы обучения, изучающих данную дисциплину. Оно может быть использовано при проведении зачетов и экзаменов.

УДК 517
ББК 22.161

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Переход на новые образовательные стандарты высшего образования сопряжен с необходимостью разработки фонда оценочных средств для проверки сформированности предусмотренных стандартом компетенций обучающихся. Такие фонды должны обязательно включать шкалу оценок, позволяющую, в частности, идентифицировать минимальный уровень сформированности компетенции, соответствующий положительной оценке.

Согласно локальным нормативным актам ННГУ, минимальные требования относительно знаний в общем случае формулируются следующим образом: «Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок»; относительно умений – «Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме»; относительно навыков – «Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами». Совершенно очевидно, что для применения такого подхода в рамках каждой дисциплины необходимо конкретизировать, что понимается под грубыми и негрубыми ошибками, что относится к минимально допустимым знаниям и навыкам, основным умениям, типовым и стандартным задачам и т.п.

Первой работой авторов, призванной решить эти вопросы для важной, системообразующей дисциплины в математической подготовке студентов всех направлений института информационных технологий, математики и механики ННГУ – «Математический анализ», – стало учебно-методическое пособие «НЕОБХОДИМЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К УСПЕШНОМУ ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ»[1]. В этом пособии приведены основные теоретические вопросы (сформированные в шесть разделов) и типовые задачи по всему курсу математического анализа, читаемому студентам ИИТММ.

В настоящем пособии даны точные формулировки всех перечисленных в предыдущем пособии основных понятий и утверждений по первым двум разделам: функции одной переменной и дифференциальное исчисление функций одной переменной. Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплину «Математический анализ», и студентов первого курса ИИТММ, изучающих данную дисциплину. Оно может быть использовано как при подготовке к промежуточной аттестации, так и при проведении зачетов и экзаменов.

---

[1] Костромина О.С., Гордеева О.В., Киселева Т.П., Кузенков О.А., Малкин М.И. НЕОБХОДИМЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К УСПЕШНОМУ ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ». МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2019. Фундаментальная библиотека ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 2334.19.06. URL: http://www.lib.unn.ru/students/index.html

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Раздел 1. Функции одной переменной

1.1. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Определения точных нижней и верхней граней.

1.2. Понятие функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

1.3. Определение предела числовой последовательности.

1.4. Арифметические свойства предела числовой последовательности.

1.5. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

1.6. Определения (по Коши и по Гейне) предела функции.

1.7. Арифметические свойства предела функции.

1.8. Замечательные пределы.

1.9. Эквивалентные бесконечно малые функции: определение, таблица эквивалентностей.

1.10. Определения (по Коши и по Гейне) функции, непрерывной в точке. Арифметические свойства непрерывных функций.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.1. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.

2.2. Определение функции, дифференцируемой в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Определение дифференциала.

2.3. Правила вычисления производных и дифференциалов, связанные с арифметическими действиями над функциями.

2.4. Таблица производных основных элементарных функций.

2.5. Производная сложной функции.

2.6. Теорема Лагранжа о среднем (формула конечных приращений).

2.7. Производные высших порядков.

2.8. Правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

2.9. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа.

2.10. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора – Маклорена.

2.11. Определение экстремума функции, необходимое условие экстремума.

II. ОТВЕТЫ НА ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1.1. Множество X называется *ограниченным*, если

$$\exists C = const > 0 : \forall x \in X \ \left(|x| \le C\right).$$

Множество X называется *неограниченным*, если

$$\forall C = const > 0 \ \exists x \in X : |x| > C .$$

Число α является *точной нижней гранью* множества X ($\alpha = \inf X$), если:

1) $\forall x \in X \ (x \ge \alpha)$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : \ x < \alpha + \varepsilon$.

Число β является *точной верхней гранью* множества X ($\beta = \sup X$), если:

1) $\forall x \in X \ (x \le \beta)$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : \ x > \beta - \varepsilon$.

1.2. *Функцией* f, действующей из множества X в множество Y, называется правило, по которому каждому элементу x из X ставится в соответствие единственный элемент y из Y. При этом множество X называется областью определения функции f, а множество Y – множеством значений функции f. Записывают: $y = f(x)$. Область определения функции обозначают также $D(f)$, а множество значений функции – $E(f)$.

Свойства функций

1) Монотонность

Функция $f(x)$ называется возрастающей (неубывающей), если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, короче: $\forall x_1, x_2 \in X$ $\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)\right)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей (невозрастающей), если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$, короче: $\forall x_1, x_2 \in X$ $\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)\right)$.

2) Четность

Функция $f(x)$ называется четной, если $\forall x \in X$ выполнено: a) $-x \in X$, b) $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $f(x)$ называется нечетной, если $\forall x \in X$ выполнено: a) $-x \in X$, b) $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3) Периодичность

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если $\forall x \in X$ выполнено: a) $x + T \in X$, $x - T \in X$; b) $f(x+T) = f(x)$.

4) Ограниченность

Функция $f(x)$ называется ограниченной, если ограничено множество ее значений, то есть: $\exists M > 0 : \forall x \in X \ \left(|f(x)| \le M\right)$.

Свойства и графики основных элементарных функций

К *основным элементарным функциям* относят постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные к тригонометрическим функции: C, x^{α}, a^{x}, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

1) Степенная функция

Функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$, называется *степенной*. Рассмотрим свойства и графики функции $y = x^{\alpha}$ при наиболее часто встречающихся значениях α.

1.1) Степенная функция с натуральным показателем $\alpha = n$: $y = x^{n}, n \in N$. Функция определена на всей числовой прямой, ее множеством значений является вся числовая прямая при $n = 2k+1$ ($n -$ нечетное) и $[0,+\infty)$ при $n = 2k$ ($n -$ четное). Функция является четной при $n = 2k$ и нечетной при $n = 2k+1$. Функция $y = x^{2k}$ убывает при $x \in (-\infty,0)$ и возрастает при $x \in (0,+\infty)$. Функция $y = x^{2k+1}$ возрастает на всей числовой прямой. Графики степенной функции при $n = 1; 2; 3; 4$ показаны на рис. 1.

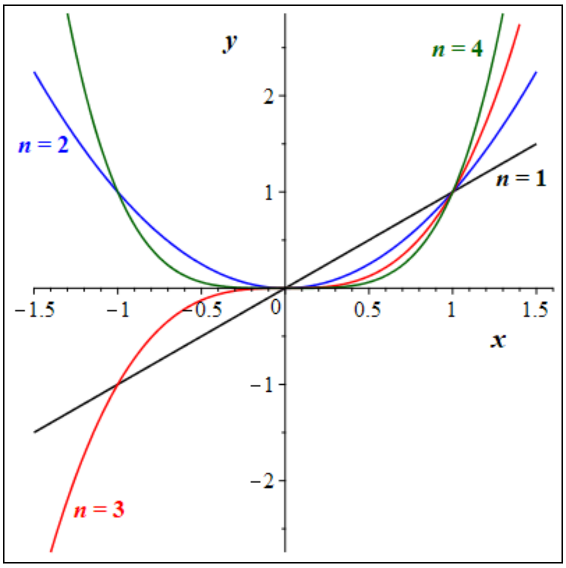
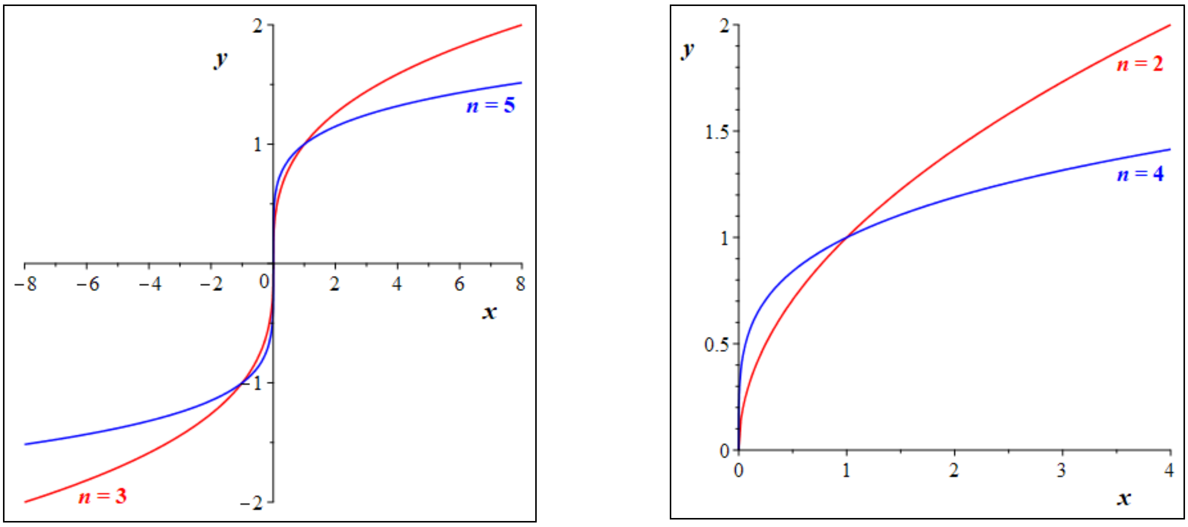


Рис. 1. Графики степенной функции при $\alpha = n = 1; 2; 3; 4$.

1.2) Степенная функция с дробным показателем $\alpha = \dfrac{1}{n}$: $y = \sqrt[n]{x}, n \in N, n \neq 1$.

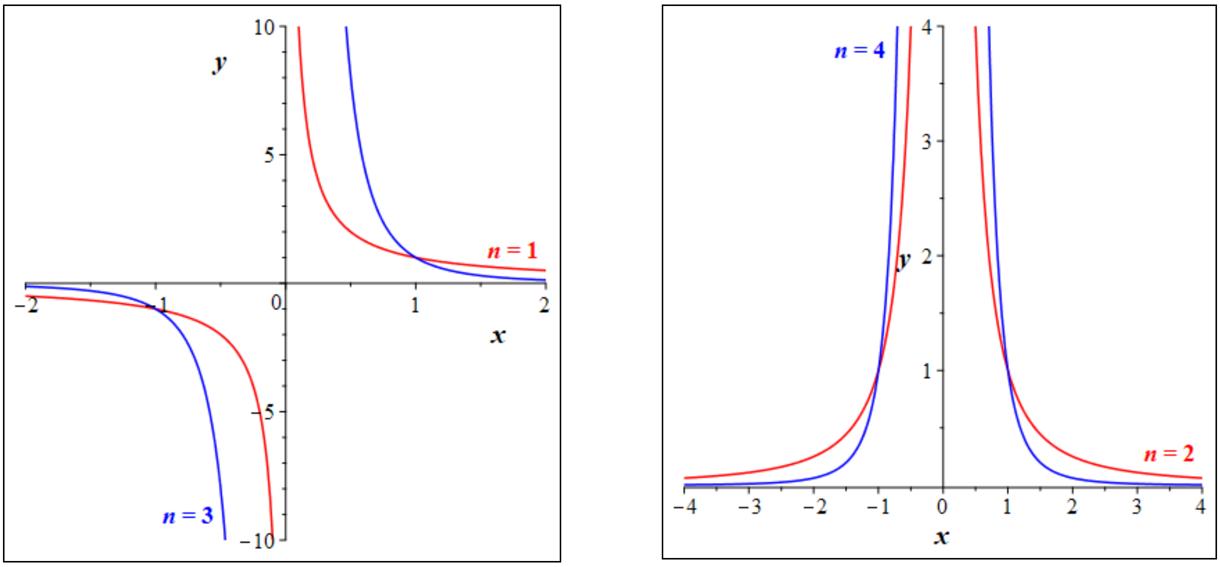
Функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$ определена на всей числовой прямой, ее множеством значений является вся числовая прямая; функция нечетная и возрастает на всей числовой прямой. Функция $y = \sqrt[2k]{x}$ определена на $[0,+\infty)$, ее множество значений – $[0,+\infty)$; функция возрастает на всей области определения. Графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 2; 3; 4; 5$ показаны на рис. 2.



a) $n=3;5$ b) $n=2;4$

Рис. 2. Графики степенной функции $y=\sqrt[n]{x}$.

1.3) Степенная функция с целым отрицательным показателем $\alpha=-n$: $y=\dfrac{1}{x^n}, n\in N$. Функция определена на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, ее множеством значений является $(0,+\infty)$ при $n=2k$ и $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ при $n=2k+1$. Функция четная при $n=2k$ и нечетная при $n=2k+1$. При $n=2k$ функция возрастает при $x\in(-\infty,0)$ и убывает при $x\in(0,+\infty)$; при $n=2k+1$ функция убывает при $x\in(-\infty,0)$ и при $x\in(0,+\infty)$. Графики функции $y=\dfrac{1}{x^n}$ при $n=1;2;3;4$ показаны на рис. 3.



a) $n=1;3$ b) $n=2;4$

Рис. 3. Графики степенной функции при $\alpha=-n$.

2) Показательная функция

Функция вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$, называется *показательной*. Область определения функции есть множество всех действительных чисел, множество значений – множество положительных действительных чисел. При $a > 1$ функция возрастает, при $0 < a < 1$ – убывает. Графики показательной функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$ показаны на рис. 4.

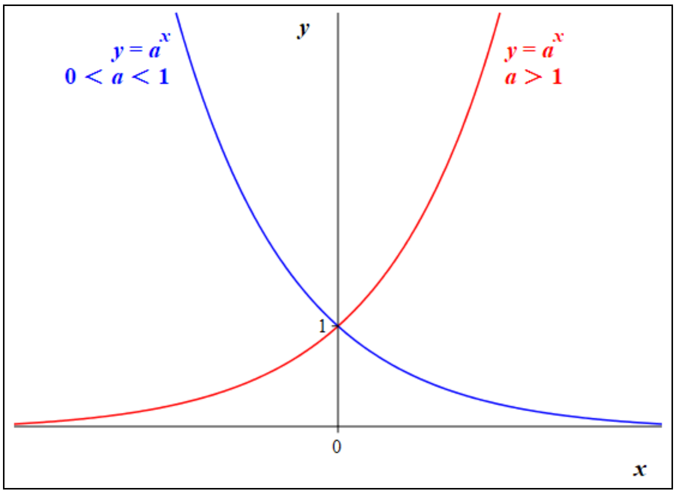


Рис. 4. Графики показательной функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

3) Логарифмическая функция

Функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$, называется *логарифмической*. По определению логарифма, $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$. Логарифмическая функция – функция, обратная к показательной, поэтому графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$. (см. рис. 5). Следовательно, областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел, множеством значений – множество всех действительных чисел. Функция возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

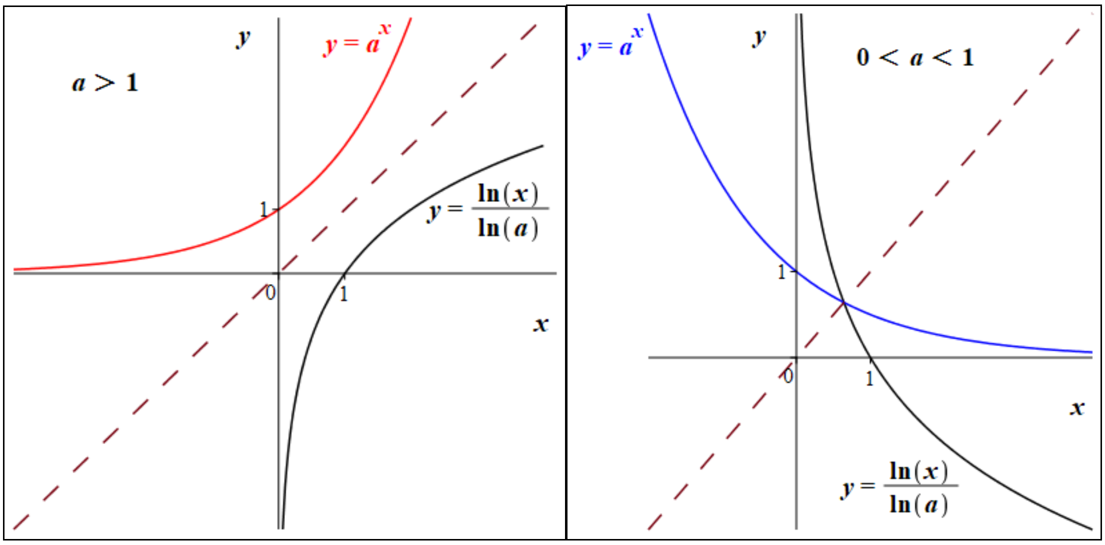


Рис. 5. Графики показательной и логарифмической функций при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

4) Тригонометрические функции

Ордината точки P_α, полученной при повороте около точки $O(0,0)$ на угол α начального радиуса OP_0 ($P_0(1,0)$) называется *синусом* числа α (на рис. 6 $\sin\alpha = AP_\alpha$). Абсцисса точки P_α называется *косинусом* числа α (на рис. 6 $\cos\alpha = OA$).

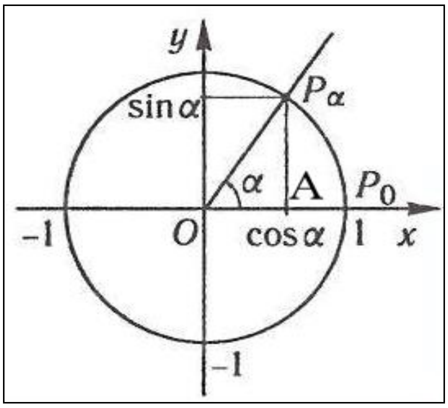


Рис. 6. Определение синуса и косинуса угла.

Свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Свойства	Функция	
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
$D(y)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$E(y)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
четность	нечетная	четная
основной период	2π	2π
нули функции	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
интервалы возрастания	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$	$(2\pi n - \pi,\ 0 + 2\pi n)$ $n \in Z$
интервалы убывания	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$(2\pi n + 0,\ \pi + 2\pi n)$

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ показаны на рис. 7.

Тангенсом числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. *Котангенсом* числа α называется отношение косинуса этого числа к его синусу: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

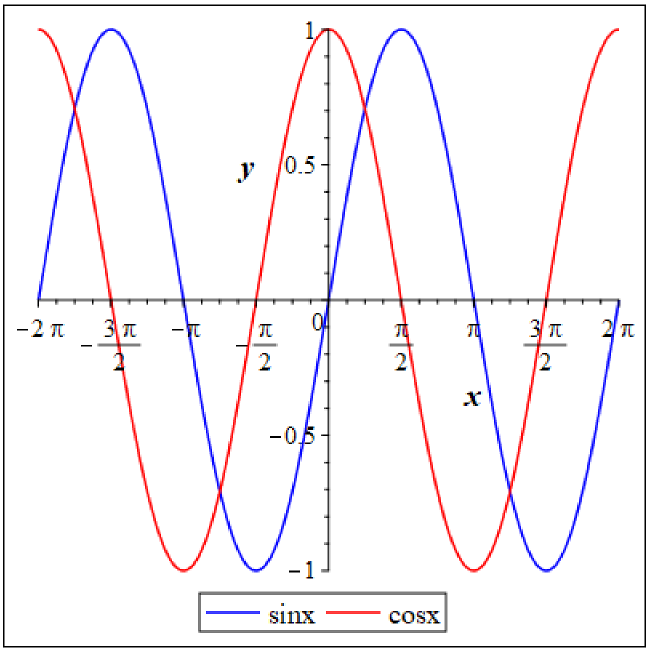
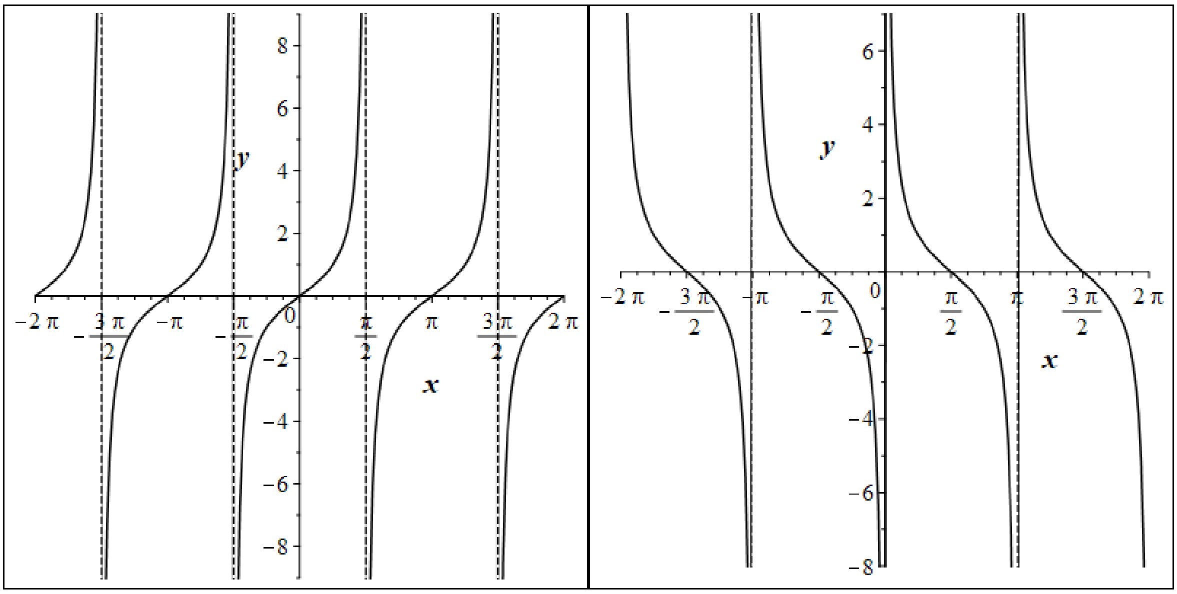


Рис. 7. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Свойства	Функция	
	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\},\ n \in Z$	$R \setminus \{\pi n\},\ n \in Z$
$E(y)$	R	R
четность	нечетная	нечетная
основной период	π	π
нули функции	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
интервалы возрастания	$\left(\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$ $n \in Z$	-
интервалы убывания	-	$n \in Z$ $(\pi n + 0,\ \pi + \pi n)$

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ показаны на рис. 8.



(a) (b)

Рис. 8. Графики функций (a) $y = \operatorname{tg} x$ и (b) $y = \operatorname{ctg} x$.

Таблица формул приведения тригонометрических функций

Наименование функции	Значение аргумента						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

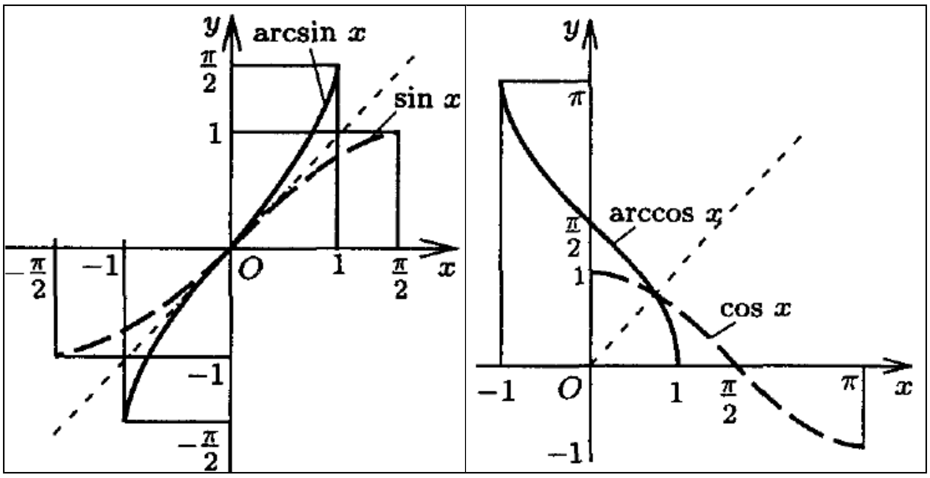
Значения тригонометрических функций некоторых углов

x, рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
x°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0

5) Обратные тригонометрические функции

Функция $y=\arcsin x, -1\le x\le 1$, обратна «сужению» $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и имеет этот отрезок в качестве множества значений (см. рис. 9a). Функция нечетная и возрастающая на всей области определения.

Функция $y=\arccos x, -1\le x\le 1$, обратна «сужению» $y=\cos x$ на отрезке $[0,\pi]$ и имеет этот отрезок в качестве множества значений (см. рис. 9b). Функция убывает на всей области определения.

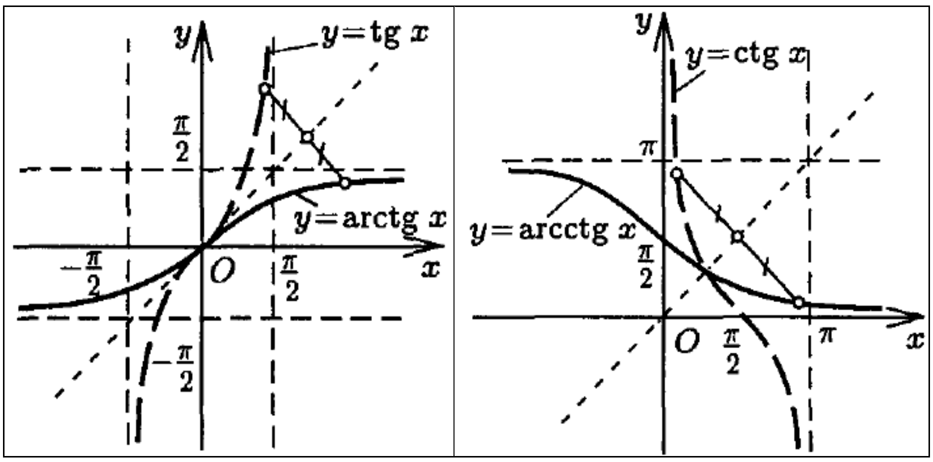


(a) (b)

Рис. 9. Графики функций (a) $y=\arcsin x$ и (b) $y=\arccos x$.

Функция $y=\operatorname{arctg} x, x\in R$, обратна «сужению» $y=\operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и имеет этот интервал в качестве множества значений (см. рис. 10a). Функция нечетная и возрастающая на всей области определения.

Функция $y=\operatorname{arcctg} x, x\in R$, обратна «сужению» $y=\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0,\pi)$ и имеет этот интервал в качестве множества значений (см. рис. 10b). Функция убывает на всей области определения.



(a) (b)

Рис. 10. Графики функций (a) $y=\operatorname{arctg} x$ и (b) $y=\operatorname{arcctg} x$.

Значения обратных тригонометрических функций

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0		
$\operatorname{arctg} a$	0				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

1.3. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если

$\forall\varepsilon > 0\,\exists N_0 = N_0(\varepsilon)\in \mathrm{N}: \forall n > N_0\ \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)$. Здесь $a \in R$.

Если $a = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\,\exists N_0 = N_0(E)\in \mathrm{N}: \forall n > N_0\ \left(x_n > E\right)$.

Если $a = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\,\exists N_0 = N_0(E)\in \mathrm{N}: \forall n > N_0\ \left(x_n < -E\right)$.

Если $a = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\,\exists N_0 = N_0(E)\in \mathrm{N}: \forall n > N_0\ \left(|x_n| > E\right)$.

1.4. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathrm{R}, \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathrm{R}$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, если $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathrm{N}$ и $b \neq 0$.

1.5. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$\forall\varepsilon > 0\,\exists N_0 = N_0(\varepsilon)\in \mathrm{N}: \forall n > N_0, \forall m > N_0\left(|x_n - x_m| < \varepsilon\right)$.

1.6. Пусть $x_0 \in R$ – предельная точка области определения X функции f. Число $A \in R$ называется *пределом функции* f в точке x_0 *по Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in X\ \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Если $x_0 \in R$, $A = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\,\exists\delta = \delta(E) > 0: \forall x \in X\ \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E\right).$$

Если $x_0 \in R$, $A = -\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \delta=\delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-E\right).$$

Если $x_0 \in R$, $A=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \delta=\delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>E\right).$$

Если $x_0=+\infty$, $A\in R$, то

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \Delta=\Delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in X\ \left(x>\Delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right).$$

Если $x_0=+\infty$, $A=+\infty$, то

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x>\Delta \Rightarrow f(x)>E\right).$$

Если $x_0=+\infty$, $A=-\infty$, то

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x>\Delta \Rightarrow f(x)<-E\right).$$

Если $x_0=+\infty$, $A=\infty$, то

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x>\Delta \Rightarrow |f(x)|>E\right).$$

Если $x_0=-\infty$, $A\in R$, то

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \Delta=\Delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in X\ \left(x<-\Delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right).$$

Если $x_0=-\infty$, $A=+\infty$, то

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x<-\Delta \Rightarrow f(x)>E\right).$$

Если $x_0=-\infty$, $A=-\infty$, то

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x<-\Delta \Rightarrow f(x)<-E\right).$$

Если $x_0=-\infty$, $A=\infty$, то

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(x<-\Delta \Rightarrow |f(x)|>E\right).$$

Если $x_0=\infty$, $A\in R$, то

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \Delta=\Delta(\varepsilon)>0 : \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right).$$

Если $x_0=\infty$, $A=+\infty$, то

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta \Rightarrow f(x)>E\right).$$

Если $x_0=\infty$, $A=-\infty$, то

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta \Rightarrow f(x)<-E\right).$$

Если $x_0=\infty$, $A=\infty$, то

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists \Delta=\Delta(E)>0 : \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta \Rightarrow |f(x)|>E\right).$$

Число A называется *пределом функции* f в точке x_0 *по Гейне*, если для каждой последовательности точек $\{x_n\}$ из $X\setminus\{x_0\}$, сходящихся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A, или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\subset X\setminus\{x_0\}\ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right).$$

1.7. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathrm{R}, \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\in\mathrm{R}$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$.

1.8. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

1.9. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$ ($\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$) и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *эквивалентные бесконечно малые функции* при $x\to x_0$, и обозначают $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Таблица эквивалентностей при $x\to x_0$, если $\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$

$\sin\beta(x)\sim\beta(x)$	$\arcsin\beta(x)\sim\beta(x)$	$\ln(1+\beta(x))\sim\beta(x)$	$(1+\beta(x))^\alpha-1\sim\alpha\beta(x)$
$\mathrm{tg}\,\beta(x)\sim\beta(x)$	$\mathrm{arctg}\,\beta(x)\sim\beta(x)$	$a^{\beta(x)}-1\sim\beta(x)\ln a$	$\mathrm{sh}\,\beta(x)\sim\beta(x)$
$1-\cos\beta(x)\sim\dfrac{\beta^2(x)}{2}$	$\log_a(1+\beta(x))\sim\dfrac{\beta(x)}{\ln a}$	$\mathrm{e}^{\beta(x)}-1\sim\beta(x)$	$\mathrm{ch}\,\beta(x)-1\sim\dfrac{\beta^2(x)}{2}$

1.10. Пусть x_0 – предельная точка области определения X функции f. Функцию f называют *непрерывной* в точке x_0 (*по Коши*), если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при всех $x\in X$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, или

$f(x)$ *непрерывна* в точке x_0 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\left(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$.

Функцию f называют *непрерывной* в точке x_0 (*по Гейне*), если для каждой последовательности точек $\{x_n\}$ из X, сходящихся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(x_0)$, или

$f(x)$ *непрерывна* в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset X\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\right)$.

Арифметические свойства непрерывных функций: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

2.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, если такой предел существует, то есть: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной (см. рис. 11)
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.
Из ΔABK: $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{BK}{AK} = \operatorname{tg}\alpha$,
то есть, отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей AB.

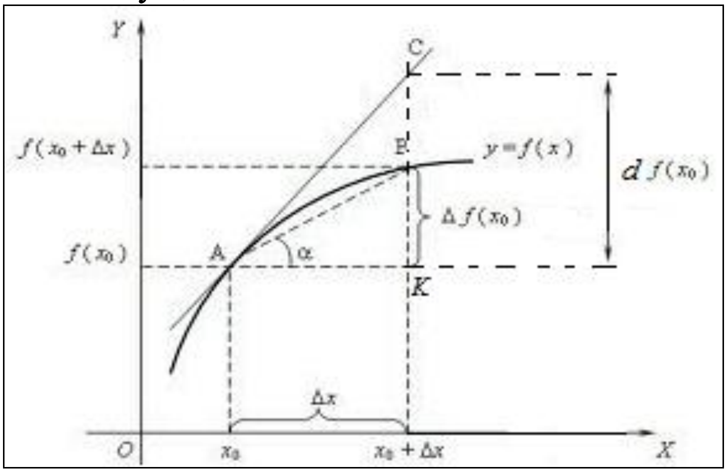


Рис. 11. Геометрическая интерпретация производной функции в точке.

При $\Delta x \to 0$ точка B стремится к точке A, а секущая AB стремится к касательной AC. Поэтому
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$, где $\alpha_0 = \angle CAK$ – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 к оси Ox.

Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке, и положительным направлением оси *Ox*.
Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной
Пусть $S(t)$– путь, пройденный точкой к моменту времени t, тогда
$S(t + \Delta t)$ – путь, пройденный точкой к моменту времени $t + \Delta t$;
$S(t + \Delta t) - S(t)$ – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt;
$\dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ – средняя скорость точки на промежутке времени Δt;

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=v(t)$ – мгновенная скорость в момент времени t.

Физический смысл производной: производная пути по времени в момент времени t равна мгновенной скорости, то есть $S'(t)=v(t)$.

2.2. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение представимо в виде суммы главной линейной части (относительно приращения переменной Δx) и бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x\to 0$: $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $A\in R$.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости: функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда у нее существует конечная производная в этой точке, то есть:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\ A\in R\Leftrightarrow \exists\ f'(x_0)=A\in R.$$

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то линейную часть приращения функции называют *дифференциалом функции* в этой точке и обозначают $df(x_0)$. Таким образом, $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

2.3. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями

Пусть функции f и g имеют производные в точке x, тогда

1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

2) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x),\ c=const$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, если $g(x)\neq 0$.

Правила вычисления дифференциалов, связанные с арифметическими действиями над функциями

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x, тогда в этой точке существуют следующие дифференциалы и для них справедливы равенства

1) $d(f\pm g)=df\pm dg$;

2) $d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg$;

$d(c\cdot f)=c\cdot df,\ c=const$;

3) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2(x)}$, если $g(x)\neq 0$.

2.4. Если x – независимая переменная, то

1) $c'=0$, $c=const$

2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha=const$

3) $(a^x)'=a^x\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in R$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$, $x\in R$

6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x>0$

5) $(\sin x)' = \cos x$, $x\in R$

$(\cos x)' = -\sin x$, $x\in R$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in Z$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq \pi n$, $n\in Z$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in R$

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in R$

7) $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$, $x\in R$

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$, $x\in R$

$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $x\in R$

$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $x\neq 0$

2.5. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, $f(x_0)=y_0$, и функция $z=g(y)$ имеет производную в точке y_0. Тогда сложная функция $z(x)=g(f(x))$ имеет производную в точке x_0, и справедливо равенство $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

2.6. *Теорема Лагранжа.* Пусть функция $f(x)$

1) определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (это равенство называют *формулой конечных приращений* Лагранжа).

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

$f'(c)=\mathrm{tg}\,\alpha$, где α – угол наклона касательной в точке $x=c$,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\mathrm{tg}\,\beta$, где β – угол наклона секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Поэтому геометрически теорема Лагранжа означает, что внутри отрезка $[a,b]$ найдется точка, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (см. рис. 12).

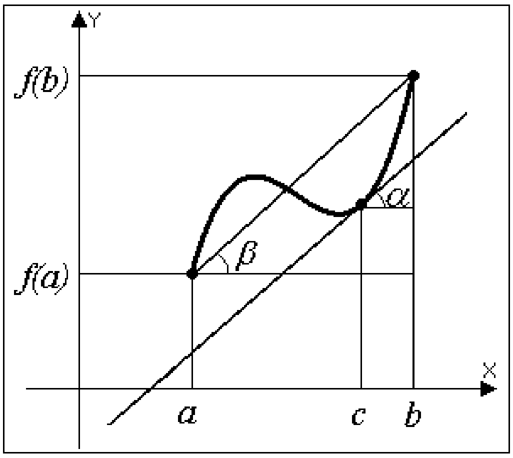


Рис. 12 Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

2.7. *Производной порядка* n функции $f(x)$ называется первая производная производной порядка $n-1$, то есть $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, $n \in N$.

<u>Правила вычисления производных высших порядков</u>

1) $(c \cdot f)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}$, $c = const$;

2) $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;

3) $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$ – формула Лейбница.

2.8. Правила Лопиталя – это правила для вычисления пределов функций (раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$).

Теорема 1. (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа* $\frac{0}{0}$ *в случае конечного промежутка)*

Пусть

1) функции f и g определены на полуинтервале $(a,b]$;

2) функции f и g дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$;

3) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;

4) существует предел $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), и справедливо равенство

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2. (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа* $\frac{0}{0}$ *в случае бесконечного промежутка)*

Пусть

1) функции f и g определены на луче $[a,+\infty)$;

2) функции f и g дифференцируемы на $(a,+\infty)$ и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;

4) существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), и справедливо равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 3. (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа* $\frac{\infty}{\infty}$ *в случае конечного промежутка)*

Пусть

1) функции f и g определены на полуинтервале $(a,b]$;

2) функции f и g дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a,b)$;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 4. (*Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа* $\frac{\infty}{\infty}$ *в случае бесконечного промежутка)*

Пусть

1) функции f и g определены на луче $[a,+\infty)$;

2) функции f и g дифференцируемы на $(a,+\infty)$ и $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), и справедливо равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.9. Если функция $y=f(x)$ определена и n раз дифференцируема в точке x_0, то в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

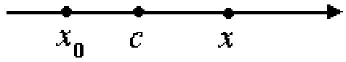
или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ вместе со всеми производными до n-го порядка включительно и имеет производную порядка

$n+1$ на интервале (x_0, x), то для любого x существует точка c, лежащая между x_0 и x ($c = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta \in (0,1)$), такая что справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x).$$



2.10. Пять важных разложений по формуле Тейлора–Маклорена (в окрестности точки $x_0 = 0$):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+ o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad где\ C_\alpha^0 = 1, C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, k \in N$$

2.11. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки x_0, что для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$). Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки x_0, что для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$). Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 (строгий) *экстремум*, если она имеет в этой точке (строгий) локальный максимум/минимум.

Необходимое условие экстремума функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1. – М.: Дрофа, 2003.
2) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. – М.: Физматлит, 2003.
3) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – М.: Физматлит, 2003.
4) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2005.
5) Круглова С.С., Галкина С.Ю., Галкин О.Е. Теория пределов. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учебно-методическое пособие. Нижегородский госуниверситет, 2010. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Н.И. Лобачевского, рег. № 226.10.06. URL: http://www.unn.ru/books/resources.html

Ольга Сергеевна **Костромина**
Олег Анатольевич **Кузенков**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЧАСТЬ 1

МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.