Избранные главы физики

Д.Е. Бурланков

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

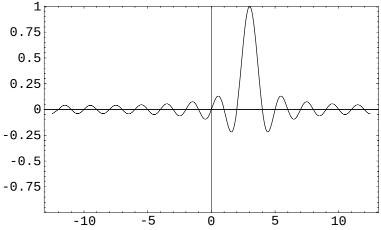
2006

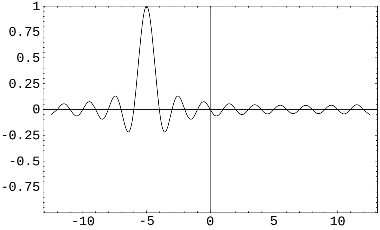
Периодические функции отклика

Функция с двумя параметрами n и $0 \leq k \leq n-1$

$$u_k^{(n)}(x) = \frac{\sin(\pi(x-k))}{n\sin(\pi\frac{x-k}{n})} \tag{1}$$

равна нулю при любом целом x кроме $x = k \mod n$.
При $n = 12$, $k = 3$, $k = -5$



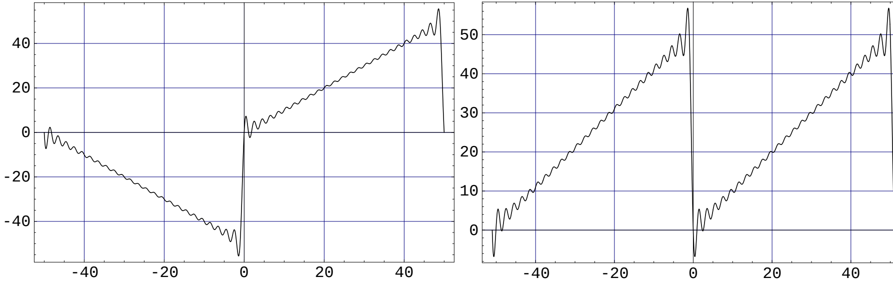


Пример – прямая линия

На интервале от $-n$ до n функция, представляемая рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot u_k^{(n)}(x),$$

("прямая линия") при $n = 50$ и $n = 51$ выглядят по-разному:



Разложение в ряд Фурье

Четные функции

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = 1 + 2\left(\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2mx\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\sin 2(m+1)x}{\sin x} = 2\left(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2m+1)x\right). \qquad (3)$$

раскладываются в конечный ряд косинусов $\cos l\,x$, $l < n$.

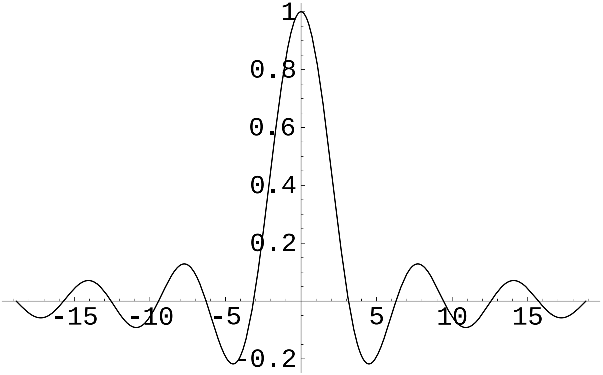
Бесконечная решетка

При бесконечном числе узлов функция $u_k^{(n)}(x)$ переходит в функцию

$$g_k(x) = \frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}, \tag{4}$$

принимающая значение 1 при $x = k$ и 0 при любых других целочисленных значениях x. Используя эту функцию при заданных значениях интерполируемой функции в некоторых целочисленных узлах оси $x = k$: y_k с помощью этой функции можно построить интерполяционную функцию

$$y(x) = \sum_k y_k \frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}.$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-15
-10
-5
5
10
15

Аппроксимация

Вводится *регрессионная функция*

$$\bar{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$$

и вычисляются отклонения экспериментальных точек от регрессионной кривой:

$$\delta_\alpha = y_\alpha - \bar{y}(x_\alpha) = y_\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x_\alpha).$$

Суммарная квадратичная погрешность

$$\Delta^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} (\delta_\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(y_\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x_\alpha)\right)^2,$$

минимизация которой определяет наиболее вероятные значения коэффициентов a_i.

Проведение наилучшей прямой

N точек с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$, для которых нужно построить наилучшее приближение прямой линией:

$$y(x) = a + bx; \quad y_\alpha = a + bx_\alpha + \delta_\alpha, \quad \delta_\alpha = y_\alpha - a - bx_\alpha, \qquad (5)$$

где δ_α – отклонение α-й точки от прямой.
Обозначим

$$< xy >= \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha y_\alpha.$$

В этих обозначениях

$$\Delta^2 = < \delta^2 > = < y^2 > + a^2 N + 2ab < x > + b^2 < x^2 > - 2a < y > - 2b <$$

и наиболее вероятные значения коэффициентов a, b ($\bar{a}$, $\bar{b}$) находятся из условия экстремума:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a} = 2(\bar{a}n + \bar{b} < x > - < y >) = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 2(\bar{a} < x > + \bar{b} < x^2 > - < xy >) = 0.$$

Это линейная система двух линейные уравнений, которую можно представить в матричном виде

$$\begin{vmatrix} N & <x> \\ <x> & <x^2> \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} <y> \\ <yx> \end{vmatrix}$$