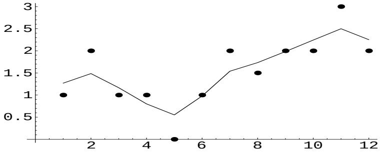
Линейное сглаживание



Координаты точек y_i заменяются координатами сглаживания a_i.

Кроме минимальной ошибки еще минимум изломов с весом k:

$$S = \sum_{i=0}^{n}(a_i - y_i)^2 + k\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1})^2. \tag{1}$$

При линейной зависимости $a_i = A + B\,i$ структура $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 0$.

Минимизация

$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0.$

$$a_0 - y_0 + k\,(a_2 - 2\,a_1 + a_0) = 0;$$

$$a_1 - y_1 + k\,(a_3 - 4a_2 + 5a_1 - 2a_0) = 0;$$

$$a_i - y_i + k\,(a_{i+2} - 4a_{i+1} + 6a_i - 4a_{i-1} + a_{i-2}) = 0;\ \ i = 2..n-2;$$

$$a_{n-1} - y_{n-1} + k\,(a_{n-3} - 4a_{n-2} + 5a_{n-1} - 2a_n) = 0;$$

$$a_n - y_n + k\,(a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) = 0.$$

Выражение всех a_i через a_0 и a_1

Из первого уравнения

$$a_2 = 2a_1 - a_0 + \frac{a_0 - y_0}{k},$$

из второго

$$a_3 = 3a_1 - 2a_0 + \frac{4(y_0 - a_0) + (y_1 - a_1)}{k}.$$

Далее с $i = 2$ до $n - 2$

$$a_{i+2} = 4a_{i+1} - 6a_i + 4a_{i-1} - a_{i-2} + \frac{y_i - a_i}{k}.$$

Все коэффициенты линейно выражаются через a_0 и a_1.

На правом конце

$$D_2 = a_{n-1} - y_{n-1} + k\left(a_{n-3} - 4a_{n-2} + 5a_{n-1} - 2a_n\right) \to 0;$$

$$D_1 = a_n - y_n + k\left(a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n\right) \to 0.$$

Они также линейны по a_0 и a_1:

$$D_1 = A_1 + B_1\, a_0 + C_1\, a_1;$$

$$D_2 = A_2 + B_2\, a_0 + C_2\, a_1;$$

Решение этой системы

$$a_0 = \frac{A_2\, C_1 - A_1\, C_2}{B_1\, C_2 - B_2\, C_1};$$

$$a_1 = \frac{A_1\, B_2 - A_2\, B_1}{B_1\, C_2 - B_2\, C_1}.$$

Полагаем $a_0 = 0,\ a_1 = 0$ и вычисляем D_1^{00} и D_2^{00}. При этом $D_1 = A_1,\ D_2 = A_2$. Положим теперь $a_0 = 1,\ a_1 = 0$ и вычислим D_1^{10} и D_2^{10}, а через них

$$D_1^{10} = A_1 + B_1; \quad B_1 = D_1^{10} - D_1^{00};$$

$$D_2^{10} = A_2 + B_2; \quad B_2 = D_2^{10} - D_2^{00};$$

Положив далее $a_0 = 0,\ a_1 = 1$, вычислим D_1^{01} и D_2^{01} и через них

$$D_1^{01} = A_1 + C_1; \quad C_1 = D_1^{01} - D_1^{00};$$

$$D_2^{01} = A_2 + C_2; \quad C_2 = D_2^{01} - D_2^{00};$$

После чего находим

$$a_0 = \frac{D_1^{00} D_2^{01} - D_2^{00} D_1^{01}}{dd}; \quad a_1 = \frac{D_1^{00} D_2^{10} - D_2^{00} D_1^{10}}{dd},$$

$$dd = D_1^{00}(D_2^{10} - D_2^{01}) - D_2^{00}(D_1^{10} - D_1^{01}) + D_1^{10} D_2^{01} - D_2^{10} D_1^{01}.$$

Теперь с помощью найденных a_0 и a_1 находим все сглаживающие значения a_i.