Разложение в ряд

В диф. уравнении

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f(x,y) \tag{1}$$

y раскладываестя по степеням $x - x_0$:

$$x = x_0 + \xi; \quad y = y_0 + a\,\xi + b\,\xi^2 + c\,\xi^3 + \ldots;$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = a + 2\,b\,\xi + 3\,c\,\xi^2 + \ldots;$$

$$f(x_0 + \xi, y_0 + a\,\xi + \ldots) = f(x_0, y_0) + (f_x + a\,f_y)\,\xi + \ldots;$$

Сравнивая левую и правую части, находим:

$$a = f(x_0, y_0); \quad b = (f_x + f_y\,f(x_0, y_0))/2; \quad \ldots;$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + a\,\xi)\right)\xi.$$

Метод Рунге-Кутты

$$y' = f(x, y).$$

Схема предиктор – корректор.
Метод Рунге-Кутта 2-го порядка
Предиктор:

$$k_1 = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

$$k_2 = f(x_1, y_0 + k_1)\,\Delta x$$

Корректор:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \tag{2}$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Значение функции в следующей по x точке определяется выражением

$$x_1 = x_0 + \Delta x; \quad y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4), \qquad (3)$$

где

$$k_1 = f_0\,\Delta x = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)\,\Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)\,\Delta x,$$

$$k_4 = f(x_1, y_0 + k_3)\,\Delta x.$$

Системы дифференциальных уравнений

n искомых функций $y^i(x)$:

$$(y^i)' = f^i(x, y^1, y^2, \dots); \quad i = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

Четырехточечная схема Рунге - Кутты:

$$y_1^i = y_0^i + \frac{1}{6}(k_1^i + 2\,k_2^i + 2\,k_3^i + k_4^i), \qquad (5)$$

где

$$k_1^i = f_0^i\,\Delta x = f(x_0, y_0^1, y_0^2, \dots)\Delta x$$

$$k_2^i = f^i\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0^1 + \frac{k_1^1}{2}, y_0^2 + \frac{k_1^2}{2}, \dots\right)\Delta x,$$

$$k_3^i = f^i\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0^1 + \frac{k_2^1}{2}, y_0^2 + \frac{k_2^2}{2} \dots\right)\Delta x,$$

$$k_4^i = f^i(x_1, y_0^1 + k_3^1, y_0^2 + k_3^2, \dots)\Delta x.$$

Д.у. высших порядков. Метод Рунге-Кутты

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6}$$

при начальных условиях $y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0$

$$y_{k+1} = y_k + y'_k\,\Delta x + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\,\Delta x$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4), \tag{7}$$

где

$$k_1 = f(x_0, y_0, y'_0)\Delta x,$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + y'_0\frac{\Delta x}{2}, \quad y'_0 + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + y'_0\frac{\Delta x}{2} + \frac{k_1}{4}\Delta x,\ y'_0 + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x,$$

$$k_4 = f\left(x_1, y_0 + y'_0\,\Delta x + \frac{k_2}{2}, y'_0 + k_3\right)\Delta x,$$

Пример

$$f(x,y) = a = \mathrm{const}; \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = a;$$

$$y = y_0 + y_0' x + a \frac{x^2}{2}; \quad y' = y_0' + a x.$$

По методу Рунге-Кутты $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = a \Delta x$.

$$y_1' = y_0' + \frac{1}{6} (6 a \Delta x) = y'(0) + a \Delta x;$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta x + \frac{1}{6} (3 a \Delta x) \Delta x = y_0 + y_0' \Delta x + a \frac{\Delta x^2}{2}.$$

Неявные схемы

В диф. уравнении

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f(x, y) \tag{8}$$

y раскладываестя по степеням $x - x_i$:

$$x = x_i + \xi; \quad y = y_i + a\xi + b\,\xi^2; \quad y' = a + 2\,b\,\xi;$$

В точке x_i, y_i производная $y_i' = a = f_i \equiv f(x_i, y_i)$.

$$x_{i-1} = x_i - h; \quad y_{i-1} = y_i - a\,h + b\,h^2; \quad y_{i-1}' = a - 2\,b\,h;$$

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad y_{i+1} = y_i + a\,h + b\,h^2; \quad y_{i+1}' = a + 2\,b\,h;$$

Коэффициент

$$b = \frac{y_{i+1}' - y_{i-1}'}{4\,h} = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2\,y_i}{2\,h^2}.$$

Отсюда, исключая b:

$$y_{i+1} = 2\,y_i - y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_i + h, y_{i+1}) - f(x_{i-h}, y_{i-1})\right).$$

Интерполяционно-итерационная схема Адамса

$$\nabla^2 f_{k+1} = f_{k-1} - 2\,f_k + f_{k+1};$$

$$2\,f_k + \frac{f_{k+1} - 2\,f_k + f_{k-1}}{3} = \frac{f_{k+1} + 4\,f_k + f_{k-1}}{3} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{\triangle x};$$

В первом приближении принимается

$$f_{k+1} \approx f_k; \quad \nabla f_{k+1} \approx \nabla f_k; \quad \nabla^2 f_{k+1} \approx \nabla^2 f_k \ldots$$

и в этом приближении вычисляем y_{k+1} по формуле Адамса

$$y_{k+1} = y_{k-1} + (2\,f_k + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{k+1})\,\triangle x. \qquad (9)$$

Получив y_{k+1}, уточняем f_{k+1}, ∇f_{k+1}; $\nabla^2 f_{k+1} \ldots$, пока изменения y_{k+1} не станут меньше заданной точности.

Метод Милна предсказание – уточнение

$$y' = f(x, y).$$

Сначала применяют "предсказывающую" формулу

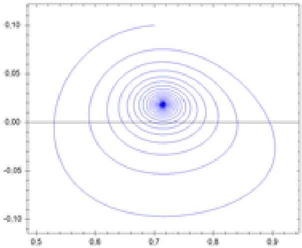
$$y_{k+1} = y_{k-2} + \frac{4}{3}(2\, f_k - f_{k-1} + 2\, f_{k-2})\Delta x \tag{10}$$

для получения первого приближения f_{k+1}, затем вычисляют y_{k+1} по формуле уточнения

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}(f_{k+1} + 3\, f_k + f_{k-1})\Delta x. \tag{11}$$

Затем $k+1$-я точка принимается k-й и т.д. и расчет повторяется: сначала идет предсказание по формуле (10), а затем уточнение по формуле (11).
Для начала вычислений нужно найти y_{-1}, y_1, y_2. Их можно построить методом Эйлера.

Стационарные точки дифференциальных уравнений



$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y).$$

$$f_1(x_0, y_0) = 0; \quad f_2(x_0, y_0) = 0.$$

$(x_0,\ y_0)$ – стационарная точка.