Дискретное преобразование Фурье

Д.Е.Бурланков

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

2006

Даниил Бернулли (1700–1782), Д'Аламбер Жан Лерон (1717–1783)

Даниил Бернулли в 30-е годы XVIII века представил струну как набор n сосредоточенных масс, связанных упругими связями, а затем перешел к пределу $n \to \infty$ и получил решение суперпозиции бесконечного количества мод колебаний струны, имеющих частоты, кратные наинизшей:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi\, k\, x}{l} \cos\frac{2\pi\, k\, t}{T} \tag{1}$$

Работа Бернулли стимулировала появление работы Жана Лерона Д'Аламбера (1717-1783) "О колебаниях струн" (1748), в которой он показал, что колебания струны описываются дифференциальным уравнением в частных производных

$$\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

и серию работ Леонарда Эйлера.

Леонард Эйлер (1707-1783),
Фурье Жан Батист Жозеф (1768 – 1830)

Эйлер построил полное решение

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{l} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right)\right). \quad (2)$$

При $t = 0$ – начальное отклонение струны

$$y(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{l},$$

и Эйлер сомневался, что *любую* функцию $y(x,0)$ можно представить рядом по синусам.
Лишь Фурье в 1822 в работе "Аналитическая теория тепла"("Theorie analytique de la chaleur"), доказал полноту этого ряда.

Первообразные элементы

Пусть n – целое число и $q_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Оно является корнем n-й степени из единицы и первообразным элементом для других корней:

$$q^n = 1; \quad q_n^m = (q_n)^m; \quad (q_n^m)^n = 1.$$

Нас будут интересовать первые n (различных) корней: $0 \leq m \leq n-1$, которые мы будем называть *базисом*. Важнейшим свойством корней из единицы является свойство *периодичности*. При любом целочисленном l

$$q_n^{k+l\cdot n} = q_n^k, \tag{3}$$

что позволяет вести вычисления по модулю n, не заботясь о нахождении индекса k в интервале $0 \leq k \leq n-1$.

Ортогональность

Вспомним теперь формулу геометрической прогрессии:

$$1 + s + s^2 + s^3 \cdots + s^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} s^k = \frac{1 - s^n}{1 - s}. \tag{4}$$

В соответствии с этой формулой для каждой составляющей базиса, кроме нулевой $(m = 0)$ так как $(q_n^m) \neq 1$, а $(q_n^m)^n = 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (q_n^m)^k = 0; \quad \sum_{k=0}^{n-1} (q_n^0)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n. \tag{5}$$

Эти свойства определяют широкую область применения корней целочисленной степени из единицы.