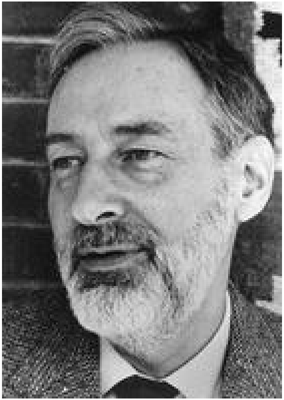
Линейное программирование

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939г., когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича "Математические методы организации и планирования производства". Поскольку методы, изложенные Л.В.Канторовичем, были мало пригодны для ручного счета, а быстродействующих вычислительных машин в то время не существовало, работа Л.В.Канторовича осталась почти не замеченной.
Однако идеи Л.В.Канторовича не встретили понимания в момент их зарождения, были объявлены ересью, и его работа была прервана

Канторович Леонид Витальевич (19.01.1912 - 07.04.1986)
Tjalling C. Koopmans (1910 - 1986)



В 1975 году академик Л.В.Канторович и американец профессор Т.Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за "вклад в разработку теории и оптимального использования ресурсов в экономике".

Концепции Леонида Витальевича вскоре после войны были переоткрыты на западе. Американский экономист Т.Купманс в течение многих лет привлекал внимание математиков к ряду задач, связанных с военной тематикой. Он активно способствовал тому, чтобы был организован математический коллектив для разработки этих проблем.
В итоге было осознано, что надо научиться решать задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами. По предложению Купманса этот раздел математики получил название линейного программирования.

Американский математик А.Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название симплекс метода). Идеи линейного программирования в течение пяти шести лет получили грандиозное распространение в мире, и имена Купманса и Данцига стали повсюду широко известны.

Свое второе рождение линейное программирование получило в начале пятидесятых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее в свою очередь развитие других разделов математического программирования.

Постановка задачи

В пространстве n переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ определена линейная целевая функция

$$z = z_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i. \qquad (1)$$

Цель – найти точку и величину минимума этой функции. Вследствие линейности минимум находится на границе. Границы также задаются $n + r$ линейными соотношениями

$$x^i > 0;\ i = 1 \ldots n; \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^j\, x^i < c^i;\ j = 1, \ldots, r. \qquad (2)$$

В этом случае минимум лежит в одной из вершин границы.

Описание границ

Описание границ следует привести к **каноническому виду**. Первые n условий $x^i > 0,\ 1, \leq i \leq n$ добавляются **приведенными соотношениями**

$$x_{n+s} = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i^j x^i >; \quad x^k > 0,\ k = 1, \dots, n + r.$$

При таком выборе начало координат $(x^i = 0)$ удовлетворяет условиям.

Условие минимума

Начало координат является точкой минимума, если в целевой функции

$$z = z_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i$$

все коэффициенты a_i положительны. Тогда сдвиг внутрь области (увеличение каких-либо x^i) только увеличивает значение функции.

Линейное программирование проводит линейное преобразование координат такое, при котором в начало координат переводится вершина с меньшим значением z – по направлению отрицательного a^i. При этом выражение и для целевой функции и для границ претерпевают линейные преобразования, но остаются линейными.

Движение

1. Выбирается координата x^m для которой коэффициент $a_m < 0$: увеличение этой координаты уменьшает целевую функцию.
2. Ищется ближайшая вдоль направления x^m вершина – пересечение со связью s: для нее коэффициент b^s_m максимален.
3. Переменная x^m выражается из s-й связи через переменную x^{n+s}.
4. Это выражение для x^m подставляется в целевую функцию и остальные $r-1$ уравнения связей, которые затем опять приводятся к каноническому виду.
5. Производится проверка новых коэффициентов a^i на отрицательность. Если все они положительны – минимум найден.

Так как на каждом шаге значение целевой функции в начале координат уменьшается, то за конечное число шагов там оказывается вершина с минимальным значением z.

Замена переменных

Из

$$x^{n+s} = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i^s\, x^i$$

выражается x^m:

$$x^m = \frac{1}{b_m^s}\,(1 - \sum_{k\neq m} b_k^s\, x^k).$$

После подстановки этого значения во все выражения знаменатель b_m^s следует отбросить, что и является приведением этой связи к каноническому виду.
Теперь независимой переменной становится x^{n+s}, а выражение для x^m превращается в уравнение связи.

Преобразование целевой функции

$$z = z_0 + \sum_{k \neq m} a_k\, x^k + \frac{a_m}{b_m^s}\,(1 - x^{n+s} - \sum_{k \neq m} b_k^s\, x^k) =$$

$$\left(z_0 + \frac{a_m}{b_m^s}\right) - \frac{a_m}{b_m^s}\, x^{n+s} + \sum_{k \neq m} \left(a_k - a_m\, \frac{b_k^s}{b_m^s}\right)\, x^k.$$

Таким образом, проводится преобразование

$$z_0 \to z_0 + \frac{a_m}{b_m^s}; \quad a_m \to -\frac{a_m}{b_m^s}; \quad a_{k \neq m} \to a_k - a_m\, \frac{b_k^s}{b_m^s}.$$

Преобразование граничных переменных

$$x^{n+l} = 1 - \sum_{k\neq m} b_k^l\, x^k - \frac{b_m^l}{b_m^s}(1 - x^{n+s} - \sum_{k\neq m} b_k^s\, x^k) =$$

$$\left(1 - \frac{b_m^l}{b_m^s}\right) + \frac{b_m^l}{b_m^s}\, x^{n+s} - \sum_{k\neq m}\left(b_k^l - b_k^s\,\frac{b_m^l}{b_m^s}\right)\, x^k =$$

$$\left(1 - \frac{b_m^l}{b_m^s}\right)\,\left(1 - \frac{b_m^l}{b_m^l - b_m^s}\, x^{n+s} - \sum_{k\neq m} \frac{b_k^l\, b_m^s - b_m^l\, b_k^s}{b_m^s - b_m^l}\, x^k\right).$$

Таким образом, проводится преобразование при $l \neq s$:

$$b_m^l \to \frac{b_m^l}{b_m^l - b_m^s}; \quad b_k^l \to \frac{b_k^l\, b_m^s - b_m^l\, b_k^s}{b_m^s - b_m^l}.$$

При $l = s$ меняется только один коэффициент $b_m^s = 1$.

Движение к минимуму

В начале каждого преобразования нужно выбрать направление движения x^m. Это должно быть направление с отрицательным значением a_m. Если таких направлений несколько, то возможна стратегия выбора наиболее эффективного из них, однако, вполне себя оправдывает движение по первому же отрицательному направлению.
Далее нужно найти с наибольшим значением коэффициента по этой переменной b_m^s, а затем обратиться к процедуре (модулю, функции), преобразующей коэффициенты по вышеприведенным формулам.
Все процедуры объединяются модулем, определяющим отрицательные коэффициенты целевой функции и в случае их отсутствия, формирующим окончательный итог.