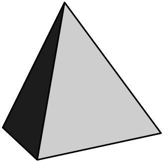
Системы нелинейных уравнений

Проблема решения системы n уравнений с n переменными:

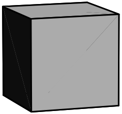
$$\left.\begin{array}{c} f^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \ldots \\ f^3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \end{array}\right\} \tag{1}$$

Процесс решения – это движение в n-мерном пространстве к точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, в которой все заданные функции обращаются в нуль одновременно.

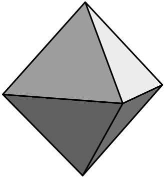
Правильные платоновы фигуры



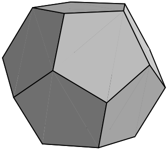
Тетраэдр



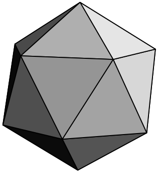
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Эйлерова характеристика

Фигура	m	k	Граней (n_2)	Ребер (n_1)	Вершин (n_0)	ϵ
Тетраэдр	3	3	4	6	4	2
Куб	4	3	6	12	8	2
Октаэдр	3	4	8	12	6	2
Додекаэдр	5	3	12	30	20	2
Икосаэдр	3	5	20	30	12	2

$$\epsilon = n_0 - n_1 + n_2$$

Для всех фигур одинакова.

Многомерные кубы

0-куб – одна точка,($n_0 = 1$);
1-куб – линия, соединяющая 2 вершины,
($n_0 = 2,\ n_1 = 1,\ n_0 - n_1 = 1$);
2-куб (квадрат) – 4 вершины, 4 линии, 1 открытый кусок плоскости ($n_0 - n_1 + n_2 = 4 - 4 + 1 = 1$);
3-куб (обычный) – ($n_0 - n_1 + n_2 - n3 = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$);
....
k-куб: $n_0^k = 2^k$; $n_1^k = 2\, n_1^{k-1} + n_0^{k-1}$;
10-куб: $n_0 = 10^{10} = 1024$.

Симплексы

В многомерном пространстве роль сдвигов по отрезкам играет *симплексный сдвиг*.
Симплекс в n-мерном пространстве определяется координатами $n+1$ точек.

- Нульмерный симплекс – одна точкаю
- Одномерный симплекс – отрезок, строится на двух точках.
- Трехмерный симплекс – треугольник, строится на трех точках.
- Четырехмерный симплекс – тетраэдр, строится на четырех точках.

Центр тяжести $n-1$ - мерного симплекса

$$\vec{r}_c = \frac{1}{n}\sum \vec{r}_i; \quad x_c^i = \frac{1}{n}(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i). \tag{2}$$

Инвертирование n - мерного симплекса в $n+1$ - й вершине:

$$\bar{\vec{r}}_{n+1} = \vec{r}_c - (\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_c) = 2\,\vec{r}_c - r_{n+1}; \quad \bar{x}_{n+1}^i = \frac{2}{n}(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i) - x_{n+1}^i. \tag{3}$$

Например, в одномерном случае инвертирование вершины x_1:

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{1}(x_2) - x_1 = x_2 + (x_2 - x_1)$$

сдвиг за x_2 на шаг $(x_2 - x_1)$.
В двумерном случае инвертирование

$$\bar{\vec{r}}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3.$$

В трехмерном

$$\bar{\vec{r}}_4 = \frac{2}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) - \vec{r}_4.$$

Симплексное сканирование

В n - мерном пространстве выбирается $n+1$ точек с координатами $\vec{r}_j,\ j=0,1,2,\ldots,n$, в которых осуществляется вычисление значение исследуемых n функций $f^i(\vec{r}_j)\equiv f_{ij}$ – всего получается $n\,(n+1)$ величин. Если размеры симплекса достаточно малы, внутри его функции можно полагать линейными и поиск решения можно осуществить линейными методами.

В системе линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= y_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= y_2 \\
& \ldots \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \cdots + a_{nn}\,x_n &= y_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$n\,(n+1)$ коэффициентов $(a_{ij},\ y_i)$ можно выразить через такое же количество значений функций $f_{ij}=f^i(\vec{r}_j)$, при этом система уравнений (4) переходит в систему

$$\sum_{j=0}^{n} g_j \left(\vec{r}_j - \bar{\vec{r}}\right) = 0, \tag{5}$$

где $\bar{\vec{r}}$ – это и есть искомая точка, в которой все функции обращаются в нуль, а g_j – неприведенные весовые коэффициенты, определяемые как детерминанты матриц

$$g_0 = \det \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$g_1 = -\det \begin{bmatrix} f_{10} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{20} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n0} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix};$$

$$g_2 = -\det \begin{bmatrix} f_{11} & f_{10} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{20} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n0} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix};$$

$$g_k = -\det \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1\,k-1} & f_{10} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2\,k-1} & f_{10} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \cdots & f_{n\,k-1} & f_{10} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix},$$

– значения функций в нулевой точке стоят на месте k - го столбца. Знак перед каждым g_k, кроме нулевого, – отрицательный.

Систему уравнений (5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{n} g_j \vec{r}_j = g \bar{\vec{r}}; \quad g = \sum_{j=0}^{n} g_j$$

и решить, разделив на *суммарный вес* g, введя *приведенные веса* или просто *веса*:

$$\bar{\vec{r}} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \vec{r}_j; \quad \lambda_j = \frac{g_j}{g}; \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1. \tag{7}$$

Если размеры симплекса приемлемо малы и точка $\bar{\vec{r}}$ лежит внутри симплекса, то ее можно принять за решение.

> *Точка $\bar{\vec{r}}$ лежит внутри симплекса, если все веса λ_j положительны.*

Трехмерный пример

$$g_1 = -\det \begin{bmatrix} f_{10} & f_{12} & f_{13} \\ f_{20} & f_{22} & f_{23} \\ f_{30} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}; \quad g_2 = -\det \begin{bmatrix} f_{11} & f_{10} & f_{13} \\ f_{21} & f_{20} & f_{23} \\ f_{31} & f_{30} & f_{33} \end{bmatrix};$$

$$g_3 = -\det \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{10} \\ f_{21} & f_{22} & f_{20} \\ f_{31} & f_{32} & f_{30} \end{bmatrix}; \quad g_0 = \det \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix};$$

Метод секущих гиперплоскостей

С помощью соотношения (5) метод секущих для одномерной задачи можно перенести на многомерную.

- Выбирается $n+1$ начальных точек и в них вычисляется $n\,(n+1)$ чисел f_{ij}.
- Вычисляется $n+1$ весовых коэффициентов и по формуле (7) находится новая точка $\vec{r}_{n+1}$.
- Отбрасывается точка, в которой вес λ_j минимальный. (Если все веса λ_i положительны, то искомая точка находится внутри симплекса).
- На оставшихся $n+1$ точках производится поиск нового кандидата на точку решения. Критерий остановки – заданная малость отличия функций от нуля.

Метод квазикасательных

Выбирается одна начальная точка $\vec{r}_0$, в ней вычисляется n значений функций f_{i0}. От нее делаются заранее определенные шаги по координатам $x^i_j = x^i_0 + h^i\,\delta^i_j$ и в этих точках вычисляется еще n^2 значений f_{ij}.
Затем по формулам (5) ищется новая точка. Если она не удовлетворяет критерию завершения, от нее опять делается n шагов, может быть, уменьшенных и процесс повторяется от новой точки.
Отличие от метода "секущих" – симплекс с вершиной в заданной точке прогнозируем заранее, но вычислять приходится больше значений.

“Дихотомия”

Точка $\vec{r}$ лежит внутри симплекса, если все веса λ_j положительны. Если такой симплекс найден, далее нужно искать точку решения внутри него. Выбираются две точки – с наименьшим и наибольшим весами λ и вместо точки с наименьшим весом берется точка, лежащая на середине этой стороны. Ищется новый набор λ_j и т. д., пока не будет достигнута нужная точность.