Разложение по ортогональным функциям

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, u_k(x).$$

Полнота функций

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, |f(x)|^2\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2.$$

Ортогональность функций с весом $g(x)$:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, u_k(x)\, u_m(x)\, dx = N_k\, \delta_{km}.$$

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, u_k(x); \quad c_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, u_k(x)\, dx.$$

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, (f(x) - f_n(x))^2\, dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Пафнутий Львович Чебышёв (1821 — 1894)

Значительная часть теории приближения относится к приближению одних функций другими.
Началом современной теории приближения принято считать работу П.Л. Чебышева 1857 года, посвященную полиномам, наименее уклоняющихся от нуля.

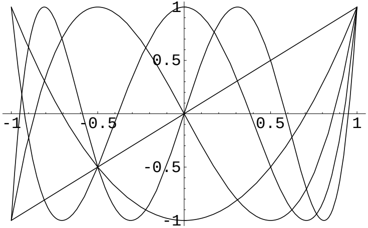
Полиномы Чебышёва

Первые два многочлена:

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x.$$

Рекуррентные формулы

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$



$$T_2 = 2x^2 - 1;$$

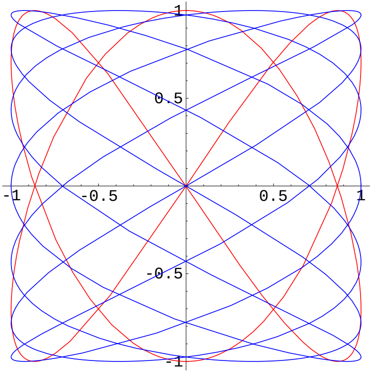
$$T_3 = x\,(4x^2 - 3);$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5 = x\,(16x^4 - 20x^2 + 5).$$

Фигуры Лиссажу (Жюль Антуан Лиссажу, 1822 – 1880)

Полиномы Чебышёва тесно связаны с фигурами Лиссажу.
$x = \sin(n\varphi)$; $\quad y = \sin(m\varphi)$ – фигуры Лиссажу;
$x = \cos\varphi \quad y = \cos n\varphi \equiv T_n$, параметрическая формула для полиномов Чебышева.



Формулы сложения тригонометрических функций:

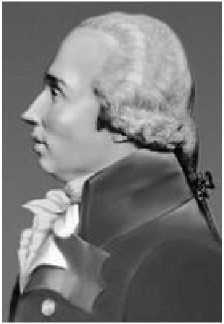
$$\cos((n+1)\varphi) = \cos n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi \sin\varphi;$$

$$\cos((n-1)\varphi) = \cos n\varphi \cos\varphi + \sin n\varphi \sin\varphi;$$

определяют рекуррентные соотношения для полиномов.

Полиномы Лежандра (1752 – 1833)

$$u_{\vartheta\vartheta} + \cot\vartheta\, u_\vartheta + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\sin^2\vartheta} + l\,(l+1)\,u = 0.$$



$$\cos\vartheta = x;$$

$$(1-x^2)\,\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\,\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)\,P_n(x) = 0.$$

Сразу несколько полиномов можно получить из разложения в ряд *производящей функции*:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^n & (|s|<1) \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,s^{-(n+1)} & (|s|>1) \end{cases}$$

Рекуррентные формулы

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}\, P_{n-1}(x). \tag{1}$$

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1}\frac{dP_n(x)}{dx}. \tag{2}$$

Для того, чтобы воспользоваться первой рекуррентной формулой, нужно задать первые два многочлена, для второй – только первый.

$$P_0 = 1; \quad P_1 = x;$$

Ортогональность и нормировка

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases} \tag{3}$$

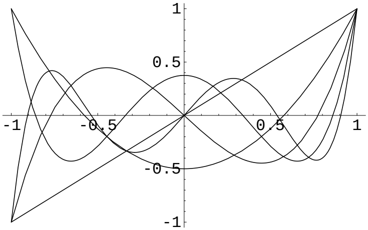
Удовлетворяют линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1 - x^2)\, \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x\, \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)\, P_n(x) = 0. \tag{4}$$

Для вычисления полиномов можно использовать *формулу Родрига* (Бенжамен Оленд Родригес, 1794 – 1851):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n. \tag{5}$$

$$P_0 = 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3\,x^2 - 1);$$



$$P_3 = \frac{x}{2}(5x^2 - 3);$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3);$$

$$P_5 = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15);$$

Полиномы Гегенбауэра (1849 – 1903)

Полиномы Лежандра и Чебышева являются частным случаем *полиномов Гегенбауэра*, имеющих еще один параметр α: C_n^α.
Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(x^2 - 1)\frac{d^2 C_n^\alpha}{dx^2} + (2\alpha + 1)\, z\, \frac{dC_n^\alpha}{dx} - n(n + 2\alpha)\, C_n^\alpha = 0. \qquad (6)$$

Они являются основой сферических функций в пространствах размерности $D = 2(\alpha + 1)$. В частности, полиномы Лежандра ($\alpha = 1/2$) являются основой сферических функций в обычном трехмерном пространстве. Полиномы Чебышёва ($\alpha = 0$) строятся на обычных тригонометрических функциях – "сферических функциях" на плоскости.
Весовая функция в полиномах Гегенбауэра

$$g(x) = (1 - x^2)^{\alpha - 1/2}.$$

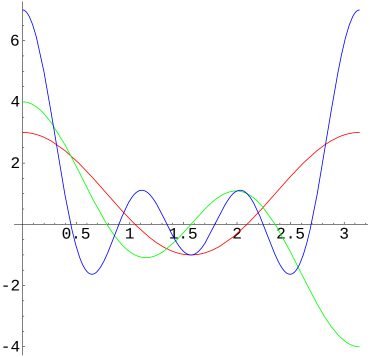
Производящая функция

$$(1 - 2sx + s^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x)\, s^n.$$

Сферические функции на трехмерной сфере

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2).$$

$$\sqrt{\gamma} = \sin^2\chi\,\sin\vartheta.$$



$$\frac{d^2F}{d\chi^2} + 2\operatorname{ctg}\chi\,\frac{dF}{d\chi} + (n^2-1)\,F = 0.$$

$$F_n = C_n^1(\chi);$$

$$C_n^1(\chi) = \frac{\sin(n\chi)}{\sin\chi}$$

Полиномы Якоби (Карл Густав Якоб Якоби, 1804 – 1851)

. 

В свою очередь, полиномы Гегенбауэра являются частным случаем полиномов Якоби. Последние принято приводить к интервалу $[0, 1]$, при приведении к которому весовая функция полиномов Гегенбауэра имеет вид

$$(x(1-x))^{\alpha-1/2} = x^{\alpha-1/2}(1-x)^{\alpha-1/2}.$$

В общем случае полиномов Якоби весовая функция имеет вид

$$g(x) = x^{\alpha-1/2}(1-x)^{\beta-1/2},$$

то есть левая и правая границы интервала входят несимметрично.

Полиномы Эрмита (Шарль Эрмит, 1822 – 1901)

На бесконечной оси. Производящая функция

$$e^{-x^2+2sx} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\frac{s^n}{n!}.$$

Ортогональность и нормировка

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0.$$

Формула Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n (e^{-x^2}).$$

Полиномы Лагерра (Эдмон Никола Лагерр, 1834 – 1886)

Первые два многочлена:

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = -x + 1.$$

Ортогональность и нормировка:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ (n!)^2 & (m = n) \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение:

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n(x)}{dx} + n L_n(x) = 0.$$

Формула Родрига:

$$L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x}).$$

Производящая функция:

$$\frac{1}{1 - s} e^{-x \frac{s}{1-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{s^n}{n!}; \quad (0 \leq x < \infty).$$