Интерполяция и аппроксимация

Д.Е.Бурланков

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

2010

Интерполяция

Интерполяцией называются процедуры нахождения значения функции, заданной в конечном множестве точек в некоторой области, в тех точках внутри области, где значение функции не задано. Нахождение значения функции вне заданной области называется *экстраполяцией*.

Методы интерполяции разделяются на *глобальные* и *локальные*. В глобальных методах ищется единая функция, проходящая через все заданные точки.

В локальных методах вся область разбита на участки и на каждом участке строится своя интерполяционная функция, с той или иной степенью гладкости сшиваемая с такими же функциями соседних участков.

Метод Лагранжа

Через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) однозначно проводится прямая $y(x)$:

$$y(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Это выражение состоит из двух слагаемых, имеющих линейными множителями y_1 и y_2, каждое из которых линейно по x, причем при $x = x_1$ множитель перед y_1 обращается в 1, а перед y_2 в 0; При $x = x_2$, наоборот, множитель перед y_1 обращается в 0, а перед y_2 в 1, что гарантирует прохождение прямой через заданные точки. То, что полученная кривая – прямая, определяется линейностью каждого слагаемого, а, следовательно, и всей формулы, по x.

Лагранж распространил этот метод на случай n точек с координатами (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$. Конструкция формулы:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i g_i(x), \tag{2}$$

где $g_i(x)$ – функции отклика – должны обладать уже известным свойством: обращаться в 1 при $x = x_i$ и в 0 при $x = x_j$; $j \neq i$, поэтому при $x = x_i$ функция принимает значение y_i:

$$g_i(x_k) = \delta_{ik}. \tag{3}$$

Лагранж сконструировал такие функции:

$$g_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)};$$

$$g_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)};$$

$$g_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Каждая функция отклика, а, следовательно, и все выражение является полиномом степени $n-1$ по x. Полином степени $n-1$ имеет n коэффициентов – ровно столько, сколько задаваемое значений функций.

Функция отклика $g_k(x)$ – представляет из себя график, когда во всех точках, кроме k-й заданы нулевые значения, а в k-й задана единица.

Интерполяция полиномами Лагранжа хорошо работает при малых n (n<7). При бо́льших n в промежутках между соседними точками функция резко изменяется.

Интерполяция кубическими сплайнами

Имеется $n+1$ равноотстоящих вдоль оси x точек с координатами
$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нужно провести через них гладкую кривую без разрыва не только первых, но и вторых производных.
Так как по оси x интервалы равные, изменением мрср они могут быть сделаны равными единице – на каждом участке x изменяется от 0 до 1.
Полином определяется четырьмя константами:

$$f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3;$$

$$f_i'(x) = b_i + 2c_i x + 3d_i x^2;$$

$$f_i''(x) = 2c_i + 6d_i x.$$

При этом, подставляя $x = 0$ и $x = 1$ (левая и правая границы участка), получаем:

$$y_{i-1} = a_i; \quad y_i = a_i + b_i + c_i + d_i; \quad ;$$

Из этих выражений коэффициенты $i+1$-го участка выражаются через коэффициенты i-го:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i + 3d_i;$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i.$$

Коэффициент d_{i+1} выражается через y_{i+2}:

$$y_{i+2} = y_{i+1} + b_{i+1} + c_{i+1} + d_{i+1},$$

откуда

$$d_{i+1} = y_{i+2} - y_{i+1} - b_{i+1} - c_{i+1} = y_{i+2} - y_{i+1} - b_i - 3c_i - 6d_i.$$

Таким образом, все коэффициенты $i+1$-го участка выражаются через коэффициенты i-го.

Уравнения на концах

Как и при интерполяции граничные участки (самый левый и самый правый) нужно рассматривать отдельно. Учитывая, что

$$y''\,\delta y'' = (y''\,\delta y' - y'''\,\delta y)' + y''''\,\delta y,$$

проинтегрируем по частям вариацию

$$\delta Q = \int y''\,\delta y''\,dx + \lambda \sum_{k=0}^{n} (y_k - \bar{y}_k)\delta y(x_k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (y''|_k\,\delta y'|_k - y'''|_k\,\delta y|_k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} (y_k - \bar{y}_k)\,\delta y(x_k)) = 0.$$

Для левой границы кривой получаем:

$$c_0 = 0; \quad c_n = 0; \quad d_0 + \lambda\,(a_0 - \bar{y}_0) = 0.$$

Аналогично для правой

$$c_n = 0; \quad \delta = d_n + \lambda(a_n - \bar{y}_n) = 0. \tag{4}$$