

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**С.Н. Стребуляев
М.С. Петрова**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (часть 2)**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
09.03.03 «Прикладная информатика»,
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2018

УДК 519. (075)

ББК В19

С-84

С-84 Стребуляев С.Н., Петрова М.С. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (часть2): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018.–47с.

Рецензент: д. ф.-м. н. Г.В. Осипов

В пособии приведены примеры решения на ЭВМ ряда задач из области динамики систем и теории колебаний: динамика движения экипажа на баллонных колесах и устойчивость системы электропривода. Представлены некоторые приемы решения указанных задач с использованием системы аналитических вычислений Maple. В пособии представлены человеко-машинные подходы математического моделирования, которые сформировались у авторов на основе опыта работы при решении конкретных задач прикладной математики в рамках выполненных научно-технических работ, а также, при проведении лабораторных занятий со студентами дневного и вечернего отделений института ИТММ ННГУ.

Представленный материал служит для закрепления специального лекционного курса по дисциплинам: «Использование системы аналитических вычислений Maple для решения задач прикладной математики», «Использование информационных технологий для решения задач устойчивости», «Математические модели в естествознании», «Решение задач технических вычислений» по направлениям подготовки 010302 «Прикладная математика и информатика» и 020302 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Этот материал способствует более эффективному использованию вычислительной техники при решении конкретных задач динамики систем, теории колебаний и теории автоматического регулирования, при выполнении лабораторных работ, бакалаврских и магистерских проектов, а также, в процессе научных исследований при моделировании динамических систем и процессов.

УДК 519. (075)

ББК В19

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2018

Оглавление

Введение.....	4
1. Исследование динамики движения экипажа на баллонных колесах	5
1.1 Элементы теории качения упругого пневматика	5
1.2 Исследование устойчивости движения велосипеда на абсолютно жестких колесах	9
2. Исследование устойчивости системы автоматического регулирования электроприводом	16
2.1 Постановка задачи и построение математической модели системы электропривода.....	18
2.2 Разработка алгоритма и комплекса программ расчета границ областей устойчивости системы электропривода	24
2.3 Расчёт границ областей устойчивости в плоскости двух параметров	29
2.4 Расчёт границ областей устойчивости в пространстве 3D.....	31
Контрольные задания для выполнения лабораторной работы на ЭВМ..	34
Список использованных источников	36
Приложение 1	37
Приложение 2	42

Введение

В учебно-методическом пособии решаются задачи математического моделирования на ЭВМ динамики движения экипажа на баллонных колесах и исследования устойчивости системы электропривода. Представлены некоторые приемы решения указанных задач с использованием системы аналитических вычислений Maple. Проведенные исследования являются продолжением работ, выполненных ранее авторами [1,2]. В пособии приведены результаты теоретических исследований динамики движения экипажа на баллонных колесах и элементы теории качения упругого пневматика [3]. Полученные результаты составили основу алгоритма и комплекса программ для расчета устойчивости движения велосипеда на абсолютно жестких колесах. Проведено исследование устойчивости [4] системы автоматического регулирования электроприводом. Получены границы областей устойчивости в 2D и 3D пространствах параметров системы.

Проведенные исследования – результат многолетней работы авторов, в основном, в Институте прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского в рамках различных проектов: хоздоговорных и по Госзаказу. В пособии рассматривается весь цикл процесса моделирования - от расчетных схем, математических моделей и до их реализации в виде программных комплексов на ЭВМ. Приведенные расчетные схемы и математические модели взяты из литературы, представленной в списке использованных источников. Программное обеспечение является достаточно универсальным и может составить основу разработок в области математического моделирования конкретных динамических систем на ЭВМ.

Для студентов, магистров и аспирантов предлагается провести вычислительный эксперимент по анализу характеристик исследуемых динамических систем.

1. Исследование динамики движения экипажа на баллонных колесах

В качестве примера в работе рассматривается двухколесный велосипед. При движении велосипед не падает [3], потому что тот, кто на нём едет постоянно поддерживает равновесие. Площадь опоры велосипеда небольшая – это прямая, которая проведена через точки касания колёс велосипеда с землёй. Поэтому велосипед находится в состоянии динамического равновесия.

Существует зависимость скорости и центробежной силы. Чем выше скорость, тем большее значение у центробежной силы и соответственно меньше необходимо отклонять руль для поддержания равновесия.

Задача об устойчивости велосипеда и мотоцикла представляет несомненный интерес. При исследовании устойчивости прямолинейного движения велосипеда или мотоцикла обычно ограничивались рассмотрением модели с абсолютно жёсткими колёсами. В предположении, что вилка переднего колеса вертикальна (нулевой вынос), это рассмотрение приводит к так называемой элементарной теории велосипеда. В более поздних работах уравнения элементарной теории велосипеда были использованы для изучения устойчивости автоматически управляемого велосипеда.

1.1 Элементы теории качения упругого пневматика

Явление увода, о котором пойдёт речь ниже, легко наблюдать [3] на опыте с автомобилем. Пусть рулевое управление автомобиля закреплено так, что передние колёса повёрнуты на некоторый постоянный угол. Нажмём на педаль газа, чтобы придать автомобилю некоторую скорость. При постоянной скорости движения автомобиль опишет некоторый круг. Теперь прибавим газ – автомобиль опишет круг большего радиуса, хотя угол поворота передних колёс остался прежним. Это явление связано с наличием бокового увода баллонных колёс, причём увод автомобиля будет зависеть от некоторого соотношения между боковым уводом для передних и задних колёс. Следует подчеркнуть, что явление бокового увода наблюдается у баллонного колеса, которое катится без проскальзывания, т.е. это явление никак не связано со скольжением пневматика.

Пусть на катящееся баллонное колесо действует боковая сила. Тогда пневматик (рис. 1.1, вид сверху) испытывает упругую деформацию. Пусть он упруго смещается, не меняя ориентации своей средней плоскости. Так как колесо при этом катится, то последовательные площадки возобновляющегося контакта располагаются одна за другой под углом ε к плоскости колеса. Иначе говоря, колесо катится «криво» в направлении, образующем угол ε с его средней плоскостью, которая совпадает с видимым направлением качения. Это явление упругого «скольжения» в поперечном направлении Рокар и называет боковым уводом колеса или квазивиражом. Угол увода ε , обусловленный поперечной деформацией пневматика, оказывается пропорциональным величине этой деформации.

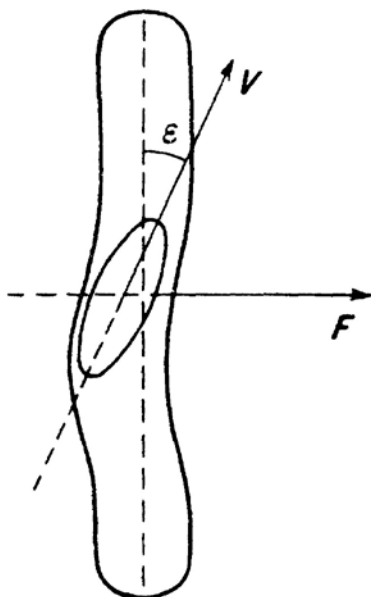


Рис.1.1

Пусть колесо катится с постоянной скоростью V , причём его средняя скорость всегда параллельна плоскости yOz . Если через F обозначить поперечную силу, действующую в направлении оси Ox , через x – абсциссу средней плоскости колеса, через x_1 – абсциссу центра площадки контакта пневматика с дорогой, тогда уравнение увода запишется в виде

$$\dot{x}_1 = \kappa V(x - x_1), \quad (1.1)$$

где κ – коэффициент увода. Соотношение (1.1) представляет собой уравнение кинематической связи, которая накладывается на баллонное колесо при его качении без проскальзывания.

Параметр $\xi = x_1 - x$ характеризует величину поперечной деформации пневматика. Таким образом, учёт бокового увода баллонного колеса приводит нас к задаче изучения деформации упругого пневматика. Упрощая задачу, можно схематизировать явление увода так, чтобы оно не выходило за рамки механики, имеющей дело с качением без проскальзывания абсолютно твёрдых тел. Схематизация явления, которое предлагает Рока, заключается в том, что мы рассматриваем абсолютно жёсткое (недеформируемое) колесо и придаём ему свойство бокового увода. При такой схематизации кинематическое уравнение (1.1) пропадает, но в уравнениях движения появляется член, связанный с наличием поперечной силы F , которая пропорциональна углу увода ε , т.е.

$$F = -a\varepsilon = -\frac{a}{v}\dot{x}, \quad (1.2)$$

где коэффициент a называется коэффициентом сопротивления уводу. Гипотеза увода, часто используемая в прикладных задачах, и состоит в том, что при составлении уравнений движения экипажа на баллонных колёсах используется соотношение (1.2).

Теория качения пневматика, к изложению которой мы переходим, является более полной по сравнению с теорией Рокара, потому что наряду с поперечной деформацией пневматика она учитывает его деформацию скручивания.

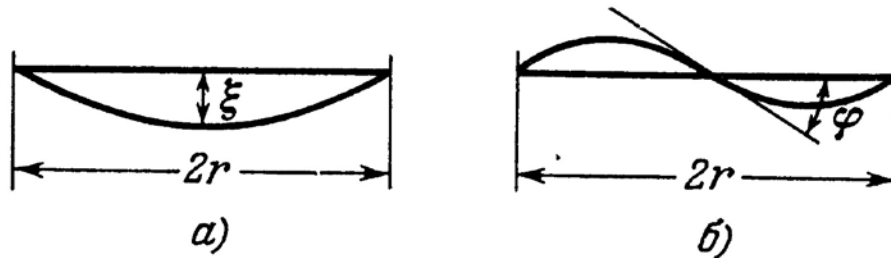


Рис. 1.2

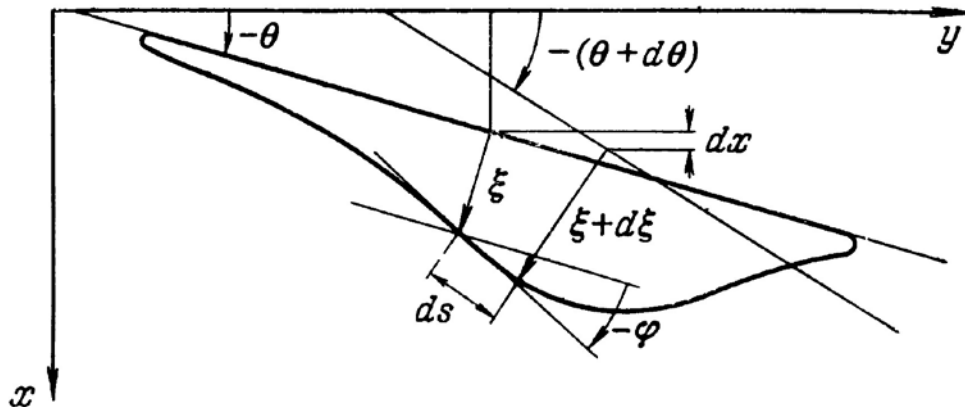


Рис. 1.3

Рассмотрим качение баллонного колеса, плоскость которого всегда сохраняет вертикальное положение (плоскость дороги горизонтальна) и найдём математическую формулировку условия качения пневматика без проскальзывания. Для этого рассмотрим центральную окружность, которая получается в результате пересечения центральной плоскости колеса с внешней кромкой недеформированного пневматика. При смещении обода колеса вбок центральная окружность изменяет свою форму и спроектируется на плоскость дороги в виде кривой, изображённой на рис. 1.2. В общем случае деформации пневматика его центральная окружность будет проектироваться на горизонтальную плоскость в виде кривой, изображённой на рис. 1.3. Характер деформации пневматика определяет

форму этой кривой. Возможность судить о влиянии деформации пневматика на кинематику его качения по форме кривой рис. 1.3 и составляет предположение, на котором основывается теория Грейдануса.

Будем называть линией качения кривую, которая является геометрическим местом последовательных положений на дороге центра площадки контакта пневматика. При качении баллонного колеса без проскальзывания проекция центральной линии деформированного пневматика на плоскость дороги в центре площадки контакта должна иметь с линией качения общую касательную и одинаковую кривизну. Из условия совпадения касательных согласно обозначениям на рис. 1.3 получаем соотношение

$$dx + (\xi + d\xi) \cos(\theta + d\theta) = -ds \sin(\theta + \varphi) + \xi \cos \theta,$$

которое для малых величин ξ , θ , φ записывается в виде

$$dx + d\xi = -(\theta + \varphi)ds.$$

Подставляя сюда $s = Vt$, приходим к уравнению

$$\dot{x} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi = 0. \quad (1.3)$$

Условие одинаковости кривизны записывается в виде

$$d(\theta + \varphi) = -\frac{ds}{R}, \quad (1.4)$$

где R — радиус кривизны линии качения. В соотношении (1.4) радиус кривизны R зависит от величины бокового прогиба ξ пневматика и величины угла закручивания φ , т.е.

$$\frac{1}{R} = f(\xi, \varphi). \quad (1.5)$$

Функция $f(\xi, \varphi)$ для недеформированного пневматика, когда $\xi = \varphi = 0$, обращается в нуль, поэтому при разложении правой части соотношения (1.5) в ряд Маклорена получим, ограничиваясь линейными членами, что

$$\frac{1}{R} = C_1 \xi + C_2 \varphi, \quad (1.6)$$

где коэффициенты $C_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0$ и $C_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0$ следует рассматривать как заданные. Эти коэффициенты могут быть определены экспериментально.

Подставляя выражение (1.6) в соотношение (1.4) и заменяя $s = Vt$, получим уравнение

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi} + C_1 V \xi + C_2 V \varphi = 0. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.3) и (1.7) являются уравнениями кинематических связей, которые накладывают некоторые ограничения на возможные движения баллонного колеса при его качении без проскальзывания.

1.2 Исследование устойчивости движения велосипеда на абсолютно жестких колесах

Конструкция велосипеда представлена на рисунке 1.4. Она хорошо известна [3].

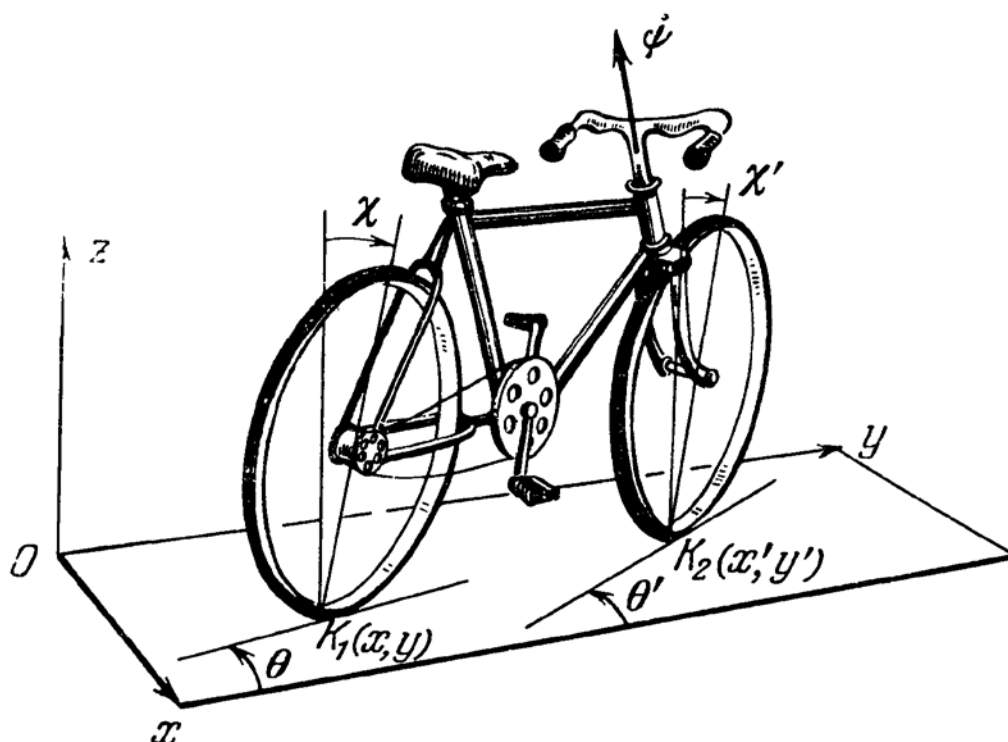


Рис. 1.4 Расчетная схема системы велосипеда

Будем предполагать, что седок жёстко скреплён с велосипедом и что движением ног велосипедиста и педального механизма можно пренебречь. Если не учитывать упругость пневматиков, то при сделанных упрощающих предположениях рассматриваемая система состоит из четырёх кинематически связанных между собой твёрдых тел: рамы с седком, двух колёс и вилки переднего колеса. Массой вилки велосипеда пренебрегаем.

Введём обобщённые координаты велосипеда: декартовы координаты x, y точки соприкосновения заднего колеса с дорогой, которая принимается за горизонтальную плоскость; угол θ между следом плоскости рамы и неизменным направлением на дороге (осью Oy); угол χ наклона рамы; угол ψ поворота вилки переднего колеса. Таким образом, вводятся три

системы отсчёта: неподвижная система координат, плоскость которой совпадает с плоскостью дороги, одна из осей направлена вверх; подвижная система координат, скреплённая с вилкой переднего колеса и с началом координат в точке, которая является точкой пересечения с рулевой осью перпендикуляра, опущенного на эту ось из центра переднего колеса.

Рассмотрим модель велосипеда на абсолютно жёстких колёсах. Будем считать, что, кроме сил реакции со стороны опорной плоскости, виртуальная работа которых равна нулю, на велосипед действует лишь сила тяжести. При таких условиях динамика велосипеда характеризуется лишь функцией Лагранжа L , при составлении которой достаточно ограничиться линейными и квадратичными членами малых величин θ , χ , ψ . Функция Лагранжа записывается в виде:

$$L = T_1 + T_2 - U_0,$$

где T_1 – кинетическая энергия задней части велосипеда (рама + заднее колесо + седок), T_2 – кинетическая энергия передней части велосипеда (переднее колесо + вилка + руль + фара) и U_0 – потенциальная энергия велосипеда.

Вместе с тем предположим, что в рассматриваемой системе происходит рассеяние энергии из-за наличия вязкого трения в рулевой колонке. Для учёта этой диссипации введём функцию Релея:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \dot{\psi}^2,$$

где δ – коэффициент вязкого трения.

Начнём рассмотрение со случая, когда колёса велосипеда можно считать тонкими абсолютно жёсткими дисками.

Составим выражение кинетической энергии T и потенциальной энергии U_0 велосипеда.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{x} - l_1 \dot{\theta} + h_1 \dot{\chi})^2 - 2V(l_1 \dot{\theta} - h_1 \dot{\chi}) \dot{\theta} + 2h_1 V \dot{\theta} \dot{\chi} \right] + \frac{1}{2} (A_1 \dot{\chi}^2 - 2D \dot{\chi} \dot{\theta} + B_1 \dot{\theta}^2) + \frac{C_1 V}{R} \chi \dot{\theta},$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} - l_2 \dot{\theta} + h_2 \dot{\chi} - d \dot{\psi})^2 + m_2 V (h_2 \dot{\chi} - l_2 \dot{\theta} - d \dot{\psi}) \dot{\theta} + m_2 h_2 V \dot{\theta} \dot{\chi} - m_2 d V (\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda) \dot{\psi} + \frac{1}{2} \left[A_2 (\dot{\chi} - \dot{\psi} \sin \lambda)^2 + 2D_2 (\dot{\chi} - \dot{\psi} \sin \lambda) (\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda) + B_2 (\dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda)^2 \right] - \frac{C_2 V}{R} [\dot{\chi} \dot{\psi} \cos \lambda + \dot{\theta} (\dot{\psi} \sin \lambda - \dot{\chi})],$$

$$U_0 = -\frac{1}{2} g [(m_1 h_1 + m_2 h_2) \chi^2 - 2m_2 d \psi \chi + \psi^2 m_2 d \sin \lambda].$$

Далее вводим оператор:

$$L_q \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

и с использованием системы аналитических вычислений Maple получаем уравнения движения. Ниже приведено программное обеспечение, для расчёта одного из уравнений движения:

> $LL := T1 + T2 - U0$:

> $type(L(xx(t), Dxx, \theta(t), D\theta, \chi(t), D\chi, \psi(t), D\psi), function)$:

> $L(xx(t), Dxx, \theta(t), D\theta, \chi(t), D\chi, \psi(t), D\psi) := subs(diff(xx(t), t) = Dxx, diff(\theta(t), t) = D\theta, diff(\chi(t), t) = D\chi, diff(\psi(t), t) = D\psi, LL)$:

> $diff(L(xx(t), Dxx, \theta(t), D\theta, \chi(t), D\chi, \psi(t), D\psi), Dxx)$;

$$\frac{1}{2} m1 (2 D\chi h1 - 2 l1 D\theta + 2 Dxx) + \frac{1}{2} m2 (2 D\chi h2 - 2 D\psi d - 2 l2 D\theta + 2 Dxx)$$

> $SSS := subs(Dxx = diff(xx(t), t), D\theta = diff(\theta(t), t), D\chi = diff(\chi(t), t), D\psi = diff(\psi(t), t), %)$;

$$SSS := \frac{1}{2} m1 \left(2 h1 \left(\frac{d}{dt} \chi(t) \right) - 2 l1 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} xx(t) \right) \right) + \frac{1}{2} m2 \left(2 h2 \left(\frac{d}{dt} \chi(t) \right) - 2 d \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) - 2 l2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} xx(t) \right) \right)$$

> $r1 := diff(SSS, t)$;

$$r1 := \frac{1}{2} m1 \left(2 h1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \chi(t) \right) - 2 l1 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} xx(t) \right) \right) + \frac{1}{2} m2 \left(2 h2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \chi(t) \right) - 2 d \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi(t) \right) - 2 l2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} xx(t) \right) \right)$$

>L2 := subs(xx(t) = Axx, θ(t) = Aθ, χ(t) = Aχ, ψ(t) = Aψ, L(xx(t), Dxx, θ(t), Dθ, χ(t), Dχ, ψ(t), Dψ));

$$\begin{aligned}
L2 := & \frac{1}{2} m1 \left((D\chi h1 - l1 D\theta + Dxx)^2 - 2 V (-A\chi h1 + l1 A\theta) D\theta \right. \\
& + 2 h1 V A\theta D\chi \left. \right) + \frac{1}{2} A1 \left(\frac{\partial}{\partial t} D\chi \right)^2 - D1 D\chi D\theta \\
& + \frac{1}{2} B1 \left(\frac{\partial}{\partial t} D\theta \right)^2 + \frac{V C1 A\chi D\theta}{R} + \frac{1}{2} m2 \left((D\chi h2 - D\psi d \right. \\
& - l2 D\theta + Dxx)^2 + 2 V (A\chi h2 - A\psi d - l2 A\theta) D\theta + 2 V h2 A\theta D\chi \\
& - 2 V d (A\theta + A\psi \cos(\lambda)) A\psi \left. \right) + \frac{1}{2} A2 (D\chi - A\psi \sin(\lambda))^2 \\
& + D2 (D\chi - A\psi \sin(\lambda)) (D\theta + A\psi \cos(\lambda)) + \frac{1}{2} B2 (D\theta \\
& + A\psi \cos(\lambda))^2 - \frac{C2 V (D\chi A\psi \cos(\lambda) - D\theta (A\chi - A\psi \sin(\lambda)))}{R} \\
& + \frac{1}{2} g \left((h1 m1 + h2 m2) A\chi^2 - 2 m2 d A\psi A\chi + A\psi^2 m2 d \sin(\lambda) \right)
\end{aligned}$$

>diff(L2, Axx);

0

>r2 := subs(Axx = xx(t), Aθ = θ(t), Aχ = χ(t), Aψ = ψ(t), %);

r2 := 0

>Lx := r1 - r2 :

>Lx := simplify(Lx);

$$\begin{aligned}
Lx := & - \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi(t) \right) d m2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \chi(t) \right) h1 m1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \chi(t) \right) h2 m2 \\
& - \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) l1 m1 - \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) l2 m2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} xx(t) \right) m1 \\
& + \left(\frac{d^2}{dt^2} xx(t) \right) m2
\end{aligned}$$

С учётом ещё трёх уравнений и неголономных связей (1.8) получаем систему дифференциальных уравнений 10-го порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} + V \cdot \theta = 0, \\ c \cdot \dot{\theta} = c_1 \cdot \dot{\psi} + \psi \cdot V \cdot \cos \lambda. \end{cases} \quad (1.8)$$

В итоге для абсолютно жёстких дисков уравнения движения, согласно работе Неймарка Ю.И., Фуфаева Н.А.[3], имеют следующий вид:

$$\begin{cases} L_x = 0, \\ c \cdot \left(L_\psi + \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) + c_1 \cdot L_\theta = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Исследование устойчивости системы проводилось с использованием метода D-разбиения. Получение матрицы 4-го порядка из коэффициентов уравнений, определителя этой матрицы и расчёт характеристического уравнения в символьном виде проводились с использованием приведенного ниже программного обеспечения:

```
>MM := matrix(4, 4) :
```

```
>
```

```
for kk from 1 to 4 do
```

```
MM[kk, 1] := frontend(coeff, [ode[kk], diff(xx(t), t$2)]) * p^2
+ frontend(coeff, [ode[kk], diff(xx(t), t)]) * p + frontend(coeff,
[ode[kk], xx(t)]);
MM[kk, 2]
:= frontend(coeff, [ode[kk], diff(theta(t), t$2)]) * p^2 + frontend(coeff,
[ode[kk], diff(theta(t), t)]) * p + frontend(coeff, [ode[kk], theta(t)]);
MM[kk, 3] := frontend(coeff, [ode[kk], diff(chi(t), t$2)]) * p^2
+ frontend(coeff, [ode[kk], diff(chi(t), t)]) * p + frontend(coeff,
[ode[kk], chi(t)]);
MM[kk, 4]
:= frontend(coeff, [ode[kk], diff(psi(t), t$2)]) * p^2 + frontend(coeff,
[ode[kk], diff(psi(t), t)]) * p + frontend(coeff, [ode[kk], psi(t)]);
```

```
end do:
```

```
>S := det(MM) :
```

```
>
```

```
S := coeff(S, p, 6) * p^6 + coeff(S, p, 5) * p^5 + coeff(S, p, 4) * p^4 + coeff(S,
p, 3) * p^3 + coeff(S, p, 2) * p^2 + coeff(S, p, 1) * p^1 + coeff(S, p, 0);
```

```
S := 64.26677090 p^6 + 491.5889595 p^5 + 532.1371656 p^4
- 512.1241164 p^3 + 6928.757936 p^2
```

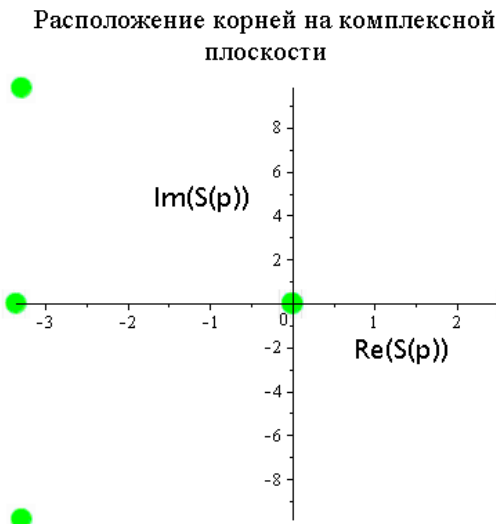
Заметим, что у данного полинома 6-го порядка отсутствует коэффициент при первой степени p и свободный член, то есть имеется нулевой корень кратности два.

Далее, численным путём находятся все шесть корней характеристического уравнения при заданном наборе входных параметров, и проводится их отображение на комплексной плоскости.

```
> A := solve(S, p);
```

```
A := 0., 0., 1.050749080 + 1.823450333 I, -4.875345778  
+ 0.7570656225 I, -4.875345778 - 0.7570656225 I,  
1.050749080 - 1.823450333 I
```

```
> plot([[Re(A[1]), Im(A[1])], [Re(A[2]), Im(A[2])], [Re(A[3]),  
Im(A[3])], [Re(A[4]), Im(A[4])], [Re(A[5]), Im(A[5])],  
[Re(A[6]), Im(A[6])]], style = point, symbol = solidcircle,  
symbolsize = 30, color = green, thickness = 7, title  
= "Расположение корней на комплексной плоскости", titlefont  
= [BOLD, 16], labels = ["Re(S(p))", "Im(S(p))"], labelfont  
= ["HELVETICA", 15]);
```



Так как несколько корней расположены в правой полуплоскости, то можно сделать вывод, что характер движения для случая абсолютно жестких дисков неустойчивый. Это подтверждается и численным интегрированием системы из четырёх дифференциальных уравнений.

Пример численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1 – 1.2) приведён ниже:

```
>abc := Lχ, EQ2, ode3, ode4 : //задание системы дифференциальных уравнений
```

```
//задание начальных условий
```

```
>xy1 := χ(0) = 0, D(χ)(0) = 1, ψ(0) = 0, D(ψ)(0) = 0.1, xx(0) = 0.1, θ(0) = 0;
```

```
xy1 := χ(0) = 0, D(χ)(0) = 1, ψ(0) = 0, D(ψ)(0) = 0.1, xx(0) = 0.1, θ(0) = 0
```

```
>fncl := {χ(t), ψ(t), xx(t), θ(t)};
```

```
fncl := {χ(t), ψ(t), θ(t), xx(t)}
```

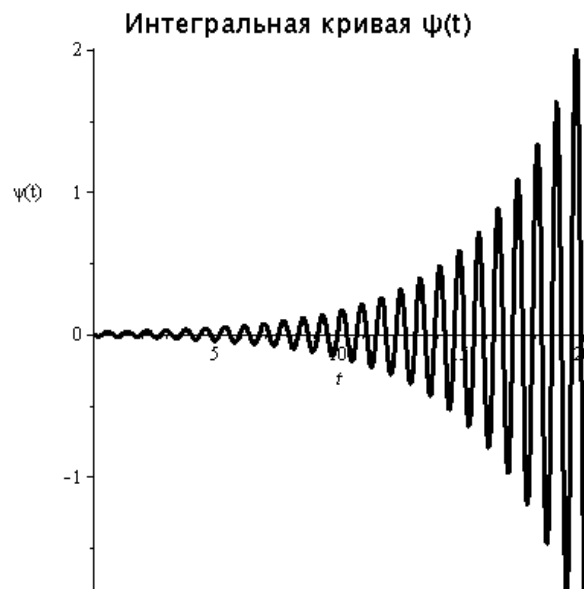
```
>A1 := dsolve({abc, xy1}, fncl, numeric, method = classicalabmoulton,  
corrections = 7);
```

```
A1 := proc(x_classical) ... end proc
```

```
>tk := 20;
```

```
tk := 20
```

```
>odeplot(A, [t, ψ(t)], 0..tk, title = "Интегральная кривая ψ(t)", titlefont  
= ["HELVETICA", 14], thickness = 3, labels = [t, "ψ(t)"], color  
= [black], numpoints = 1000);
```



2. Исследование устойчивости системы автоматического регулирования электроприводом

Автоматическим регулированием называется процесс поддержания или изменения по заданным условиям какой-либо величины в машинах, аппаратах или иных технических устройствах, осуществляемый без непосредственного участия человека, с помощью специально, для этой цели присоединяемых приборов, - автоматических регуляторов [5-8].

Установленный режим машины или иного технического устройства обычно нарушается внешними воздействиями. Их называют *возмущениями*. Какова бы ни была природа этих возмущений, их вредное действие на процесс должно быть скомпенсировано соответствующим *управляющим воздействием* регулятора.

Машина, аппарат или иное устройство, к которому присоединяется регулятор для осуществления процесса автоматического регулирования, называется *регулируемым объектом*, а часть регулируемого объекта, на которую воздействует регулятор, - *регулирующим органом* объекта. Величина, подлежащая регулированию, называется *регулируемой величиной* или *регулируемым параметром*.

Все системы управления делятся на разомкнутые и замкнутые. Примерная функциональная схема замкнутой системы (системы управления с обратной связью) приведена на рис.2.1.



Рис.2.1 Функциональная схема замкнутой системы

Обратная связь, замыкающая систему, передает результат измерения выходной величины на вход системы. Эта выходная величина представляет собой физический параметр, подлежащий регулированию (x - регулируемая или управляемая величина).

Входные величины $g(t)$ и $f(t)$ являются соответственно задающим и возмущающим воздействиями. Задача системы состоит в том, чтобы возможно точнее воспроизводить на выходе x задаваемый законом

изменения $g(t)$ и возможно полное подавлять влияние возмущающего воздействия $f(t)$, а также других внешних и внутренних помех, если они имеются. Для этой цели выходная величина x сравнивается через измеритель $y=kx$ с входной величиной $g(t)$. Получаем рассогласование $\varepsilon = g(t) - k \cdot x$.

Рассогласование ε служит источником воздействия на систему, причем система работает на уничтожение или сведение к допустимому малому значению величины этого рассогласования (т.е. величины ошибки системы ε). В общем случае задающее воздействие $g(t)$ может меняться произвольно.

Чтобы составить уравнения динамики системы автоматического управления или регулирования, система разбивается на звенья. Затем рассматривается каждое звено в отдельности (рис. 2.2).

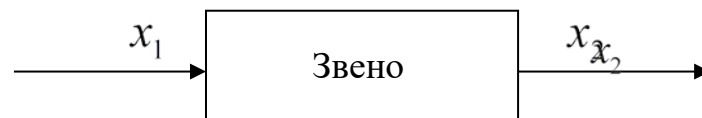


Рис. 2.2 Звено системы автоматического управления

Входная x_1 и выходная x_2 величины соответствуют физическим величинам, выражающим воздействие предыдущего звена на данное звено (x_1) и воздействие данного звена на последующее (x_2).

Звено системы может являться техническим устройством любой физической природы, конструкции и назначения. Поэтому составление уравнения динамики каждого конкретного звена системы является предметом рассмотрения соответствующей конкретной области технических наук (электроники, теплотехники, динамики, полета и т.п.), к которой и следует каждый раз обращаться.

Основные понятия и термины теории автоматического управления и регулирования позволяют получить общее представление об этой науке. В практике динамических расчетов используются такие системы, которые содержат большое количество контуров обратной связи. Важно получить общую передаточную функцию всей системы, чтобы в дальнейшем провести исследование ее динамических характеристик. В процессе получения передаточной функции и исследования таких сложных многоконтурных систем необходимо использование современных ЭВМ и их инструментальных средств программирования.

2.1 Постановка задачи и построение математической модели системы электропривода

Методы исследования динамики электропривода базируются на общих методах теории автоматического регулирования [5-8], которые в настоящее время в значительной степени модернизируются. Это связано с широким внедрением в расчетную практику численных методов, основанных на применении ЭВМ. Многочисленные графические и графоаналитические системы становятся менее эффективными. Им на смену приходят прямые численные методы построения переходных процессов, специальные алгоритмы анализа и синтеза многомерных автоматических систем.

Если ранее разомкнутый или даже замкнутый электропривод анализировали простейшими методами, то в настоящее время электромеханический привод представляет собой сложную многоконтурную динамическую систему, анализ, а тем более синтез, которой элементарными средствами совершенно невозможен. Попытка решить задачу настройки регуляторов и синтеза всей системы эмпирическими методами, как правило, не приводит к созданию оптимальных конструкций. В связи с этим появилась необходимость разработать общие методы анализа и синтеза сложных электромеханических систем привода, в которых в равной мере учитывались бы специфические особенности и электрической, и механической частей привода, их взаимная связь и взаимное влияние.

Расчёт на ЭВМ показателей качества систем электроприводов является важным этапом в процессе их проектирования. Система электроприводов является сложной многоконтурной системой с несколькими цепями обратной связи, поэтому актуальна задача создания программного и математического обеспечения расчёта показателей динамического качества исследуемых систем. Также целью моей работы было изучение влияния коэффициентов главной передаточной функции на устойчивость системы в целом.

В качестве примера рассматривается обобщённая схема электропривода [9], используемого на фрезерных станках с устройствами числовым программным управлением (УЧПУ). Ввиду сложности получения главной передаточной функции воспользуемся системой символьных аналитических вычислений MAPLE. Рассматривается аналитическое выражение главной передаточной функции, и анализируются границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров рассматриваемой динамической системы. Для расчета границ областей устойчивости используется корневой метод, а так же критерий Рауса – Гурвица и метод D-разбиения. Рассматривается влияние отдельных

коэффициентов главной передаточной функции на устойчивость системы. Для этого используется подход, заключающийся в определении наиболее чувствительных параметров системы электропривода с последующим их изменением и анализом их влияния на устойчивость рассматриваемой системы.

Анализ структурных схем электроприводов [8] показывает, что они имеют достаточно сложную, разветвленную структуру с многочисленными обратными связями. На основе изучения наиболее типичных структурных схем электроприводов, применяемых в металлорежущих станках с числовым программным управлением, была составлена обобщённая расчётная схема (рис.2.3).

Эта схема состоит из двух частей: собственно электропривода (ЭП) и двигателя (Д). Сигнал от устройства числового программного управления поступает на вход регулятора скорости (коэффициент передачи в изображении по Лапласу $W_1(p)$, $p = j\omega$). При наличии рассогласования ΔU_2 на входе регулятора скорости, на его выходе формируется сигнал пропорциональный этому рассогласованию, который, сравниваясь с текущим значением тока якоря, поступает на вход регулятора тока ($W_2(p)$).

Регулятор тока усиливает эту разность и подает управляющее напряжение на схему формирования управляющих импульсов. По мере уменьшения рассогласования (под действием отрицательной обратной связи по частоте вращения) происходит стабилизация частоты вращения двигателя на уровне, пропорциональном напряжению задания. На рисунке 5 $W_3(p)$, $W_4(p)$ и $W_5(p)$ передаточные функции тиристорного преобразователя, цепи якоря и двигателя, K_1 , K_2 - коэффициенты усиления в цепи обратной связи контура тока и скорости; C_m , C_e - коэффициенты усиления по моменту и ЭДС. K_1 , K_2 , C_m , C_e являются усилительными, безинерционными звеньями, $W_1(p)$ и $W_2(p)$ - позиционными, $W_3(p)$ и $W_4(p)$ - апериодическими, а $W_5(p)$ - интегрирующим.

Передаточные функции отдельных звеньев системы двигателя хорошо известны из теории автоматического регулирования [4] и имеют вид:

$$W_3(p) = \frac{T_1}{1 + T_2 p}, \quad (2.1)$$

$$W_4(p) = \frac{T_3}{1 + T_4 p}, \quad (2.2)$$

$$W_5(p) = \frac{1}{T_5 p}, \quad (2.3)$$

где T_1 и T_2 - коэффициент усиления и малая постоянная времени, соответственно, тиристорного преобразователя,

$T_3 = 1/R_\alpha$, $1/\text{Ом}$ и $T_4 = L_\alpha/R_\alpha$, $\text{Гн}/\text{Ом}$, где L_α и R_α - индуктивность и сопротивление в цепи якоря двигателя,

T_5 - суммарный момент инерции ротора с приведенной инерционной нагрузкой.

Отличия в структурных схемах рассматриваемых приводов состоят в видах передаточных функций регуляторов скорости ($W_1(p)$) и тока ($W_2(p)$). В настоящем рассмотрении эти передаточные функции представлены отношением полиномов:

$$W_1(p) = \frac{a_1 + a_2 p}{b_1 + b_2 p} \quad (2.4)$$

$$W_2(p) = \frac{c_1 + c_2 p}{d_1 + d_2 p + d_3 p^2} \quad (2.5)$$

Такое задание $W_1(p)$ и $W_2(p)$ позволило с помощью предлагаемого программного обеспечения проводить расчеты на ЭВМ электроприводов, имеющие различные передаточные функции регуляторов скорости и тока. Анализ влияния коэффициентов других передаточных функций проводился путём изменения соответствующих параметров.

Методы, применяемые к решению задачи расчёта характеристик динамического качества электроприводов, вытекают из конкретной постановки задачи и общепринятых подходов теории автоматического регулирования [1-4].

Анализ структурной схемы (рис.2.3) показывает, что общая передаточная функция системы может быть получена из следующих очевидных соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(U_3 - K_2 \Omega) W_1(p) - I_я K_1] W_2(p) W_3(p) = U_я \quad (2.6) \\ (U_я - \Omega C_e) W_4(p) = I_я \quad (2.7) \\ (U_я - \Omega C_e) W_4(p) C_m = \Omega / W_5(p) \quad (2.8) \end{array} \right.$$

где Ω - скорость вращения ротора двигателя.

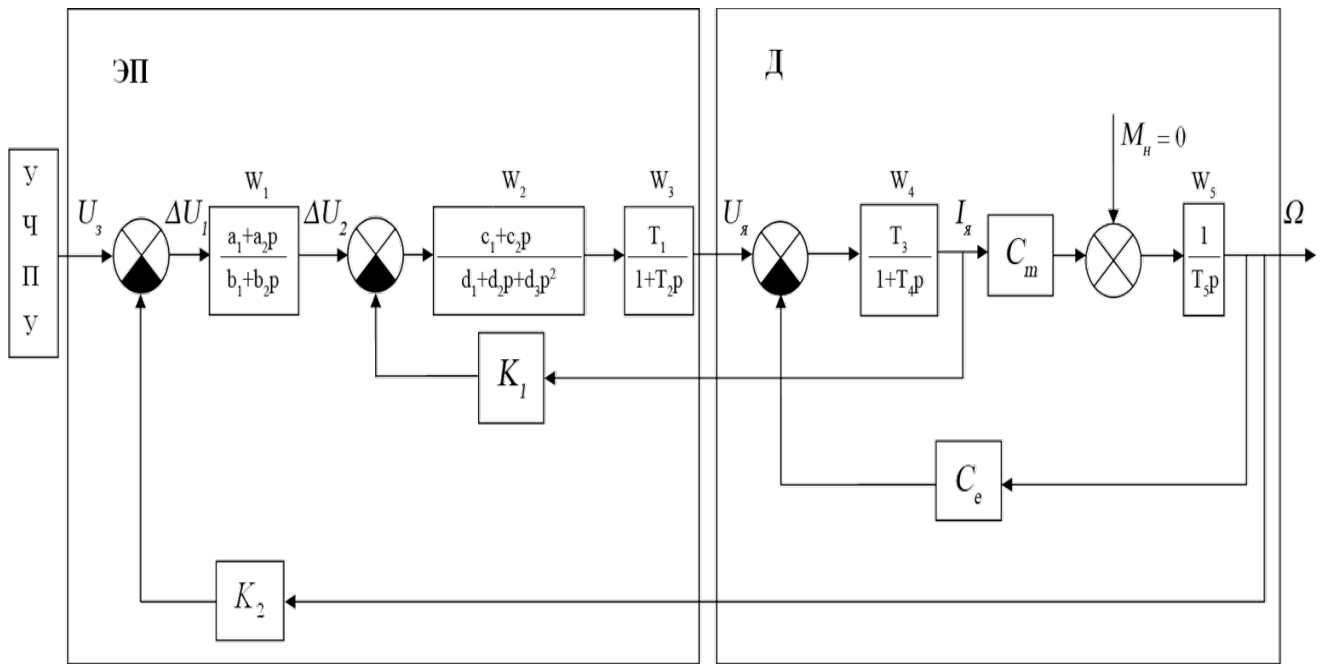


Рис. 2.3 Структурная схема системы электропривода

Характеристическое уравнение системы есть полином шестого порядка вида:

$$Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6 = 0, \quad (2.9)$$

где коэффициенты полинома являются функциями от восемнадцати конструктивных параметров системы $q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{18})$.

Исследование устойчивости в плоскости параметров проводилось с использованием корневого метода. При проведении вычислительного эксперимента использовался разработанный достаточно универсальный комплекс программ. Это программное обеспечение позволяет определять область устойчивости (или неустойчивости) в плоскости двух любых задаваемых пользователем параметров. При этом также задаются пределы изменения указанных параметров. Расчет показал, например, что при увеличении момента инерции ротора двигателя с приведенной инерционной нагрузкой T_5 область устойчивости в плоскости параметров (K_1, K_2) увеличивается.

Громоздкие преобразования выражений (2.6-2.8) с учетом (2.1-2.5) естественно выполнять с помощью САВ Maple, с использованием следующего программного обеспечения:

>restart : with(plots) : with(linalg) :

>

#Расчет общей передаточной функции и характеристического уравнения в символьном виде;

$$\begin{aligned} >A1 := ((U[\text{я}] - \Omega(p) \cdot C[e]) \cdot W[4](p)) \cdot C[m] \cdot W[5](p) - \Omega(p); \\ &A1 := (U_{\text{я}} - \Omega(p) C_e) W_4(p) C_m W_5(p) - \Omega(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} >U[\text{я}] := (((U[3] - \Omega(p) \cdot K[2]) \cdot W[1](p)) - K[1] \cdot i[\text{я}]) \cdot W[2](p) \cdot W[3](p); \\ &U_{\text{я}} := ((U_3 - \Omega(p) K_2) W_1(p) - K_1 i_{\text{я}}) W_2(p) W_3(p) \end{aligned}$$

>

$$A2 := \text{subs}(U[\text{я}] = (((U[3] - \Omega(p) \cdot K[2]) \cdot W[1](p)) - K[1] \cdot i[\text{я}]) \cdot W[2](p) \cdot W[3](p), A1);$$

$$A2 := (((U_3 - \Omega(p) K_2) W_1(p) - K_1 i_{\text{я}}) W_2(p) W_3(p) - \Omega(p) C_e) W_4(p) C_m W_5(p) - \Omega(p)$$

$$>A3 := \text{subs}\left(i[\text{я}] = \frac{\Omega(p)}{C[m] \cdot W[5](p)}, A2\right);$$

$$\begin{aligned} A3 := &\left(\left((U_3 - \Omega(p) K_2) W_1(p) - \frac{K_1 \Omega(p)}{C_m W_5(p)} \right) W_2(p) W_3(p) \right. \\ &\left. - \Omega(p) C_e \right) W_4(p) C_m W_5(p) - \Omega(p) \end{aligned}$$

>#Задание передаточных функций отдельных звеньев системы ЭП;

$$>W[1] := (p) \rightarrow \frac{(a[1] + a[2] \cdot p)}{b[1] + b[2] \cdot p};$$

$$W_1 := p \rightarrow \frac{a_1 + a_2 p}{b_1 + b_2 p}$$

$$>W[2] := (p) \rightarrow \frac{(c[1] + c[2] \cdot p)}{d[1] + d[2] \cdot p + d[3] \cdot p^2};$$

$$W_2 := p \rightarrow \frac{c_1 + c_2 p}{d_1 + d_2 p + d_3 p^2}$$

$$>W[3] := (p) \rightarrow \frac{T[1]}{1 + T[2] \cdot p}$$

$$W_3 := p \rightarrow \frac{T_1}{1 + T_2 p}$$

$$>W[4] := (p) \rightarrow \frac{T[3]}{1 + T[4] \cdot p}$$

$$W_4 := p \rightarrow \frac{T_3}{1 + T_4 p}$$

$$> W[5] := (p) \rightarrow \frac{1}{T[5] \cdot p}$$

$$W_5 := p \rightarrow \frac{1}{T_5 p}$$

>

> $sols := solve(A3 = 0, \{U[3], \Omega(p)\}) :$

> $aa := rhs(sols[1]) :$

> $bb := rhs(sols[2]);$

$$bb := \Omega(p)$$

> $F := simplify\left(\frac{bb}{aa}\right) :$

>

> $DD := denom(F) :$

> $NN := numer(F) :$

> $NN := coeff(NN, p, 2) \cdot p^2 + coeff(NN, p, 1) \cdot p + coeff(NN, p, 0) :$

> $DD := coeff(DD, p, 6) \cdot p^6 + coeff(DD, p, 5) \cdot p^5 + coeff(DD, p, 4) \cdot p^4 + coeff(DD, p, 3) \cdot p^3 + coeff(DD, p, 2) \cdot p^2 + coeff(DD, p, 1) \cdot p + coeff(DD, p, 0) :$

> #Общая передаточная функция;

> $\frac{NN}{DD};$

$$\begin{aligned} & \left(T_3 p^2 C_m T_1 a_2 c_2 + C_m T_1 T_3 (a_1 c_2 + a_2 c_1) p + T_3 C_m T_1 a_1 c_1 \right) / \left(p^6 T_2 T_4 T_5 b_2 d_3 \right. \\ & + (T_2 T_4 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_3) p^5 + (C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_3 \\ & + T_2 T_4 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_5 b_2 d_2 + T_4 T_5 b_1 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_2 \\ & + T_5 b_2 d_3) p^4 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_2 \\ & + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_2 \\ & + T_4 T_5 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_3 + T_5 b_2 d_2) p^3 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_1 \\ & + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 \\ & + C_e C_m T_3 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_1 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_1 + T_5 b_1 d_2 + T_5 b_2 d_1) p^2 \\ & + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_1 + C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_2 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_1 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_1 \\ & + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_1) p + T_3 C_m K_2 T_1 a_1 c_1 + T_3 C_e C_m b_1 d_1 \left. \right) \end{aligned}$$

> # Характеристическое уравнение - полином шестого порядка;

>DD;

$$\begin{aligned}
 & p^6 T_2 T_4 T_5 b_2 d_3 + (T_2 T_4 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_3) p^5 \\
 & + (C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_5 b_2 d_2 \\
 & + T_4 T_5 b_1 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_2 + T_5 b_2 d_3) p^4 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_2 \\
 & + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_1 \\
 & + T_4 T_5 b_1 d_2 + T_4 T_5 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_3 + T_5 b_2 d_2) p^3 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_2 \\
 & + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_1 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_1 \\
 & + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_1 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_1 + T_5 b_1 d_2 + T_5 b_2 d_1) p^2 \\
 & + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_1 + C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_2 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_1 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_1 \\
 & + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_1) p + T_3 C_m K_2 T_1 a_1 c_1 + T_3 C_e C_m b_1 d_1
 \end{aligned}$$

Полученные в результате расчетов на ЭВМ зависимости описывают в изображении по Лапласу поведение динамической системы электропривода.

Математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений запишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{X}_1(t) &= X_2(t) \\
 \dot{X}_2(t) &= X_3(t) \\
 \dot{X}_3(t) &= X_4(t) \\
 \dot{X}_4(t) &= X_5(t) \\
 \dot{X}_5(t) &= X_6(t) \\
 \dot{X}_6(t) &= -\frac{q_1}{q_0} X_6(t) - \dots - \frac{q_5}{q_0} X_2(t) - \frac{q_6}{q_0} X_1(t) + \frac{r_2}{q_0}
 \end{aligned} \right.$$

2.2 Разработка алгоритма и комплекса программ расчета границ областей устойчивости системы электропривода

Было получено характеристическое уравнение

$$Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6 = 0 \quad (2.10)$$

Коэффициенты этого уравнения $q_0 \dots q_6$ сложным образом зависят от восемнадцати конструктивных параметров электропривода:

$$q_0 = T_5 b_2 d_3 T_2 T_4$$

$$q_1 = T_5 b_2 d_3 T_4 + T_5 b_1 d_3 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_3 T_2$$

$$q_2 = C_e C_m T_3 b_2 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_1 T_2 T_4 \\ + T_5 b_2 d_3 + T_5 b_2 d_2 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_4$$

$$q_3 = C_e C_m T_3 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_4 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 T_2 \\ + K_1 T_1 T_3 T_5 c_2 b_2 + T_5 b_2 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_2 T_2 + T_5 b_2 d_1 T_2 \\ + T_5 b_2 d_2 + T_5 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_5 b_1 d_1 T_2 T_4$$

$$q_4 = C_e C_m T_3 b_1 d_2 T_2 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + T_5 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 \\ + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_2 + T_5 b_1 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_1 T_2 \\ + C_e C_m T_3 b_2 d_1 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_1 b_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 c_2 b_1 \\ + T_5 b_2 d_1$$

$$q_5 = C_e C_m T_3 b_2 d_1 + K_2 C_m T_1 T_3 a_1 c_2 + T_5 b_1 d_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1 T_2 \\ + K_1 T_1 T_3 T_5 c_1 b_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_1$$

$$q_6 = K_2 C_m T_1 T_3 a_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1$$

В дальнейшем проводилось построение и анализ границ областей устойчивости в двух- и трехмерном пространствах параметров изучаемой системы. Исследования проводились с использованием трех различных методов, хорошо известных из теории автоматического регулирования: корневого, Рауса-Гурвица и метода D-разбиения. Наибольший эффект в сочетании с широкими возможностями в области символьных вычислений системы Maple принесло использование корневого метода анализа корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Сложилась идеология, согласно которой вначале определялись параметры системы, не оказывающие влияния на устойчивость системы (изменение которых в разумных пределах не приводило к переходу корней в правую половину плоскости (Re,Im), что позволяло выполнять исследования в пространстве, меньшем восемнадцати. В процессе вычислительного эксперимента использовался режим анимации. В приведенном ниже программном обеспечении, в качестве примера, выполнен расчет поведения корней характеристического уравнения при уменьшении параметра T_5 на 80 % от его номинального значения.

># Расчет показателей динамического качества электропривода ЭТ-6С

># `МЕТОД АНИМАЦИИ`

> # Задание входных параметров;

>restart : with(linalg) : with(plots) : with(PolynomialTools) :

>r :: complex :

># Передаточная функция регулятора скорости;

>w[1] := p → (a[1] + a[2]*p + a[3]*p^2 + a[4]*p^3) / (b[1] + b[2]*p + b[3]*p^2 + b[4]*p^3 + b[5]*p^4);

$$w_1 := p \rightarrow \frac{a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + a_4 p^3}{b_1 + b_2 p + b_3 p^2 + b_4 p^3 + b_5 p^4}$$

># Передаточная функция регулятора тока;

> $w[2] := p \rightarrow (c[1] + c[2]*p + c[3]*p^2 + c[4]*p^3)/(d[1] + d[2]*p + d[3]*p^2 + d[4]*p^3 + d[5]*p^4);$

$$w_2 := p \rightarrow \frac{c_1 + c_2 p + c_3 p^2 + c_4 p^3}{d_1 + d_2 p + d_3 p^2 + d_4 p^3 + d_5 p^4}$$

># Передаточная функция тиристорного преобразователя;

> $w[3] := p \rightarrow T[1]/(1 + T[2]*p);$

$$w_3 := p \rightarrow \frac{T_1}{1 + T_2 p}$$

># Передаточная функция цепи якоря двигателя;

> $w[4] := p \rightarrow T[3]/(1 + T[4]*p);$

$$w_4 := p \rightarrow \frac{T_3}{1 + T_4 p}$$

># Передаточная функция электродвигателя;

> $w[5] := p \rightarrow 1/(T[5]*p);$

$$w_5 := p \rightarrow \frac{1}{T_5 p}$$

># Задание параметров функции регулятора скорости;

> $a[1] := 0.47 : a[2] := 0.00564 : a[3] := 0 : a[4] := 0 :$

> $b[1] := 0 : b[2] := 0.012 : b[3] := 0 : b[4] := 0 : b[5] := 0 :$

># Задание параметров функции регулятора тока;

> $c[1] := 7.3 : c[2] := 0.121 : c[3] := 0 : c[4] := 0 :$

> $d[1] := 0.12 : d[2] := 0.019228 : d[3] := 0.000012342 : d[4] := 0 : d[5] := 0 :$

># Задание параметров функции тиристорного преобразователя;

> $T[1] := 20.0 : T[2] := 0.00167 :$

># Задание параметров функции цепи якоря двигателя;

> $T[3] := 2.857 : T[4] := 0.016 :$

># Задание параметров функции электродвигателя;

> $T[5] := 0.057 :$

># Задание коэффициентов в цепях обратной связи;

> $c[m] := 1.125 : c[e] := 1.125 : k[1] := 0.05 : k[2] := 0.5 :$

>

># Вычисление корней характеристического уравнения;

># Вычисление главной передаточной функции;

> $W := p \rightarrow (c[m]*product(w[i](p), i=1..5))/(k[2]*c[m]*product(w[i](p), i=1..5) + 1 + k[1]*product(w[i](p), i=2..4) + c[e]*c[m]*w[4](p)*w[5](p));$

$$W := p \rightarrow \frac{c_m \prod_{i=1}^5 w_i(p)}{k_2 c_m \prod_{i=1}^5 w_i(p) + 1 + k_1 \prod_{i=2}^4 w_i(p) + c_e c_m w_4(p) w_5(p)}$$

> **W(p) := simplify(W(p));**

$$W(p) := (8.834144740 \cdot 10^7 (7.300000000 + 0.1210000000 p) (1. + 0.01200000000 p)) / (3.22446283 \cdot 10^8 + 9.229237764 \cdot 10^6 p + 1.085530371 \cdot 10^5 p^2 + 739.7306708 p^3 + 0.7132293244 p^4 + 0.001463710600 p^5 + 6.595564800 \cdot 10^{-7} p^6)$$

> **# Графическое отображение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости (Re p, Im p);**

> **# Положение корней в зависимости от изменения параметра T[5];**

> *kk := -1;*

При $kk > 0$ расчёт в сторону увеличения параметра, при $kk < 0$ - в сторону уменьшения;

kk := -1

> *plots_array := array(1..100);*

> *loop_counter := 0;*

>

> *perT5 := 80; # процент для параметра;*

perT5 := 80

> *ll := 90; # число точек;*

ll := 90

>

if *kk > 0* **then** *T5n := T[5]; # начальное значение;*

T5k := T[5] + $\frac{T[5] \cdot perT5}{100}$; # конечное значение;

h := $\frac{(T5k - T5n)}{ll}$; # шаг;

elif *kk < 0* **then** *T5n := T[5]; # начальное значение;*

T5k := T[5] - $\frac{T[5] \cdot perT5}{100}$; # конечное значение;

h := - $\frac{(T5n - T5k)}{ll}$; # шаг;

fi;

T5n := 0.057

T5k := 0.01140000000

h := -0.0005066666667

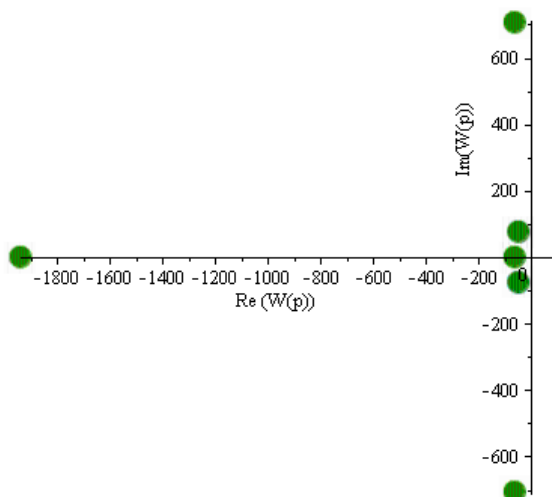
> **for** *T[5]* **from** *T5n* **to** *T5k* **by** *h* **do**

```

loop_counter := loop_counter + 1;
W(p):=(c[m]*w[1](p)*w[2](p)*w[3](p)*w[4](p)*w[5](p))/(1+c[e]*c[m]*
w[4](p)*w[5](p)+k[1]*w[2](p)*w[3](p)*w[4](p)+k[2]*c[m]*w[1](p)*w
[2](p)*w[3](p)*w[4](p)*w[5](p)):
W(p) := simplify(W(p)):
den:=collect(denom(W(p)),p):
r:=solve(den,p);
plots_array[loop_counter]:=
PLOT(POINTS([Re(r[1]),Im(r[1])],SYMBOL(_SOLIDCIRCLE,30),`if`(Re(
r[1])<0,COLOR(RGB,0.09,0.5,0.02),COLOR(RGB,1,0,0))),POINTS([Re(r
[2]),Im(r[2])],SYMBOL(_SOLIDCIRCLE,30),`if`(Re(r[2])<0,COLOR(RGB
,0.09,0.5,0.02),COLOR(RGB,1,0,0))),POINTS([Re(r[3]),Im(r[3])],SY
MBOL(_SOLIDCIRCLE,30),`if`(Re(r[3])<0,COLOR(RGB,0.09,0.5,0.02),C
OLOR(RGB,1,0,0))),POINTS([Re(r[4]),Im(r[4])],SYMBOL(_SOLIDCIRCLE
,30),`if`(Re(r[4])<0,COLOR(RGB,0.09,0.5,0.02),COLOR(RGB,1,0,0)))
,POINTS([Re(r[5]),Im(r[5])],SYMBOL(_SOLIDCIRCLE,30),`if`(Re(r[5]
)<0,COLOR(RGB,0.09,0.5,0.02),COLOR(RGB,1,0,0))),POINTS([Re(r[6]
),Im(r[6])],SYMBOL(_SOLIDCIRCLE,30),`if`(Re(r[6])<0,COLOR(RGB,0.0
9,0.5,0.02),COLOR(RGB,1,0,0))),THICKNESS(10));
enddo:
>
>
display([plots_array[1],plots_array[2],plots_array[3],plots_array[4],plots_array[5],
plots_array[6],plots_array[7],plots_array[8],plots_array[9],plots_array[10],
plots_array[11],plots_array[12],plots_array[13],plots_array[14],plots_array[15],
plots_array[16],plots_array[17],plots_array[18],plots_array[19],plots_array[20],
plots_array[21],plots_array[22],plots_array[23],plots_array[24],plots_array[25],
plots_array[26],plots_array[27],plots_array[28],plots_array[29],plots_array[30],
plots_array[31],plots_array[32],plots_array[33],plots_array[34],plots_array[35],
plots_array[36],plots_array[37],plots_array[38],plots_array[39],plots_array[40],
plots_array[41],plots_array[42],plots_array[43],plots_array[44],plots_array[45],
plots_array[46],plots_array[47],plots_array[48],plots_array[49],plots_array[50],
plots_array[51],plots_array[52],plots_array[53],plots_array[54],plots_array[55],
plots_array[56],plots_array[57],plots_array[58],plots_array[59],plots_array[60],
plots_array[61],plots_array[62],plots_array[63],plots_array[64],plots_array[65],
plots_array[66],plots_array[67],plots_array[68],plots_array[69],plots_array[70],
plots_array[71],plots_array[72],plots_array[73],plots_array[74],plots_array[75],
plots_array[76],plots_array[77],plots_array[78],plots_array[79],plots_array[80],
plots_array[81],plots_array[82],plots_array[83],plots_array[84],plots_array[85],
plots_array[86],plots_array[87],plots_array[88],plots_array[89],plots_array[90]]
, insequence = true, labels = ["Re(W(p))", "Im(W(p))"], labeldirections
= [HORIZONTAL, VERTICAL], title
= "Влияние значения параметра T5 на положение корней системы", titlefont
= [TIMES, BOLD, 15]);

```


Влияние значения параметра T_5 на положение корней системы



В процессе анализа влияния всех восемнадцати параметров на устойчивость системы, с использованием приведенного выше программного обеспечения, были выявлены параметры, оказывающие наибольшее влияние на эту характеристику.

	K_1	K_2	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	a_2	b_2	c_1	c_2	d_3	C_m
↑,%	72	125	53	134	55	-	-	133	-	212	68	78	131
↓,%	72	-	-	-	94	43	57	98	59	-	83	-	-

Рис. 2.4 Чувствительные параметры системы ЭП

2.3 Расчёт границ областей устойчивости в плоскости двух параметров

С целью упрощения инженерных расчётов областей устойчивости была разработано программное обеспечение, позволяющая определять область устойчивости в плоскости различных входных параметров, а также робастную устойчивость данной системы [12]. Особенностью этого обеспечения является тот факт, что исследователь в интерактивном режиме может выбирать те параметры системы, в плоскости которых ему необходимо рассчитать границы области устойчивости динамической и

определить робастную устойчивость системы ЭП. На рис.2.11 показан интерфейс программного обеспечения.

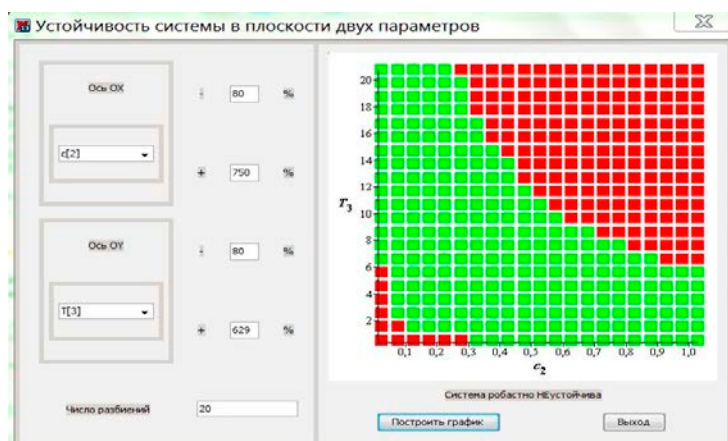


Рис. 2.5 Интерфейс программного обеспечения расчёта границ областей устойчивости системы в плоскости двух параметров

Как видно из рисунка 2.5, в левой его части в меню можно выбирать параметры, в плоскости которых требуется рассчитать область устойчивости данной системы и задавать вариацию этих параметров от их номинального значения. Задается также число разбиений, определяющее расчётную сетку. В правой части меню при нажатии соответствующей кнопки, строится график, отображающий область устойчивости в плоскости выбранных параметров с указанной вариацией. Под графиком выводится сообщение, говорящее о робастной устойчивости данной системы при заданной вариации параметров. Зелёные области – области устойчивости, красные – неустойчивости.

Ниже показана область устойчивости (рис. 2.6) в плоскости параметров (K_1, K_2) .

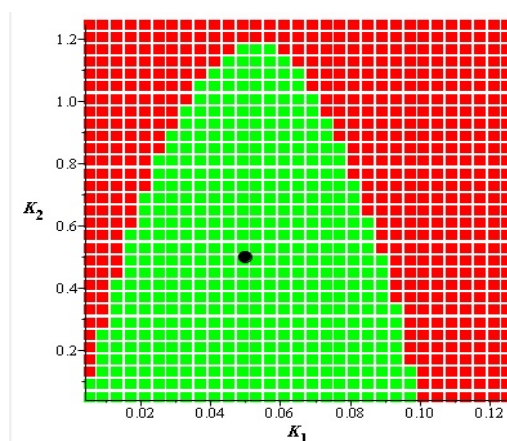


Рис. 2.6 Расчет границы областей устойчивости в плоскости (K_1, K_2)

Программное обеспечение, реализующее расчеты приведено в Приложении 1.

2.4 Расчёт границ областей устойчивости в пространстве 3D

Далее был реализован универсальный алгоритм, позволяющий строить границу области устойчивости в пространстве трех любых параметров изучаемой системы.

Задаем номинальные значения параметров:

$$\begin{aligned} parameters := [& a_1 = 0.47, a_2 = 0.00564, b_1 = 0, b_2 = 0.012, c_1 = 7.3, c_2 \\ & = 0.121, d_1 = 0.12, d_2 = 0.019228, d_3 = 0.000012342, T_1 = 20, T_2 \\ & = 0.00167, T_3 = 2.857, T_4 = 0.016, T_5 = 0.057, K_1 = 0.005, K_2 \\ & = 0.05, C_e = 1.125, C_m = 1.125] \end{aligned}$$

Выбираем пространство параметров:

$$VarNames := [K_1, T_4, C_m]$$

Делаем замену $p := I * \omega$ и разрешаем систему относительно выбранных параметров:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(F(p))=0 \\ \operatorname{Im}(F(p))=0 \end{cases}$$

$$U := \text{collect}(\text{evalc}(\operatorname{Re}(\text{subs}(p = I \cdot \omega, f))), \omega)$$

$$V := \text{collect}(\text{evalc}(\operatorname{Im}(\text{subs}(p = I \cdot \omega, f))), \omega)$$

$$S := \text{solve}(\{U = 0, V = 0\}, \{VarNames[]\}) :$$

Получаем параметрически заданную поверхность - границу области устойчивости:

$$S := \left\{ C_m = \left(68.40000000 \omega^2 \left(1.24697397 \cdot 10^8 \omega^4 T_4 \right. \right. \right. \\ - 2.614161319 \cdot 10^{11} \omega^2 - 1.013165626 \cdot 10^{14} \omega^2 T_4 \\ - 6.365366000 \cdot 10^{15} - 4.380000000 \cdot 10^{16} T_4 \left. \left. \left. \right) \right) / \right. \\ \left. \left(4.809516253 \cdot 10^{11} \omega^4 - 1.570360220 \cdot 10^{18} \omega^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 4.462371156 \cdot 10^{21} \right), K_1 = \right. \\ \left. - \left(3.500175009 \cdot 10^{-13} \left(1.260897000 \cdot 10^9 \omega^6 T_4 \right. \right. \right. \\ - 1.284835850 \cdot 10^{21} \omega^4 + 2.022440598 \cdot 10^{25} \omega^4 T_4 \\ - 9.944443102 \cdot 10^{27} \omega^2 + 1.193075324 \cdot 10^{30} \omega^2 T_4 \\ + 3.906904674 \cdot 10^{31} + 2.940710100 \cdot 10^{32} T_4 \\ - 4.096264993 \cdot 10^{15} \omega^6 \left. \left. \left. \right) \right) / \left(4.809516253 \cdot 10^{11} \omega^4 \right. \right. \\ \left. \left. - 1.570360220 \cdot 10^{18} \omega^2 - 4.462371156 \cdot 10^{21} \right), T_4 = T_4 \right\}$$

Ниже показаны результаты расчетов областей устойчивости в пространствах параметров (K_1, K_2, C_e) и (T_3, T_4, T_5) (Рис. 2.6).

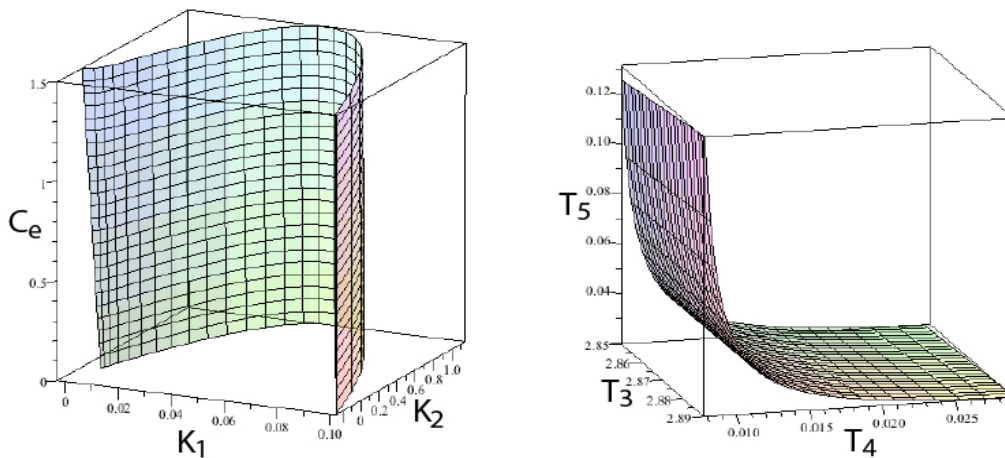


Рис. 2.7 Границы областей устойчивости в пространствах параметров (K_1, K_2, C_e) и (T_3, T_4, T_5)

Граничная поверхность разбивает всю область на две подобласти. В дальнейшем необходимо определить характер (устойчива или неустойчива) этих подобластей. Для этого задается произвольная точка в этой подобласти

$G := \text{subs}(\text{parameters}, f)$ и проверяется устойчивость полинома в заданной точке с помощью встроенной функции системы аналитических вычислений Maple - Hurwitz(G,p):

```
if Hurwitz(G, p) = true  
  then print(В выбранной точке полином устойчив)  
  else print(В выбранной точке полином не устойчив) end if
```

«В выбранной точке полином устойчив»

Для реализации описанного выше алгоритма было разработано специализированное программное обеспечение, приведенное в Приложении 2.

Контрольные задания для выполнения лабораторной работы на ЭВМ

1. Какова роль натурального эксперимента при составлении расчетной схемы и математической модели изучаемых процессов или объектов?
2. Каким условиям должна удовлетворять математическая модель при замене реального объекта (или процесса) на эту модель?
3. Назовите основные этапы при составлении алгоритма и разработке программного обеспечения.
4. Назовите основные требования, которым должно удовлетворять разрабатываемое программное обеспечение.
6. Проведите расчеты колебаний велосипеда с использованием его математической модели для случая абсолютно жестких колес
7. Как влияет скорость движения велосипеда на характер колебательного процесса?
8. Опишите расчетную схему и принятую идеализацию при составлении математической модели колебаний велосипеда.
9. Как влияет масса седока на положение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости?
10. Дайте описание процесса автоматического регулирования скоростью вращения двигателя электропривода.
11. Как влияют коэффициенты усиления в цепях обратной связи электропривода K_1 и K_2 на изменение границ областей устойчивости?
12. Как влияет суммарный момент инерции ротора с приведенной инерционной нагрузкой T_5 на изменение границ областей устойчивости в плоскости параметров (K_1, K_2) ?
13. Путем вычислительного эксперимента постройте границу области устойчивости в плоскости параметров (T_1, T_2) при изменении этих параметров на $\pm 50\%$ от их номинального значения.

14. Дать количественную оценку изменения области устойчивости в плоскости параметров (T_3, T_4) при изменении коэффициентов усиления K_1 и K_2 на $\pm 50\%$.

Список использованных источников

1. Стребуляев С.Н., Васин Д.Ю. Использование системы аналитических вычислений Maple для решения задач прикладной математики: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007.
2. Стребуляев С.Н., Миронова Д.А. Компьютерное моделирование в задачах прикладной математики (часть 1). Электронное учебно-методическое пособие, ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2017
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. Москва : Издательство «НАУКА», 1967.
4. Стребуляев С.Н. Исследование устойчивости системы электропривода. Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского, №4, Н.Новгород, 2014.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов - М.: Наука, 1966. - 766с.
6. Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования. / М.А. Айзерман - М.: Наука, 1966. – 452 с.
7. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для вузов. – 2-е издание переработанное и дополненное / Е.П. Попов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 302с.
8. Чиликин М.Г. Основы автоматизированного электропривода. /М.Г. Чиликин, М.М. Соколов, В.П.Терехов - М.: Энергия, 1974. – 568с.
9. Михайлов О.П. Динамика электромеханического привода металлорежущих станков. / О.П.Михайлов -М.: Машиностроение, 1989 – 224с.

Приложение 1

```
> #подключение библиотек
restart : with(plots) : with(linalg) : with(StringTools) : with(PolynomialTools) :

#a[1], a[2], b[1], b[2], c[1], c[2], d[1], d[2], d[3], T[1], T[2], T[3], T
[4], T[5], K[1], K[2], C[m], C[e]
> #список переменных: a[1], a[2], b[1], b[2], c[1], c[2], d[1], d[2], d[3], T[1], T[2], T[3],
T[4], T[5], K[1], K[2], C[m], C[e]
```

```
> #процедура, отображающая области устойчивости по заданным параметрам ;
```

```
Plotting:=proc( )
```

```
local phi, den, den1, j, g, st1, st2, tmp, cnt, i, max, List_st, List_unst, koeff2, koeff1,
Koeffnum1min, Koeffnum1max, Koeffnum2min, Koeffnum2max, deg, h1, w1, k1, k2, a21,
b21, a22, b22, nmax, r, subsparm1, tmp1, tmp2, k12, m2, m1, num1, num2, dendif,
subsparm, t1, t2, params, params1, str1, str12, str2, maxRe, label1, label2, par1, par2, qn, qv,
q, Pol, a2min, a2max, b2min, b2max, flag;
```

```
#задание характеристического полинома
```

```
dendif := T5 p6 b2 d3 T2 T4 + (T5 b2 d3 T4 + T5 b1 d3 T2 T4 + T5 b2 d2 T2 T4 + T5 b2 d3 T2) p5
+ (Ce Cm T3 b2 d3 T2 + T5 b1 d3 T2 + T5 b1 d2 T2 T4 + T5 b2 d1 T2 T4 + T5 b2 d3 + T5 b2 d2 T2
+ T5 b1 d3 T4 + T5 b2 d2 T4) p4 + (Ce Cm T3 b1 d3 T2 + T5 b1 d2 T4 + Ce Cm T3 b2 d2 T2
+ K1 T1 T3 T5 c2 b2 + T5 b2 d1 T4 + T5 b1 d2 T2 + T5 b2 d1 T2 + T5 b2 d2 + T5 b1 d3
+ Ce Cm T3 b2 d3 + T5 b1 d1 T2 T4) p3 + (Ce Cm T3 b1 d2 T2 + Ce Cm T3 b1 d3 + T5 b1 d2
+ Ce Cm T3 b2 d2 + K2 Cm T1 T3 a2 c2 + T5 b1 d1 T4 + T5 b1 d1 T2 + Ce Cm T3 b2 d1 T2
+ K1 T1 T3 T5 c1 b2 + K1 T1 T3 T5 c2 b1 + T5 b2 d1) p2 + (Ce Cm T3 b2 d1 + K2 Cm T1 T3 a1 c2
+ T5 b1 d1 + Ce Cm T3 b1 d1 T2 + K1 T1 T3 T5 c1 b1 + Ce Cm T3 b1 d2 + K2 Cm T1 T3 a2 c1) p
+ K2 Cm T1 T3 a1 c1 + Ce Cm T3 b1 d1 :
```

```
#задание массива с наименованием параметров
```

```
params := Array([a[1], a[2], b[1], b[2], c[1], c[2], d[1], d[2], d[3], T[1], T[2], T[3],
T[4], T[5], K[1], K[2], C[m], C[e]]) :
```

```
#задание массива с номинальными значениями параметров
```

```
subsparm := Array([0.47, 0.00564, 0, 0.012, 7.3, 0.121, 0.12, 0.019228, 0.000012342, 20.0,
0.00167, 2.857, 0.016, 0.057, 0.05, 0.5, 1.125, 1.125]) :
subsparm1 := Array([0.47, 0.00564, 0, 0.012, 7.3, 0.121, 0.12, 0.019228, 0.000012342, 20.0,
0.00167, 2.857, 0.016, 0.057, 0.05, 0.5, 1.125, 1.125]) :
```

```
#получение варьируемых параметров от пользователя
```

```
par1 := Maplets:-Tools:-Get('Select1(value)');
```

```

par1 := convert(par1, string);
par2 := Maplets:-Tools:-Get( 'Select22(value)');
par2 := convert(par2, string);

```

#подстановка начальных значений всех параметров, кроме тех, в плоскости которых будем определять область устойчивости;

```

for i from 1 to 18 do
  tmp := params[i];
  tmp1 := convert(tmp, string);
  k12 := convert(i, string);

  if par1 = tmp1 then
    str1 := convert(params[i], string);
    str1 := Select(IsIdentifier, str1);
    str1 := cat(str1, "1");
    str1 := convert(str1, symbol);
    subparam[i] := str1;
    num1 := i;
    label1 := params[num1];
  end if;

  if par2 = tmp1 then
    str2 := convert(params[i], string);
    str2 := Select(IsIdentifier, str2);
    str2 := cat(str2, "2");
    str2 := convert(str2, symbol);
    subparam[i] := str2;
    num2 := i;
    label2 := params[num2];
  end if;

  dedef := subs(params[i] = subparam[i], dedef);
end do;

deg := degree(dedef, p);
den := subs([str1 = a2, str2 = b2], dedef);

```

#задание коэффициентов вариации параметров

```

Koeffnum1min := Maplets:-Tools:-Get('field_a2_1'::algebraic);
Koeffnum1max := Maplets:-Tools:-Get('field_a2_2'::algebraic);
Koeffnum2min := Maplets:-Tools:-Get('field_b2_1'::algebraic);
Koeffnum2max := Maplets:-Tools:-Get('field_b2_2'::algebraic);
Koeffnum1max := Koeffnum1max·0.01 + 1;
Koeffnum2max := Koeffnum2max·0.01 + 1;
Koeffnum1min := 1 - Koeffnum1min·0.01;
Koeffnum2min := 1 - Koeffnum2min·0.01;

```

#вычисление ширины и высоты графика

```

h1 := Maplets:-Tools:-Get( 'Plotter1(height)':: algebraic);
w1 := Maplets:-Tools:-Get( 'Plotter1(width)':: algebraic);

```

#задание числа шагов для коэффициентов для каждой переменной;

```
cnt := Maplets:-Tools:-Get('Num_dots'::algebraic);  
h1 := max( $\frac{1.4 \cdot w1}{cnt}$ ,  $\frac{1.4 \cdot h1}{cnt}$ );  
h1 := evalf(h1);  
h1 := round(trunc(h1));
```

#вычисление шага изменения коэффициента при варьируемых параметрах;

```
st1 :=  $\frac{(\text{Koeffnum1max} - \text{Koeffnum1min})}{cnt}$ ;  
st2 :=  $\frac{(\text{Koeffnum2max} - \text{Koeffnum2min})}{cnt}$ ;
```

#задание массивов выходных данных;

```
koeff1 := array(1 .. cnt + 1, 1 .. cnt + 1);  
#массив значений множителя при первом параметре;  
koeff2 := array(1 .. cnt + 1, 1 .. cnt + 1);  
#массив значений множителя при втором параметре;  
maxRe := array(1 .. cnt + 1, 1 .. cnt + 1);  
# массив значений максимальных реальных частей корней полинома
```

#вычисление корней х.п. при каждом значении варьируемых параметров

```
a21 := subtparam1[num1];  
b21 := subtparam1[num2];  
k1 := Koeffnum1min:# коэффициент вариации при первом параметре  
k2 := Koeffnum2min:# коэффициент вариации при втором параметре
```

#РОБАСТНАЯ УСТОЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

#коэффициенты полинома

```
q[0] := coeff(den, p, 0);  
q[1] := coeff(den, p, 1);  
q[2] := coeff(den, p, 2);  
q[3] := coeff(den, p, 3);  
q[4] := coeff(den, p, 4);  
q[5] := coeff(den, p, 5);  
q[6] := coeff(den, p, 6);
```

```
a2min := k1 · a21;  
a2max := Koeffnum1max · a21;  
b2min := k2 · b21;  
b2max := Koeffnum2max · b21;
```

#Вычисление максимальных и минимальных значений коэффициентов хп

```
for i from 0 to 6 do  
  qn[i] := minimize(q[i], a2 = a2min..a2max, b2 = b2min..b2max);  
  qv[i] := maximize(q[i], a2 = a2min..a2max, b2 = b2min..b2max);  
end do;
```

#Вычисление полиномов Харитонова

```
Pol[1] := qn[0] + qn[1] * p + qv[2] * p^2 + qv[3] * p^3 + qn[4] * p^4 + qn[5] * p^5
```

```

+ qv[6]*p^6;
Pol[2] := qv[0] + qn[1]*p + qn[2]*p^2 + qv[3]*p^3 + qn[4]*p^4 + qn[5]*p^5
+ qv[6]*p^6;
Pol[3] := qv[0] + qv[1]*p + qn[2]*p^2 + qn[3]*p^3 + qv[4]*p^4 + qv[5]*p^5
+ qn[6]*p^6;
Pol[4] := qn[0] + qv[1]*p + qv[2]*p^2 + qn[3]*p^3 + qv[4]*p^4 + qv[5]*p^5
+ qn[6]*p^6;

```

#Применение теоремы Харитонов

```

flag := evalb(Hurwitz(Pol[1], p) and Hurwitz(Pol[2], p) and Hurwitz(Pol[3], p)
and Hurwitz(Pol[4], p));

```

if flag then

```

Maplets:-Tools:-Set('RobLabel(caption)' = "Система робастно устойчива");

```

else

```

Maplets:-Tools:-Set('RobLabel(caption)' = "Система робастно НЕустойчива");

```

end if;

построение области устойчивости в плоскости двух входных параметров

```

for i to cnt + 1 do

```

```

a22 := a21 * k1; #варьирование первого параметра

```

```

k2 := Koeffnum2min;

```

```

for j to cnt + 1 do

```

```

b22 := b21 * k2; #варьирование второго параметра b2

```

```

den1 := subs([a2 = a22, b2 = b22], den);

```

```

#подстановка проварьированных значений параметров

```

```

r := solve(den1, p); # нахождение корней полинома

```

```

nmax := 1;

```

```

for g from 2 to deg do

```

```

if Re(r[g]) > Re(r[nmax]) then

```

```

nmax := g # вычисление корня х.п. с максимальной реальной частью

```

```

end if

```

```

end do;

```

```

maxRe[i, j] := Re(r[nmax]);

```

```

#сохранение значения корня с максимальной реальной частью

```

```

koeff1[i, j] := a22 : #сохранение значения коэффициента при a2

```

```

koeff2[i, j] := b22 : #сохранение значения коэффициента при b2

```

```

k2 := k2 + st2 : # увеличение коэффициент при a2

```

```

end do:

```

```

k1 := k1 + st1 : #увеличение коэффициент при b2

```

```

end do:

```

#формирование массивов значений параметров,

при которых система устойчива и при которых неустойчива

```

List_st := [ ];

```

```

List_unst := [ ];

```

```

for i to cnt + 1 do
  for j to cnt + 1 do

    if (maxRe[i, j] > 0) then
      List_unst := [op(List_unst), [coeff1[i, j], coeff2[i, j]]]
    else
      List_st := [op(List_st), [coeff1[i, j], coeff2[i, j]]]
    end if

  end do;
  j := 1;
end do;

#построение итогового графика областей устойчивости в плоскости выбранных
#параметров

m2 := plot( [ [subparam1[num1], subparam1[num2]] ], color = black, style = point, symbol
= solidcircle, symbolsize = 22 ) : #чёрная точка где параметры по умолчанию

if List_unst = [ ] then
  m1 := plot(List_st, color = green, style = point, symbol = solidbox, symbolsize = h1 ) :
else
  m1 := plot( [List_st, List_unst], color=[green, red], style = point, symbol = solidbox,
symbolsize = h1 ) :
end if :

display( [m1, m2], labels = [label1, label2], labelfont = [TIMES,BOLD,12], thickness = 3 );

end proc:

```

```

[ > read("Vara2b233.maplet");

```

"BYE!"

(1)

Приложение 2

> restart : with(PolynomialTools) :

> #Передаточная функция регулятора скорости

$$w_1 := \frac{a_1 + a_2 \cdot p}{b_1 + b_2 \cdot p}$$

$$w_1 := \frac{p a_2 + a_1}{p b_2 + b_1} \quad (1)$$

> #Передаточная функция регулятора тока

$$w_2 := \frac{c_1 + c_2 \cdot p}{d_1 + d_2 \cdot p + d_3 \cdot p^2}$$

$$w_2 := \frac{p c_2 + c_1}{p^2 d_3 + p d_2 + d_1} \quad (2)$$

> #Передаточная функция тиристорного преобразователя

$$w_3 := \frac{T_1}{1 + T_2 \cdot p}$$

$$w_3 := \frac{T_1}{p T_2 + 1} \quad (3)$$

> #Передаточная функция цепи якоря двигателя

$$w_4 := \frac{T_3}{1 + T_4 \cdot p}$$

$$w_4 := \frac{T_3}{p T_4 + 1} \quad (4)$$

> #Передаточная функция электродвигателя

$$w_5 := \frac{1}{T_5 \cdot p}$$

$$w_5 := \frac{1}{T_5 p} \quad (5)$$

> #Общая передаточная функция

$$F := \frac{C_m \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5}{1 + C_e \cdot C_m \cdot w_4 \cdot w_5 + K_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 + K_2 \cdot C_m \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot w_5} :$$

> F := simplify(F) :

> F := collect(denom(F), p)

$$F := p^6 T_2 T_4 T_5 b_2 d_3 + (T_2 T_4 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_3) p^5 + (C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_5 b_2 d_2 + T_4 T_5 b_1 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_2 + T_5 b_2 d_3) p^4 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_2 + T_4 T_5 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_3 + T_5 b_2 d_2) p^3 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_1) \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 \\
& + T_2 T_5 b_1 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_1 + T_5 b_1 d_2 + T_5 b_2 d_1) p^2 + (C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_1 \\
& + C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_2 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_1 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_1 \\
& + T_5 b_1 d_1) p + C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1
\end{aligned}$$

> #Номинальные значения параметров системы

> parameters := [a₁ = 0.47, a₂ = 0.00564, b₁ = 0, b₂ = 0.012, c₁ = 7.3, c₂ = 0.121, d₁ = 0.12, d₂ = 0.019228, d₃ = 0.000012342, T₁ = 20, T₂ = 0.00167, T₃ = 2.857, T₄ = 0.016, T₅ = 0.057, K₁ = 0.005, K₂ = 0.05, C_e = 1.125, C_m = 1.125]

parameters := [a₁ = 0.47, a₂ = 0.00564, b₁ = 0, b₂ = 0.012, c₁ = 7.3, c₂ = 0.121, d₁ = 0.12, d₂ = 0.019228, d₃ = 0.000012342, T₁ = 20, T₂ = 0.00167, T₃ = 2.857, T₄ = 0.016, T₅ = 0.057, K₁ = 0.005, K₂ = 0.05, C_e = 1.125, C_m = 1.125] (7)

> #Выбираем интересующие параметры

> VarNames := [K₁, K₂, C_e]

VarNames := [K₁, K₂, C_e] (8)

#

> VarPos := []:

> VarValues := []:

> for i from 1 to nops(VarNames) do

 for j from 1 to nops(parameters) do

 if lhs(parameters[j]) = VarNames[i] then VarValues := [op(VarValues), rhs(parameters[j])]; VarPos := [op(VarPos), j];

 end if;

 end do;

end do;

> subparams := subsop(VarPos[1] = NULL, VarPos[2] = NULL, VarPos[3] = NULL, parameters) :

> f := subs(subparams, F)

f := 2.255683162 10⁻¹³ p⁶ + 5.005890252 10⁻¹⁰ p⁵ + (7.949613643 10⁻¹⁰ C_e (1.1)

+ 2.430300974 10⁻⁷) p⁴ + (0.000001714520727 C_e + 0.004729134960 K₁

+ 0.0000146023056) p³ + (0.0007493436738 C_e + 0.2853114480 K₁

+ 0.04386894930 K₂ + 0.00008208) p² + (0.00462834000 C_e + 6.302384865 K₂) p

+ 220.5532575 K₂

> VarPos := []:

> #Решаем систему {Re(F(p = I·omega)) = 0, Im(F(p = I·omega)) = 0}

> U := collect(evalc(Re(subs(p = I·omega, f))), omega)

U := -2.255683162 10⁻¹³ ω⁶ + (7.949613643 10⁻¹⁰ C_e + 2.430300974 10⁻⁷) ω⁴ + (-0.2853114480 K₁ - 0.04386894930 K₂ - 0.00008208 - 0.0007493436738 C_e) ω² (9)

$$+ 220.5532575 K_2$$

$$\begin{aligned} > V := \text{collect}(\text{evalc}(\text{Im}(\text{subs}(p = I \cdot \text{omega}, f))), \text{omega}) \\ V := 5.005890252 \cdot 10^{-10} \omega^5 + (-0.004729134960 K_1 - 0.0000146023056 \\ - 0.000001714520727 C_e) \omega^3 + (0.00462834000 C_e + 6.302384865 K_2) \omega \end{aligned} \quad (10)$$

$$> S := \text{solve}(\{U=0, V=0\}, \{\text{VarNames}[\]\})$$

$$S := \left\{ C_e = C_e K_1 \right. \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\omega^2 (14641. \omega^2 + 5.3290000 \cdot 10^7)} \left(8.528691542 \cdot 10^{-17} \left(1.699504285 \cdot 10^{13} \omega^6 \right. \right.$$

$$\left. - 5.809137888 \cdot 10^{16} \omega^4 C_e + 6.459807676 \cdot 10^{17} \omega^4 - 3.426918484 \cdot 10^{21} \omega^2 C_e \right.$$

$$\left. + 2.236873572 \cdot 10^{21} \omega^2 - 8.446720500 \cdot 10^{23} C_e \right), K_2 =$$

$$- \frac{1}{14641. \omega^2 + 5.3290000 \cdot 10^7} \left(5.516430274 \cdot 10^{-19} \left(1.364688313 \cdot 10^{11} \omega^6 \right. \right.$$

$$\left. - 4.809516254 \cdot 10^{14} \omega^4 C_e - 1.287617095 \cdot 10^{17} \omega^4 + 3.907729161 \cdot 10^{20} \omega^2 C_e \right.$$

$$\left. - 4.833257544 \cdot 10^{20} \omega^2 + 1.689344100 \cdot 10^{23} C_e \right) \}$$

#

```
> for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    if VarNames[i] = lhs(S[j]) then VarPos := [op(VarPos), j];
    if lhs(S[j]) = rhs(S[j]) then par := i; end
  if;
  end if;
  end do;
end do;
```

> #Строим границу области устойчивости - поверхность,
разбивающую параллелепипед на две области

> #В следующей строке выведется переменная,
от которой решение зависит параметрически

> VarNames[par]

C_e (12)

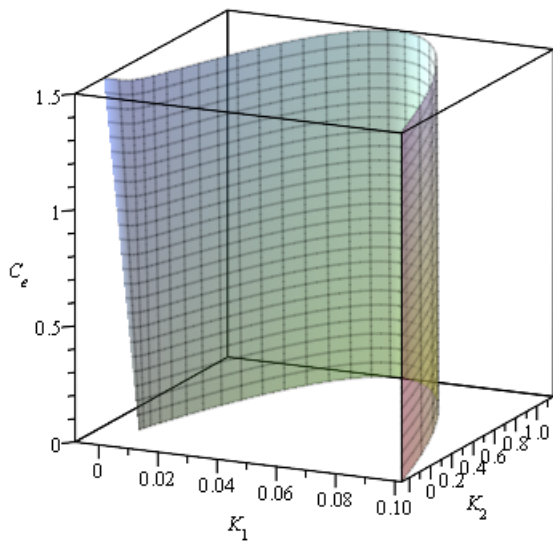
> # ``(*) Решение параметрически зависит от двух параметров: омега и параметра выше.
Манипулируя их значениями можно менять вид графика


```
> #Зададим интервал изменения этой переменной
> Interval := 0..1.5
Interval := 0..1.5 (13)
```

```
>  $\omega_k := 1000$ 
 $\omega_k := 1000$  (14)
```

```
> omega[h] := 0;
 $\omega_h := 0$  (15)
```

```
> plot3d( [rhs(S[VarPos[1]]), rhs(S[VarPos[2]]), rhs(S[VarPos[3]]) ],  $\omega = \text{omega}[h]$ 
.. $\omega_k$ VarNames[par] = Interval, labels = [VarNames[1], VarNames[2], VarNames[3]],
orientation = [-65, 75, 0], axes = boxed, transparency = 0.7)
```



```
>
> #Проверяем внутреннюю точку большей области на устойчивость
> G := subs(parameters, f)
G := 2.255683162 10-13 p6 + 5.005890252 10-10 p5 + 2.439244289 10-7 p4
+ 0.00004017681622 p3 + 0.004545096338 p2 + 0.3203261257 p + 11.02766288 (16)
```

```
> if Hurwitz( $G, p$ ) = true then print(В выбранной точке полином устойчив)
    else print(В выбранной точке полином не устойчив) end if
    В выбранной точке полином устойчив
<
```

(17)

Сергей Николаевич Стребуляев

Мария Сергеевна Петрова

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (часть 2)**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.