

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

А.А. Дубков  
Н.В. Агудов

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для  
студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки  
03.03.03 “Радиофизика”

Нижний Новгород  
2016

УДК 517.442  
ББК В161.2  
Д79

Д79 Дубков А.А., Агудов Н.В. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. - 36 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **А.В. Якимов**

В учебно-методическом пособии приведены основные свойства преобразования Лапласа с доказательствами, лежащие в основе метода операционного исчисления. Рассмотрено большое количество примеров применения этих свойств для отыскания изображений по Лапласу различных сигналов. В конце даны задания для самостоятельной работы и ответы к ним.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов радиофизического факультета, обучающихся по направлению 03.03.03 “Радиофизика” и изучающих курс “Интегралы, зависящие от параметра, и операционное исчисление”.

Ответственные за выпуск:  
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,  
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**,  
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 517.442  
ББК В161.2  
Д79

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

# Введение

В второй половине XIX века многие математики (в том числе и в России) занимались *символическим* исчислением, в основе которого лежит построение математического анализа как системы формальных операций над символом  $p = d/dt$ , где  $t$  - независимая переменная. Символическое исчисление оказалось довольно удобным для решения различных прикладных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями, о чем свидетельствует, например, вышедшая в 1862 году в Киеве обстоятельная монография русского математика М. Е. Ващенко-Захарченко “Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений”. Его популяризации в конце XIX - начале XX века в значительной мере поспособствовал английский ученый О. Хевисайд, использовавший это исчисление в электротехнических расчетах. Труды Хевисайда положили начало систематическому применению символического исчисления к решению физических и технических задач. Однако широко развитое в трудах Хевисайда операционное исчисление не получило должного математического обоснования, и многие его результаты оставались недоказанными из-за отрицательного отношения к новому методу со стороны математиков того времени.

Строгое обоснование символическое или, как теперь его называют, *операционное* исчисление нашло в двадцатых годах прошлого столетия в трудах Т. Бромвича, Д. Карсона и др. Они связали этот метод с известным из теории функций комплексного переменного *методом интегральных преобразований*, который с успехом применяли еще Коши, Лаплас и др. При этом символ  $p$  получил новое толкование, как комплексное переменное  $p = s + i\sigma$ , а вместе с ним новую трактовку получил и сам операционный метод как метод, основанный на *преобразовании Лапласа*.

Операционное исчисление позволяет решать такие математические задачи как: вычисление несобственных интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, решение интегральных уравнений и уравнений в частных производных, и т.п.

# 1. Преобразование Лапласа. Определение и область существования

**Определение.** Изображением по Лапласу комплексно-значной функции  $f(t)$  называют функцию комплексного переменного  $p = s + i\sigma$ , определяемую как

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Для преобразования (1) используют символическую запись

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(t).$$

При этом  $f(t)$  называют *функцией-оригиналом* или просто *оригиналом*. Предполагается, что оригинал удовлетворяет следующим трем условиям:

(a)  $f(t) \equiv 0$  для  $t < 0$ ;

(b)  $f(t)$  удовлетворяет условию Липшица-Гельдера всюду на оси  $t > 0$  за исключением отдельных точек, где оригинал может иметь разрывы первого рода (при этом считается, что на любом конечном интервале таких точек конечное число): для  $\forall t > 0 \exists A > 0, \exists \alpha : 0 < \alpha \leq 1$  и  $\exists \tau_0 > 0$  такие, что

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq A |\tau|^\alpha \quad (2)$$

для  $\forall \tau : |\tau| \leq \tau_0$ ;

(c)  $f(t)$  возрастает не быстрее показательной функции, т.е.  $\exists M > 0$  и  $\exists s_0 \geq 0$  такие, что для  $\forall t > 0$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}. \quad (3)$$

Нижняя грань чисел  $s_0$  называется показателем роста оригинала  $f(t)$ , и  $s_0 = 0$  для ограниченных функций.

С физической точки зрения первое условие оправдано тем, что в роли параметра  $t$  обычно выступает время. Дифференциальные же уравнения, описывающие разнообразные физические процессы, решают с заданными начальными условиями. Поэтому можно полагать, что история процесса до момента начала наблюдения "защита" в начальных условиях. Любая непрерывно-дифференцируемая функция удовлетворяет условию Липшица-Гельдера (2) с  $\alpha = 1$ , а условие (3) для физических процессов всегда справедливо.

Простейшим оригиналом является единичная функция Хэвисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что умножение любой функции  $\varphi(t)$  на  $1(t)$  "гасит" эту функцию для  $t < 0$  и оставляет неизменной для  $t > 0$ . Если функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям (b) и (c), то новая функция  $\varphi(t) 1(t)$  будет оригиналом для

преобразования Лапласа. Таким образом, реальный класс функций для преобразования Лапласа может быть существенно расширен:  $\sin \omega t \cdot 1(t)$ ,  $t^n 1(t)$ ,  $e^{\lambda t} 1(t)$ , ... Для простоты далее мы будем опускать множитель  $1(t)$ , условившись, что все функции обращаются в нуль для  $t < 0$ .

Перед изучением свойств преобразования заметим, что изображение по Лапласу (1) является несобственным интегралом, зависящим от комплексного параметра  $p$ .

### Теорема об области существования изображения.

Для всякого оригинала  $f(t)$  изображение по Лапласу  $F(p)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  (см. Рис. 1) и является в этой полуплоскости

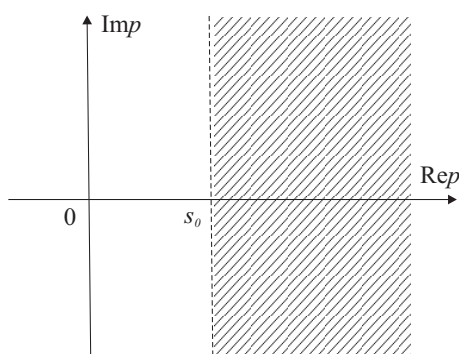


Рис. 1: Область существования изображения.

аналитической функцией.

### Доказательство.

Докажем сначала, что интеграл (1) сходится абсолютно в области  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ . В силу общего признака сравнения и условия (3) имеем

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt < M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt.$$

Итак, для  $s > s_0$

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| < \frac{M}{s - s_0}. \quad (5)$$

Для доказательства существования производной несобственного интеграла (1) по параметру  $p$  необходимо убедиться в равномерной сходимости интеграла

$$J(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt$$

в области  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Выберем произвольное положительное действительное число  $s_1$  из условия:  $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ . Тогда, в соответствии с достаточным признаком Вейерштрасса равномерной сходимости получаем

$$|J(p)| \leq \int_0^{\infty} t |f(t)| e^{-s_1 t} dt < M \int_0^{\infty} t e^{-(s_1 - s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1 - s_0)^2} < \infty,$$

что и доказывает возможность дифференцирования по параметру  $p$  под знаком интеграла (1), т.е. существование производной изображения

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt \quad (6)$$

в области  $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ . В силу произвольности выбора  $s_1$  мы и доказали аналитичность изображения в области определения  $\operatorname{Re} p > s_0$ .

Замечание. Из неравенства (5) вытекает, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что изображение  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ , оставаясь внутри угла

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta,$$

где  $\delta$  - сколь угодно малое положительное число. Если же функция  $F(p)$  аналитична в бесконечно удаленной точке  $p = \infty$ , то  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  по любому пути.

## 2. Основные свойства преобразования

Приведем ряд простых соотношений, составляющих аппарат операционного метода. Будем обозначать далее через  $F(p)$ ,  $G(p)$ ,  $H(p)$ , ... изображения по Лапласу оригиналов  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$ , ... Нам также для иллюстрации свойств преобразования потребуются изображения по Лапласу простейших оригиналов, а именно, функции Хевисайда (4) и экспоненты. Из (1) легко находим

$$1(t) \doteq \frac{1}{p}, \quad e^{p_0 t} \doteq \frac{1}{p - p_0}. \quad (8)$$

Перейдем к изучению основных свойств преобразования Лапласа, демонстрируя попутно на примерах технику оперирования ими.

### 1. Линейность.

Для любых комплексных чисел  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p). \quad (9)$$

Заметим, что соотношение (9) является следствием линейности интеграла (1).

В качестве примера найдем изображения простейших тригонометрических функций. В соответствии с формулами Эйлера и соотношениями (8), (9) получаем

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \\ \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

## 2. Теорема подобия.

Для  $\forall \alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (11)$$

### Доказательство.

Подстановка  $f(\alpha t)$  в формулу (1) и замена переменного  $\alpha t = \tau$  приводит к результату (11)

$$\int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau/\alpha} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

## 3. Теорема запаздывания.

Для  $\forall \tau > 0$

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p). \quad (12)$$

### Доказательство.

Поскольку по свойству (а) оригинала:  $f(t - \tau) = 0$  для  $t < \tau$  (см. Рис. 2), то

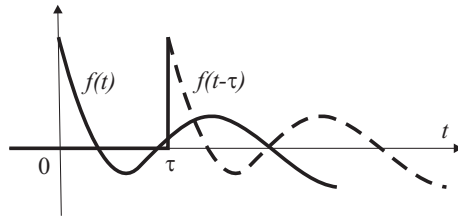


Рис. 2: Запаздывающий оригинал.

$$\int_0^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(\theta) e^{-p(\tau + \theta)} d\theta = e^{-p\tau} F(p).$$

Свойство (12) удобно применять для функций, которые на разных участках задаются различными выражениями. Найдем, например, изображение по Лапласу ступенчатой функции. Как видно из Рис. 3, данный оригинал можно

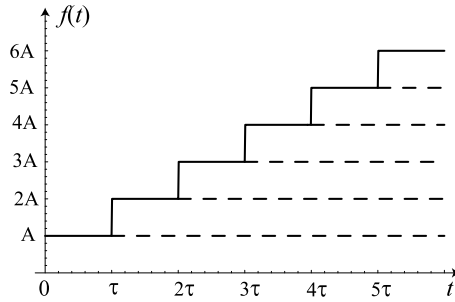


Рис. 3: Ступенчатая функция.

представить в виде суперпозиции запаздывающих функций Хевисайда

$$f(t) = A[1(t) + 1(t - \tau) + 1(t - 2\tau) + \dots] = A \sum_{n=0}^{\infty} 1(t - n\tau).$$

Тогда в соответствии с формулой (8), свойством линейности (9) и теоремой запаздывания (12), получаем

$$F(p) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-pn\tau}}{p} = \frac{A}{p(1 - e^{-p\tau})}.$$

При выводе учтено, что знаменатель геометрической прогрессии  $|e^{-p\tau}| < e^{-s_0\tau} \leq 1$ .

В качестве второго примера выявим особенности преобразования по Лапласу произвольной функции периода  $T$ . Замечая, что

$$f(t) - f(t - T) = g(t),$$

где функция-импульс  $g(t) = f(t) 1_{(0,T)}(t)$ , а через

$$1_{\Omega}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Omega, \\ 0, & t \notin \Omega \end{cases}$$

обозначена индикаторная функция множества  $\Omega$ , с помощью свойства линейности (9) и теоремы запаздывания (12) получаем

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (13)$$

Таким образом, отличительной особенностью периодических функций является наличие характерного знаменателя у их изображений по Лапласу.



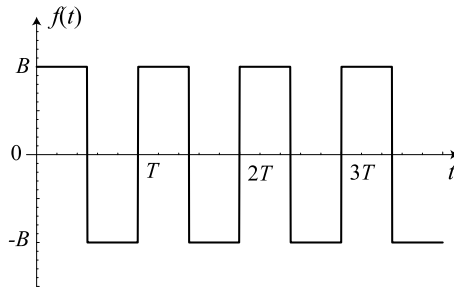


Рис. 4: Меандр.

В частности, для меандра на Рис. 4 согласно (8) и (12) имеем

$$g(t) = B \left[ 1(t) - 2 \cdot 1\left(t - \frac{T}{2}\right) + 1(t - T) \right],$$

и, следовательно,

$$G(p) = \frac{B}{p} \left( 1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT} \right) = \frac{B}{p} \left( 1 - e^{-pT/2} \right)^2.$$

Подставляя этот результат в формулу (13), приходим окончательно к

$$G(p) = \frac{B(1 - e^{-pT/2})}{p(1 + e^{-pT/2})} = \frac{B}{p} \tanh \frac{pT}{4}.$$

Перед дальнейшим изложением заметим, что преобразование Лапласа обладает свойством двойственности, а именно, каждому свойству оригиналов соответствует аналогичное свойство изображений. Это отчетливо видно из первых двух свойств: линейности (9) и теоремы подобия (11). Двойственным к теореме запаздывания служит следующее свойство.

#### 4. Теорема сдвига.

Для любого комплексного числа  $p_0$

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0). \quad (14)$$

Доказывается свойство (14) элементарно путем подстановки его левой части в интеграл (1).

#### 5. Дифференцирование оригинала.

Если функция  $f(t)$  непрерывна при  $t > 0$ , и  $f'(t)$ , или в более общем случае  $f^{(n)}(t)$ , являются оригиналами, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (15)$$

или

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0), \quad (16)$$

где под  $f^{(k)}(0)$  понимается предел справа в т.  $t = 0$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t).$$

### Доказательство.

Докажем сначала соотношение (15). Подставляя производную  $f'(t)$  в (1) и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + pF(p).$$

Поскольку  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , то справедлива оценка (см. (3))

$$|f(t) e^{-pt}| < M e^{-(s-s_0)t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В результате верхняя подстановка обращается в нуль, и мы приходим к доказываемому соотношению (15).

Для отыскания изображения второй производной применим формулу (15) дважды, т.е.

$$f''(t) = [f'(t)]' \doteq p [pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Далее по методу математической индукции находим

$$f^{(n)}(t) = [f^{(n-1)}(t)]' \doteq p \left[ p^{n-1} F(p) - \sum_{k=0}^{n-2} p^{n-2-k} f^{(k)}(0) \right] - f^{(n-1)}(0).$$

Раскрывая скобки, приходим к соотношению (16).

При  $f(0) = 0$  формула (15) переходит в

$$f'(t) \doteq pF(p),$$

и дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на  $p$ . Поэтому оператор дифференцирования  $d/dt$  действительно можно заменять символом  $p$  как в операционном исчислении, но только при оперировании с изображениями по Лапласу. Двойственным к данному свойству является такое.

### 6. Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на  $(-t)$ , т.е.

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t). \quad (17)$$

**Доказательство.**

Как уже было установлено, изображение  $F(p)$  является в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  аналитической функцией, и ее можно дифференцировать по  $p$  по правилам дифференцирования интеграла, зависящего от параметра. Применяя в (1)  $n$ -кратное дифференцирование под знаком интеграла, находим

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-pt} dt,$$

что и доказывает свойство (17).

Рассмотрим ряд примеров на применение свойств 5 и 6. Дифференцируя  $n$  раз по  $p$  изображение (8) функции Хевисайда и принимая во внимание (17), приходим к

$$\frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \doteq (-t)^n 1(t),$$

откуда находим изображение по Лапласу степенной функции

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (18)$$

Выполнение аналогичной процедуры со вторым соотношением (8) дает

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}.$$

Из формул (10) для тригонометрических функций путем однократного дифференцирования по  $p$  легко установить Лаплас-образы сигналов, отвечающих резонансной раскачке колебаний (см. Рис. 5),

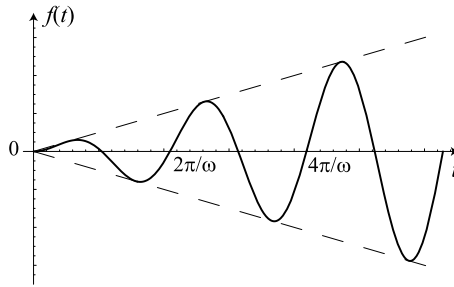


Рис. 5: Резонансный сигнал.

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

## 7. Пределные (тауберовы) теоремы.

Если  $f(t)$  является оригиналом вместе со своей производной  $f'(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0), \quad (19)$$

где  $p \rightarrow \infty$  внутри угла:  $|\arg p| < \pi/2 - \delta$  для  $\forall \delta > 0$ . Если, кроме того,  $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty), \quad (20)$$

где  $p \rightarrow 0$  внутри того же угла:  $|\arg p| < \pi/2 - \delta$ .

### Доказательство.

Докажем первую из предельных теорем. Согласно общему свойству (7) изображение любого оригинала должно обращаться в нуль при  $p \rightarrow \infty$ . Выбирая в качестве оригинала первую производную  $f'(t)$  и учитывая теорему (15), имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0)] = 0,$$

что и доказывает предельное соотношение (19).

Для доказательства второй теоремы (20) заметим, прежде всего, что существование конечного предела  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  означает ограниченность функции и, как следствие, равенство нулю ее показателя роста:  $s_0 = 0$ . Но тогда изображение определено во всей правой полуплоскости:  $\operatorname{Re} p > 0$ , и мы имеем право переходить к пределу  $p \rightarrow 0$  внутри угла:  $|\arg p| < \pi/2 - \delta$ , где  $\delta$  - любое положительное число. Запишем формулу (15) в виде равенства

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

и перейдем к пределу при  $p \rightarrow 0$ . Поскольку функция  $f'(t)$  по условиям теоремы является оригиналом, то согласно доказанной ранее теореме об области существования интеграл в левой части сходится равномерно по параметру  $p$  в области  $\operatorname{Re} p > 0$ , и, следовательно можно переходить к пределу под знаком несобственного интеграла. В результате получаем

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(0)],$$

что и доказывает соотношение (20).

Как уже отмечалось, преобразование Лапласа является весьма эффективным инструментом решения линейных дифференциальных уравнений. Так, например, в ряде задач математической физики, электродинамики, акустики

приходится сталкиваться с дифференциальным уравнением второго порядка для функции  $y(t)$  вида

$$y'' + \frac{1}{t}y' + y = 0, \quad (21)$$

называемым уравнением Бесселя. Его "физическим" решением при начальных условиях

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (22)$$

является функция Бесселя нулевого порядка  $J_0(t)$ , не выражаемая в элементарных функциях. Продемонстрируем элегантный способ решения уравнения (21) в Лаплас-образах. Для этого перепишем сначала уравнение Бесселя в более удобной форме

$$(ty')' + ty = 0.$$

Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и учитывая свойства (15), (17), приходим к

$$p \left\{ -\frac{d}{dp} [pY - y(0)] \right\} - \frac{dY}{dp} = 0,$$

т.е. к следующему дифференциальному уравнению первого порядка

$$(1 + p^2) \frac{dY}{dp} + pY = 0,$$

где  $Y(p) \doteq y(t)$ . Решение этого простого уравнения с разделяющимися переменными таково

$$Y(p) = \frac{c}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Для определения неизвестной постоянной  $c$  применим первую тауберovu теорему. Принимая во внимание начальные условия (21), находим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = c \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = c = y(0) = 1,$$

и таким образом окончательно

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Интересно, что изображение по Лапласу специальной функции оказалось элементарной функцией.

## 8. Интегрирование оригинала.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $p$ , т.е.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (23)$$

## Доказательство.

Легко убедиться, что функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (24)$$

удовлетворяет вышеуказанным трем свойствам, предъявляемым к оригиналу. В самом деле, как следует из (24) и условия (a),  $g(t) \equiv 0$  для  $t < 0$ . В то же время, функция  $g(t)$  непрерывна, поскольку у оригинала  $f(t)$  допускаются только скачки первого рода. Это означает, что  $|g(t + \tau) - g(t)| \leq A|\tau|$ , и условие Липшица-Гельдера (2) также выполнено. Наконец, согласно (3)

$$|g(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < M \int_0^t e^{s_0\tau} d\tau < \frac{M}{s_0} e^{s_0 t},$$

т.е. функция  $g(t)$  имеет тот же самый показатель роста, что и функция  $f(t)$ . Тогда по свойству дифференцирования оригинала (15) имеем

$$g'(t) = f(t) \doteq F(p) = pG(p) - g(0).$$

В соответствии с (24)  $g(0) = 0$ , и мы приходим к утверждению (23). Рассмотрим теперь двойственное к (23) свойство.

## 9. Интегрирование изображения.

Если интеграл  $\int_p^\infty F(q) dq$  по любому пути, целиком лежащему в области  $\operatorname{Re} p > s_0$ , сходится, то он является изображением функции  $f(t)/t$ , т.е.

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq. \quad (25)$$

## Доказательство.

Для доказательства соотношения (25) заметим, что согласно (1)

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty dq \int_0^\infty f(t) e^{-qt} dt. \quad (26)$$

Предположим, что путь интегрирования  $(p, \infty)$  целиком лежит в полуплоскости  $\operatorname{Re} q \geq a > s_0$ , и дадим оценку внутреннего интеграла

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-qt} dt \right| < M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0} < \infty.$$

Отсюда по достаточному признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость данного интеграла по параметру  $q$  в области  $\operatorname{Re} q > s_0$ . Но тогда можно сменить в (26) порядок интегрирования. В результате имеем

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-qt} dq = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-pt}}{t} dt,$$

что и доказывает свойство (25).

Рассмотрим несколько примеров на интегральные свойства (23) и (25). Из свойства линейности (9) и второго из соотношений (8) находим

$$e^{bt} - e^{at} \doteq \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}.$$

Применяя формулу (25), получаем

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \doteq \int_p^\infty \left( \frac{1}{q-b} - \frac{1}{q-a} \right) dq = \ln \frac{q-b}{q-a} \Big|_p^\infty = \ln \frac{p-a}{p-b}.$$

Определим изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau,$$

являющегося ограниченной функцией (см. Рис. 6). Полагая в первом из со-

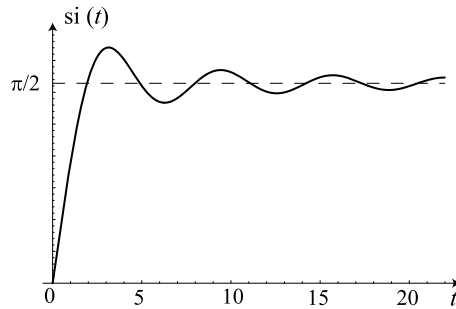


Рис. 6: Интегральный синус.

отношений (10)  $\omega = 1$ , находим

$$\sin t \doteq \frac{1}{1+p^2}.$$

Далее применяем теорему о интегрировании изображения (25), учитывая, что путь интегрирования целиком лежит в области  $\operatorname{Re} p > 0$  или  $|\arg p| < \pi/2$ ,

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{1+q^2} = \operatorname{arccot} p,$$

а следом теорему (23) об интегрировании оригинала

$$\text{si } t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{\text{arccot } p}{p}.$$

## 10. Теорема о свертке.

Эта свойство преобразования Лапласа является одним из важнейших с точки зрения практических приложений. Приведем сначала общее определение свертки двух функций.

**Определение.** Сверткой двух функций  $f(t)$  и  $g(t)$  называют функцию вида

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (27)$$

где символ  $\otimes$  является условным обозначением свертки.

Для функций-оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$  с учетом того, что  $f(t) \equiv 0$  и  $g(t) \equiv 0$  для  $t < 0$  из соотношения (27) получаем

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (28)$$

### Теорема.

Свертке оригиналов соответствует произведение изображений

$$f(t) \otimes g(t) \doteq F(p) G(p). \quad (29)$$

### Доказательство.

Покажем сначала, что свертка оригиналов (28) снова является оригиналом, т.е. удовлетворяет свойствам (a)–(c). Как следует из (28),  $f(t) \otimes g(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ . В то же время, свертка является непрерывной функцией и, следовательно, удовлетворяет условию Липшица-Гельдера (2). Остается доказать справедливость неравенства (3). В силу условий на оригиналы  $f(t)$  и  $g(t)$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}, \quad |g(t)| < N e^{s_1 t}$$

имеем следующую оценку для абсолютной величины свертки

$$|f(t) \otimes g(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right| < MN \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_1 (t - \tau)} d\tau \leq MN t e^{\alpha t},$$

где  $\alpha = \max \{s_0, s_1\}$ . Отсюда и вытекает справедливость условия (3)

$$|f(t) \otimes g(t)| < Q e^{(\alpha + \varepsilon)t},$$



где  $Q = MN$ , а  $\varepsilon > 0$  - сколь угодно малое число.

Докажем теперь справедливость равенства (29). Согласно (1)

$$f(t) \otimes g(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-pt} dt$$

и производя замену переменной  $t - \tau = \theta$  во внутреннем интеграле, приходим к доказываемой формуле (29)

$$f(t) \otimes g(t) \doteq \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(\theta) e^{-p\theta} d\theta = F(p) G(p).$$

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы о свертке. В радиотехнических задачах имеют дело с линейными четырехполюсниками (см. Рис.7), задаваемыми импульсной переходной характеристикой  $h(t)$ . При этом

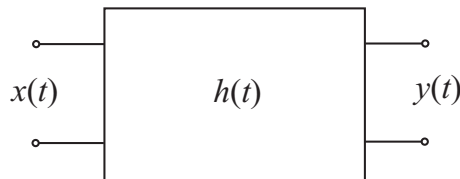


Рис. 7: Линейный четырехполюсник.

сигнал  $y(t)$  на выходе четырехполюсника может быть выражен через входной сигнал  $x(t)$  с помощью интеграла Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (30)$$

представляющего собой свертку (28) функций  $h(t)$  и  $x(t)$ . Как видно из (30),  $h(t)$  представляет собой отклик системы на короткий  $\delta$ -импульс  $x(t) = \delta(t)$ . В соответствии с теоремой (29) из (30) получаем простую алгебраическую связь изображений входного и выходного сигналов

$$Y(p) = K(p) X(p), \quad (31)$$

где  $K(p) \doteq h(t)$  называют коэффициентом передачи линейного четырехполюсника. Коэффициент передачи  $K(p)$  может быть легко рассчитан из схемы четырехполюсника, основными линейными элементами которой являются индуктивности, емкости и сопротивления. Так, например, для  $LRC$ -цепочки

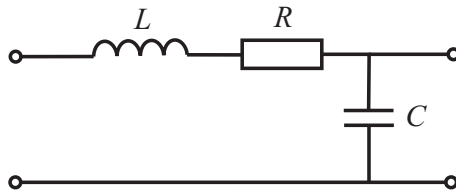


Рис. 8: Простейшая  $LRC$ -цепочка.

(см. Рис.8), учитывая уравнения связи напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$  на индуктивности  $L$  и емкости  $C$

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{du}{dt}$$

и теорему о дифференцировании оригинала (15), можно заменить указанные инерционные элементы эквивалентными комплексными сопротивлениями  $pL$  и  $1/(pC)$  соответственно. В результате расчет фильтра сводится к расчету цепочки из трех сопротивлений, и мы получаем

$$K(p) = \frac{1/(pC)}{pL + R + 1/(pC)} = \frac{1}{p^2LC + RCp + 1}.$$

Именно такую символическую методику и применял Хевисайд для решения электротехнических задач.

Теорема о свертке эффективно применяется и к решению интегральных уравнений вида

$$y(t) - \lambda \int_0^t g(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t),$$

называемых интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода с разностным ядром. Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и учитывая теорему о свертке (29), легко находим изображение неизвестного решения

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda G(p)}.$$

### 3. Дробные производные и их изображение по Лапласу

В последние годы значительное внимание в отечественной и зарубежной научной литературе стало уделяться аппарату дробных производных в связи с различными приложениями, в частности, с необходимостью адекватного описания задач аномальной диффузии. Вышел целый ряд монографий, посвященных дробному дифференцированию и интегрированию (см., например, [4]-[6]). Нельзя сказать, что это совершенно новая область анализа. Еще

Лейбниц в письме маркизу де Лопиталю, которое датировано 30.09.1695, ставил вопрос об определении дробных дифференциалов. Существуют разные приемы введения дробной производной. Как можно, например, простым способом подсчитать значение

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}t?$$

Найдем  $m$ -ую производную степенной функции  $t^n$ , где  $m$  и  $n$  - натуральные числа ( $m < n$ ),

$$\frac{d^m}{dt^m}t^n = n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}t^{n-m}.$$

Теперь в этом соотношении формально заменим натуральный индекс  $m$  вещественным  $\beta$ , предварительно заменив факториал в знаменателе гамма-функцией  $\Gamma(n-m+1)$ . В результате придем к

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta}t^n = \frac{n!}{\Gamma(n-\beta+1)}t^{n-\beta}, \quad (32)$$

Полагая в (32)  $\beta = 1/2$ ,  $n = 1$  и учитывая свойства гамма-функции, имеем

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}t = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\sqrt{t}}{(1/2)\Gamma(1/2)} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}. \quad (33)$$

Адамар предложил использовать данную процедуру при определении дробной производной произвольной функции  $f(t)$ . Разложим  $f(t)$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки  $t_0$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t-t_0)^n,$$

а затем применим к этому соотношению оператор дробного дифференцирования  $d^\beta/dt^\beta$ . Принимая во внимание правило (32), найдем

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta}f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{\Gamma(n-\beta+1)} (t-t_0)^{n-\beta}. \quad (34)$$

В формуле (34) без ограничения общности считается, что порядок дробной производной  $0 < \beta < 1$ , и гамма-функция остается в области определения. Как видно из (34), в отличие от обычной производной дробная производная постоянной  $f(t) = c$  не обращается в нуль, но имеет степенную зависимость

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta}c = \frac{c(t-t_0)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}. \quad (35)$$

Заметим, что определение дробной производной (34) неудобно для практического использования в силу неопределенности параметра  $t_0$  и необходимости каждый раз подсчитывать сумму.

К более подходящему определению можно придти через оператор дробного интегрирования. Рассмотрим интегральный оператор

$$\hat{I}_t = \int_0^t \{ \dots \} d\tau.$$

Применяя данный оператор  $n$  раз к функции  $f(t)$ , получаем

$$\hat{I}_t^n f(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n$$

или с учетом формулы Коши

$$\hat{I}_t^n f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Заменяя здесь, как и ранее, факториал гамма-функцией, можно ввести оператор дробного интегрирования соотношением

$$\hat{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (36)$$

где  $0 < \alpha < 1$ . В указанной области параметра  $\alpha$  интеграл в (36) сходится для ограниченных функций  $f(t)$ . Поскольку

$$\frac{d}{dt} \hat{I}_t f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

то  $d/dt = \hat{I}_t^{-1}$ , и, казалось бы, можно определить дробную производную как

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \hat{I}_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1+\beta}} d\tau.$$

Однако в этом случае интеграл расходится на верхнем пределе. Поэтому дробную производную необходимо ввести более корректно

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \frac{d}{dt} \hat{I}_t^{1-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^\beta} d\tau, \quad (37)$$

где  $0 < \beta < 1$ . Формула (37) называется *дробной производной Римана-Лиувилля*. Как видно из этого определения, оператор дробного дифференцирования представляет собой интегро-дифференциальный оператор с разностным степенным ядром. Нетрудно показать, что общепринятое определение (37) совпадает с определением Адамара (34) при  $t_0 = 0$ , однако его преимущества в сравнении с последним очевидны. Заметим также, что в 1969 г.

итальянским математиком Капуто было введено отличное от (37) определение дробной производной

$$D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau, \quad (38)$$

которое сохраняет присущее обычным производным свойство равенства нулю производной от константы.

Выясним, чему соответствует дробная производная (37) в изображении по Лапласу. Применяя теорему о дифференцировании оригинала (15) и теорему о свертке (29), находим

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \doteq \frac{pF(p) L\{t^{-\beta}\}}{\Gamma(1-\beta)}. \quad (39)$$

Для отыскания изображения  $L\{t^{-\beta}\}$  функции  $t^{-\beta}$  применим формальный прием. Воспользуемся ранее полученным соотношением для степенной функции (18). Заменяя в нем  $n!$  на  $\Gamma(n+1)$  и подставляя  $n = -\beta$ , находим

$$t^{-\beta} \doteq L\{t^{-\beta}\} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}}. \quad (40)$$

Полученный результат, хотя и является правильным, требует строгого доказательства. Воспользуемся определением (1)

$$L\{t^{-\beta}\} = \int_0^\infty t^{-\beta} e^{-pt} dt, \quad 0 < \beta < 1.$$

и произведем в интеграле замену переменного  $q = pt$ , где  $p = re^{i\theta}$  ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ) - фиксированное комплексное число. В результате соотношение перейдет в

$$L\{t^{-\beta}\} = \frac{1}{p^{1-\beta}} \int_\gamma q^{-\beta} e^{-q} dq,$$

где интегрирование в комплексной плоскости  $q$  производится вдоль луча  $\gamma : \arg q = \theta$ , выходящего из начала координат. Рассмотрим изображенный на Рис. 9 замкнутый контур  $C$ , состоящий из дуг  $C'_\varepsilon$  и  $C'_R$  ( $0 \leq \varphi \leq \theta$ ) окружностей  $C_\varepsilon : |q| = \varepsilon$  и  $C_R : |q| = R$ , отрезка  $L_{\varepsilon R}$  действительной оси:  $q = t$  ( $\varepsilon \leq t \leq R$ ) и отрезка  $\gamma_{\varepsilon R}$  луча  $\gamma$  (для определенности полагаем, что  $0 < \theta < \pi/2$ ). Внутри данного контура подынтегральная функция  $q^{-\beta} e^{-q}$  является аналитической, и поэтому по теореме Коши

$$\int_C q^{-\beta} e^{-q} dq = \int_{\gamma_{\varepsilon R}} q^{-\beta} e^{-q} dq + \int_{C'_R} q^{-\beta} e^{-q} dq + \int_{\Gamma_{\varepsilon R}} q^{-\beta} e^{-q} dq + \int_{C'_\varepsilon} q^{-\beta} e^{-q} dq = 0.$$

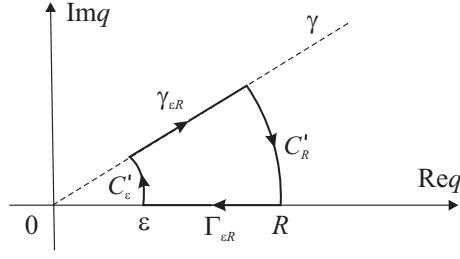


Рис. 9: Контур интегрирования в комплексной плоскости  $q$ .

Оценим интегралы по дугам окружностей контура  $C$ , проходимого по ходу часовой стрелки. Для большей дуги имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C'_R} q^{-\beta} e^{-q} dq \right| &\leq R^{1-\beta} \int_0^\theta \exp \{-Rr \cos \varphi\} d\varphi \leq \\ &\leq R^{1-\beta} \int_0^\theta \exp \left\{ -R \left( 1 - \frac{2\varphi}{\pi} \right) \right\} d\varphi \leq \frac{\pi}{2R^\beta}, \end{aligned}$$

откуда видно, что интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Для меньшей дуги аналогичным образом находим

$$\left| \int_{C'_\varepsilon} q^{-\beta} e^{-q} dq \right| \leq \varepsilon^{1-\beta} \int_0^\theta \exp \{-\varepsilon \cos \varphi\} d\varphi \leq \varepsilon^{1-\beta} \theta.$$

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  и этот интеграл оказывается предельно мал. Расписывая интеграл по отрезку  $\Gamma_{\varepsilon R}$  действительной оси

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} q^{-\beta} e^{-q} dq = - \int_\varepsilon^R t^{-\beta} e^{-t} dt$$

и переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  в уравнении для контурного интеграла, получаем с учетом определения гамма-функции

$$L \{t^{-\beta}\} = \frac{1}{p^{1-\beta}} \int_0^\infty t^{-\beta} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}}.$$

Подставляя (40) в (39), приходим к ожидаемому результату

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \doteq p^\beta F(p). \quad (41)$$

Аналогичным образом из определения Капуто (37) получаем

$$D_t^\beta f(t) \doteq \frac{pF(p) - f(0)}{p^{1-\beta}} = p^\beta F(p) - \frac{f(0)}{p^{1-\beta}}. \quad (42)$$

Из соотношений (40)-(42) вытекает следующая формула связи дробных производных Капуто и Римана-Лиувилля

$$D_t^\beta f(t) = \frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) - \frac{f(0)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}. \quad (43)$$

Согласно (43), для функции  $f(t) = t$  данные производные совпадают, и поэтому из определения (38) имеем

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} t = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta} = \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}.$$

Полагая здесь  $\beta = 1/2$ , приходим к ранее полученному результату (33).

## 4. Обращение преобразования Лапласа. Формула Римана-Меллина

Как мы уже видели ранее на примерах, многие дифференциальные и интегральные уравнения легко решаются методом преобразования Лапласа, но возникает необходимость обратного восстановления оригинала по изображению. На этот вопрос отвечает основная теорема операционного исчисления.

### Теорема.

Если функция  $f(t)$  является оригиналом, удовлетворяющим условиям (a) – (c), а  $F(p)$  служит ее изображением, то в любой точке  $t$ , где  $f(t)$  удовлетворяет условию Липшица-Гельдера, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (44)$$

причем интеграл берется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re} p = a > s_0$  и понимается в смысле главного значения по Коши

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} F(p) e^{pt} dp.$$

Соотношение (44) называют *формулой Римана-Меллина*. Заметим, что значения оригинала  $f(t)$  в точках разрыва не могут быть вычислены по формуле (44), поскольку разрывы первого рода, согласно (1), не влияют на изображение  $F(p)$ . Доказательство данной теоремы достаточно громоздко, и его можно найти в литературе по функциям комплексного переменного (см., например, [2]). Приведем еще одну теорему об условиях, достаточных для того, чтобы заданная функция комплексного переменного служила изображением некоторого оригинала.

## Теорема.

Если функция  $F(p)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ , стремится к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$  в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$  равномерно относительно  $\arg p$ , и интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$$

абсолютно сходится, то  $F(p)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Формула Римана-Меллина (44) не очень удобна для практических вычислений. Чаще пользуются теоремами, относящимися к разложению в ряды оригиналов или изображений и объединенных под общим названием *теоремы разложения*.

## Первая теорема разложения.

Если функция комплексного переменного  $F(p)$  аналитична в окрестности  $|p| > R$  бесконечно удаленной точки и имеет в ней разложение в ряд Лорана вида

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (45)$$

то оригиналом  $F(p)$  служит комплекснозначная функция, представимая рядом ( $t > 0$ )

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \quad (46)$$

При этом понимается, что  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

## Доказательство.

Докажем сначала, что функциональный ряд (46) удовлетворяет свойствам оригинала. Переобозначим  $p = 1/q$  в соотношении (45). Тогда функция  $F(1/q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$  будет аналитической в круге  $|q| < 1/R$ , и пользуясь неравенствами Коши для коэффициентов  $|c_n| < MR^n$  ( $M > 0$ ), имеем следующую оценку для ряда (46) в области  $0 \leq t \leq T < \infty$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{(n-1)!} T^{n-1} < MR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(RT)^{n-1}}{(n-1)!} = MR \cdot e^{RT}.$$



Отсюда по достаточному признаку Вейерштрасса следует, что степенной ряд (46) равномерно сходится в области  $0 \leq t < \infty$ . Это означает непрерывность функции  $f(t)$ , т.е. справедливость для нее неравенства Липшица-Гельдера (2). В то же время, из приведенной оценки вытекает и условие (3). Домножая обе части соотношения (46) на  $e^{-pt}$  и проводя почленное интегрирование ряда (в силу его равномерной сходимости) по области  $(0, \infty)$ , приходим с учетом ранее установленного соотношения (18) к формуле (45) для  $\operatorname{Re} p > R$ .

Приведем несколько примеров на применение первой теоремы разложения. Рассмотрим функцию комплексного переменного  $F(p) = e^{-1/p}/p^{n+1}$ , где  $n$  - натуральное число. Разлагая ее в ряд по степеням  $1/p$ , имеем

$$\frac{e^{-1/p}}{p^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Сопоставление с соотношением (45) показывает, что данная функция удовлетворяет условиям первой теоремы разложения и поэтому является изображением оригинала (ср. с (46))

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} t^{n+k}.$$

Полагая в этом соотношении  $t = (\tau/2)^2$ , приходим к

$$f\left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k}.$$

Полученный ряд представляет собой разложение функции Бесселя  $n$ -го порядка  $J_n(\tau)$ . Таким образом,

$$f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}),$$

т.е.

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \doteq \frac{e^{-1/p}}{p^{n+1}}.$$

Решим операционным методом дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(\alpha t) \tag{47}$$

при начальном условии:  $y(0) = 1$  для  $\alpha > 0$ , входившее в знаменитый минимум Ландау для поступающих в МФТИ. В случае  $\alpha = 1$  решение уравнения (47) легко находится:  $y(t) = e^t$ . Заметим, что при  $\alpha < 1$  решение имеет показатель роста, меньший 1, поскольку значение производной определяется

значением функции в предшествующий момент времени. В этом случае изображение по Лапласу решения существует, т.к. функция  $y(t)$  имеет конечный показатель роста. Для  $\alpha > 1$ , наоборот, решение должно нарастать быстрее  $e^t$ , и может нарушиться условие (3), накладываемое на оригинал. Перейдем в уравнении (47) к изображению по Лапласу, применив теорему подобия (11) и теорему о дифференцировании оригинала (15). В результате с учетом начального условия получим

$$pY(p) - 1 = \frac{1}{\alpha} Y\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (48)$$

Будем искать аналитическое решение уравнения (48) в виде разложения (45). Подставляя разложение, приходим к

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n-1}} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \alpha^{n-1}}{p^n}.$$

Выделяя первое слагаемое ряда в левой части уравнения, а затем группируя ряды, имеем

$$c_1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+1} - c_n \alpha^{n-1}}{p^n} = 0.$$

Отсюда в силу произвольности  $p$  получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда (45)

$$c_{n+1} = c_n \alpha^{n-1}, \quad c_1 = 1.$$

Решая последовательно данное рекуррентное соотношение, находим коэффициенты разложения

$$c_{n+1} = c_n \alpha^{n-1} = c_{n-1} \alpha^{(n-1)+(n-2)} = \dots = c_1 \alpha^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = \alpha^{n(n-1)/2}.$$

Подставляя полученное выражение в разложение (46), получаем одно из возможных решений дифференциального уравнения (47) в форме степенного ряда

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n(n-1)/2}}{n!} t^n, \quad (49)$$

сумма которого не выражается в элементарных функциях. Применяя достаточный признак Даламбера, определим область сходимости знакопостоянного функционального ряда (49). Подсчитаем значение предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n(n+1)/2} t^{n+1} n!}{\alpha^{n(n-1)/2} t^n (n+1)!} = t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n+1} = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1, \\ 0, & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, мы действительно нашли решение дифференциального уравнения (47) в области значений параметра  $0 < \alpha \leq 1$ . Графики функции (49) в полулогарифмическом масштабе для различных значений параметра  $\alpha$  представлены на Рис. 10.

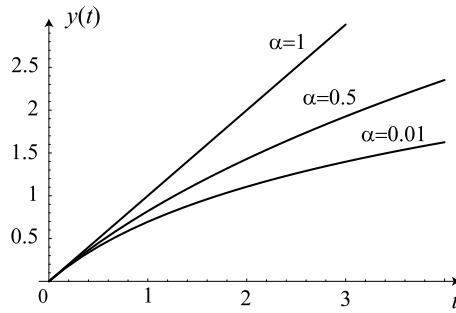


Рис. 10: Графики решения (49) дифференциального уравнения (47) в полупологарифмическом масштабе для различных значений параметра  $\alpha$ .

### Вторая теорема разложения.

Пусть функция  $F(p)$ :

- 1) аналитична в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ ;
- 2) существует система окружностей  $C_n : |p| = R_n, R_1 < R_2 < \dots$ , на которой  $F(p) \rightarrow 0$  при  $R_n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg p$ ;
- 3) для  $\forall a > s_0$  абсолютно сходится

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp.$$

Тогда оригиналом  $F(p)$  служит функция ( $t > 0$ )

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p_k} F(p) e^{pt}, \quad (50)$$

где сумма вычетов берется по всем изолированным особым точкам  $p_k$  функции  $F(p)$  в порядке неубывания их модулей.

### Доказательство.

В силу условий 1-3 справедлива сформулированная выше теорема о достаточных условиях, согласно которой  $F(p)$  является изображением функции (44)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (51)$$

Обозначим через  $C'_n$  часть окружности  $C_n$ , лежащую слева от прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , через  $a \pm ib_n$  - точки пересечения окружности  $C_n$  с этой прямой, а через  $\Gamma_n$  - замкнутый контур, составленный из отрезка  $(a - ib_n, a + ib_n)$  и  $C'_n$  и проходимый против хода часовой стрелки (см. Рис. 11). Тогда очевидно

$$\int_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dp = \int_{a-ib_n}^{a+ib_n} F(p) e^{pt} dp + \int_{C'_n} F(p) e^{pt} dp. \quad (52)$$

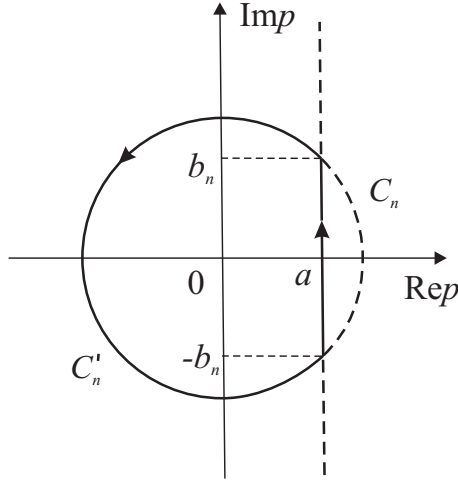


Рис. 11: Выбор контура интегрирования в комплексной плоскости  $p$ .

Для оценки последнего слагаемого сформулируем и докажем одну вспомогательную лемму из теории функций комплексного переменного.

### Лемма Жордана.

Пусть  $\gamma_R$  - дуга окружности  $|p| = R : |\arg p - \varphi_0| \leq \pi/(2\nu)$ , а функция  $G(p)$  удовлетворяет на этой дуге неравенству

$$|G(R \cdot e^{i\varphi})| \leq \varepsilon(R) \exp\{-\alpha R^\nu \cos \nu(\varphi - \varphi_0)\}, \quad \alpha > 0. \quad (53)$$

Тогда, если  $\varepsilon(R) R^{1-\nu} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} G(p) dp = 0. \quad (54)$$

### Доказательство.

Из уравнения дуги  $\gamma_R : p = R \cdot e^{i\varphi}$  находим:  $dp = iR \cdot e^{i\varphi} d\varphi$ , и, следовательно,  $|dp| = R d\varphi$ . В итоге имеем следующую оценку сверху абсолютного значения интеграла (54)

$$\left| \int_{\gamma_R} G(p) dp \right| \leq \int_{\gamma_R} |G(p)| \cdot |dp| = R \int_{\varphi_0 - \pi/(2\nu)}^{\varphi_0 + \pi/(2\nu)} |G(R \cdot e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Применив неравенство (53), далее находим

$$\left| \int_{\gamma_R} G(p) dp \right| \leq \varepsilon(R) R \int_{\varphi_0 - \pi/(2\nu)}^{\varphi_0 + \pi/(2\nu)} \exp\{-\alpha R^\nu \cos \nu(\varphi - \varphi_0)\} d\varphi$$

или (после замены  $\nu(\varphi - \varphi_0) = \pi/2 - \theta$ )

$$\left| \int_{\gamma_R} G(p) dp \right| \leq \frac{2\varepsilon(R) R}{\nu} \int_0^{\pi/2} \exp\{-\alpha R^\nu \sin \theta\} d\theta.$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда окончательно

$$\left| \int_{\gamma_R} G(p) dp \right| \leq -\frac{\pi \varepsilon(R) R^{1-\nu}}{\alpha \nu} \exp \left\{ -\frac{2\theta \alpha R^\nu}{\pi} \right\} \Big|_0^{\pi/2} \leq \frac{\pi \varepsilon(R) R^{1-\nu}}{\alpha \nu}.$$

В силу условия  $\varepsilon(R) R^{1-\nu} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  отсюда и приходим к доказываемому результату.

Вернемся к доказательству второй теоремы разложения. Применим лемму Жордана для оценки интеграла

$$\int_{C'_n} F(p) e^{pt} dp.$$

Согласно второму условию теоремы:  $|F(R_n e^{i\varphi})| \leq \varepsilon(R_n)$  для  $\forall \varphi$ , причем  $\varepsilon(R_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда на части  $C'_n$  окружности  $C_n$  имеем следующую оценку для подынтегральной функции

$$\left| F(R_n e^{i\varphi}) e^{tR_n e^{i\varphi}} \right| \leq \varepsilon(R_n) \exp \{tR_n \cos \varphi\} = \varepsilon(R_n) \exp \{-tR_n \cos(\varphi - \pi)\}.$$

Как видно из Рис. 11 на дуге  $C'_n$  угол  $\varphi$  меняется в следующих пределах

$$|\varphi - \pi| \leq \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{a}{R_n}.$$

Поскольку при  $n \rightarrow \infty$  это неравенство переходит в  $|\varphi - \pi| \leq \pi/2$ , то выполнено условие (53) леммы Жордана с  $\nu = 1$ ,  $R = R_n$ ,  $\alpha = t$  и  $\varphi_0 = \pi$ . Но тогда в соответствии с (54) для  $t > 0$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C'_n} F(p) e^{pt} dp = 0, \quad (55)$$

т.к.  $R_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Наконец, в силу соотношений (51), (52), (55) и основной теоремы о вычетах имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dp = \sum_k \operatorname{res}_{p_k} F(p) e^{pt},$$

где  $p_k$  - изолированные особые точки функции  $F(p)$ , лежащие в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} p < a$ . В силу первого условия теоремы функция  $F(p)$  аналитична в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ , и сумму можно распространить на особые точки функции  $F(p)$ , лежащие во всей комплексной плоскости.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Применяя преобразование Лапласа, найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} y(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0.$$

2. Применяя преобразование Лапласа, найти решение дифференциального уравнения

$$y'''' + 2y'' + y = \sin t$$

с нулевыми начальными условиями.

3. Пользуясь свойством подобия преобразования Лапласа, доказать справедливость соотношения

$$\int_t^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq,$$

где  $f(t) \doteq F(p)$ .

4. Применяя преобразование Лапласа по времени, решить задачу о распространении граничного режима по полубесконечной струне, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < +\infty, \quad t > 0)$$

с нулевыми начальными условиями и граничным условием:  $u(0, t) = \mu(t)$ .

5. Применяя преобразование Лапласа, найти решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-|t-\tau|} y(\tau) d\tau, \quad t > 0, \lambda > 0, y(0) = 1.$$

6. Найти изображение по Лапласу дельта-функции  $\delta(t)$ , пользуясь предельным переходом к ней при  $\Delta \rightarrow 0$  от прямоугольного импульса ширины  $\Delta$  и высоты  $1/\Delta$ . Подобным же методом доказать фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t).$$

7. Решить в изображениях по Лапласу задачу о распространении тепла в тонком стержне длины  $l$ , а именно найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq l, \quad t > 0)$$

с начальным условием:  $u(x, 0) = u_0$  и граничными условиями:  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = u_1$ .

8. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, записать решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)$$

с нулевыми начальными условиями через решение вспомогательной задачи

$$g^{(n)}(t) + a_1 g^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} g'(t) + a_n g(t) = \delta(t).$$

9. Доказать, что если

$$\exists \int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau,$$

то справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} F(p) dp,$$

где  $f(t) \doteq F(p)$ .

10. Применяя преобразование Лапласа по времени, вывести формулу Даламбера для колебаний бесконечной струны, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0)$$

с начальными условиями:  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ .

11. Применяя преобразование Лапласа, найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = \frac{1}{\tau} 1_{(0, \tau)}(t)$$

с нулевыми начальными условиями. Перейти в ответе к пределу  $\tau \rightarrow 0$ .

12. Применяя свойства преобразования, найти изображение по Лапласу одного из интегралов Френеля

$$s(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau.$$

13. Применяя преобразование Лапласа, решить систему дифференциальных уравнений

$$y_0'(t) = -ay_0(t), \quad y_k'(t) + ay_k(t) = ay_{k-1}(t) \quad (a > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

с начальными условиями:  $y_0(0) = 1, \quad y_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$ .

14. Применяя преобразование Лапласа по времени, решить задачу о распространении граничного теплового режима в тонком полубесконечном стержне, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < +\infty, \quad t > 0)$$

с нулевым начальным условием и граничным условием:  $u_x(0, t) = \nu(t)$ .

15. Применяя свойства преобразования, найти изображение по Лапласу функции

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos \tau t}{\tau} d\tau.$$

16. Применяя преобразование Лапласа, найти решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 1$$

с нулевыми начальными условиями.

17. Записать в форме интеграла оригинал, соответствующий изображению  $pF(p)G(p)$ , где  $f(t) \doteq F(p)$  и  $g(t) \doteq G(p)$ .

18. Применяя преобразование Лапласа по времени, найти функцию Грина уравнения теплопроводности, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0)$$

с начальным условием:  $G(x, 0) = \delta(x - x_0)$ .

19. Применяя преобразование Лапласа, найти решение дифференциального уравнения

$$(n+1)y^{(n)} + ty = 0,$$

удовлетворяющее общим начальным условиям:  $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ .

20. Применяя свойства преобразования, найти изображение по Лапласу функции

$$\int_t^{+\infty} \frac{J_0(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где  $J_0(t)$  - функция Бесселя нулевого порядка.



21. Вывести уравнение для изображения по Лапласу функции Бесселя  $n$ -го порядка  $J_n(t)$ .

22. Применяя преобразование Лапласа, решить дифференциальное уравнение

$$y'' + \omega^2 y = A \sin \omega t$$

с начальными условиями:  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ .

23. Найти изображение по Лапласу функции  $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$ .

24. Применяя свойства преобразования, найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} d\tau.$$

25. Найти изображение по Лапласу функции  $f(t) = B |\sin \omega t|$ .

26. Найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

27. Найти изображение по Лапласу функции  $f(t) = A \{t\}$ , где  $\{t\}$  - дробная часть  $t$ .

## ОТВЕТЫ

1.  $y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)$
2.  $y(t) = [(3 - t^2) \sin t - 3t \cos t] / 8$
4.  $u(x, t) = \mu(t - x/a) \cdot 1(t - x/a)$
5.  $y(t) = \cosh \alpha t + \sinh \alpha t / \alpha, \quad \alpha = \sqrt{1 - \lambda}$
6.  $\delta(t) \doteq 1$
7.  $U(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \cdot \frac{\cosh(\sqrt{p}x/a)}{\cosh(\sqrt{p}l/a)}$
8.  $y(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau$
11.  $y(t) = \begin{cases} 2 \sin^2(\omega t/2) / (\omega^2 \tau), & t \leq \tau, \\ 2 \sin(\omega \tau/2) \sin \omega(t - \tau/2) / (\omega^2 \tau), & t > \tau, \end{cases}$   

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$
12.  $S(p) = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}}$
13.  $y_k(t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$
14.  $u(x, t) = -a \int_0^{t-x/a} \nu(\tau) d\tau \cdot 1(t - x/a)$
15.  $\frac{1}{2p^2} \ln(1 + p^2)$
16.  $y(t) = 1 - (1 + t + t^2/2) e^{-t}$
17.  $\int_0^t f'(t - \tau) g(\tau) d\tau + f(0) g(t)$
18.  $G(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right\}$
19.  $Y(p) = (n+1) e^{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \int_p^\infty e^{-q^{n+1}} q^{n-k-1} dq$
20.  $\frac{1}{p} \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)$
21.  $(1 + p^2) Y'' + 3pY' + (1 - n^2) Y = 0$
22.  $y(t) = [y_0 - At/(2\omega)] \cos \omega t + [y_1/\omega + A/(2\omega^2)] \sin \omega t$
23.  $F(p) = \frac{\alpha}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
24.  $F(p) = \frac{1}{p} \ln(1 + p)$
25.  $F(p) = \frac{B\omega}{p^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi p}{2\omega}$
26.  $F(p) = \ln(1 + 1/p)$
27.  $F(p) = \frac{A}{p} [1/p - 1/(e^p - 1)]$

## Список литературы

- [1] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. -М.: Наука, 1971, 288 с.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, 1973, 736 с.
- [3] Евграфов М.А. Аналитические функции. -С-Пб.: Лань, 2008, 447 с.
- [4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.
- [5] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. -М.: Физматлит, 2003, 272 с.
- [6] Учайкин В.В. Метод дробных производных. -Ульяновск: Артишок, 2008, 512 с.

Александр Александрович **Дубков**  
Николай Викторович **Агудов**

## **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА**

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования “Нижегородский государственный университет им.  
Н.И. Лобачевского”.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.