МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.И. Эгамов

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ»

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2019

УДК 519.642.2(075.8)
ББК В161.6я73
Э17
Эгамов А.И. Лабораторная работа «Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных: учебно-метод. пособие / А.И. Эгамов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. – 15 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Н.Ю. Золотых

Учебно-методическое пособие содержит четкую и подробную постановку задачи, требования к написанию программы для выполнения лабораторной работы, избранные материалы лекционных и практических занятий и методы самоконтроля правильности выполнения лабораторной работы. Рекомендуется для студентов направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» по учебной дисциплине «Вычислительные методы».

УДК 519.642.2(075.8)
ББК В161.6я73

Оглавление

Предисловие	4
1. Описание управляемого процесса	5
2. Исследование задачи	6
3. Задание	9
4. Методы самоконтроля части В	11
Литература	14

Предисловие

Лабораторная работа «Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных» является последней и, пожалуй, самой трудной из четырех, запланированных учебным планом, лабораторных работ по курсу «Вычислительные методы» для студентов 3 курса, обучающихся по направлению подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» института информационных технологий, математики и механики ННГУ им.Н.И.Лобачевского. К сожалению, на данном направлении не запланирован курс «Уравнения математической физики». Это накладывает определенные трудности при изучении раздела «методы вычислений решений уравнений с частными производными» в курсе «Вычислительные методы». Именно поэтому возникла идея написания данного учебно-методического пособия, чтобы учащиеся ясно представляли постановку задачи и что от них требуется при выполнении этой лабораторной работы. В настоящем пособии дана четкая и подробная постановка задачи, требования к написанию программы для выполнения лабораторной работы, избранные материалы теоретических исследований, которые могут быть полезны для учащегося, и методы самоконтроля выполнения лабораторной работы. Все то, что необходимо для ее правильного выполнения и успешной сдачи в назначенный срок. Для лучшего понимания и контроля она разделена на две части: часть А и часть В. Первая часть несколько легче и дается как подготовка к части В, хотя, безусловно, также несет определенную учебную нагрузку и не является тривиальной. В связи с существенным ограничением на время проверки преподавателем представляется к проверке только часть В, которая является, в каком-то смысле, исследовательской работой. Особое внимание при проверке лабораторной работы уделяется так называемому «дружелюбному интерфейсу». Пример подобного интерфейса также приведен в данном учебно-методическом пособии.

1. Описание управляемого процесса

Рассмотрим управляемый процесс нагревания стержня [1, с.192]: дан тонкий однородный стержень с теплоизолированными концами длины l. На процесс изменения температуры стержня осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей, например, через стержень пропускается электрический ток или он помещается в электромагнитное поле (индукционный нагрев) и т. п. Построим математическую модель этого процесса.

На множестве $Q=[0,l]\times[0,T]$, $l>0$, $T>0$; найти функцию $y(x,t)$ − температуру стержня − непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x − решение уравнения

$$y'_t(x,t)=a^2 y''_{xx}(x,t)+u(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее (концы теплоизолированы) однородным граничным условиям второго рода

$$y'_x(0,t)=y'_x(l,t)=0 \tag{2}$$

и начальному условию

$$y(x,0)=\varphi(x), \tag{3}$$

где a – константа, функция $\varphi(x)>0$ задает начальное распределение температуры, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,l]$ и удовлетворяет условиям согласования (3) и условию

$$\int_0^l \varphi(x)dx=1. \tag{4}$$

Непрерывная функция $u(x,t)$ – управление с обратной связью, которое представляется в в одном из вариантов:

$$u(x,t)=b(x)y(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,t)=b(x)y(x,t)-y(x,t)\int_0^l b(x)y(x,t)dx, \tag{6}$$

где $b(x)$– управляющая функция, непрерывная на отрезке $[0,l]$.
Управление вида (5) рассматривается при выполнении части А лабораторной работы, а управление вида (6) рассматривается при выполнении части В лабораторной работы.

Наложение условия дважды непрерывной дифференцируемости на отрезке $[0,l]$ объясняется следующим. Во-первых, чтобы решать поставленную задачу одним из самых известных методов – методом Фурье и, чтоб полученный ряд – решение задачи – можно было дифференцировать по t и дважды дифференцировать по x. А во-вторых, как правило, те элементарные функции, которые задаются написанной учащимся программой (и те, которые требуются и в задании), обладают свойством бесконечного дифференцирования, хотя, конечно, для существования решения исходных задач условия на функцию $\varphi(x)$ можно ослабить.

2. Исследование задачи

Для определенности обозначим решение части А: $w(x,t)$.

Теорема 1. *Задача (1)-(4) при* $u(x,t) \equiv 0$, *имеет решение:*

$$w_0(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_i \exp(-\lambda_i^2 t) v_i(x),$$

где собственные числа λ_i *и полная, ортогональная на отрезке [0,l] система косинусов [2]* $v_i(x)$, *удовлетворяющая условию (2):*

$$\lambda_0 = 0, v_0(x) = 1; \ \lambda_i = \frac{\pi i}{l}; v_i(x) = \cos\frac{\pi i x}{l} \equiv \cos\lambda_i x, \ i = \overline{1,+\infty}.$$

Доказательство: [2].

Следствие: Из (4) следует $\varphi_0 = \frac{1}{l}$.

Теорема 2. *Пусть* $P(t) = \int_0^l w(x,t)dx$, *где* $w(x,t)$ *– решение задачи (1)–(5), тогда при сделанных предположениях* $P(t) > 0$ *при* $0 \le t \le T$.

Доказательство: Предположим противное. $P(0) = 1$ (см. условие (4)), $P(t)$ непрерывна, тогда существует $t_0 = \min\{t : P(t) = 0\}$, и при $t < t_0$ верно неравенство

$$\frac{dP}{dt} = \int_0^l w_t'(x,t)dx = \int_0^l a^2 w_{xx}''(x,t)dx + \int_0^l b(x)w(x,t)dx = \int_0^l b(x)w(x,t)dx \ge B_1 P(t),$$

$\min\limits_{x\in[0,l]} |b(x)| = B_1$. Поэтому, по теореме Чаплыгина [3] $P(t) \ge \exp(B_1 t) > 0$ при $t < t_0$. Переходя к пределу по $t \to t_0 - 0$, получим $P(t_0) \ge \exp(B_1 t_0) > 0$. Противоречие. Лемма 1 доказана.

Теорема 3. *Если выбрано управление вида (6), то для любого* $t \in [0,T]$ *для решения задачи (1)-(4), (6) справедливо равенство:*

$$\int_0^l y(x,t)dx = 1. \qquad (6)$$

Доказательство: Интегрируя уравнение (1) с управлением (6), получим

$$\int_0^l y_t'(x,t)dx = \int_0^l b(x)y(x,t)dx, - \int_0^l y(x,t)dx \int_0^l b(x)y(x,t)dx. \qquad (7)$$

Обозначим $\sigma(t) = \int_0^l y(x,t)dx - 1, q(t) = -\int_0^l b(x)y(x,t)dx$, причем $q(t)$ – непрерывна на отрезке $[0,l]$. Тогда дифференциальное уравнение (7) с начальным условием (4) перейдет в задачу Коши

$$\sigma_t'(t) = q(t)\sigma(t),\ \sigma(0) = 0. \qquad (8)$$

Ее решение: $\sigma(t) \equiv 0$, что равносильно (6). Теорема доказана.

Теорема 4. *При замене в уравнении (1) с управлением (5) функции* $b(x)$ *на* $b(x) + c_0$, *где* c_0 *– некоторая константа, новое решение задачи (1)-(5) - функция* $\tilde{w}(x,t)$ *- соотносится с изначальным, функцией* $w(x,t)$, *как*

$$\tilde{w}(x,t) = \exp(c_0 t)w(x,t). \qquad (9)$$

Доказательство: Справедливость теоремы определяется непосредственной проверкой.

Теорема 5. *Решение нелинейной задачи (1)–(4),(6)* $y(x,t)$ *выражается через решение линейной задачи (1)–(5) функцию* $w(x,t)$:

$$y(x,t) = \frac{w(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx}. \qquad (10)$$

Доказательство: По Теореме 2 знаменатель в (10) не обращается в ноль. Проверка граничных и начальных условий очевидна. Дифференцируя (10), имеем

$$y'_t(x,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{w(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx}\right) = \frac{w'_t(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx} - \frac{w(x,t)\left(\int_o^l w'_t(x,t)dx\right)}{\left(\int_0^l w(x,t)dx\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2 w''_{xx}(x,t) + b(x)w(x,t)}{\int_0^l w(x,t)dx} - \frac{w(x,t)}{\left(\int_0^l w(x,t)dx\right)} \frac{\left(\int_0^l b(x)w(x,t)dx\right)}{\left(\int_0^l w(x,t)dx\right)} =$$

$$= a^2 y''_{xx}(x,t) + b(x)y(x,t) - y(x,t)\int_0^l b(x)y(x,t)dx\,.$$

Замечание: Результат Теоремы 3 теперь можно получить как следствие из Теоремы 5.

Теорема 6. *При замене в уравнении (1) с управлением (6) функции* $b(x)$ *на* $b(x)+c_0$, *где* c_0 *– некоторая константа, функция* $y(x,T)$ *не изменится.*

Доказательство: Фактически это следствие из Теоремы 4 и Теоремы 5.

На основании утверждений этих теорем ниже приведены методы самоконтроля для выполнения части B.

3. Задание

Часть А.

1. Составить неявную разностную схему с погрешностью $O\left(\tau + h^2\right)$ [4] для уравнения (1), (5).
2. Учесть условие устойчивости $\frac{a^2\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$. Допускается выбор *a=1*.
3. Определить нулевой слой для будущей разностной схемы из (3).
4.Составить трехточечные разностные производные первого порядка [4] для краевых условий: y_0', y_n' с погрешностью второго порядка.
5. Разработать алгоритм получения численного решения задачи (1)-(3).
6. Полученную систему линейных уравнений привести к трехдиагональной и решить методом прогонки [4] , оформив решение в виде подпрограммы.
7. Написать программу на языке программирования высокого уровня с дружеским интерфейсом для численного решения задачи (1)-(3) и вывода функции $w(x,T)$ на экран в графическом виде. В качестве начальной функции рекомендуется взять $\varphi(x) = \frac{1}{l} + \varphi_1 \cos\frac{\pi x}{l}$, в качестве функции $b(x) = b_1 \cos\frac{\pi x}{l}$, где φ_1, b_1– некие константы.
8. На одном и том же рисунке вывести оси координат, график функции $\varphi(x)$ - синим цветом; график функции - красным цветом.
9. Учесть в оконном меню программы возможность изменения:
   1. длины стержня *l*; времени T;
   2. шага *h* в разностной схеме по координате *x*;
   3. шага τ в разностной схеме по координате *t*;
   4. констант b_0, b_1,φ_1.

Часть В.

1. Определить нулевой слой для будущей разностной схемы из (3).
2. Перед вычислением каждого следующего слоя по формуле Симпсона [4] посчитать интеграл в управлении (5) для значений последнего известного j слоя;

$$I_j = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-4} + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

$n = \frac{l}{h}$ предполагается, что n – четное.

3. Составить неявную разностную схему с погрешностью $O\left(\tau + h^2\right)$ для уравнения (1), (6), учитывая I_j.

4. Учесть, что в данном случае условие устойчивости не доказано. Рекомендуется попробовать: $\frac{a^2\tau}{h^2} < \frac{1}{4}$. Параметр *a* взять как и в части А: *a=1*.

5.Составить трехточечные разностные производные первого порядка для краевых условий: y'_0, y'_n с погрешностью второго порядка.

6. Разработать алгоритм получения численного решения задачи (1)–(3).

7. Полученную систему линейных уравнений привести к трехдиагональной и решить методом прогонки , оформив ее решение в виде подпрограммы на языке программирования высокого уровня .

8. Написать программу на языке программирования высокого уровня с дружеским интерфейсом для численного решения задачи (1)-(3) и вывода функции $y(x,T)$ на экран в графическом виде. В качестве начальной функции рекомендуется взять $\varphi(x) = \frac{1}{l} + \varphi_1 \cos\frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \cos\frac{2\pi x}{l}$ в качестве функции $b(x) = b_0 + b_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_2 \cos\frac{2\pi x}{l}$, где b_0, b_1, b_2, φ_1, φ_2 – некие константы.

9. На одном и том же рисунке вывести оси координат, график функции $\varphi(x)$- синим цветом; график функции $y(x,T)$ - красным цветом.

10. Учесть в оконном меню программы возможность изменения:

1. длины стержня *l*; времени *T*
2. шага *h* в разностной схеме по координате *x*;
3. шага τ в разностной схеме по координате t;
4. константы b_0, b_1, φ_1.

11. Вывести на экран время выполнения данной работы и строку прогресса.

12. Полученную функцию *w(x,T)* в части А нужно разделить на $I = \int_0^l w(x,T)dx$, который нужно посчитать по формуле Симпсона для значений последнего известного слоя (при *t=T*), и вывести полученный график функции $\frac{w(x,T)}{\int_0^l w(x,T)dx}$ на экран светло-зеленым цветом.

13. Поскольку в идеале красный и зеленый график должны совпадать, желательно сделать так, чтобы зеленый график выводился на экран только при дополнительном нажатии «горячей клавиши», например, «пробел».

14. Сдавать нужно только часть В лабораторной работы, часть А необходима для самоконтроля работы студента. Отдельно часть А не принимается!

4. Методы самоконтроля части В

Ниже приводятся свойства решения части Б поставленной задачи, которая является более трудной нежели часть А, и отслеживание правильности построения решения могут вызывать значительные сложности.

1. На концах отрезка в силу (2) график функции численного решения имеет горизонтальные касательные.

2. Из Теоремы 1 следует, что см. рисунок 1, что площадь фигуры, где график функции $\varphi(x)$выше, чем $y(x,T)$равна площади фигуры, где функция $\varphi(x)$ниже, чем $y(x,T)$, то есть, $S_1 = S_2$.

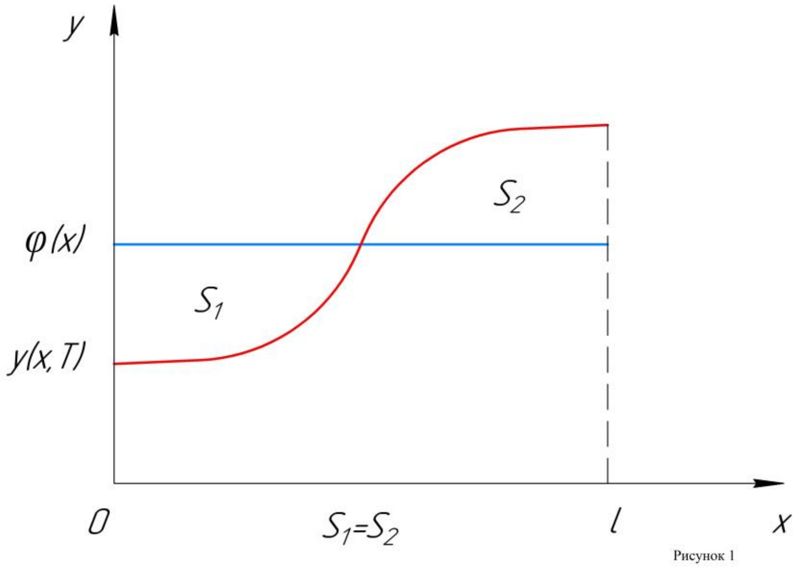

Рисунок 1

3. При замене функции $b(x)$ на $b(x)+c_0$, где c_0 – некоторая константа, функция $y(x,T)$ не изменится.

4. Из Теоремы 5 следует, что зеленый график должен будет находиться «близко» к красному.

5. Далее приводятся примеры скриншотов программы с дружественным интерфейсом (см. рисунки 2 – 5). Предлагаются два варианта. Выбор за вами. Приветствуется свое – более интересное решение. Ниже представлены варианты, каждый – по два скриншота.

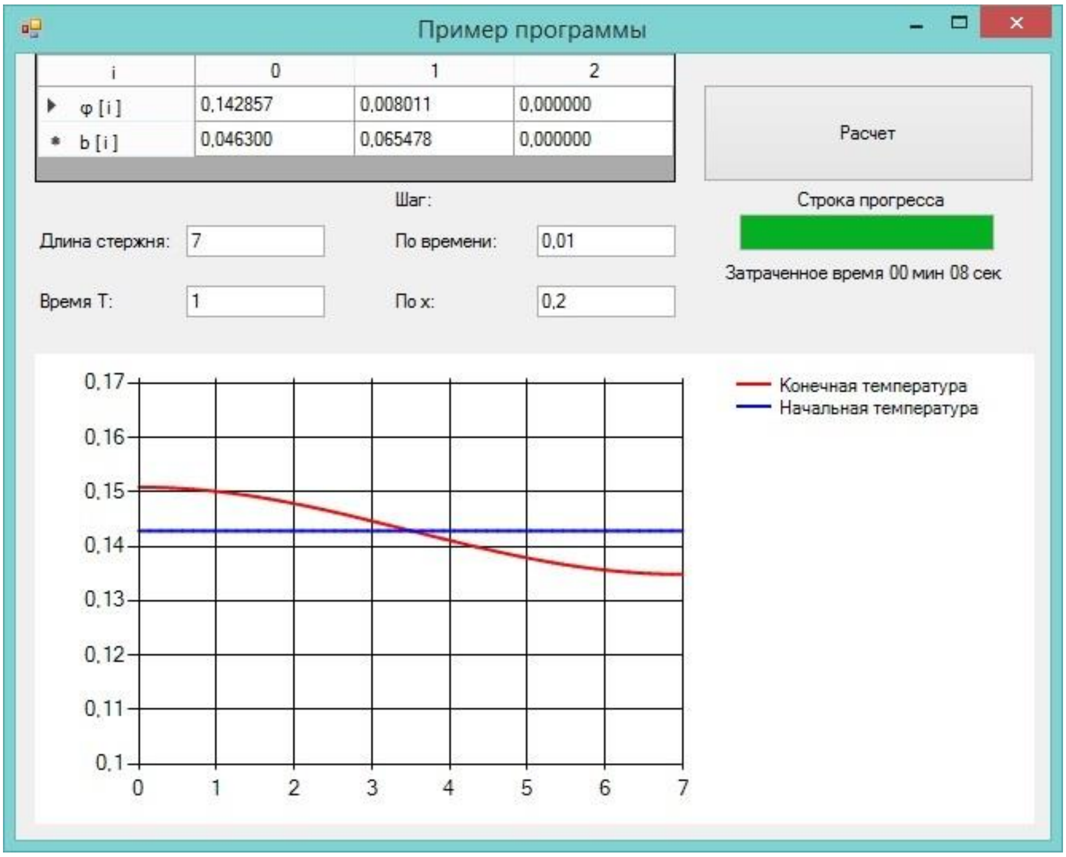

Рисунок 2

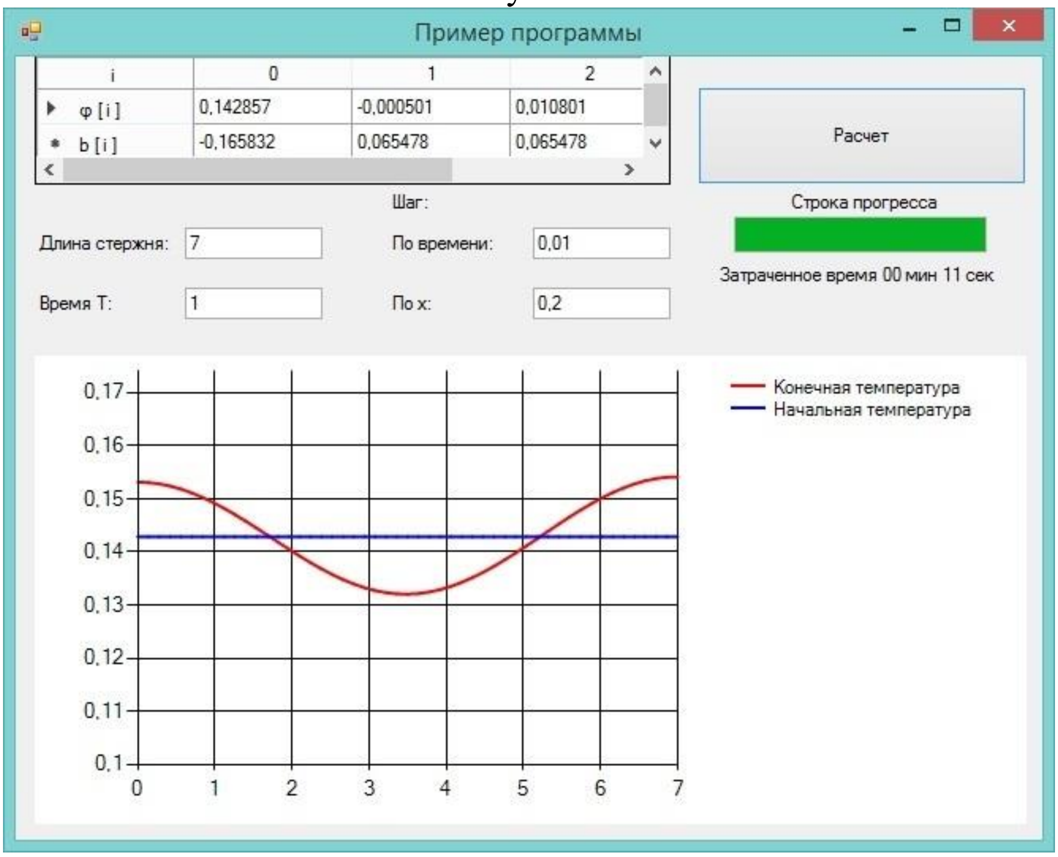

Рисунок 3

Или такой вариант.

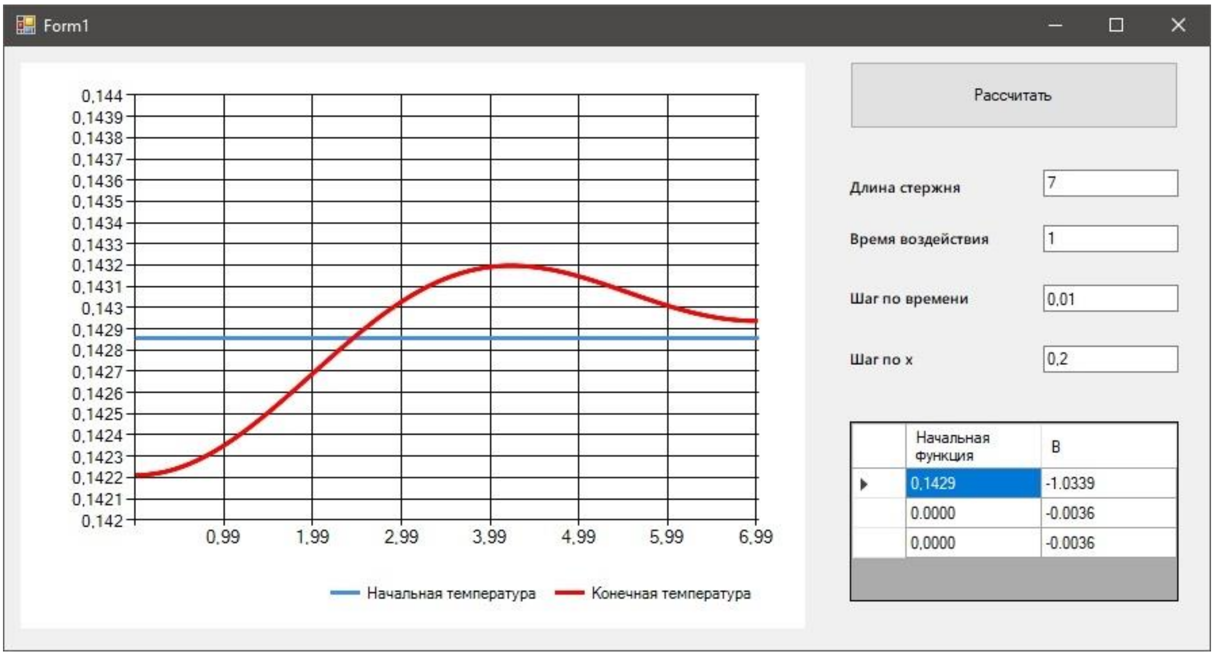

Рисунок 4.

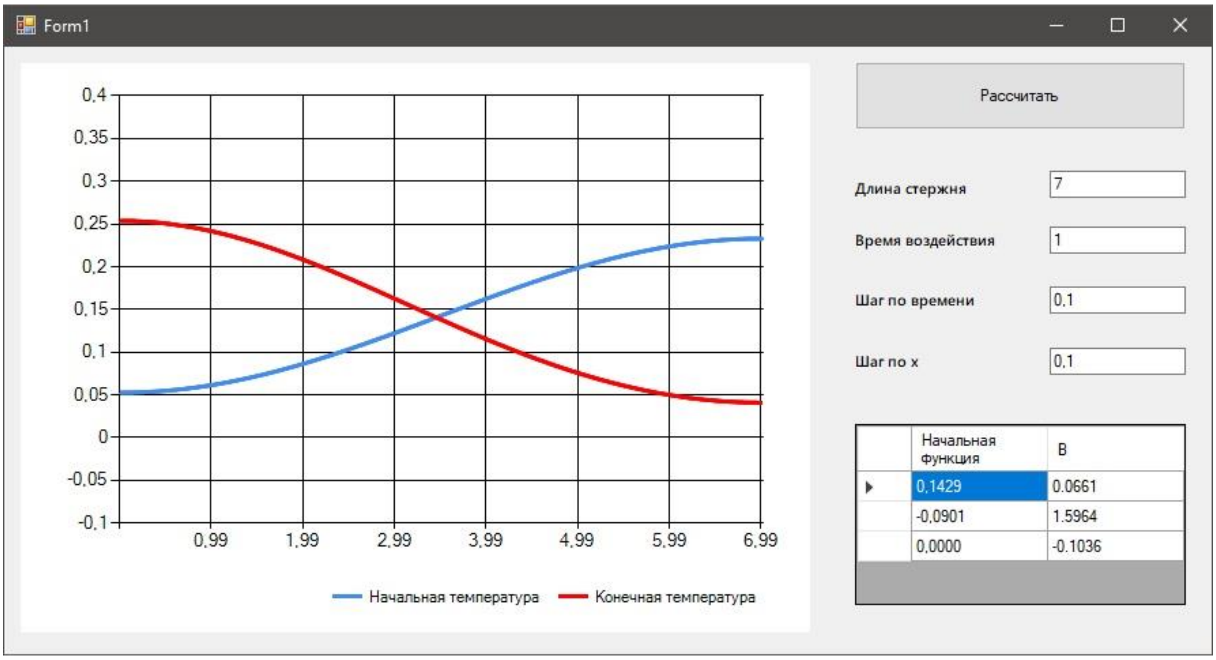

Рисунок 5.

Литература

1. Э.Г. Позняк, В.А. Ильин. Основы Математического анализа. Часть 2. – Москва: Физматлит, 2002. 464с.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. 799с.
3. И.С Березин, Жидков Н.П. Методы вычислений Т.2. – М.: ГИФМЛ, 1959. 620с.
4. А.А. Самарский. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2005. 288с.

Альберт Исмаилович **Эгамов**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ»

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.