

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс

«Модели, методы и программные средства»

Основная образовательная программа

080500 «Бизнес-информатика», профиль «Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса», квалификация (степень) бакалавр

Учебно-методический комплекс по дисциплине

«Методы оптимизации»

Кузнецов Ю.А., Семенов А.В.

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижегород
2012

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 69 с.

В учебно-методическом пособии наряду с изложением начал классического вариационного исчисления рассматриваются основы прямых методов и элементы теории разрывных вариационных задач. Определенное внимание в пособии уделено научным результатам Нижегородской школы вариационного исчисления. Помимо изложения основ теории пособие содержит примеры решения вариационных задач, в том числе и с применением системы MATLAB; приводятся задачи для самостоятельного решения.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 080500 «Бизнес-информатика», изучающих курс «Методы оптимизации».

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| ГЛАВА 1. Основы классического вариационного исчисления | 5 |
| §1. Необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления | 9 |
| §2. Обобщения простейшей задачи | 25 |
| §3. Задачи на условный экстремум | 35 |
| ГЛАВА 2. Прямые методы вариационного исчисления | 46 |
| ГЛАВА 3. Введение в теорию разрывных задач вариационного исчисления | 55 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ. Основатели Нижегородской школы вариационного исчисления | 61 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 65 |

В первой главе «Основы классического вариационного исчисления» формулируются необходимые и достаточные условия слабого и сильного локального минимума простейшей задачи вариационного исчисления; приводятся необходимые условия экстремума для обобщений простейшей задачи – пространственной задачи, задачи со старшими производными, задачи с подвижными концами, многомерной задачи, изопериметрической и задачи Больца.

В главе 2 «Прямые методы вариационного исчисления» излагаются идея и схема получения решения вариационных задач в различных постановках. Помимо «традиционных» теорем существования решения Тонелли и Боголюбова и метода Ритца построения минимизирующей последовательности, данная глава знакомит читателей с результатами А.Г. Сигалова, В.И. Плотникова, С.Ф. Морозова и других представителей Нижегородской школы вариационного исчисления, полученных ими в направлении решения девятнадцатой и двадцатой проблем Гильберта.

Глава 3 «Введение в теорию разрывных задач вариационного исчисления» посвящена методам исследования вариационных задач на классах разрывных функций в русле Нижегородской школы вариационного исчисления. Основу изложения составляет теория необходимых и достаточных условий существования минимума для пространственных задач вариационного исчисления.

Помимо изложения обязательного теоретического «минимума», касающегося «классического» набора результатов по вариационному исчислению, в пособии уделено определенное внимание и научным результатам Нижегородской школы вариационного исчисления и оптимального управления Сигалова-Плотникова-Морозова в области разрывных задач вариационного исчисления.

Пособие содержит примеры применения излагаемых теоретических результатов для численно-аналитического исследования, а также приводятся решения типичных задач, иллюстрирующих применение основных результатов и методов с использованием пакета MATLAB.

Глава 1

Основы классического вариационного исчисления

Частные задачи о поиске экстремумов функций и функционалов при тех или иных ограничениях ставились и нередко успешно решались еще в глубокой древности. Например, задача о замкнутой кривой заданной длины на плоскости, охватывающей максимальную площадь, или, что то же самое, о кривой минимальной длины на плоскости, охватывающей заданную площадь, ставилась еще в древней Греции. Однако решения каждой из конкретных задач искались всегда сугубо индивидуальным методом. И до середины XVIII века не было известно метода, который позволял бы решать какой-либо класс задач. Лишь после создания основ теории бесконечно малых стало возможным создание такого метода. Создание Ньютоном и Лейбницем в конце XVII века основ дифференциального исчисления и установление Лейбницем его связи с зарождавшимся интегральным исчислением открыло новую страницу в математике и заложило основы для создания вариационного исчисления как самостоятельной математической дисциплины. Становлению этой главы математики способствовали многочисленные попытки великих математиков XVII века – Галилео (1564–1642), Лейбница (1646–1716), Ньютона, братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли и др. – решить задачу о брахистохроне, поставленную в 1696 г. в журнале «Acta Eruditorum» Иоганном Бернулли и впервые решенную Якобом Бернулли.

Задача о брахистохроне

В вертикальной плоскости материальная частица скользит без трения по некоторой кривой, соединяющей выше расположенную точку P_1 с ниже расположенной точкой P_2 . Предполагая, что на частицу не действуют никакие силы, кроме силы тяжести, требуется установить, какова должна быть кривая, чтобы время, нужное для спуска от P_1 к P_2 , было наименьшим.

Примем точку P_1 за начало координат и направим ось y вертикально вниз. Пусть (a, A) – координаты точки P_2 . Предполагается, что начальная скорость падающей точки равна нулю. К моменту, когда расстояние от начального положения точки O по вертикальной оси Oy прямоугольной системы координат xOy будет равно y , точка теряет потенциальную энергию, которая уменьшается на mgy . Кинетическая энергия при этом увеличивается на $mv^2/2$. В силу закона сохранения энергии имеем

$$mv^2/2 - mgy = 0,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Пусть $y(x) \in C^1[0, a]$ – траектория движения. Тогда $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{dt}$,

поэтому $\sqrt{2gy} dt = \sqrt{1+y'^2} dx$. Следовательно, задача состоит в нахождении гладкой функции $y(x)$, для которой $y(0) = 0, y(a) = A$ и

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min.$$

Таким образом, подлежащая минимизации величина зависит не от одной или нескольких (в конечном числе) числовых переменных, а от всей кривой в целом.

Первые постановки вариационных задач – задач об экстремумах функционалов, а не функций – в том виде, как они ставятся в наше время, были даны Лейбницем, который вслед за братьями Бернулли иным методом решает в 1696 г. задачу о брахистохроне, а в 1697 г. – задачу о геодезических линиях на поверхности.

Задача о геодезических линиях

Проблема нахождения «геодезических линий» – это задача отыскания кратчайших дуг, соединяющих две заданные точки на некоторой поверхности.

Задача на плоскости

Начнем с элементарного вопроса: что представляет собой плоская кривая наименьшей длины, соединяющей две фиксированные точки плоскости?

Для математической формулировки фиксируем две точки $P_1(a, A)$ и $P_2(b, B)$ ($a < b$) на плоскости xOy и пусть $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ – дуга кривой,

соединяющая эти точки. Длина дуги кривой равна $l = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$, так что

задача сводится к выбору функции $y(x)$, для которой функционал длины принимает минимальное значение. Известно, что искомая кривая, дающая минимум длины, есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_1 и P_2 .

Пространственная задача

Предположим, что поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ является гладкой, а искомая кривая может быть задана уравнениями $y = y(x), z = z(x), x \in [a, b]$ с помощью гладких функций $y(x), z(x)$. Тогда длина l равна:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx.$$

Задача свелась к определению таких гладких на отрезке $[a, b]$ функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, что $\varphi(x, y(x), z(x)) \equiv 0, y(a) = A_1, y(b) = B_1, z(a) = A_2, z(b) = B_2$, а

интеграл длины принимает минимальное значение. В частности, известно, что на сфере геодезическими линиями являются дуги больших кругов.

Вариационные задачи, решавшиеся в конце XVII – начале XVIII веков, являлись лишь демонстрацией возможностей уже сформировавшегося, хотя и далекого пока что от строгой обоснованности, дифференциального и интегрального исчисления и требовали в каждом конкретном случае искусства и интуиции. Первый общий метод решения вариационных задач был создан Эйлером (1707–1783) в работах 1732–1744 годов, в которых он усовершенствовал метод своего учителя И. Бернулли и распространил его на задачи с ограничениями; при этом он вывел общее уравнение для экстремалей, получившее его имя.

В 1744 г. Эйлер публикует первую в истории математики книгу по вариационному исчислению, в которой дается общее дифференциальное уравнение для экстремалей, получившее впоследствии его имя. Вывод этого уравнения, однако, был строго обоснован лишь во второй половине XIX века. Для задачи о минимуме функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) dt, \quad (1.1)$$

зависящего от любого числа производных от оптимизируемой функции $x(t)$ Эйлер получает следующее необходимое условие экстремума (получившее имя «уравнения Эйлера»):

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \right) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.2)$$

Метод формального выведения этого уравнения основан на методе И. Бернулли и на «принципе Лейбница-Бернулли»; утверждающего, что всякий бесконечно малый отрезок экстремали является экстремалью. Согласно методу И. Бернулли оптимизируемый интеграл следует аппроксимировать конечной суммой, что позволяет заменить функционал функцией конечного числа переменных (ординат определяемой экстремали); затем следует варьировать всего одну из этих ординат, приравнивая нулю вариацию минимизируемого интеграла.

Экстремаль $x(t)$ заменяется ломаной с равными интервалами деления отрезка $[t_0, t_1]$, производные выражаются через ординаты угловых точек ломаной по формулам конечных разностей, а интеграл (1.1) заменяется суммой. В результате задача о минимуме функционала (1.1) сводится к задаче о минимуме функции конечного числа переменных. Варьирование этой функции в одной из угловых точек, так что варьированная кривая вновь оказывается ломаной, измененной лишь на двух соседних подинтервалах интервала (t_0, t_1) позволило Эйлеру вывести уравнение (1.2). Когда же интеграл (1.1) минимизируется при K интегральных ограничениях

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) dt = const, i = \overline{1, K}, \quad (1.3)$$

то, следуя «принципу Лейбница-Бернулли», Эйлер варьирует ломаную в $(K + 1)$ точке и получает уравнения для экстремали, содержащие $(K + 1)$ постоянных множителей (впоследствии не вполне справедливо названных множителями Лагранжа). Подобный же принцип варьирования он сначала пытался применить и для случая, когда функционал (1.1) минимизируется при связях в виде дифференциального уравнения (например, в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде), однако варьировать в этом случае надо уже всю кривую, а не несколько ее точек, как это оказывается достаточным в изопериметрических задачах.

В XVIII веке математический анализ находился лишь на стадии становления основных принципов дифференцирования и интегрирования, и строгое обоснование этих принципов в большинстве случаев не представлялось возможным на существовавшем уровне развития математики. Критерием верности теоретических результатов в основном служило решение прикладных задач. Так что вопросы законности и перестановочности предельных переходов, так же как и законности самой операции исходной конечномерной аппроксимации вариационной задачи, в то время еще не могли быть решены Эйлером.

Новый этап в истории вариационного исчисления начался с работ 18-летнего Ж. Лагранжа (1736–1813), который в 1755 г. написал Эйлеру о подученном им новом методе расчета вариаций с помощью интегрирования по частям. Подход Лагранжа позволял получать необходимые условия экстремума в «вариационных задачах» (этот термин был введен Эйлером в 1764 г.) с помощью формализмов дифференциального и интегрального исчисления, не прибегая к прямому методу аппроксимаций, которым пользовался Эйлер в своих ранних работах.

Эйлер и сам был близок к подобному подходу и идеи молодого Лагранжа, высказанные в письме, позволили ему без знакомства с техникой вывода Лагранжа разработать аналогичную методикку получения необходимых условий. В письме от 2 октября 1759 г. он пишет Лагранжу, что на основе высказанных им идей он сам получил простой способ вывода уравнений экстремалей, но не будет публиковать свои результаты, пока Лагранж не опубликует свои, чтобы не отнимать у него заслуженной им славы. Эйлер приостановил на несколько лет публикацию своих результатов, пока в 1762 г. работа Лагранжа не появилась в печати. Идея Лагранжа состояла в отказе от эйлеровской аппроксимации задачи, в представлении варьируемых кривых в виде $x(t) + \delta x(t)$ и применении интегрирования по частям с обоснованием законности перестановки операций дифференцирования и варьирования. Позднее Эйлер под влиянием идей Лагранжа (в 1771 г.) дает новый вывод необходимых условий экстремума, вводя в рассмотрение, как это и применяется до сих пор, параметрическое семейство кривых

сравнения $x(t, b) = x(t) + \alpha \delta x(t)$, где $\delta x(t)$ – функции того же класса, что и функция $x(t)$, а $\alpha \rightarrow 0$ – малый параметр.

Лагранж не только дал применяемый до сих пор метод вывода уравнений Эйлера, но и получил условия трансверсальности, которым удовлетворяет экстремаль с незакрепленными концами. В связи с этим следует отметить, что Эйлер во всех решаемых им задачах и при разработке общей теории умышленно игнорировал рассмотрение краевых условий, полагая, что более общие результаты можно получить, если сначала выводить дифференциальное уравнение для экстремалей, а затем уже оценивать класс краевых условий, которым это уравнение может удовлетворять. Однако подобный подход, как показала история развития вариационного исчисления, по существу так и не получил подтверждения (правда, он может быть оправдан в связи с решением вариационных задач прямыми численными методами, когда из всех необходимых условий используют лишь уравнения Эйлера). А вот подход Лагранжа, позволяющий получать необходимые условия экстремума с учетом всех краевых условий задачи, оказался перспективным.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Рассматривается задача отыскания экстремума интегрального функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr} \quad (1.4)$$

на классе Σ гладких функций $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$:

$$\Sigma = \{ x(t) \in C^1[t_0, t_1] : x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \}.$$

Сформулированная задача называется *простейшей задачей вариационного исчисления*.

Предполагаем, что подынтегральная функция $F(t, x, \dot{x})$ (интегрант функционала) – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.

Классификация экстремумов

Абсолютный экстремум

Функционал $J[x]$ достигает абсолютного минимума на функции $x_0(t) \in \Sigma$, если для любой допустимой функции $x(t)$ выполняется $J[x] \geq J[x_0]$.

Аналогично определяется абсолютный максимум.

Сильный и слабый экстремум

Сильной ε -окрестностью функции $x_0(t) \in \Sigma$ называется множество всех таких допустимых $x(t)$, что $\|x - x_0\|_{C[t_0, t_1]} = \max_{[t_0, t_1]} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Слабая ε -окрестность функции $x_0(t) \in \Sigma$ – множество всех допустимых функций $x(t)$, для которых $\|x - x_0\|_{C^1[t_0, t_1]} = \max_{[t_0, t_1]} |x(t) - x_0(t)| + \max_{[t_0, t_1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| < \varepsilon$.

Функционал $J(x(\cdot))$ достигает на функции $x_0(t) \in \Sigma$ сильного (слабого) минимума, если для всех допустимых функций $x(t)$ из некоторой сильной (слабой) ε -окрестности функции $x_0(t)$ выполняется $J[x] \geq J[x_0]$.

Аналогично определяется сильный (слабый) максимум.

Если неравенство является строгим для всех функций из сильной (слабой) ε -окрестности, отличных от функции $x_0(t)$, то соответствующий экстремум называют строгим. Строгий абсолютный экстремум определяется аналогичным образом.

Всякий абсолютный экстремум есть в то же время и слабый, и сильный экстремум. Всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Однако слабый экстремум функционала не обязательно является сильным экстремумом, а сильный – абсолютным.

Необходимые условия для слабого экстремума являются необходимыми и для сильного, и для абсолютного экстремумов. Между тем, необходимые условия для сильного и абсолютного экстремумов не будут, вообще говоря, являться необходимыми для слабого экстремума.

Для достаточных условий соотношения будут обратными: так, достаточные условия абсолютного экстремума будут достаточными условиями для сильного и слабого экстремумов, но, в общем случае, не наоборот.

Впервые термины «экстремум», «сильный (stark)» и «слабый (schwach) экстремумы», «экстремаль» ввел в вариационное исчисление Кнезер. В вариационном исчислении терминология Кнезера стала общепринятой.

Вариация функции и функционала

Пусть $x_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – некоторая функция из Σ и $x(t) \in \Sigma$ – произвольная функция сравнения. Функция $\delta x = x(t) - x_0(t)$ называется вариацией функции $x_0(t)$.

Пусть $h(t)$ – функция класса $C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющая условиям $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Определим семейство допустимых функций сравнения $x(t)$, полагая $x(t) = x_0(t) + \varepsilon h(t)$, где ε – числовой параметр. Очевидно, $\delta x = \varepsilon h(t)$.

Рассмотрим приращение функционала $J(x(\cdot))$ на допустимых функциях $x_0(t), x(t)$: $\Delta J = J[x] - J[x_0]$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \{F(t, x_0 + \varepsilon h, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{h}) - F(t, x_0, \dot{x}_0)\} dt = \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \{F_x(t, x_0, \dot{x}_0)h + F_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}\} dt + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{F_{xx}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2 + 2F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h\dot{h} + F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}^2\} dt + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Главная линейная часть приращения функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \{F_x(t, x_0, \dot{x}_0)h + F_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}\} dt$$

носит название первой вариации функционала J и обозначается δJ .

В рассматриваемом случае простейшей вариационной задачи можно определить первую вариацию и следующим эквивалентным образом

$$\delta J = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(x_0 + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Величина

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b \{F_{xx}(t, x_0, \dot{x}_0)h^2 + 2F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)h\dot{h} + F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0)\dot{h}^2\} dt$$

называется второй вариацией функционала. Таким образом,

$$\Delta J = \varepsilon \delta J + \varepsilon^2 \delta^2 J + o(\varepsilon^2).$$

Теорема 1.1 (Необходимое условие слабого минимума в терминах вариаций). Для того чтобы $x_0(t), t \in [t_0, t_1]$ из Σ доставляла слабый минимум

функционалу $J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt$, необходимо, чтобы на этой функции,

удовлетворялись следующие условия:

1) условие стационарности $\delta J = 0$;

2) неотрицательность второй вариации $\delta^2 J \geq 0$

при любом выборе функции $h(t)$ класса $C^1[t_0, t_1]$, для которой $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Основные леммы вариационного исчисления

Для упрощения условия стационарности применяются следующие утверждения, которые часто называют *основными леммами вариационного исчисления*.

Лемма 1.1 (лемма Лагранжа). Пусть непрерывная функция $M(t)$ обладает тем свойством, что, какова бы ни была функция $h(t)$ класса $C^1[t_0, t_1]$, обращающаяся в нуль в точках t_0 и t_1 , всегда $\int_{t_0}^{t_1} M(t)h(t)dt=0$. Тогда $M(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$.

Лемма 1.2 (лемма Дюбуа-Реймона). Если для непрерывной функции $M(t)$ и любой $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$, обращающейся в нуль в точках t_0 и t_1 , выполнено равенство $\int_{t_0}^{t_1} M(t)\dot{h}(t)dt=0$, то $M(t) \equiv const$ на $[t_0, t_1]$.

Уравнение Эйлера

Основное необходимое условие слабого минимума для простейшей вариационной задачи выражается с помощью уравнения Эйлера. Для установления данного условия может применяться как лемма Лагранжа, так и лемма Дюбуа-Реймона. Между тем доказательство, основанное на применении леммы 1.1, потребует априорного предположения существования непрерывной второй производной функции $x_0(t)$. Применение же леммы 1.2 не требует такого ограничивающего предположения.

Введем следующее обозначение $N(t) = \int_{t_0}^t F_x dt$. Тогда интегрируя по частям и принимая во внимания свойства функции $h(x)$, на основании теоремы 2.1 получаем

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{dN}{dt} h + F_x \dot{h} \right\} dt = N h \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \{ F_x - N \} \dot{h} dt = 0$$

Применяя лемму Дюбуа-Реймона, имеем

$$F_x - N \equiv const \text{ на } [t_0, t_1].$$

Учитывая введенное обозначение, получаем, что функция $x_0(t)$, доставляющая слабый минимум функционалу $J(x(\cdot))$, необходимо должна удовлетворять на $[t_0, t_1]$ уравнению

$$F_{\dot{x}} - \int_{t_0}^t F_x dt \equiv const. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называется *уравнением Эйлера в интегральной форме*.

Дифференцируя по t тождество $F_{\dot{x}} \equiv \int_{t_0}^t F_x dt + const$, устанавливаем

следующую теорему:

Теорема 2.2. Для того чтобы функция $x_0(t)$, $x \in [t_0, t_1]$ из Σ доставляла слабый минимум функционалу $J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt$, необходимо, чтобы она удовлетворяла *уравнению Эйлера*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0. \quad (1.6)$$

Гладкие решения уравнения Эйлера называются *экстремальями*. Таким образом, точки экстремума функционала следует искать среди его экстремалей.

Уравнение (1.6) дает необходимое, но, вообще говоря, не достаточное условие экстремума. В ряде случаев, однако, уравнение Эйлера способно дать исчерпывающий ответ на поставленную вариационную задачу. Так, если из содержательного смысла задачи или иных соображений вытекает, что она имеет решение, а функционал имеет единственную экстремаль, удовлетворяющую условиям на концах, то эта экстремаль и будет искомым решением.

Если $F_{\dot{x}\dot{x}}$ – функция, не равная нулю тождественно, то уравнение Эйлера для функционала (1.4) представляет собой уравнение второго порядка. Между тем, экстремаль может и не являться дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Следующая теорема формулирует условия на функцию F , при которых экстремаль принадлежит классу $C^2[t_0, t_1]$.

Теорема 1.3 (Гильберт). Пусть $x_0(t)$ – решение уравнения Эйлера (1.6). Если функция $F(t, x, \dot{x})$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках t , в которых $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \neq 0$, $\ddot{x}_0(x)$ существует и непрерывна.

В предположении, что функция $x_0(t)$ является дважды дифференцируемой, уравнение Эйлера (1.6) может быть записано в следующем виде

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x} + F_{\dot{x}x} \dot{x} + F_{\dot{x}t} - F_x = 0.$$

Если $F_{\ddot{x}} \neq 0$ всюду, то решение уравнение Эйлера сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения вида $\ddot{x} = \varphi(t, x, \dot{x})$ с дополнительными условиями $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. Такую задачу в теории дифференциальных уравнений называют краевой. Вопрос о существовании решения уравнения $\ddot{x} = \varphi(t, x, \dot{x})$ при условиях $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ не сводится к обычным теоремам существования для дифференциальных уравнений (существования решения задачи Коши). Множество решений краевой задачи в зависимости от ее конкретных качеств может быть пустым, может быть бесконечным, но может быть конечным и в том числе содержать ровно одно решение.

Исследование вопроса о существовании решений краевой задачи в общем случае может быть достаточно сложным. Однако имеется ряд частных ситуаций, когда уравнение Эйлера сводится к уравнению первого порядка или может быть полностью проинтегрировано. Эти ситуации связаны со спецификой структуры интегранта функционала (1.4).

Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера

I. $F(t, x, \dot{x}) = F(t, x)$.

В этом случае уравнение Эйлера приводится к виду $F'_x(t, x) = 0$ и представляет собой не дифференциальное уравнение, а конечное. Его решения, вообще говоря, могут не удовлетворять поставленным краевым условиям, так что в общем случае задача решения не имеет.

II. $F(t, x, \dot{x}) = M(t, x) + \dot{x}N(t, x)$.

Уравнение Эйлера приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} M(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} N(t, x). \quad (1.7)$$

Это соотношение выполняется либо тождественно, либо, как и в предыдущем случае, представляет собой не дифференциальное уравнение, а конечное. Его решения, вообще говоря, также не удовлетворяют краевым условиям, так что в этом последнем случае задача, вообще говоря, решения не имеет. Если же соотношение (1.7) выполняется тождественно, то выражение $M(t, x)dt + N(t, x)dx$ представляет собой полный дифференциал, так что функционал $J(x(\cdot))$ не зависит от пути интегрирования ($J[x] = const$ на всех допустимых кривых $x(t) \in \Sigma$). Задача не является вариационной.

III. $F(t, x, \dot{x}) = F(\dot{x})$.

Уравнение Эйлера имеет вид $F_{\ddot{x}}(\dot{x}(t))\ddot{x}(t) = 0$. Экстремали – прямые линии.

IV. $F(t, x, \dot{x}) = F(t, \dot{x})$.

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = const$.

$$\mathbf{V.} \quad F(t, x, \dot{x}) = F(x, \dot{x}).$$

Уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F(x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t)F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = const.$$

Условия Лежандра и Якоби

В первых своих работах Эйлер еще полагал, что полученное им дифференциальное уравнение экстремалей есть уравнение, определяющее абсолютный экстремум – максимум или минимум. Однако позднее, из решения множества примеров, он понял, что это – уравнение, которому удовлетворяют все относительные экстремали, да и не только они.

В связи с этим встала проблема выделения среди множества экстремалей таких кривых, которые доставляют функционалу хотя бы относительный минимум. Лежандр (1752–1833) был первым, нашедшим условия, позволяющие различать относительный минимум и относительный максимум, по крайней мере, в простейшей задаче вариационного исчисления (1.4). В 1786 г. А. Лежандр, исследуя методами математического анализа вторую вариацию функционала, получил условие относительного минимума, заключающееся в том, что всюду на минимали должно выполняться неравенство $F_{\ddot{x}\ddot{x}} \geq 0$. Однако вывод этого условия не был математически строго обоснован. Обоснование было получено лишь в середине XIX века. Следует отметить, что Лежандр вывел свое условие минимума также и для задачи с незакрепленными концами.

Достаточное условие относительного минимума Лежандр получает, анализируя вторую вариацию функционала

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ F_{xx}(t, x_0, \dot{x}_0) h^2 + 2F_{x\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0) h\dot{h} + F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0) \dot{h}^2 \} dt.$$

Очевидно, целевой функционал задачи должен иметь минимум, если на любой кривой сравнения, кроме экстремали, $\Delta J > 0$, т.е. если $\delta^2 J > 0$. Лежандр стремится привести подынтегральное выражение в $\delta^2 J$ к виду, достаточно простому для анализа его знака. С этой целью он добавляет к подынтегральному выражению полный дифференциал

$$\frac{d}{dt}(vh^2) = \frac{dv}{dt}h^2 + 2vh\dot{h}$$

и вычитает из $\delta^2 J$ равное этому дифференциалу значение

$$[(vh^2)\Big|_{t_1} - (vh^2)\Big|_{t_0}],$$

где v – некоторая подлежащая определению функция. Если $v(t)$ выбрать как решение уравнения

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \left(F_{xx} + \frac{dv}{dt} \right) = (F_{x\dot{x}} + v)^2, \quad (1.8)$$

то $\delta^2 J$ приведет к виду

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_{\ddot{x}\ddot{x}} \left(\dot{h} + \frac{F_{x\dot{x}} + v}{F_{\ddot{x}\ddot{x}}} h \right)^2 dt,$$

откуда ясно, что если $F_{\ddot{x}\ddot{x}} > 0$ на всей экстремали, то $\delta^2 J > 0$ и имеет место минимум целевого функционала, а если $F_{\ddot{x}\ddot{x}} < 0$, то – максимум. Условие $F_{\ddot{x}\ddot{x}} \geq 0$, как понимал еще сам Лежандр, является необходимым условием минимума.

Теорема 1.4. Если функционал $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления достигает слабого минимума на функции $x_0(t) \in \Sigma$, то она необходимо удовлетворяет *условию Лежандра*:

$$F_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \geq 0, t \in [t_0, t_1].$$

Определение. Функция $x_0(t) \in \Sigma$ удовлетворяет *усиленному условию Лежандра*, если

$$F_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0, t \in [t_0, t_1].$$

Оставался лишь неясным вопрос о существовании конечного и непрерывного решения $v(t)$ уравнения (1.8), который был разрешен спустя столетия Якоби, который был не только первым, кто сумел найти решение уравнения (1.8), но и тем, кто сумел еще существенно уточнить условие Лежандра, дополнив его отсутствием на экстремали определенных ниже так называемых сопряженных точек.

Следует отметить, что Лагранж в 1797 г. несколько уточнил условие Лежандра, показав, что оно справедливо, если только функция F конечна. Уточненный им критерий минимума имеет вид: кривая $x(t)$ доставляет относительный минимум функционалу (1.4), если вдоль нее $F_{\ddot{x}\ddot{x}} > 0$ и если существует конечная на отрезке $[t_0, t_1]$ функция $v(t)$, удовлетворяющая дифференциальному неравенству

$$F_{\ddot{x}\ddot{x}} \left(F_{x\dot{x}} + \frac{dv}{dt} \right) \geq (F_{x\dot{x}} + v)^2.$$

Якоби показал, что функция v , являющаяся решением уравнения (1.8), задается выражением

$$v = - \left(F_{x\dot{x}} + \frac{1}{W} F_{\ddot{x}\ddot{x}} \frac{dW}{dt} \right),$$

где $W = a \frac{\partial x}{\partial C_1} + b \frac{\partial x}{\partial C_2}$; a и b – произвольные постоянные, а $x(t, C_1, C_2)$ – решение уравнения Эйлера, зависящее от двух параметров C_1, C_2 . Таким образом, если найдено общее решение $x(t, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, задающее параметрическое семейство экстремалей, то вопрос о максимуме или минимуме

функционала (1.4) решается без дополнительного интегрирования. Проведя детальное исследование условия Лежандра и найдя решение уравнения (1.8), Якоби получил новый критерий минимума функционала (1.4) – отсутствие «сопряженной точки» на минимизирующей кривой $x(t)$. Однако это условие не было им строго доказано, поскольку для доказательства требовалась теорема об огибающей, доказанная лишь семью годами позднее Данбу.

Для формулировки необходимого условия Якоби введем некоторые обозначения. Пусть

$$Q = \frac{1}{2} \left(F_{xx} - \frac{d}{dt} F_{x\dot{x}} \right), \quad P = \frac{1}{2} F_{\dot{x}\dot{x}},$$

тогда для второй вариации функционала можно получить следующее представление

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} (Qh^2 + P\dot{h}^2) dt, \quad (1.9)$$

где $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$ и $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Отсюда Якоби делает вывод, что если $F_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ на интервале $[t_0, t_1]$ и если уравнение

$$-\frac{d}{dt}(Ph) + Qh = 0, \quad (1.10)$$

которое получается из уравнения (1.8), имеет не равное тождественно нулю на $[t_0, t_1]$ решение $h(t)$, то $\delta^2 J > 0$. Если же $h(t) = 0$ хотя бы в одной точке $t' \in (t_0, t_1)$, то преобразование Лежандра недопустимо, и, вообще говоря, можно обеспечить $\delta^2 J < 0$, в этом случае не будет иметь место минимум функционала (1.4).

Уравнение (1.9) является не чем иным, как уравнением Эйлера в задаче о минимуме второй вариации, и что знак второй вариации зависит от решения этого уравнения. В частности, если существует интеграл $h(t)$ уравнения (1.9), удовлетворяющий условиям $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то можно обеспечить $\delta^2 J = 0$. Понятно, что в этом случае экстремаль может не быть минималью.

Если $h(t)$ – некоторое ненулевое решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условиям $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то и $ch(x)$, где c – постоянная ($c \neq 0$), будет таким же решением. Поэтому для определенности накладывается требование, чтобы функция $h(t)$ удовлетворяла начальным условиям

$$h(t_0) = 0, \quad \dot{h}(t_0) = 1.$$

Определение. Точка $\tilde{t} \in (t_0, t_1]$ называется сопряженной с точкой $t = t_0$, если существует нетривиальное решение $h(t)$ уравнения (1.10) такое, что $h(t_0) = 0$ и $h(\tilde{t}) = 0$.

Определение. Точка \tilde{t} называется сопряженной с точкой $t = t_0$ по отношению к функционалу $J(x(\cdot))$, если она сопряжена с $t = t_0$ по отношению к квадратичному функционалу (1.9).

Теорема 1.5 (Необходимое условие Якоби). Если функционал $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления достигает слабого минимума на функции $x_0(t) \in \Sigma$, удовлетворяющей усиленному условию Лежандра, то на интервале (t_0, t_1) нет точек сопряженных с точкой $t = t_0$.

Необходимость условия Якоби была строго обоснована лишь в 1878 г. Эрдманом. Необходимость была также доказана Вейерштрассом в его курсе лекций, читавшихся им с 1865 г. по 1889 г. Большинство своих оригинальных результатов Вейерштрасс не публиковал, а излагал в своих лекциях; и они стали известны, так же как и приблизительные даты их получения, лишь через его учеников.

Вейерштрасс сделал неоценимый вклад в вариационное исчисление, заложив строгие основы теории и направив исследования в русло строгого обоснования как уже известных, так и новых результатов. Он строит теорию достаточных условий относительного минимума функционала (1.4) для гладких и негладких задач. На важность изучения негладких задач указывал еще Д. Бернулли. Вводя в рассмотрение так называемые «игольчатые» или «ступенчатые» вариации, Вейерштрасс получил необходимое условие минимума простейшего функционала в классе негладких кривых. Это условие, получившее его имя, совместно с уравнениями Эйлера, условиями Лежандра и Якоби, позволило ему сформулировать совокупность условий, одновременное удовлетворение которых достаточно для констатации факта наличия относительного минимума функционала в классе гладких кривых.

Достаточные условия слабого минимума

Теорема 1.6. Функция $x_0(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет слабый минимум функционалу $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются условия:

- 1) функция $x_0(t)$ является экстремалью функционала $J[x]$;
- 2) для этой функции выполняется усиленное условие Лежандра $F_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0, t \in [t_0, t_1]$;
- 3) $(t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных точке t_0 , (усиленное условие Якоби).

Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума

Функция

$$E(t, x, p, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) - F(t, x, p) - (\dot{x} - p)F_{\dot{x}}(t, x, p)$$

называется функцией Вейерштрасса функционала $J(x(\cdot))$.

Если F дважды непрерывно дифференцируема, то к ней можно применить формулу Тейлора

$$F(t, x, \dot{x}) = F(t, x, p) + (\dot{x} - p)F_{\dot{x}}(t, x, p) + \frac{(\dot{x} - p)^2}{2}F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q),$$

где $q = p + \theta(\dot{x} - p)$, $0 < \theta < 1$. Значит,

$$E(t, x, p, \dot{x}) = \frac{(\dot{x} - p)^2}{2}F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, q),$$

и знак функции Вейерштрасса определяется величиной $F_{\dot{x}\dot{x}}$ в некоторой точке (t, x, q) .

Имеет место следующее необходимое условие сильного минимума

Теорема 1.7 (Условие Вейерштрасса). Если экстремаль $x_0(t)$ доставляет функционалу $J(x(\cdot))$ сильный минимум, то вдоль нее (т.е. при $x = x_0(t), \dot{x} = \dot{x}_0(t)$) при любых p функция Вейерштрасса $E(t, x, p, \dot{x})$ неотрицательна.

Достаточные условия сильного минимума

Теорема 2.8. Функция $x_0(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет сильный минимум функционалу $J[x]$ в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются условия:

- 1) функция $x_0(t)$ является экстремалью функционала $J[x]$;
- 2) для этой функции выполняется усиленное условие Лежандра

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) > 0, t \in [t_0, t_1];$$

3) $(t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных точке t_0 , (усиленное условие Якоби);

- 4) вдоль экстремали $x_0(t)$ выполнено неравенство

$$E(t, x, p, \dot{x}) > 0$$

при любых конечных $p \neq \dot{x}$.

Замечание. Если $F_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ всюду в области определения, то и функция Вейерштрасса положительна, а значит условие 4) выполняется. В более сложных случаях необходимо проверять знак $F_{\dot{x}\dot{x}}$ в таких точках (t, x, \dot{x}) , для которых точка (t, x) близка к графику исследуемой функции $x_0(t)$, а \dot{x} произвольно.

Пример и задачи

Пример 1.1.

Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$J[x] = \int_1^e (t\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, x(e) = 2.$$

Интегрантом функционала задачи является функции $F = t\dot{x}^2 - x$, для которой $F_x = -1$, $F_{\dot{x}} = 2t\dot{x}$.

Уравнение Эйлера $-1 - \frac{d}{dt}(2t\dot{x}) = 0$ приведем к виду $2t\ddot{x} + 2\dot{x} + 1 = 0$.

Семейство экстремалей функционала задачи задается уравнением $x(t) = \frac{C_1}{2} \ln t - \frac{1}{2}t + C_2, t \in [1, e]$.

Их условий на концы, находим единственную экстремаль, подозрительную на решение

$$x_0(t) = \frac{1}{2}((e+1)\ln t - t + 3), \quad t \in [1, e].$$

Продемонстрируем возможности системы программирования **MATLAB** для нахождения экстремали в данной примере. Для решения уравнения Эйлера будем использовать команду **dsolve**, которая позволяет находить как общее решение дифференциального уравнения, так и частное его решение, удовлетворяющее заданным начальным или граничным условиям.

В командном окне записывается следующий командный код:

```
clear all % очищаем память
format long % формат отображения чисел с 14 знаками
disp('Исследование примера 1.1') % выводим заголовок задачи
syms t x Dx D2x % описали символические переменные
F=t*Dx^2-x; % вводим подинтегральную функцию
t1=1; % вводим граничные условия
x1=1;
t2=exp(1);
x2=2;
fprintf('Подынтегральная функция: F=%s\n',char(F))
fprintf('Граничные условия: x(%d)=%d; x(%d)=%d\n',t1,x1,t2,x2)
dFdx=diff(F,x) % вычисляем F_x
dFdx1=diff(F,Dx) % вычисляем F_x'
d_dFdx1_dt = diff(dFdx1,t) % ∂(F_x')/∂t
d_dFdx1_dx=diff(dFdx1,x) % ∂(F_x')/∂x
d_dFdx1_dx1 = diff(dFdx1,Dx) % ∂(F_x')/∂x' = F_x'' - условие Лежандра
dFdx1dt = d_dFdx1_dt + d_dFdx1_dx*Dx + d_dFdx1_dx1*D2x % d(F_x')/dt
Euler = simple(dFdx-dFdx1dt) % левая часть уравнения Эйлера
deqEuler = [ char(Euler) '=0' ]; % составили уравнение
fprintf('Уравнение Эйлера: %s\n',deqEuler)
Sol = dsolve(deqEuler,'t') % решаем уравнение Эйлера
if length(Sol)~=1 % решений нет или более одного
```

```

    error('Нет решений или более одного решения!');
end
SolLeft = subs(Sol,t,sym(t1)); % подставляем t1
SolRight = subs(Sol,t,sym(t2)); % подставляем t2
EqLeft = [char(SolLeft) '=' char(sym(x1))] % приравняли x1
EqRight = [char(SolRight) '=' char(sym(x2))] % приравняли x2
Con = solve(EqLeft,EqRight); % решаем систему уравнений
C1=Con.C1 % присваиваем полученные решения
C2=Con.C2 % символическим константам C1 и C2
Sol1a = vpa(eval(Sol),14); % подставляем C1, C2, вычисляем с 14 знаками
fprintf('Уравнение экстремали:\n%s\n',char(Sol1a))
tpl = linspace(t1,t2); % задаём массив абсцисс
x1a = subs(Sol1a,t,tpl); % вычислили ординаты
plot ( tpl, x1a, '-r' ) % рисуем график
title ( '\bfExample 2.1' ) % заголовок
xlabel('t') % метка оси OT
ylabel('x(t)') % метка оси OX

```

В качестве результата получаем следующее:

Исследование примера 1.1

Подынтегральная функция: $F=t \cdot Dx^2 - x$

Граничные условия: $x(1)=1$; $x(2.718282e+000)=2$

$$dFdx = -1$$

$$dFdx1 = 2 \cdot t \cdot Dx$$

$$d_dFdx1_dt = 2 \cdot Dx$$

$$d_dFdx1_dx = 0$$

$$d_dFdx1_dx1 = 2 \cdot t$$

$$dFx1dt = 2 \cdot Dx + 2 \cdot t \cdot D2x$$

$$\text{Euler} = -1 - 2 \cdot Dx - 2 \cdot t \cdot D2x$$

$$\text{Уравнение Эйлера: } -1 - 2 \cdot Dx - 2 \cdot t \cdot D2x = 0$$

$$\text{Sol} = C1 \cdot \log(t) - 1/2 \cdot t + C2$$

$$\text{EqLeft} = -1/2 + C2 = 1$$

$$\text{EqRight} = C1 \cdot \log(3060513257434037/1125899906842624) -$$

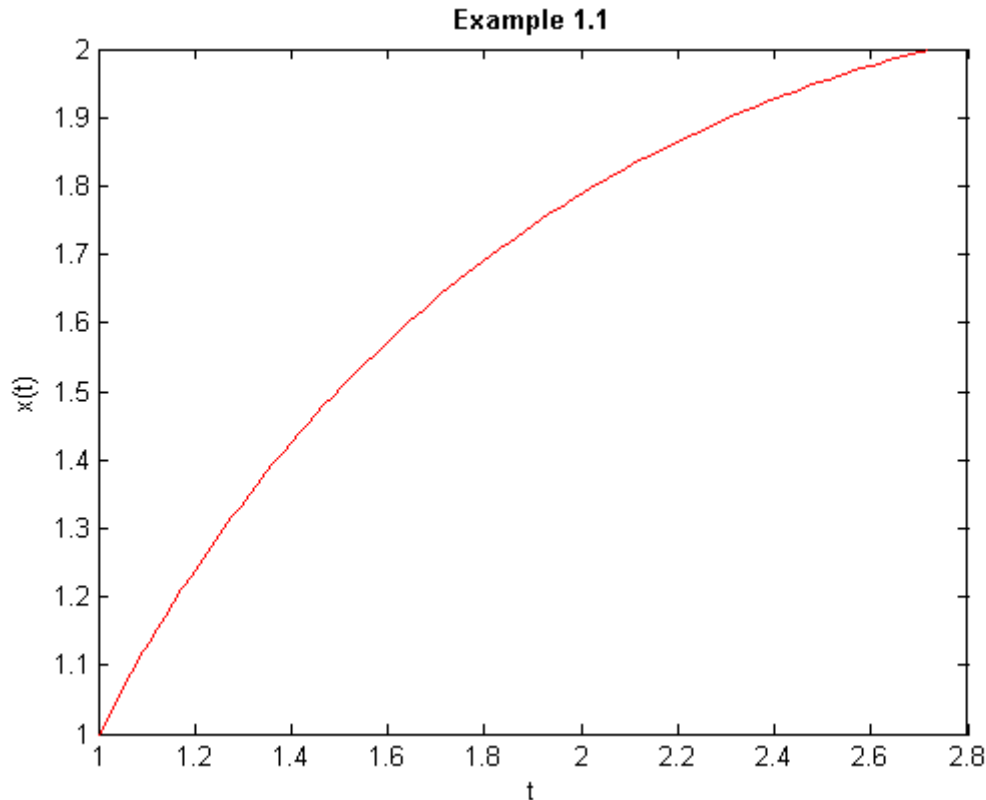
$$3060513257434037/2251799813685248 + C2 = 2$$

$$C1 = 4186413164276661/2251799813685248 / \log(3060513257434037/1125899906842624)$$

$$C2 = 3/2$$

Уравнение экстремали:

$$1.8591409142295 \cdot \log(t) - .50000000000000 \cdot t + 1.50000000000000$$



Продолжим исследование примера на основе необходимых условий второго порядка.

Так как $F_{\dot{x}} = 2t > 0$, $t \in [1, e]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Уравнение Якоби имеет вид $-\frac{d}{dt}(th) = 0$. Единственной кривой удовлетворяющей условиям $h(1) = 0$, $\dot{h}(1) = 1$ является $h(t) = \ln t$, а значит выполняется усиленное условие Якоби.

На основе теоремы о достаточных условиях экстремума, можем утверждать, что $y_0(x)$ доставляет сильный минимум функционалу (а, соответственно, и слабый).

Покажем, что $x_0(t)$ дает абсолютный минимум в задаче.

Пусть $\eta(t)$ – произвольная функция класса $C^1[1, e]$, удовлетворяющая условиям $\eta(1) = \eta(e) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} J[x_0 + \eta] - J[x_0] &= \int_1^e \{t(x_0 + \dot{\eta})^2 - (x_0 + \eta) - t\dot{x}_0^2 + x_0\} dt = \\ &= \int_1^e \{2t\dot{x}_0\dot{\eta} + t\dot{\eta}^2 - \eta\} dt = \int_1^e \{(e+1)\dot{\eta} - t\dot{\eta} + t\dot{\eta}^2 - \eta\} dt. \end{aligned}$$

Так как,

$\int_1^e (e+1)\dot{\eta}dt = 0$ и $\int_1^e t\dot{\eta}dt = -\int_1^e \eta dt$, то $J[x_0 + \eta] - J[x_0] = \int_1^e t\dot{\eta}^2 dt > 0$, если $\eta(t)$ не тождественно 0. Таким образом, $x_0(t)$ доставляет абсолютный минимум функционалу $J[x]$.

Задачи.

1. Найти допустимые экстремали

$$1.1. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 0.$$

$$1.2. \int_0^1 (4x \sin t - x^2 - \dot{x}^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 0.$$

$$1.3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\dot{x}^2 - 4x^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$1.4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$1.5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$1.6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x \sin 2t + x^2 - \dot{x}^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$1.7. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 6x \operatorname{sh} 2t)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 0.$$

$$1.8. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, x(1/2) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$1.9. \int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 1, x(e) = 2.$$

$$1.10. \int_1^e (2x - t^2\dot{x}^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = e, x(e) = 0.$$

2. Исследовать на экстремум функционалы

$$2.1. \int_0^2 (t\dot{x} + \dot{x}^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, x(2) = 0.$$

$$2.2. \int_{-1}^2 \dot{x}(1 + t^2\dot{x})dt \rightarrow \text{extr}; x(-1) = 1, x(2) = 4.$$

$$2.3. \int_1^2 \dot{x}(1 + t^2\dot{x})dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 3, x(2) = 5.$$

$$2.4. \int_1^2 (t^2\dot{x}^2 + 12x^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 1, x(2) = 8.$$

$$2.5. \int_0^{\pi/4} (4x^2 - \dot{x}^2 + 8x)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = -1, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$2.6. \int_0^{\pi/4} (x^2 - \dot{x}^2 + 6x \sin 2t)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$2.7. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2xe^{2t})dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \frac{1}{3}, x(1) = \frac{1}{3}e^2.$$

$$2.8. \int_1^2 \frac{t^3}{\dot{x}^2} dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 1, x(2) = 4.$$

$$2.9. \int_1^3 (12tx + \dot{x}^2)dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0, x(3) = 26.$$

$$2.10. \int_0^2 (x^2 + \dot{x}^2 - 2tx)dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(2) = 3.$$

§2. ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ

Простейшая задача в случае вектор-функций

Задача состоит в отыскании экстремума функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_m(t)) dt \rightarrow \text{extr} \quad (1.11)$$

на классе гладких вектор-функций

$$x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}, \quad x_i(t) \in C^1[t_0, t_1], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.12)$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$x_i(t_0) = A_i, \quad x_i(t_1) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.13)$$

Предполагается, что интегрант вариационной задачи F – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих переменных.

Имеет место

Теорема 1.9 (необходимые условия экстремума). Для того чтобы допустимая вектор-функция $x_0(t)$ была решением вариационной задачи (1.11)–(1.13), необходимо, чтобы она удовлетворяла системе уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.14)$$

Система (1.14) состоит из n уравнений второго порядка, следовательно, ее общее решение содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий (1.13).

Любое гладкое решение системы (1.13) называется *экстремалью* функционала $J[x]$.

Пример 1.2. Найти допустимые экстремали задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1 x_2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = sh1, \quad x_2(1) = -sh1.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$-2x_2 - 2\ddot{x}_1 = 0,$$

$$-2x_1 - 2\ddot{x}_2 = 0.$$

Отсюда $x_1^{(IV)} - x_1 = 0$. Отсюда $x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 \sin t + C_4 \cos t$.

Следовательно, $x_2 = -\ddot{x}_1 = -C_1 e^{-t} - C_2 e^t + C_3 \sin t + C_4 \cos t$. Удовлетворяя

условиям на концы, получаем, что $C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = C_4 = 0$. Таким

образом, получаем единственную допустимую экстремаль $x_1 = sh t, x_2 = -sh t$.

Решим данную задачу, используя систему **MATLAB**. Для удобства переобозначим x_1 через y , x_2 через z . В командном окне записывается следующий код:

```
clear all
format long
disp('Исследование примера 1.2')
syms t y z Dy D2y Dz D2z % описали переменные
F=Dy^2+Dz^2-2*y*z; % подынтегральная функция
t1=0;
y1=0;
z1=0;
t2=1;
y2=sinh(1);
z2=-sinh(1);
fprintf('Подынтегральная функция: F=%s\n',char(F))
fprintf('Граничные условия слева: y(%d)=%d; z(%d)=%d\n',t1,y1,t1,z1)
fprintf('Граничные условия справа: y(%d)=%d; z(%d)=%d\n',t2,y2,t2,z2)
dFdy = diff(F,y)
dFdy1 = diff(F,Dy);
d_dFdy1_dt = diff(dFdy1,t);
d_dFdy1_dy = diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dy1 = diff(dFdy1,Dy);
d_dFdy1_dz = diff(dFdy1,z);
d_dFdy1_dz1 = diff(dFdy1,Dz);
dFy1dt = d_dFdy1_dt + d_dFdy1_dy*Dy + d_dFdy1_dy1*D2y + d_dFdy1_dz*Dz +
d_dFdy1_dz1*D2z
dFdz=diff(F,z)
dFdz1 = diff(F,Dz);
d_dFdz1_dt = diff(dFdz1,t);
d_dFdz1_dy = diff(dFdz1,y);
d_dFdz1_dy1 = diff(dFdz1,Dy);
d_dFdz1_dz = diff(dFdz1,z);
d_dFdz1_dz1 = diff(dFdz1,Dz);
dFz1dt = d_dFdz1_dt + d_dFdz1_dy*Dy + d_dFdz1_dy1*D2y + d_dFdz1_dz*Dz +
d_dFdz1_dz1*D2z
EulerY = simple(dFdy-dFy1dt)
EulerZ = simple(dFdz-dFz1dt)
deqEulerY = [char(EulerY) '=0']; % уравнение Y
deqEulerZ = [char(EulerZ) '=0']; % уравнение Z
fprintf('Система уравнений Эйлера:\n%s\n%s\n',deqEulerY,deqEulerZ)
Sol = dsolve(deqEulerY,deqEulerZ,'t'); % решаем
if length(Sol)~=1 % решений нет или более одного
    error('Нет решений или более одного решения!');
end
SolY = Sol.y
SolZ = Sol.z
SolLeftY = subs(SolY,t,sym(t1)); % t1 в y
SolLeftZ = subs(SolZ,t,sym(t1)); % t1 в z
SolRightY = subs(SolY,t,sym(t2)); % t2 в y
SolRightZ = subs(SolZ,t,sym(t2)); % t2 в z
```

```

EqLeftY = [char(vpa(SolLeftY,14)) '=' char(sym(y1))]
EqLeftZ = [char(vpa(SolLeftZ,14)) '=' char(sym(z1))]
EqRightY = [char(vpa(SolRightY,14)) '=' char(sym(y2))]
EqRightZ = [char(vpa(SolRightZ,14)) '=' char(sym(z2))]
Con = solve(EqLeftY,EqLeftZ,EqRightY,EqRightZ);
C1 = Con.C1
C2 = Con.C2
C3 = Con.C3
C4 = Con.C4
Sol2Y=vpa(eval(Sol.y),14);
Sol2Z=vpa(eval(Sol.z),14);
fprintf('Уравнения экстремали:\ny(t)=%s\nz(t)=%s\n',char(Sol2Y),char(Sol2Z))
tpl = linspace(t1,t2); % массив абсцисс
y2a = subs(Sol2Y,t,tpl); % вычисляем ординаты
z2a = subs(Sol2Z,t,tpl); % вычисляем ординаты
plot ( tpl,y2a,'-r', tpl,z2a,'—b' ) % рисуем график
title('\bExample 2.3') % заголовок
xlabel('t') % метка оси OT
ylabel('y(t), z(t)') % метка оси OY

```

В результате получаем:

Исследование примера 1.2

Подынтегральная функция: $F=Dy^2+Dz^2-2*y*z$

Граничные условия слева: $y(0)=0; z(0)=0$

Граничные условия справа: $y(1)=1.175201e+000; z(1)=-1.175201e+000$

$dFdy = -2*z$

$dFy1dt = 2*D2y$

$dFdz = -2*y$

$dFz1dt = 2*D2z$

$EulerY = -2*z-2*D2y$

$EulerZ = -2*y-2*D2z$

Система уравнений Эйлера:

$-2*z-2*D2y=0$

$-2*y-2*D2z=0$

$SolY = -C1*exp(-t)-C2*exp(t)+C3*sin(t)+C4*cos(t)$

$SolZ = C1*exp(-t)+C2*exp(t)+C3*sin(t)+C4*cos(t)$

$EqLeftY = -1.*C1-1.*C2+C4=0$

$EqLeftZ = C1+C2+C4=0$

$EqRightY =$

$-.36787944117144*C1-$

$2.7182818284590*C2+.84147098480790*C3+.54030230586814*C4=5292635657779586*2$
 $^(-52)$

$EqRightZ =$

$.36787944117144*C1+2.7182818284590*C2+.84147098480790*C3+.54030230586814*C4$
 $=-5292635657779586*2^(-52)$

$C1 = .500000000000000909562795547492785$

$C2 = -.500000000000000909562795547492785$

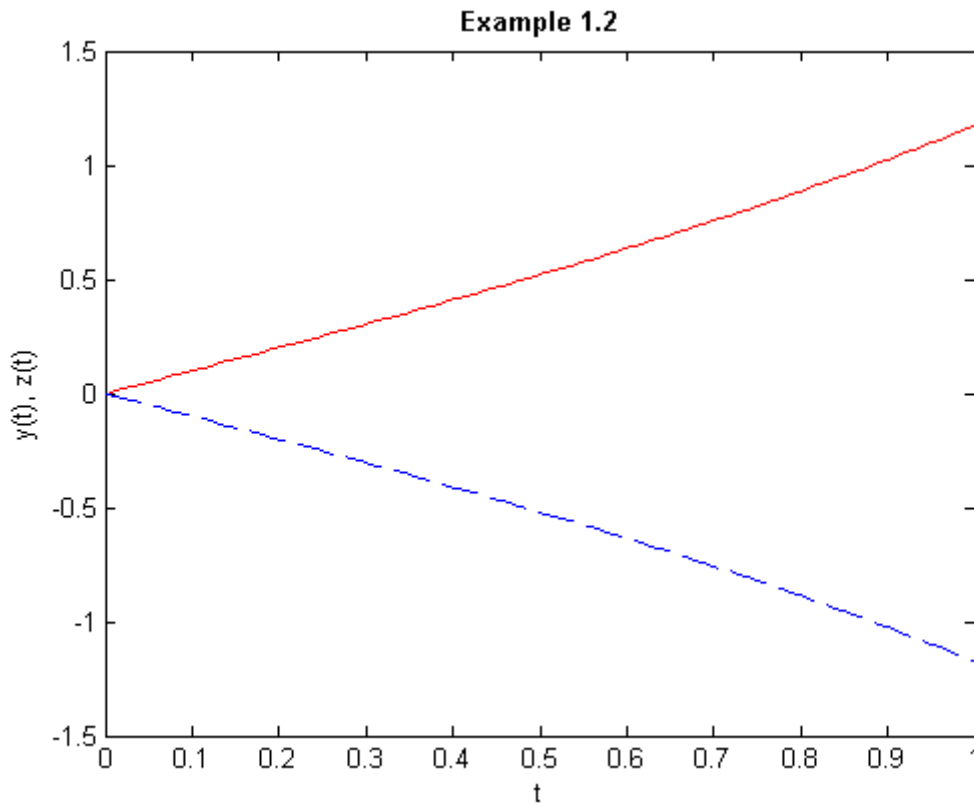
$C3 = 0.$

$C4 = 0.$

Уравнения экстремали:

$$y(t) = -0.5000000000000001 \cdot \exp(-1 \cdot t) + 0.5000000000000001 \cdot \exp(t)$$

$$z(t) = 0.5000000000000001 \cdot \exp(-1 \cdot t) - 0.5000000000000001 \cdot \exp(t)$$



Задача со старшими производными

Исследуется на экстремум функционал

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt \quad (1.15)$$

на классе Σ_m функций $x(t) \in C^m[t_0, t_1]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$x^{(q)}(t_0) = A_q, \quad x^{(q)}(t_1) = B_q, \quad q = 0, 1, \dots, m-1.$$

Теорема 1.10 (необходимые условия экстремума). Пусть F является непрерывной функцией вместе со своими производными по $x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}$. Для того, чтобы функционал (1.15) на множестве Σ_m достигал экстремума на допустимой функции $x_0(t)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению

$$F_x - \frac{d}{dt} \left(F_{\dot{x}} - \frac{d}{dt} \left(F_{\ddot{x}} - \left(\dots - \frac{d}{dt} \left(F_{x^{(m-1)}} - \frac{d}{dt} F_{x^{(m)}} \right) \dots \right) \right) \right) = 0.$$

Если $F_{x^{(k)}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ddot{x}_0(t), \dots, x_0^{(m)}(t)) \in C^k[t_0, t_1]$, $k = 0, 1, \dots, m$, то экстремальная функция необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{x}} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} F_{x^{(m)}} = 0.$$

Пример 1.3. Найти допустимые экстремали задачи

$$\int_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, x(1) = sh1, \dot{x}(1) = ch1.$$

Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(2\ddot{x}) = 0,$$

т.е.

$$x^{(IV)} - \ddot{x} = 0.$$

Семейство экстремалей функционала задачи задается уравнением $x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^t$. Из условий на концы имеем, $C_1 = C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{2}$. Таким образом, единственной допустимой экстремалью является $x = sh t$.

Подвижные концы в простейшей вариационной задаче

Задача со свободными концами

Рассмотрим задачу нахождения экстремума функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

областью определения которого является класс всевозможных гладких функций $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$. Краевые условия отсутствуют, т.е. концы графиков допустимых функций лежат на вертикальных прямых $t = t_0$ и $t = t_1$.

Теорема 1.11. Если функция $x = x_0(t)$ доставляет экстремум интегралу

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

то она есть экстремаль, а на концах выполняются условия:

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_0} = 0, \quad F_{\dot{x}}|_{t=t_1} = 0. \quad (1.16)$$

Условия (1.16) называют *естественными краевыми условиями*.

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, когда один конец закреплен, а другой свободен. Для определения экстремали в такой задаче необходимо использовать только одно из условий (1.16), соответствующее свободному концу.

Пример 1.3. Найти допустимые экстремали задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0.$$

Общим решением уравнения Эйлера $-1 - 2\ddot{x} = 0$ является семейство $x = -\frac{1}{4}t^2 + C_1t + C_2$. Из условия $x(0) = 0$ получаем, что $C_2 = 0$. Так как правый конец является свободным, то на нем экстремаль необходимо должна удовлетворять условию $F_{\dot{x}}|_{t=1} = 0$. Тогда $2\dot{x}(1) = 2(-\frac{1}{2}t + C_1)|_{t=1} = -1 + 2C_1 = 0$.

Таким образом единственной допустимой экстремалью является $x = \frac{1}{4}(2t - t^2)$.

Задача с подвижными концами

Пусть задан функционал

$$J[x] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

определенный на гладких кривых, концы которых лежат на фиксированных линиях $\gamma_0 : x = \varphi(t)$ и $\gamma_1 : x = \psi(t)$. Требуется найти экстремум такого функционала.

Теорема 1.12. Если функция $y = y_0(x)$ доставляет экстремум интегралу

$J[x] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ среди всех гладких функций класса, соединяющих

произвольные точки двух кривых γ_0, γ_1 , то она является экстремалью, а на концах удовлетворяет условиям трансверсальности:

$$[F + (\dot{\varphi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]|_{t=\tau_0} = 0, \quad [F + (\dot{\psi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]|_{t=\tau_1} = 0. \quad (1.17)$$

Общая форма условий трансверсальности

Пусть в условиях теоремы 1.12 кривые γ_0, γ_1 заданы в неявной форме $\varphi(t, x) = 0, \psi(t, x) = 0$, где функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные и $\varphi_t^2 + \varphi_x^2 > 0, \psi_t^2 + \psi_x^2 > 0$. В этом случае условия трансверсальности примут вид:

$$\left[\frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\varphi_t} \right]_{t=\tau_0} = \left[\frac{F_{\dot{x}}}{\varphi_x} \right]_{t=\tau_0}, \quad \left[\frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\psi_t} \right]_{t=\tau_1} = \left[\frac{F_{\dot{x}}}{\psi_x} \right]_{t=\tau_1},$$

что является обобщение условий (1.16), (1.17).

Условия минимума в классе кусочно гладких функций

Простейшая вариационная задача может не иметь решения в классе гладких допустимых функций. В этом случае естественно исследовать, не достигается ли экстремум на функциях более общего класса. В качестве такого класса рассмотрим совокупность кусочно гладких на $[t_0, t_1]$ функций $x = x(t)$. Таким образом, рассмотрим задачу отыскания минимума функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

на классе функций $x(t) \in D^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = A$, $x(t_1) = B$.

Имеет место следующая

Теорема 1.13. Если среди всех кусочно гладких функций, соединяющих две заданные точки, функция $y_0(x) \in D^1[a, b]$ дает минимум функционалу J , то необходимо, чтобы

- 1) каждый гладкий участок функции удовлетворял уравнению Эйлера;
- 2) в угловых точках t_1, t_2, \dots, t_k выполнялись условия Вейерштрасса-Эрдмана:

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_i-0} = F_{\dot{x}}|_{t=t_i+0}, \quad [F - \dot{x}F_{\dot{x}}]|_{t=t_i-0} = [F - \dot{x}F_{\dot{x}}]|_{t=t_i+0}.$$

Замечание. Если $F_{\dot{x}\dot{x}} > 0$, то решение не может иметь угловых точек, кроме того, согласно теоремы Гильберта экстремаль функционала в этом случае является дважды дифференцируемой.

Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных

Интегральный функционал J , зависящий от функций нескольких переменных, определяется формулой

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy,$$

здесь D – фиксированное множество в R^2 , $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ – заданная на вещественнозначная функция и u – функция на D со значениями в R^1 .

На подобные функционалы без существенных изменений переносится основная идея, которая развивалась выше для функционалов простейшей вариационной задачи, а именно идея связи между точками экстремума интегрального функционала и решениями некоторого дифференциального уравнения. На этот раз соответствующее дифференциальное уравнение оказывается уравнением в частных производных.

В 1770 г. Эйлер сумел решить задачу об экстремуме двойного интеграла с закрепленными границами. В 1831 г. Пуассон доложил Парижской Академии наук решение задачи об экстремуме двойного интеграла с переменными границами.

В работе 1838 г. Остроградский указал на то, что формулы Пуассона справедливы, вывел их другим путем и нашел выражение для первой вариации в общей задаче об экстремуме интеграла любой кратности с переменными границами.

Рассмотрим задачу минимизации функционала J с закрепленными границами. Предполагается, что основная область D – это ограниченное замкнутое множество в пространстве R^2 , которое является замыканием некоторой области D' (т. е. открытого связного множества), граница ∂D является достаточно гладким множеством.

В качестве допустимых функций рассматриваются те, которые на границе ∂D принимают заданное значение:

$$u(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y).$$

Как и в случае простейшей задачи, необходимое условие экстремума можно в терминах вариаций записать в форме

$$\delta J[z, \delta z] = 0,$$

где допустимые вариации $\delta z(x, y)$ являются функциями класса C^2 , обращающимися в нуль на границе ∂D . Если $F \in C^2$ и $u \in C^2$, то, используя формулу Грина, первая вариация функционала J может быть приведена к виду

$$\delta J[z, \delta z] = \iint_D \left(F'_z - \frac{\partial F'_{z_x}}{\partial x} - \frac{\partial F'_{z_y}}{\partial y} \right) \delta z dx dy.$$

Применяя многомерный вариант обобщенной леммы Лагранжа, получаем, что минималь необходимо должна являться решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial F'_{z_x}}{\partial x} + \frac{\partial F'_{z_y}}{\partial y} - F'_z = 0,$$

которое называют уравнением Эйлера-Остроградского, а любое гладкое решение этого уравнения – экстремалью.

Составляя уравнение Эйлера-Остроградского для функционала Дирихле

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint_D \left((z'_x)^2 + (z'_y)^2 \right) dx dy,$$

приходим к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Утверждение, которое гласит, что точка минимума функционала Дирихле является решением задачи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, u(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y),$$

известно под названием принципа Дирихле. Благодаря многочисленным приложениям уравнения Лапласа принцип Дирихле является важным утверждением. С принципом Дирихле связаны два непростых вопроса: существует ли при данных D и ∂D точка минимума и принадлежит ли точка минимума классу C^2 ? Ответы на оба эти вопроса при подходящих D и ∂D положительны, их исследование сыграло важную роль в развитии вариационного исчисления.

Задачи

1. Найти допустимые экстремали пространственной задачи

$$1.1. \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2) dt \rightarrow \text{extr}; x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(1) = x_2(1) = \text{sh}1.$$

$$1.2. \int_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1x_2) dt \rightarrow \text{extr}; x_1(0) = x_2(0) = 1, x_1(1) = e, x_2(1) = \frac{1}{e}.$$

$$1.3. \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2) dt \rightarrow \text{extr}; x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$1.4. \int_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6tx_1 + 12t^2x_2) dt \rightarrow \text{extr}; x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

$$1.5. \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2) dt \rightarrow \text{extr}; x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_1(\pi/2) = 1, x_2(\pi/2) = -1.$$

2. Найти допустимые экстремали в задаче со старшими производными

$$2.1. \int_1^e t\dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, x(e) = e, \dot{x}(e) = 2.$$

$$2.2. \int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(\pi) = 0, \dot{x}(0) = 1, \dot{x}(\pi) = -1.$$

$$2.3. \int_0^1 (24tx - \ddot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(1) = -\frac{1}{10}.$$

$$2.4. \int_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, x(1) = \text{ch}1, \dot{x}(1) = \text{sh}1.$$

$$2.5. \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - \ddot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(\pi/2) = 0, x(\pi/2) = \\ = \ddot{x}(0) = \dot{x}(\pi/2) = 1.$$

3. Найти допустимые экстремали в задаче со свободными концами

$$3.1. \int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$$

$$3.2. \int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0.$$

$$3.3. \int_{\pi/4}^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x \sin t) dt \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3.4. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$$

$$3.5. \int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0.$$

4. Найти допустимые экстремали в задаче с подвижными концами

$$4.1. \int_0^{\tau_1} \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(\tau_1) = -1 - \tau_1.$$

$$4.2. \int_0^{\tau_1} (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(\tau_1) = \tau_1.$$

$$4.3. \int_0^{\tau_1} (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(\tau_1) + \tau_1 - 1 = 0.$$

$$4.4. \int_0^{\tau_1} (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(\tau_1) + \tau_1 + 1 = 0.$$

$$4.5. \int_0^{\tau_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, \tau_1 - x(\tau_1) - 1 = 0.$$

5. Найти экстремали с угловыми точками

$$5.1. \int_0^2 \dot{x}^2 (1 - \dot{x}^2) dt \rightarrow \min; x(0) = 0, x(2) = 1.$$

$$5.2. \int_{-1}^1 x^2 (1 - \dot{x}^2) dt \rightarrow \min; x(-1) = 0, x(1) = 1.$$

$$5.3. \int_0^4 (\dot{x} - 1)^2 (\dot{x} + 1)^2 dt \rightarrow \min; y(0) = 0, x(4) = 2.$$

6. Составить уравнение Эйлера-Остроградского для функционалов

$$6.1. J[z] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, D \subset R^2$$

$$6.2. J[u] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz, D \subset R^3$$

§3. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Ранее были рассмотрены случаи вариационных задач, когда в качестве класса допустимых кривых принималась совокупность кривых, соединяющих или две заданные точки, или точки заданных линий. Однако существуют задачи, в которых на допустимые функции накладываются помимо краевых

условий некоторые дополнительные – так называемые условия связи. Подобные задачи принято называть задачами на условный экстремум. Примером может служить задача Дидоны, где в качестве такого «дополнительного» условия выступает требование, что длины графиков допустимых функций имеют заданное значение.

Для решения задач на условный экстремум обычно используется метод множителей Лагранжа. Это правило было впервые сформулировано им для исследования вариационных задач с ограничениями, и только потом – для конечномерных экстремальных задач.

Простейшая изопериметрическая задача (задача Дидоны)

Древнейшей из известных экстремальных задач является классическая изопериметрическая задача. Постановка данной задачи содержится в легенде о Дидоне («Энеида» Вергилий). События легенды относятся к IX в. до н.э. Финикийская царица Дидона с небольшим отрядом сторонников бежала из г.Тира, спасаясь от преследований. Выбрав на африканском берегу Средиземного моря удобное место, Дидона и ее спутники решили основать поселение. Дидоне удалось уговорить правителя тех мест отдать в ее распоряжение участок земли, который можно окружить бычьей шкурой. Не поняв хитрость финикийки, правитель дал согласие. Дидона же после заключения соглашения разрешила шкуру быка на тонкие полоски, связала их в длинный ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген.

Анализируя ситуацию, можно поставить несколько различных задач оптимизации. Рассмотрим следующую:

Среди гладких кривых длины l , соединяющих две заданные точки P_1 и P_2 ($l > |P_1P_2|$), найти ту, которая вместе с отрезком P_1P_2 ограничивает наибольшую площадь.

Примем за ось Ox прямую, проходящую через точки P_1 и P_2 , тогда площадь ограниченная кривой $y = y(x)$, которую всегда можно считать расположенной над осью Ox , выразится интегралом

$$J[y] = \int_a^b y dx ,$$

где a, b – абсциссы точек P_1 и P_2 . Таким образом, задача состоит в отыскании максимума функционала J при условиях $y(a) = y(b) = 0$, $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l$.

Данная постановка допускает обобщения, когда точки P_1 и P_2 не являются фиксированными и берег не является прямой линией.

Изопериметрическая задача

Изопериметрической задачей вариационного исчисления называется следующая:

Среди всех функций класса $\Sigma = \{x(t) \in C^1[t_0, t_1]: x(t_0) = A, x(t_1) = B\}$, на которых функционал

$$K[x] = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

равен заданному значению l , найти ту, для которой функционал

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

принимает экстремальное значение.

Первоначально под изопериметрической задачей понималась следующая частная задача: среди всех замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти ту, которая охватывает наибольшую площадь. Отсюда произошло и название «изопериметрическая задача», т.е. задача с фиксированным периметром.

Предполагаем, что функции F и G имеют непрерывные производные первого и второго порядков при $t \in [t_0, t_1]$ и при произвольных значениях x и \dot{x} . Далее предположим, что искомая кривая не является экстремалью функционала $K(x(\cdot))$.

Подход к исследованию поставленной задачи дает следующая

Теорема 1.14. Если кривая $x_0(t) \in \Sigma$ дает экстремум функционалу

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

при условии $K[x] = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = l$ и не является экстремалью

функционала $K[x]$, то существует постоянная λ такая, что $x_0(t)$ является

экстремалью функционала $\int_{t_0}^{t_1} (F + \lambda G) dt$.

Таким образом, решение изопериметрической задачи находится либо среди стационарных точек функционала $J[x] + \lambda K[x]$, либо среди экстремалей функционала $K[x]$. Следовательно, имеет место следующее необходимое условие:

Теорема 1.15. Пусть $x_0(t) \in \Sigma$ является решением изопериметрической задачи, тогда найдутся такие постоянные λ_0, λ_1 ($\lambda_0 \geq 0, \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$), что $x_0(t)$ является экстремалью функционала $\lambda_0 J[x] + \lambda_1 K[x]$.

Данный результат непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций и наличия нескольких изопериметрических условий.

Пусть требуется отыскать экстремум функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_m(t)) dt$$

при условиях

$$x_i(t_0) = A_i, \quad x_i(t_1) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} G_j(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_m(t)) dt = l_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Тогда, если вектор-функция $x_0(t)$ есть решение поставленной изопериметрической задачи, то найдутся множители $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что

$$H_{x_l} - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

где $H = \lambda_0 F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j$.

Пример и задачи

Пример 1.4. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^1 x dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Составим функцию $H = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$. Уравнение $H_x - \frac{d}{dt} H_{\dot{x}} = 0$ имеет вид $-2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0$. $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае оба множителя одновременно обращаются в нуль. Пусть $\lambda_0 = 1/2$, тогда $\ddot{x} = \lambda_1$. Общее решение есть $x = \frac{\lambda_1}{2} t^2 + C_1 t + C_2$. Постоянные λ_1, C_1, C_2 находим из условий на концы и изопериметрического условия:

$$C_2 = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{2} + C_1 = 1,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{2} t^2 + C_1 t \right) dt = \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_1}{2} = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 6, C_1 = -2, C_2 = 0$, т.е. единственной допустимой экстремалью является $x = 3t^2 - 2t$.

Применим для решения этой задачи пакет MATLAB, при этом помимо нахождения экстремали данной задачи определим экстремаль целевого функционала и сравним их.

```

clear all
format long
syms x y Dy D2y lambda
F=Dy^2;
x1=0;
y1=0;
x2=1;
y2=1;
F1=y;
J1=0;
fprintf('Интегрант целевого функционала: F=%s\n', char(F))
fprintf('Граничные условия: y(%d)=%d, y(%d)=%d\n',x1,y1,x2,y2)
fprintf('Изопериметрическое условие: Int(%s,"x",%d,%d)=%d\n', char(F1),x1,x2,J1)
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy);
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y;
Euler=simple(dFdy-dFy1dx);
degEuler=strcat(char(Euler),'=0');
Sol=dsolve(degEuler,'x');
if length(Sol)~=1
    error('Resheniy bolee odnogo, RESHENIY NET!');
end
SolLeft=subs(Sol,x,sym(x1));
SolRight=subs(Sol,x,sym(x2));
EqLeft=strcat(char(vpa(SolLeft,14)), '=', char(sym(y1)));
EqRight=strcat(char(vpa(SolRight,14)), '=', char(sym(y2)));
Con=solve(EqLeft,EqRight);
C1=Con.C1;
C2=Con.C2;
SolOsn=vpa(eval(Sol),14);
xpl=linspace(x1,x2);
yOsn=subs(SolOsn, x, xpl);
fprintf('Экстремаль целевого функционала: %s\n', char(SolOsn))

```

```

L=F+lambda*F1;
dLdy=diff(L,y);
dLdy1=diff(L,Dy);
d_dLdy1_dx=diff(dLdy1,x);
d_dLdy1_dy=diff(dLdy1,y);
d_dLdy1_dy1=diff(dLdy1,Dy);
dLy1dx=d_dLdy1_dx+d_dLdy1_dy*Dy+d_dLdy1_dy1*D2y;
EulerL=simple(dLdy-dLy1dx);
degEulerL=strcat(char(EulerL), '=0');
SolL=dsolve(degEulerL, 'x');
if length(SolL)~=1
    error('Resheniy bolee odnogo, RESHENIY NET!')
end
dydx=diff(SolL,x);
F1_y=subs(F1,{y,Dy},{SolL,dydx});
intF1=vpa(int(F1_y,x,x1,x2),14)
SolLleft=vpa(subs(SolL,x,sym(x1)),14);
SolLright=vpa(subs(SolL,x,sym(x2)),14);
LeftL=strcat(char(SolLleft), '=', char(sym(y1)));
RightL=strcat(char(SolLright), '=', char(sym(y2)));
intF1J1=strcat(char(intF1), '=', char(sym(J1)));
ConL=solve(LeftL, RightL, intF1J1);
C1=vpa(ConL.C1,14);
C2=vpa(ConL.C2,14);
lambda=vpa(ConL.lambda,14);
SolItog=vpa(eval(SolL),14);
fprintf('Экстремаль изопериметрической задачи: %s\n', char(SolItog))
yItog=subs(SolItog,x,xpl);
plot(xpl,yOsn,'g',xpl,yItog,'r')
title('\bfEXTREMALI')
legend('yFunktionala', 'yZadachi', 0)
xlabel('x')
ylabel('y(x)')

```

В результате получаем:

Интегрант целевого функционала: $F=Dy^2$

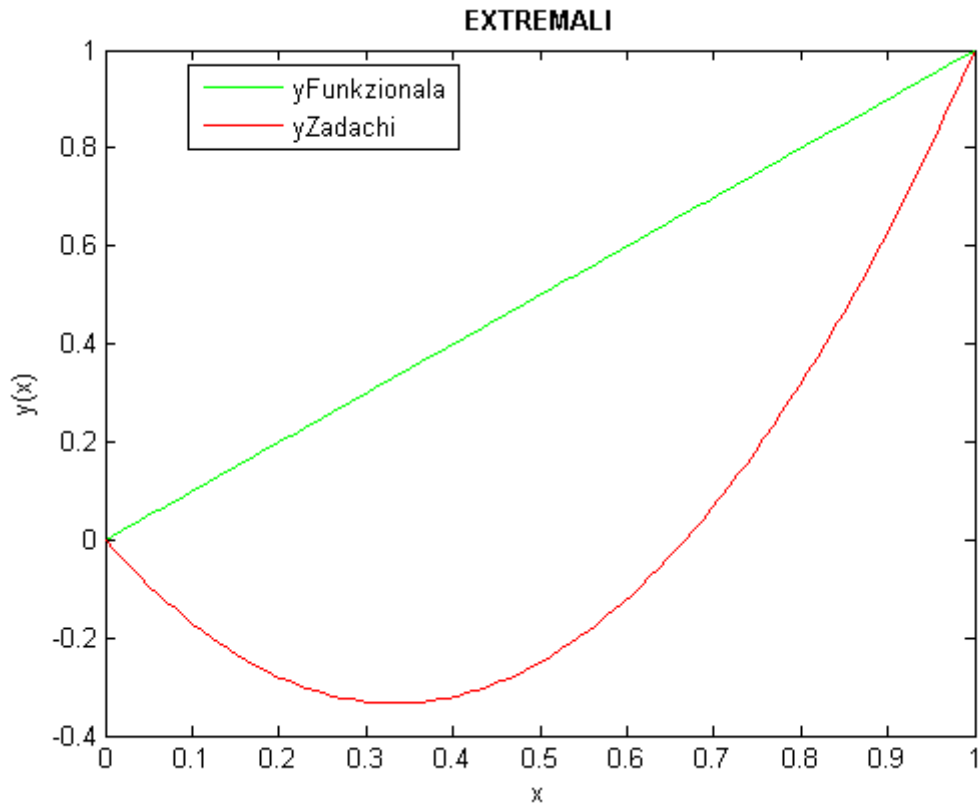
Граничные условия: $y(0)=0, y(1)=1$

Изопериметрическое условие: $\text{Int}(y, "x", 0, 1)=0$

Экстремаль целевого функционала: x

$\text{intF1} = .8333333333333333e-1 * \text{lambda} + .5000000000000000 * C1 + C2$

Экстремаль изопериметрической задачи: $3.0000000000000000 * x^2 - 2.0000000000000000 * x$



Задачи

1. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 3, x(0) = 1, x(1) = 6.$
2. $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2}, x(0) = 1, x(\pi) = -1.$
3. $\int_0^\pi x \sin t dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi \dot{x}^2 dt = \frac{3\pi}{2}, x(0) = 0, x(\pi) = \pi.$
4. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x e^t dt = e, x(0) = 0, x(1) = 1.$
5. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = \int_0^1 t x dt = 0, x(1) = 1.$

Задача Лагранжа

В 1770 г. Лагранж формулирует следующую весьма общую вариационную задачу, для которой указывает способ вывода как уравнений экстремалей (уравнений Эйлера), так и условий трансверсальности.

Лагранж ставит задачу отыскания в классе непрерывных функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$R_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.18)$$

и краевым условиям

$$G_k(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad k = \overline{1, g}, \quad g \leq 2n + 1 \quad (1.19)$$

функции, доставляющей минимум функционалу

$$J[x] = x_1(t_1). \quad (1.20)$$

Через много лет Лагранж возвращается к задаче (1.18)–(1.20), заменив в ней функционал (1.20) функционалом вида

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt. \quad (1.21)$$

Эта последняя задача и получила впоследствии его имя, в то время как первую несправедливо назовут задачей Майера, исследовавшего ее лишь в 1886 г. Как показал Блисс [8], задачи Лагранжа и Майера эквивалентны не только друг другу, но и задаче Больца, из которой они формально получаются в виде частных случаев

Для поставленных общих задач вариационного исчисления Лагранж по существу формально получает необходимые условия (правило множителей), так как данное им «доказательство» есть не что иное, как повторение доказательства правила множителей для задачи о минимуме функции конечного числа переменных. Некоторые нестрогости подобного переноса были устранены А. Майером, а затем Д. Гильбертом, но в основном строгость и общность теории экстремума для задач Майера и Лагранжа была достигнута в работах О. Больца, Г. Блисса, Л. Гревза, У. Рейда, Х. Хана, М. Хестенса, Э. Макшейна и других.

Конец 30-х годов 20 века был богат на ряд существенных обобщений в теории вариационного исчисления. В этот период было доказано, что широкий спектр вариационных задач, включающих различного рода ограничения, разрывы и зависимости от промежуточных значений траекторий, может быть сведен к стандартной задаче Больца, являющейся обобщением задачи Лагранжа.

Приведем необходимые условия оптимальности для следующей задачи Больца:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ J_0[t_0, x(t_0), u, t_1, x(t_1)] &\rightarrow \inf_u, \\ J_j[t_0, x(t_0), u, t_1, x(t_1)] &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m_1, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$J_i[t_0, x(t_0), u, t_1, x(t_1)] = 0, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2,$$

$$J_k[t_0, x(t_0), u, t_1, x(t_1)] = \int_{t_0}^{t_1} F_k(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_k(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad k = 0, \dots, m_2.$$

Пусть решение задачи (1.22) существует и имеет вид $(t_0, t_1, u_0(t), x_0(t))$. Здесь $u_0(t)$ – оптимальное управление; $x_0(t)$ – оптимальная траектория; t_0 и t_1 – неизвестные моменты начала и окончания движения.

Предположим, что функции $f, F, f_x, f_u, F_x, \varphi, \varphi_x$ непрерывны в некоторой окрестности $(x_0(t), u_0(t), t), t \in [t_0, t_1]$, где $F = (F_0, \dots, F_{m_2})$, $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m_2})$.

Теорема 1.16. Пусть $(t_0, t_1, u_0(t), x_0(t))$ – решение задачи (1.22). Тогда существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m_2})$, $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$, причем $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$, что справедливы соотношения:

уравнения эволюции системы

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)); \quad (1.23)$$

уравнение Эйлера

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_x(t, x_0(t), u_0(t))\lambda; \quad (1.24)$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0) = -\varphi_x(t_0, x, t_1, y)\lambda, \quad \psi(t_1) = \varphi_y(t_0, x, t_1, y)\lambda \quad (1.25)$$

при $x = x_0(t_0), y = x_0(t_1)$;

условия стационарности

$$-F_u(t, x_0(t), u_0(t))\lambda + f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) = 0; \quad (1.26)$$

условия на подвижные концы t_0, t_1 (учитываемые лишь в случае подвижных концов)

$$F'(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda - [\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), t_1, x_0(t_1)) + \\ + \varphi'_x(t_0, x, t_1, y)\dot{x}_0(t_0)]'\lambda = 0, \quad (1.27)$$

$$F'(t_1, x_0(t_1), u_0(t_1))\lambda + [\varphi_{t_1}(t_0, x_0(t_0), t_1, x_0(t_1)) + \\ + \varphi'_y(t_0, x, t_1, y)\dot{x}_0(t_1)]'\lambda = 0 \quad (1.28)$$

при $x = x_0(t_0), y = x_0(t_1)$ (символ «штрих» здесь и далее в этом пункте обозначает знак транспонирования);

условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_j \left[\int_{t_0}^{t_1} F_j(t, x_0(t), u_0(t)) dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), t_1, x_0(t_1)) \right] = 0, \quad j = 1, \dots, m_1; \quad (1.29)$$

условия неположительности

$$\lambda_i \leq 0, \quad i = 0, \dots, m_1. \quad (1.30)$$

Отметим, что условие (1.27) следует учитывать, если варьируется момент t_0 начала движения, а условие (1.28) – если варьируется момент t_1 . Если же какой-либо из моментов t_0 или t_1 является заданным, то соответствующее условие (1.27) или (1.28) не учитывается. Кроме того, если λ_0 отлично от нуля, т.е. если $\lambda_0 < 0$, то в качестве λ_0 можно взять любую отрицательную постоянную.

Условия (2.29), (2.30) удобно записать в терминах функции $H(t, x, u, \psi)$, определяемой равенством

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t)f(t, x, u) + \lambda'F(t, x, u).$$

При этом условие (2.29) представимо в виде

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=t_0} = \lambda' \varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), t_1, x_0(t_1)).$$

Условие (2.30) записывается в форме

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=t_1} = -\lambda' \varphi_{t_1}(t_0, x_0(t_0), t_1, x_0(t_1)).$$

Здесь $H|_{t=t_1}$ есть значение функции H при $t = t_1$.

Итак, для задачи управления (1.22) необходимые условия оптимальности выражаются соотношениями (1.23) – (1.30).

Заметим, что соотношения (1.22) – (1.30) сохраняют свой вид при замене ψ на $C\psi$ и λ на $C\lambda$ для произвольной постоянной $C > 0$. Значит, число независимых компонент вектора $\lambda \in R^{m_2+1}$ не превосходит m_2 . Таким образом, общее решение системы (1.23), (1.24) зависит от $2n + m_2 + 2$ постоянных, для определения которых имеется $2n$ условий (1.25), два условия (1.27), (1.28) на подвижные концы t_0, T и, наконец, m_1 условий (1.29) и $m_2 - m_1$ равенств из (1.22). Следовательно, число условий, служащих для построения оптимального управления, совпадает с числом искомым постоянных.

Пример и задачи

Пример 1.5. Исследовать задачу Лагранжа

$$\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + x_1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

Условия на подвижные концы (1.27), (1.29) и условия дополняющей нежесткости (1.29) не учитываются в силу постановки рассматриваемой задачи. Система уравнений Эйлера (1.24) имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1,$$

Откуда $\psi_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, $\psi_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Из условий трансверсальности (1.25) имеем $\psi_1(0) = -\lambda_1$, $\psi_1(1) = \psi_2(0) = \psi_2(1) = 0$, следовательно $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$, $\lambda_1 = 0$, а значит $\lambda_0 \neq 0$. Условие стационарности (1.26) имеет вид $-2\lambda_0 u + \psi_1 = 0$, поэтому $u \equiv 0$. Из системы (1.23) получаем $x_1 = Ae^t + Be^{-t}$, $x_2 = Ae^t - Be^{-t}$. Принимая во внимания краевое условие, имеем $B = 1 - A$. Таким образом, семейство $u \equiv 0$, $x_1 = Ae^t + (1 - A)e^{-t}$, $x_2 = Ae^t - (1 - A)e^{-t}$, $t \in [0, 1]$ – удовлетворяет всем необходимым условиям и является подозрительным на оптимальность.

Задачи. Исследовать задачу Лагранжа

$$1. \quad \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + x_1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$2. \quad \int_0^{\pi/2} u^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - x_1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$3. \quad \int_0^{\pi/2} u^2 dt + x_1^2(0) \rightarrow \text{extr}; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - x_1, \quad x_1(\pi/2) = 1.$$

$$4. \quad \int_0^T u^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T x dt = 1, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 3.$$

$$5. \quad \int_1^2 t^2 u^2 dt - 2x(1) + x^2(2) \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x} = u.$$

$$6. \quad T \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T u^2 dt = 4, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2(T) = -1.$$

$$7. \quad T \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T u^2 dt = 1, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = 1.$$

Глава 2

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Понятие о прямых методах

Основным вопросом, возникающим в связи с любой вариационной проблемой, является вопрос о существовании решения. Классические методы вариационного исчисления приводят этот вопрос в первую очередь к вопросу о существовании решения дифференциального уравнения. При этом ищется решение не в окрестности какой-либо точки, а во всей области – при определённых краевых условиях (решение в целом). Доказательство существования таких решений теория дифференциальных уравнений даёт лишь в редких случаях. Это обстоятельство заставило искать другие подходы к вариационным проблемам и привело к созданию так называемых *прямых методов*.

Прямые методы вариационного исчисления оказались полезными и для теории дифференциальных уравнений. Действительно, если некоторое дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера для некоторого функционала и если каким-то приёмом установлено, что этот функционал имеет экстремум в классе достаточно число раз дифференцируемых функций, то тем самым доказано, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение в целом при рассматриваемых краевых условиях. Так как прямой метод состоит в построении последовательности функций, сходящейся к искомой функции, то с помощью прямого метода не только устанавливается существование решения в целом, но и даётся некоторый способ для приближённого построения этого решения.

Впервые широко и систематически идея перехода от краевой проблемы для дифференциального уравнения к вариационной краевой проблеме была использована Риманом. Его теоретико-функциональные исследования нуждались в доказательстве разрешимости проблемы Дирихле для любой плоской области, ограниченной одним контуром, то есть в доказательстве существования функции $u(x, y)$, имеющей внутри области непрерывные производные второго порядка по x и по y и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

а на границе этой области совпадающей с заданной непрерывной функцией. Уравнение Лапласа (2.1) является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала

$$D[u] = \iint_S \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} dx dy,$$

который принимает только неотрицательные значения. В силу этого последнего обстоятельства Риман считал очевидным существование у этого функционала минимума, а значит, у уравнения (2.1) решения, удовлетворяющего упомянутому краевому условию. С этой аргументацией, восходящей к Гауссу и Томсону, Риман познакомился ещё в бытность студентом на лекциях Дирихле и назвал её *принципом Дирихле*.

Однако умозаключение Римана подверглось критике со стороны Вейерштрасса. Эта критика сводится к следующему: из того, что функционал ограничен снизу, вытекает лишь, что он имеет конечную точную нижнюю грань; утверждать же, что эта грань достигается на функции рассматриваемого класса, то есть что эта нижняя грань есть минимум, вообще говоря, нельзя. Вейерштрасс привёл пример неразрешимой вариационной задачи этого рода. Поэтому для спасения замечательных результатов, полученных Риманом с помощью принципа Дирихле, началась усиленная разработка других методов. Однако из критики Вейерштрасса, носящей общий характер, вовсе, не вытекало, что принцип Дирихле, который касается специального функционала, не может быть обоснован. Поэтому время от времени делались попытки такого обоснования. Существенный сдвиг в этом направлении принадлежит Гильберту, исследования которого были продолжены целой плеядой математиков. Эти исследования привели не только к обоснованию принципа Дирихле в несколько модифицированной форме, но и к созданию вообще прямых методов в вариационном исчислении. Большой вклад в разработку этих методов внесли советские математики Н.Н. Боголюбов, Н.М. Крылов, М.А. Лаврентьев и Л.А. Люстерник.

Переходя к описанию основных этапов, из которых складывается прямой метод, примем для определённости, что речь идёт о минимуме функционала $J[C]$, где C пробегает некоторую совокупность M кривых линий. Чтобы задача имела смысл, необходимо предположить, что в совокупности M есть кривые, на которых функционал $J[C]$ конечен, а также, что

$$\inf_{C \in M} J[C] = \mu > -\infty.$$

В таком случае, по определению нижней границы, существует такая последовательность (Σ) кривых

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$$

из M (*минимизирующая последовательность*), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[C_n] = \mu.$$

Первый вопрос, который здесь возникает, – это вопрос о существовании у последовательности (Σ) предельной кривой. Некоторые условия, при выполнении которых предельная кривая существует, установил впервые Гильберт.

Пусть предельная кривая (назовём её \bar{C}) существует и принадлежит M . Если окажется, что предельный переход

$$J[\bar{C}] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[C_n]$$

законен, то

$$J[\bar{C}] = \mu \quad (2.2)$$

и, значит, кривая \bar{C} даёт абсолютный минимум.

Равенство (2.2) наверно имело бы место, если бы функционал $J[C]$ был непрерывной функцией линии всюду в M или хотя бы на \bar{C} , то есть если бы неравенство

$$|J[C] - J[\bar{C}]| < \varepsilon$$

выполнялось для всякой кривой $C \in M$ из некоторой зависящей от ε окрестности кривой \bar{C} . Однако $J[C]$, вообще говоря, не является непрерывной функцией линии. К счастью, для доказательства равенства (2.2), как впервые заметил Лебег, непрерывность функционала вовсе не необходима, а вполне достаточна полунепрерывность снизу.

В самом деле, пусть функционал $J[C]$ полунепрерывен снизу и пусть (Σ) есть минимизирующая последовательность, а \bar{C} – её предельная кривая, принадлежащая совокупности M . Тогда, с одной стороны, по определению μ

$$\mu \leq J[\bar{C}] \quad (2.3)$$

а с другой стороны, в силу полунепрерывности снизу функционала $J[C]$

$$J[C_n] \geq J[\bar{C}] - \varepsilon,$$

если C_n лежит в достаточно малой окрестности кривой \bar{C} . А так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[C_n] = \mu,$$

то при любом $\varepsilon' > 0$

$$\mu \geq J[\bar{C}] - \varepsilon'. \quad (2.4)$$

Сравнение (2.4) и (2.3) приводит к равенству

$$J[\bar{C}] = \mu,$$

которое и выражает, что кривая \bar{C} доставляет функционалу $J[C]$ минимум.

Таким образом, *прямой метод состоит из:*

- 1) построения минимизирующей последовательности,
- 2) доказательства существования у этой последовательности предельной кривой,
- 3) доказательства полунепрерывности функционала на предельной кривой.

Теоремы существования в вариационном исчислении

Творцом прямого метода явился Л. Тонелли (1885–1946). Научное наследие Тонелли по математике составляет 174 работы (из них: 137 оригинальных научных работ), особенно велики его заслуги в области теории функций действительного переменного и вариационного исчисления.

Первая работа Тонелли по вариационному исчислению, которая была опубликована в 1911 г., посвящена установлению необходимых и достаточных

условий для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от параметрического представления допустимых кривых. В следующей своей большой работе, опубликованной в том же году (автору тогда не было и 26 лет), Тонелли впервые применяет свой прямой метод для доказательства существования абсолютного минимума в регулярных задачах вариационного исчисления. В следующих своих работах автор применил этот метод к задачам небесной механики для нахождения периодических орбит. Стержнем всех работ является так называемый прямой метод в вариационном исчислении, который позволил автору, а также многочисленным ученикам и последователям доказать труднейшие вопросы, связанные с существованием абсолютного минимума вариационных задач с обычными и кратными интегралами.

Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления в классе абсолютно непрерывных функций¹:

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$
(2.5)

Причинами, вследствие которых задача может не иметь решения, могут быть следующие:

- 1) невыпуклость интегранта по \dot{x} ;
- 2) недостаточный рост интегранта по \dot{x} ;
- 3) неограниченность функционала снизу.

Имеет место следующая теорема существования решения задачи (2.5)

Теорема (Тонелли, [75]). Пусть в задаче (2.5) интегрант F допускает оценку

$$F(t, x, \dot{x}) \geq \alpha |\dot{x}|^p + \beta,$$

где $\alpha > 0$, $p > 1$, (t, x) принадлежат некоторой связной замкнутой области $G \in R^2$, содержащей точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) , и при этом функция $\dot{x} \rightarrow F(t, x, \dot{x})$ выпукла для любой пары $(t, x) \in G$. Тогда среди всех абсолютно непрерывных кривых, график которых расположен в G , существует кривая, доставляющая минимум в задаче (2.5).

¹ Говорят, что функция абсолютно непрерывна, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$, для которой $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$

оказывается $\left| \sum_{k=1}^n \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \varepsilon$.

Условия Тонелли позволяют избежать всех трех причин несуществования решений (F предполагается квазирегулярным (\Leftrightarrow функция $\dot{x} \rightarrow F(t, x, \dot{x})$ – выпукла), рост по \dot{x} больше линейного и интегрант ограничен снизу).

Отметим, что квазирегулярность интегранта с теоретической точки зрения можно всегда считать выполненной. Имеет место

Теорема (Боголюбов², [9,10]). Пусть G – замкнутая связная область в R^2 , содержащая точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) , F – непрерывная функция в $G \times R$, \tilde{F} – выпукление функции $\dot{x} \rightarrow F(t, x, \dot{x})$, $(t, x) \in G$ ($\Leftrightarrow \tilde{F}(t, x, \cdot)$ – вторая сопряженная в смысле выпуклого анализа функция $F(t, x, \cdot)$),

$$\tilde{J}[x] = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{F}(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf, \quad (2.6)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad -$$

простейшая задача с интегрантом \tilde{F} . Тогда численное значение в задаче (2.6) (при условии, что графики функций $x(\cdot)$ лежат в G совпадает с численным значением задачи (2.5) и более того для всякой функции $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ ($(t, x) \in G \quad \forall t \in [t_0, t_1]$) существует последовательность $\{x_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ с теми же свойствами такая, что $x_n(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в пространстве $C[t_0, t_1]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} J[x_n] = \tilde{J}[x]$.

В теории многомерных вариационных задач в течение длительного времени не было значительного прогресса. Еще Эйлер получил уравнение экстремальных поверхностей в вариационной задаче для двойного интеграла, распространенного на прямоугольную область интегрирования, а М.В. Остроградский существенно обобщил (1834) эти результаты на более сложные области и многомерные интегралы, причем он рассматривал и задачи с подвижными границами.

Вскоре были получены еще некоторые необходимые условия экстремума в многомерных задачах с неподвижной и подвижной границами, но до создания полной теории необходимых и достаточных условий существования экстремума было еще далеко. Более того, неосознавалась еще даже необходимость доказательства существования решения

² **Николай Николаевич Боголюбов** (1909, Нижний Новгород — 1992) — выдающийся советский математик и физик-теоретик, академик РАН (1991), академик АН СССР (1953) и АН УССР (1948), основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике, с 1956 года — директор лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований (ОИЯИ) в Дубне, с 1965 по 1988 год — директор ОИЯИ, заведующий кафедрой Квантовой статистики и теории поля физфака МГУ с 1966 по 1992.

вариационных задач. Лишь критика Вейерштрассом принципа Дирихле, попытки обоснования этого принципа Риманом и, наконец, обоснование его в работах Гильберта и Лебега привели к отчетливому пониманию необходимости доказательства существования решения вариационных задач и выяснения дифференциальных свойств этих решений, если они существуют.

Гильберт в качестве одной из важнейших проблем предложил доказать, что регулярные вариационные задачи имеют решение в некотором определенном классе функций. Регулярность для функционала

$$\iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy \quad (2.7)$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

понималась Гильбертом в смысле выполнения условия

$$F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0.$$

Весьма значительных успехов в решении этой проблемы добился С.Н. Бернштейн [5-7], доказав, что при $\alpha \leq 2$, $F \geq c(p^2 + q^2)^{\alpha/2}$, где α, c – положительные постоянные, целевой функционал (2.7) может не иметь минимума в классе дважды дифференцируемых функций, а при $\alpha > 2$ указав условия существования абсолютного минимума в классе аналитических функций. Еще более детально он исследовал случай функционала

$$\iint_D F(p, q) dx dy$$

Работы Хаара, Морри, Тонелли, Куранта, Макшейна, Радо, Чезари, Дугласа и других, рассматривавших как задачу о минимуме функционала (2.7), так и аналогичную задачу в параметрической форме, существенно продвинули решение проблемы Гильберта.

В СССР, кроме С.Н. Бернштейна, вопросами, связанными с решением проблемы Гильберта, занимались в 20-х годах М.А. Лаврентьев и Н.Н. Боголюбов.

Исследования М.А. Лаврентьева тесно примыкают к работам итальянского математика Тонелли, который расширил результаты Гильберта и, пользуясь интегралом Лебега, построил теорию абсолютного экстремума вариационных задач вида (2.5). М.А. Лаврентьев показал невозможность распространить теорию Тонелли, если за класс допустимых линий принять множество функций с ограниченным изменением. Он выяснил природу компактности и замкнутости некоторых классов непрерывных функций. Указал достаточное условие для того, чтобы точная нижняя грань множества значений

интеграла $\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt$ для абсолютно непрерывных функций совпадала с

точной нижней гранью множества значений того же интеграла для гладких функций. Таким условием оказалась ограниченность производной $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Наиболее полное решение проблемы Гильберта в двумерном случае было дано в работах [66-68] А. Г. Сигалова (1948–1957 гг.). В этих работах для параметрической задачи было доказано существование непрерывного решения в весьма широких предположениях (допускались поверхности различных топологических типов, граничное условие задавалось конечной системой замкнутых кривых). В непараметрической задаче (2.7) Сигалов детально изучил случай $\alpha > 2$ и наиболее сложный случай $\alpha = 2$. Для строго регулярных задач были указаны достаточные условия существования дважды дифференцируемых решений. Докторская диссертация А.Г. Сигалова «Существование абсолютного минимума двойных интегралов вариационного исчисления» (1951 г.) стала настоящим событием в мировой математике: в положительную сторону была решена 20-я проблема Гильберта.

Некоторые результаты Сигалова были обобщены Г.И. Шиловой [69] на n -мерный случаи (1960 г.). К тому же кругу вопросов относятся также работы В.И. Плотникова [60-62], С.Ф. Морозова [39, 41, 45, 46, 59], Ю.В. Глебского [16], В.И. Казиминова [21]. Следует также отметить работу В.И. Плотникова и С.Ф. Морозова [53] о непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления, которая стала классической, часто цитируемой в литературе.

В цикле работ О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой, подытоженных в их монографии «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа» [36] рассматриваются вариационные задачи в n -мерном случае. В них доказано существование классических и обобщенных решений широкого класса вариационных задач.

Построение минимизирующих последовательностей. Метод Ритца

Одним из важнейших практических методов для построения минимизирующих последовательностей является метод, предложенный в 1908 году Вальтером Ритца. Состоит он в следующем.

Вычисляется n -ое приближение к минимизируемой функции $x_0(t)$ в виде

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad (2.8)$$

то есть значения функционала $J(x(\cdot))$ рассматривается не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях (2.8) с постоянными коэффициентами, составленных из n первых функций некоторой выбранной последовательности функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$$

Последовательность функций должна удовлетворять следующему

Определение 2.1. Пусть J – данный функционал и пусть элементы данной последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежат D_J . Будем говорить, что функционал минимизируется на линейной оболочке последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, если выполняются следующие условия:

1. существует такое линейное нормированное пространство S , что $D_J \subset S$ и последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в S ;
2. любая конечная линейная комбинация элементов последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит D_J ;
3. для каждого $n \in N$ существует минимальный элемент x_n сужения функционала J , обозначенного J_n , то есть элемент $x_n \in \text{Lin}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, удовлетворяющий равенству

$$J_n[x_n] = \min_{x \in \text{Lin}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} J_n[x]. \quad (2.9)$$

Далее последовательно решаются задачи (2.9). На линейных комбинациях (2.8) функционал $J[x_n]$ превращается в функцию $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достигала экстремума; следовательно, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ должны быть определены из условий стационарности, то есть из системы

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Получающаяся в результате последовательность функций x_1^*, x_2^*, \dots сходится к минимуму по функционалу. Заканчивая процесс вычислений на некотором k -ом шаге, получают значение $J[x_k^*]$, приближённо равное глобальному минимуму (при этом сама функция x_k^* может сильно отличаться от оптимальной).

Для оценки точности результатов на практике, вычислив $x_n^*(t)$ и $x_{n+1}^*(t)$, сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка $[t_0, t_1]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно x_n^* . Если же значения $x_n^*(t)$ и $x_{n+1}^*(t)$ хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют $x_{n+2}^*(t)$ и сравнивают значение с $x_{n+1}^*(t)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения $x_{n+k}^*(t)$ и $x_{n+k+1}^*(t)$ не совпадут в пределах заданной точности.

На практике последовательность $\{\varphi_k\}$ обычно строят с помощью системы многочленов $1, t, \dots, t^n, \dots$ или системы тригонометрических функций $\sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \dots$. Обе системы являются полными в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим простейшую вариационную задачи минимизации функционала

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2.11)$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций, подчинённых граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \quad (2.12)$$

Функции $x_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$ должны быть допустимыми в задаче (2.11) – (2.12), что налагает некоторые ограничения на выбор последовательности. Чтобы $x_n(t)$ удовлетворяли (2.12), можно, например, положить

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) = x_0, \varphi_1(t_1) = x_1, \\ \varphi_k(t_0) = \varphi_k(t_1) = 0, k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условиям (2.12) – (2.13) удовлетворяет, например, последовательность функций:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0), \\ \varphi_k = (t - t_0)^{k-1} (t - t_1), k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

или $\varphi_k(t) = (t - t_0)(t - t_1)^{k-1}, k = 2, 3, \dots$

Если нумеровать последовательность $\{\varphi_k\}$ с нуля, формулы переписутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0), \\ \varphi_k(t) = (t - t_0)^k (t - t_1), k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Условиям (2.2.4) – (2.2.5) удовлетворяет также последовательность

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = x_0 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right) (x_1^1 - x_0^0), \\ \varphi_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi(t - t_0)}{t_1 - t_0}\right), k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Функции $\varphi_k(t), k = 0, 1, \dots$ часто называют координатными или базисными.

В общем случае минимизирующая последовательность $x_n^*(t)$, полученная методом Ритца, не является сходящейся, то есть может не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций. Условия сходимости последовательности $x_n^*(t)$ к решению вариационной задачи и оценки быстроты сходимости для конкретных, часто встречающихся функционалов были разработаны в трудах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова.

Глава 3

Введение в теорию разрывных задач вариационного исчисления

Классические методы вариационного исчисления развивались в СССР в основном по двум направлениям: а) изучения разрывных решений, б) изучения многомерных вариационных задач и связанных с ними краевых задач.

В области изучения разрывных решений прежде всего следует отметить работы А.М. Размадзе [64, 65], который рассматривал кусочно гладкие и кусочно непрерывные решения вариационных задач. Им получены необходимые условия экстремума в точках разрыва и указана совокупность достаточных условий. В том же направлении вели исследования Г.Н. Николадзе, К.С. Ермилин, М.К. Керимов [22, 23].

Однако история возникновения интереса к разрывным решениям вариационных задач началась раньше.

На Парижском конгрессе 1900 года Д. Гильберт сформулировал для регулярной вариационной задачи³

$$J[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy \rightarrow \min, \quad z|_{\partial D} = \varphi,$$

где F – аналитическая функция, две проблемы: девятнадцатую и двадцатую [63]. В 20-й проблеме спрашивалось: «допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача, если только на данные граничные условия наложены определенные допущения, ..., – и если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование».

Пример 3.1. Рассмотрим задачу на отыскание $\inf I[y] = \inf \int_0^1 y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx$

на множестве абсолютно непрерывных кривых $C: y = y(x), x \in [0, 1]$, удовлетворяющих условиям на концы $y(0) = 0, y(1) = 1$. Зафиксируем произвольную кривую C из указанного класса, и пусть $x = x(s), y = y(s), \dot{x} > 0, 0 \leq s \leq L$, где s – длина дуги кривой, – ее параметрическое представление. Тогда

$$\int_0^1 y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_C y^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ds \geq \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3},$$

и $\inf I[y]$ не достигается ни на какой «обычной» функции $y(x), x \in [0, 1]$. Между тем если рассмотреть последовательность кривых $C_n: y_n(x) =$

³ Вариационная задача называется регулярной, если подынтегральное выражение F удовлетворяет условию строгой выпуклости относительно (p, q) . Оно может быть записано в виде $E(x, y, z, p, q, \bar{p}, \bar{q}) \equiv F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) - (p - \bar{p})F_p(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) - (q - \bar{q})F_q(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) > 0, (p, q) \neq (\bar{p}, \bar{q})$. Если $E(x, y, z, p, q, \bar{p}, \bar{q}) \geq 0$, то задача называется квазирегулярной.

$$= \begin{cases} 0, & x \in [0, 1 - \frac{1}{n}), \\ n(x-1) + 1, & x \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}, \quad \text{то легко видеть, что } \lim_{n \rightarrow \infty} I[y_n] = 1/3. \quad \text{Данная}$$

последовательность кривых сходится относительно метрики Фреше к кривой C_0 , имеющей отрезок параллельный оси Oy .

Необходимость расширения понятия решения посредством введения в рассмотрение функций, обладающих разрывами типа «стенка» определяется не только нуждами развития теории вариационного исчисления, но и наличием важных прикладных задач (например, задачи теории полета тел переменной массы [72]). Теория одномерных и многомерных вариационных задач, определенных на классе разрывных функций, обладающих конечным или счетным множеством участков неоднозначности (класс существенно разрывных функций) была развита в работах А.Г. Сигалова, В.Ф. Кротова [33,34], С.Ф. Морозова [38-47], В.И. Кошелева [24-31], В.В. Петрова [48-52], А.В. Семенова [55-58], В.И. Сумина [59] и М.И. Сумина. При этом В.Ф. Кротовым было осуществлено дальнейшее расширение класса существенно разрывных функций до класса (y,z) -линий и получены необходимые и достаточные условия экстремума вариационной задачи в этом расширенном классе. Идея такого расширения основана на переходе от поиска точного решения к задаче отыскания минимизирующих последовательностей. Таким образом, объектом поиска в расширенной задаче оказывается класс в определенном смысле эквивалентных минимизирующих последовательностей.

Данный путь расширения вариационных задач был впервые осуществлен американскими математиками Л. Янгом [76, 77] и Э. Макшейном [73, 74]. Для объектов расширенного класса ими было введено понятие обобщенной кривой и построена теория необходимых и достаточных условий экстремума. В теории оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями аналогичные конструкции были осуществлены с использованием для расширенного класса объектов терминов «обобщенная кривая», «обобщенное управление», (Дж. Варга, Э. Макшейн) «скользящий режим» (Р.В. Гамкредидзе, А.Ф. Филиппов, В.Ф. Кротов), «предельное управление» (А. Гуйла-Ури) и т.п.

В работах С.Ф. Морозова, А.В. Семенова изучение вариационной задачи минимизации функционала

$$J[Y] = \int_a^b F(x, Y, Y') dx \quad (3.1)$$

в классе существенно разрывных функций осуществляется посредством перехода к соответствующей ей параметрической (сопряженной) задаче, исследование которой строится на теории обобщенных кривых Янга-Макшейна. Предлагаемый метод исследования позволяет не только получить в качестве результатов теоремы существования обобщенного решения сопряженной параметрической задачи, но и доказать существование абсолютного минимума вариационной задачи в исходном классе существенно

разрывных функций. Данный метод позволяет значительно ослабить требования на гладкость интегранта F и избавляет от необходимости устанавливать факт полунепрерывности сопряженного функционала $J[C]$ в классе абсолютно непрерывных кривых, имеющих не более чем счетное число вертикальных отрезков.

Основные определения и понятия

Допустимый класс кривых (класс II). Параметрическим представлением абсолютно непрерывной кривой C будем называть абсолютно непрерывное отображение $f(t) = (x(t), Y(t)) = (x(t), y_1(t), \dots, y_p(t))$ отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbf{R}^1$ в \mathbf{R}^{1+p} . Если $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – абсолютно непрерывная, строго возрастающая в $[\tau_1, \tau_2]$ функция, такая, что $t_i = \varphi(\tau_i)$ ($i = 1, 2$), то параметрическое представление $f[\varphi(\tau)]$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ будем считать эквивалентным параметрическому представлению $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Кривой $C: \{f(t), t \in [t_1, t_2]\}$ назовем класс всех параметрических представлений, эквивалентных $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Легко видеть, что любую кривую всегда можно предполагать параметрически заданной на отрезке $[0, 1]$.

Носитель ($\{C\} \equiv \{f(t)\}$) кривой C есть, по определению, множество значений функции $f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и он, очевидно, не зависит от вида параметрического представления кривой.

Наделим множество всех абсолютно непрерывных кривых структурой метрического пространства, полагая $\rho(C_1, C_2) = \inf_{[0,1]} \max \|f_1(t) - f_2(t)\|$, где точная

нижняя грань берется по всевозможным парам параметрических представлений кривых C_1, C_2 , определенных на $[0, 1]$.

Пусть $\Omega \equiv \{(x, Y): x \in [a, b], |y_k| \leq y_k^0, k = 1, \dots, p\}$ ($a < b$, $y_k^0 > 0$) и $A = (a, A_1)$, $B = (b, B_1) \in \Omega$.

Абсолютно непрерывная кривая $C: \{f(t), t \in [0, 1]\}$ принадлежит классу II, если

- 1) $(x(t), Y(t)) \in \Omega$, $t \in [0, 1]$;
- 2) $f(0) = A, f(1) = B$;
- 3) существует такая последовательность ломаных $\pi_n: \{f_n(x) = (x, Y_n(x)), x \in [a, b]\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(C, \pi_n) = 0$.

Легко видеть, что для каждой кривой C класса II может существовать не более чем счетное число дуг χ_i , чьи носители целиком лежат в гиперплоскостях $x = x_i$.

Допустимый класс функций (класс III). Пусть C – кривая класса II и $\{C_k\}$ – проекция носителя кривой C на плоскость (x, y_k) . Каждой точке x из интервала $[a, b]$ поставим в соответствие совокупность всех $P_k \in \{C_k\}$, которые имеют x своей проекцией на ось Ox . Тем самым получаем функцию $y_k(x)$,

$x \in [a, b]$, вообще говоря, неоднозначную. Очевидно, что $y_k(x)$ ($k = 1, \dots, p$) не зависят от параметрического представления кривой C .

Совокупность всех вектор-функций $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, $x \in [a, b]$, соответствующих всевозможным кривым $C \in \Pi$ по вышеуказанному правилу, назовем классом **НП** допустимых функций.

Вектор-функция $Y(x) \in \mathbf{НП}$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) и является абсолютно непрерывной на каждом интервале однозначности (x_j, x_{j+1}) ($j = 1, 2, \dots$).

Вариационный функционал. Пусть функция F удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(x, Y, Z)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка по совокупности переменных x, Y, Z : $(x, Y) \in \Omega$, $-\infty < z_k < \infty$ ($k = 1, \dots, p$);

2) в случае $p = 1$ существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{F(x, y, z)}{z} = w(x, y, \text{sign } z),$$

где $w(x, y, \text{sign } z)$ – непрерывная функция вместе со своими производными w_x, w_y при $(x, y) \in \Omega$;

в случае $p > 1$ – конечный предел

$$\lim_{\|Z\| \rightarrow \infty} \frac{F(x, Y, Z)}{\|Z\|} = w(x, Y, \cos \gamma),$$

где $w(x, Y, \cos \gamma)$ – непрерывная функция по совокупности переменных $(x, Y) \in \Omega$, $\|\cos \gamma\| \leq 1$ вместе со своими производными $w_x, w_y, w_{\cos \gamma}$ ⁴.

Функционал $I[Y]$ на классе функций **НП** определим следующим образом:

$$\text{при } p = 1 \quad I[Y] = \sum_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x, y, y') dx + \sum_i \int_{y_i}^{y_i} w(x_i, \xi, \text{sign}[y_i - \bar{y}_i]) d\xi, \quad (3.2)$$

где x_i, x_j – точки разрыва функции $y(x)$; $y_i = y(x_i + 0)$, $\bar{y}_i = y(x_i - 0)$;

$$\text{при } p > 1 \quad I[Y] = \sum_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x, Y, Y') dx + \sum_i \int_{\chi_i} w(x_i, Y, \cos \gamma) ds, \quad (3.3)$$

где $Y(x) \in \mathbf{НП}$, C – кривая класса **П**, соответствующая $Y(x)$, x_i, x_j – точки разрыва функции $Y(x)$ в $[a, b]$, (x_j, x_{j+1}) – интервалы однозначности, χ_i – дуги кривой C , для которых $\dot{x}(s) = 0$. В случае, когда $Y(x)$ абсолютно непрерывна в $[a, b]$, функционал (3.2), (3.3) принимает свой обычный вид (3.1).

Пусть функция F помимо условий 1) и 2) удовлетворяет следующему:

3) F – выпуклая вниз функция по Z , т.е. для всех $(x, Y) \in \Omega$, $-\infty < Z_1, Z_2 < \infty$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \geq 0$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1$ выполняется неравенство:

⁴ $\cos \gamma = (\cos \gamma_1, \dots, \cos \gamma_p)$, $\cos \gamma_k = z_k / \|Z\|$, $\|Z\| = \sqrt{(z_1)^2 + \dots + (z_p)^2}$.

$$F(x, Y, \vartheta_1 Z_1 + \vartheta_2 Z_2) \leq \vartheta_1 F(x, Y, Z_1) + \vartheta_2 F(x, Y, Z_2).$$

При данных предположениях в работе [] следующая теорема существования

Теорема. Пусть $F(x, Y, Z) > 0$ удовлетворяет условиям 1) – 3) с $w \neq 0$ для всех $(x, Y) \in \Omega$, тогда существует функция $Y(x) \in \mathbf{НП}$, доставляющая минимум функционалу $I[Y]$ в классе $\mathbf{НП}$.

Если $Y(x) \in \mathbf{НП}$ – экстремальная функция, тогда необходимые условия первого порядка имеют вид:

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0, \quad (p = 1)$$

$$F_x - \frac{d}{dt} (F - y' F_{y'}) = 0;$$

$$F_{y_k} - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}_k} = 0, \quad (p > 1)$$

$$F_x - \frac{d}{dt} \left(F - y'_k F_{y'_k} \right) = 0,$$

а в точках разрыва x_l – условиям:

при $p = 1$

$$F_{y'}|_{x_l-0} = w(x_l, y_l, \text{sign}(\bar{y}_l - y_l)), \quad F_{y'}|_{x_l+0} = w(x_l, \bar{y}_l, \text{sign}(\bar{y}_l - y_l)),$$

$$\left(F - y' F_{y'} - \int_{y_l^*}^{y_l} w_x d\zeta \right) \Big|_{x_l-0} = \left(F - y' F_{y'} - \int_{y_l^*}^{\bar{y}_l} w_x d\zeta \right) \Big|_{x_l+0};$$

при $p > 1$

$$F_{y'_k}|_{x_l-0} = \left(\cos \gamma_k^* w + w_{\cos \gamma_k} - \cos \gamma_k^* \cos \gamma_j^* w_{\cos \gamma_j} \right) \Big|_{x_l-0},$$

$$F_{y'_k}|_{x_l+0} = \left(\cos \gamma_k^{**} w + w_{\cos \gamma_k} - \cos \gamma_k^{**} \cos \gamma_j^{**} w_{\cos \gamma_j} \right) \Big|_{x_l+0},$$

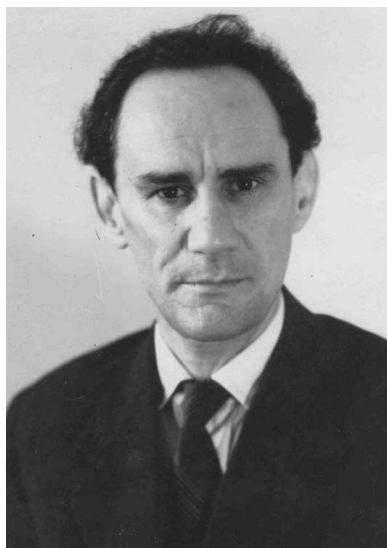
$$\left(F - y'_k F_{y'_k} - \int_{(x, Y^*)}^{(x, Y(x))} w_x ds \right) \Big|_{x_l-0} = \left(F - y'_k F_{y'_k} - \int_{(x, Y^*)}^{(x, Y(x))} w_x ds \right) \Big|_{x_l+0},$$

где $\cos\gamma_k^*, \cos\gamma_k^{**}$ – направляющие косинусы касательной к дуге χ_l , соответственно, в точках $(x_l, Y(x_l - 0)), (x_l, Y(x_l + 0))$. Последние соотношения являются обобщениями на случай существенно разрывных функций «угловых» условий Вейерштрасса-Эрдмана и необходимых условий разрыва Размадзе.

Приложение

Основатели Нижегородской школы вариационного исчисления

Александр Григорьевич Сигалов (1913 – 1969)



Александр Григорьевич Сигалов родился 20 июля 1913 г. в г. Белая Церковь под Киевом.⁵ Детство Александра Григорьевича прошло в Астрахани. В 1929 году осенью он уехал из Астрахани в Свердловск, где в университете учился его брат.

В 1932 г. Александр Григорьевич поступает на математическое отделение физико-математического факультета Уральского университета, который и оканчивает с отличием в 1937 г. Проработав полгода в Свердловском педагогическом институте преподавателем заочного сектора,

А.Г. Сигалов призывается на действительную службу в РККА. В январе 1939 г. он демобилизуется и возвращается в Свердловск, где в течение года работает ассистентом кафедры высшей математики Уральского политехнического института. В 1940 г. А.Г. Сигалов поступает в аспирантуру Московского государственного университета. Его научным руководителем становится Л.А. Люстерник. Война прерывает аспирантуру.

В июле 1941 г. он призывается в действующую армию и тотчас же уезжает на фронт. В августе того же года в боях за переправу через Западную Двину у деревни Ильино Александр Григорьевич получает несколько серьезных ранений и более пяти месяцев проводит в госпиталях Муром и Алма-Аты, откуда выписывается лишь в феврале 1942 г. Пройдя в течение нескольких месяцев подготовку на курсах «Выстрел», Александр Григорьевич возвращается на фронт в 10-й воздушно-десантный гвардейский полк, где служит помощником начальника штаба полка. В 1943 г. тяжелое ранение на реке Ловать вновь и уже окончательно выводит А. Г. Сигалова из строя. После нескольких месяцев лечения он увольняется в отставку. Посмертно Указом Президиума Верховного Совета СССР от 7 мая 1970 г. за подвиги, совершенные в Великой Отечественной войне, А.Г. Сигалов награжден орденом Красной Звезды. В конце 1943 г. А. Г. Сигалов восстанавливается в

⁵ Основой является статья «Александр Григорьевич Сигалов (некролог)» в журнале «Успехи математических наук», 1970, Т. XXV, Вып.5, С.227–234

аспирантуре МГУ и заканчивает ее в декабре 1945 г., защитив кандидатскую диссертацию на тему «Почти изометрические отображения и псевдодифференцируемость».

После непродолжительной работы в Уральском университете в должности и. о. доцента А.Г. Сигалов принимает приглашение Горьковского университета и осенью 1946 г. переезжает с семьей в Горький. В Горьковском университете А. Г. Сигалов сначала в качестве доцента, затем профессора, заведующего кафедрой математического анализа, а в последние годы – заведующего отделом математики научно-исследовательского Радиофизического института при ГГУ работает до конца жизни.

В Горьком вокруг Александра Григорьевича быстро собралась большая группа талантливой научной молодежи. Образовалась целая школа, работающая в области теории функций, вариационного исчисления, теоретико-множественной геометрии. В 1951 г. А. Г. Сигалов защищает диссертацию «Существование абсолютного минимума двойных интегралов вариационного исчисления» на степень доктора физико-математических наук. Эта работа стала настоящим событием в мировой математике: в положительную сторону была решена 20-я проблема Гильберта. Исследования А. Г. Сигалова, связанные с 20-й проблемой Гильберта, хорошо известны и нашли к тому же свое отражение в книге "Проблемы Гильберта" (М.: Наука, 1974)

Владимир Иванович Плотников (1922 – 1988)



Владимир Иванович Плотников родился 7 января 1922 года в селе Абрамове близ Арзамаса.⁶ После окончания местной семилетней школы он уезжает учиться в Арзамасское педагогическое училище. В 1940 году, закончив училище с отличием, В.И. Плотников работает учителем в школе села Тепелево Дальне-Константиновского района Горьковской области. В 1941 году поступает в Арзамасский учительский институт. Отсюда в феврале 1942 года его призывают в армию. Направляют в часть, охранявшую Горьковский автозавод от налетов немецкой авиации.

После окончания Великой Отечественной войны и демобилизации в 1945 году Владимир Иванович поступает учиться на математическое отделение физико-математического факультета Горьковского университета. Студентом он участвует в работе научного семинара профессора А.Г. Сигалова, по рекомендации которого сразу после

⁶ Основой является статья «К 80-летию со дня рождения В.И. Плотникова (1922-1988)» в журнале Вестник ННГУ, сер. Математика, 2003, №.1, С.157-171.

окончания университета в 1950 году поступает в аспирантуру МГУ, к члену-корреспонденту АН СССР Л.А. Люстернику.

Военные и голодные послевоенные годы сильно подорвали здоровье – тяжелая болезнь не позволяет В.И. Плотникову закончить учебу в аспирантуре Московского университета. Врачи советуют оставить мысли о научной работе. Некоторое время он с женой и двумя маленькими дочерьми живет в городе Дзержинске, работает учителем математики в средней школе. Однако, желание заниматься наукой неодолимо – в 1955 году в возрасте 33 лет Владимир Иванович поступает в аспирантуру Горьковского университета к А.Г. Сигалову.

Темой его научной работы становится проблема гладкости обобщенных решений регулярных задач вариационного исчисления, т.е. изучение вопросов, связанных с 19-й и 20-й проблемами Гильберта. В 1958 году Владимир Иванович успешно защищает в МГУ кандидатскую диссертацию «Дифференцируемость решений квазирегулярных задач вариационного исчисления в непараметрической форме».

Цикл работ В.И. Плотникова [60, 61], посвященных проблеме гладкости решений вариационных задач, завершает совместный с А.Г. Сигаловым и Н.Н. Уральцевой обзорный доклад "Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи" на состоявшемся в 1961 году 4-ом Всесоюзном математическом съезде. В это же время Владимир Иванович публикует статьи [53, 62] о полунепрерывности и непрерывности функционалов вариационного исчисления, внесшие существенный вклад в современное вариационное исчисление.

В шестидесятых годах, после открытия принципа максимума Л.С. Понтрягина для динамических систем, научные интересы В.И. Плотникова постепенно перемещаются в область неклассического вариационного исчисления – математическую теорию оптимального управления. Он одним из первых начинает разрабатывать теорию оптимального управления системами с распределенными параметрами. Он создает единую конструктивную теорию оптимизации распределенных и сосредоточенных управляемых систем, ядром которой является общая схема получения необходимых и достаточных условий оптимальности.

Станислав Федорович Морозов (1931-2003)

С.Ф. Морозов родился в июне 1931 г. в деревне Павлово Южного района Ивановской области.⁷ Вскоре после его рождения семья переехала в город Вязники Владимирской области, где прошли детство и юность Станислава Фёдоровича.

⁷ Основой является статья «Станислав Федорович Морозов (1931-2003). Некролог» в журнале Вестник ННГУ, сер. Математика, 2004, № 1(2), С.216-236.



В 1949 г. он окончил среднюю школу и поступил учиться на математическое отделение физико-математического факультета Горьковского государственного университета. Будучи студентом, он участвовал в работе научного семинара профессора А.Г. Сигалова, который привил ему любовь к вариационному исчислению. В 1954 г. он окончил университет, поступил в аспирантуру, руководителем его стал А.Г. Сигалов.

После окончания аспирантуры в 1957 г. С.Ф. Морозов некоторое время работал ассистентом кафедры высшей математики

Горьковского политехнического института, а в 1960 г. перешел на работу в руководимый А.Г. Сигаловым математический отдел Научно-исследовательского радиофизического института (НИРФИ). Здесь он впервые занялся проблемами прикладной математики, здесь им были разработаны алгоритмы и программы ряда важных задач физики и энергетики. Параллельно с основной работой он заканчивает свою кандидатскую диссертацию и защищает ее в Институте математики Сибирского отделения АН СССР. Диссертация, подготовленная под руководством А.Г. Сигалова, называлась «Вариационные задачи на многообразиях». С 1964 г. С.Ф. Морозов начал работать на кафедре автоматки радиофизического факультета Горьковского университета, сначала старшим преподавателем, а с 1965 по 1978 г. – доцентом. С 1988 до 1984 г. он заведовал этой кафедрой. В 1984 г. С.Ф. Морозов перешел на механико-математический факультет Горьковского университета и до 2000 г. заведовал кафедрой математической физики, а затем продолжал работать профессором этой кафедры. В 1987 г. С.Ф. Морозов защитил докторскую диссертацию на тему «Задачи теории оптимизации на классах разрывных функций» в Ленинградском государственном университете.

В области вариационного исчисления его совместная с Владимиром Ивановичем Плотниковым работа [53] о непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления стала классической и часто цитируется в литературе. В ней авторы значительно продвинулись в исследовании данной проблемы по сравнению с известными работами Тонелли и др. С самого начала своей научной карьеры Станислав Фёдорович постоянно интересовался задачами вариационного исчисления на классах разрывных функций, основу которым положили работы Каратеодори, Размадзе и др. Значительная часть работ Морозова относится к этому циклу. Многие свои работы в этой области он подытожил в трех учебных пособиях [38, 39, 47], которые фактически являются обстоятельными монографиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
2. Андреева Е.А., Цирулиева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учеб. Пособие для университетов. М.: Высш. шк., 2006г.
3. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955.
5. Бернштейн С.Н. Sur la nature analytique des solutions de certaines equations aux derives partielles du second ordre // Math. Ann. 1904. V.59. P. 20-76.
6. Бернштейн С.Н. Об уравнениях вариационного исчисления // Успехи матем. наук. 1940. Т.VIII. С. 32-74.
7. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
8. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
9. Боголюбов Н.Н. Sur quelques methodes nouvelles dans le Calcul des Variations // Ann. Math. Pura Appl. Ser. 4. 1930. V.7. P.243 - 272.
10. Боголюбов Н.Н. Новые методы в вариационном исчислении. Изб. труды в 3 томах. Т.1. Киев: Наукова думка, 1969.
11. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
12. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М: Наука, 1977.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
14. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
15. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
16. Глебский Ю.В. О характеристических свойствах решений регулярных и квазирегулярных задач вариационного исчисления // ДАН СССР. 1957. Т.16. № 6. С.910-912.
17. Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А. Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980.
18. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М.–Л.: ОГИЗ, 1941.
19. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005.
20. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

21. Казимиров В.И. О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления // Успехи матем. наук. 1956. Т.ХІ. №3. С.125-129.
22. Керимов М.К. К теории разрывных вариационных задач с подвижными концами // ДАН СССР. 1961. Т.136. № 3.
23. Керимов М.К. О двумерных разрывных задачах вариационного исчисления // Тр. Матем. ин-та АН ГрузССР. 1951. Т.23. С.209-219.
24. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления, I // Изв.вузов. Математика. 1967. № 11. С.21-30.
25. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Достаточные условия существования разрывных решений для простейшего интеграла вариационного исчисления, II // Изв.вузов. Математика. 1967. № 12. С.38-46.
26. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О необходимых условиях экстремума вариационных задач в непараметрической форме на совокупности разрывных функций // Изв.вузов. Математика. 1970. №12. С.37-46.
27. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений в простейших полуопределенных задачах // Матем. заметки. 1970. Т.7. №.1. С.69-78.
28. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса квазирегулярных вариационных задач в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1972. №2. С.54-62.
29. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Разрывные задачи вариационного исчисления со старшими производными // Изв.вузов. Математика. 1975. №10. С.23-32.
30. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах. II // Изв.вузов. Математика. 1977. №2. С.49-59.
31. Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. Теоремы существования разрывных решений в пространственных вариационных задачах // Изв.вузов. Математика. 1970. №5. С.47-52.
32. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление (Задачи и упражнения). М.: Наука, 1973.
33. Кротов В.Ф. О разрывных решениях в вариационных задачах // Изв. Вузов. Математика. 1961. № 2. С.75 - 89.
34. Кротов В.Ф. Разрывные решения вариационных задач // Изв.вузов Математика. 1960. № 5. С.86 - 98.
35. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.-Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.
36. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
37. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. О вариационной задаче в квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными // ДАН СССР. 1960. Т.135. №6 С.1330-1333.
38. Морозов С.Ф. Введение в теорию разрывных задач вариационного

исчисления. Н. Новгород: изд-во ННГУ, 1996.

39. Морозов С.Ф. Многомерные разрывные задачи вариационного исчисления. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999.

40. Морозов С.Ф. О необходимых условиях экстремума двумерных вариационных задач на совокупности разрывных функций // Изв.вузов. Математика. 1972. №1. С.55-63.

41. Морозов С.Ф. О разрывных решениях двумерных задач вариационного исчисления в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1969. №9. С.56-64.

42. Морозов С.Ф. О разрывных решениях одного класса квазирегулярных вариационных задач // Матем.заметки. 1974. Т.16. №2. С.305-315.

43. Морозов С.Ф. О существовании абсолютно непрерывного решения пространственной задачи вариационного исчисления для предельного показателя // Изв.вузов. Математика. 1994. №10. С.42-47.

44. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса квазирегулярных вариационных задач в непараметрической форме // Изв.вузов. Математика. 1972. №2. С.54-62.

45. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений для одного класса многомерных квазирегулярных вариационных задач // Матем.сб. 1974. Т.93. №1. С.18-28.

46. Морозов С.Ф. О существовании разрывных решений многомерных вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1975. №11. С.93-97.

47. Морозов С.Ф. Разрывные задачи вариационного исчисления. Н. Новгород: изд-во ННГУ, 1991.

48. Морозов С.Ф., Петров В.В. Модификация метода Н.И.Боголюбова для случая пространственных нерегулярных разрывных вариационных задач // Укр. мат. журн. 1982. Т.32. №1. С.50-58

49. Морозов С.Ф., Петров В.В. О разрывных решениях нерегулярных вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1979. № 11. С.40-47.

50. Морозов С.Ф., Петров В.В. Об одной n-мерной нерегулярной задачи вариационного исчисления // Изв.вузов. Математика. 1962. №2. С.54-62.

51. Морозов С.Ф., Петров В.В. Обобщение условий Дрездена для разрывных решений вариационных задач // Изв.вузов. Математика. 1976. №10. С.56-64.

52. Морозов С.Ф., Петров В.В. Применение метода Н.И. Боголюбова для решения нерегулярных задач вариационного исчисления // Укр. мат. журн. 1976. Т.28. №4. С.537-540.

53. Морозов С.Ф., Плотников В.И. О необходимых и достаточных условиях непрерывности и полунепрерывности функционалов вариационного исчисления // Метем.сб. 1962. Т 57(99). №3. С.265-280.

54. Морозов С.Ф., Плотников В.И. О непрерывности обобщенных решений вариационных задач // Матем. сб. 1964. Т.65. № 4. С.473-485.

55. Морозов С.Ф., Семенов А.В. Необходимые условия экстремума в

разрывных обобщенных задачах вариационного исчисления // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып.1(20). С.130-136 .

56. Морозов С.Ф., Семенов А.В. О существовании обобщенных и разрывных решений пространственных вариационных задач // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып.2(19). С.166-173.

57. Морозов С.Ф., Семенов А.В. О теории разрывных решений вариационных задач в классе обобщенных кривых // Известия ВУЗов. Математика. 2001. №2(465). С.48-59.

58. Морозов С.Ф., Семенов А.В. Обобщенные кривые и необходимые условия разрывного решения пространственной вариационной задачи // Известия ВУЗов. Математика. 2000. №9(460). С.21-26.

59. Морозов С.Ф., Сумин В.И. Многомерные вариационные задачи в классе разрывных функций // Изв.вузов. Математика. 1973. №8. С.54-67.

60. Плотников В.И. О дифференцируемости решений регулярных вариационных задач в непараметрической форме // Матем. сб. 1960. Т.47. С. 356-396.

61. Плотников В.И. О непрерывности регулярных и квазирегулярных функционалов вариационного исчисления // Матем. сб. 1961. Т.53(95). № 2. С. 137-158.

62. Плотников В.И. О полунепрерывности функционалов вариационного исчисления // Матем. сб. 1960. Т.52(94). С. 799-810.

63. Проблемы Гильберта М.: Наука, 1974.

64. Размадзе А.М. Sur les solutions discontinuous dans le calcul des variations // Math. Ann. 1925. V.94. P.1-52.

65. Размадзе А.М. Sur une condition de minimum necessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations // Bull. Soc. Math. France. 1923. T.51 P.223-235.

66. Сигалов А.Г. Вариационные задачи с допустимыми поверхностями произвольных топологических типов // УМН. 1957. Т.ХII. вып.1. С.53-98.

67. Сигалов А.Г. Двумерные задачи вариационного исчисления // УМН. 1951. Т.6. №2. С.16-101

68. Сигалов А.Г. Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, преобразование к параметрической форме // Матем.сб. 1954. Т.34. №3. С.385-406.

69. Шилова Г.И. Существование абсолютного минимума кратных интегралов вариационного исчисления в непараметрической форме // Матем.сб. 1960. Т.51 (93). №2. С.253-272.

70. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

71. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

72. Lawden D.F. Discontinuous solutions of variational problems //

J.Austral. Math. Soc. 1959. V.1. P.27-37.

73. McShane E. J. Necessary condition in generalized-curves problems of the calculus of variations // Duke Math. Journ. 1940. V.7. P.1 - 27.

74. McShane E.J. Generalized curves // Duke Math. Journ. 1940. V.6. P.513-536.

75. Tonelli L. Fondamenti di Calcolo della Variazioni v.1, 2 Bologna,1923.

76. Young L.C. Generalized curves and the existence of the attained absolute minimum in the calculus of variations // Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III. 1937. V.30. P.212 - 234.

77. Young L.C. Necessary conditions in the calculus of variations // Acta Math. 1938. V.69. P.239 - 258.