МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Н.В. Киселева

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института информационных
технологий математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся
по направлениям подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.9
ББК 22.161.6
К-44

К-44 Киселева Н.В. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 32 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор Д.В. Баландин

В учебно-методическом пособии рассматриваются методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. Приведены типовые примеры с подробными решениями.

Пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 09.03.03 «Прикладная информатика».

Пособие может быть использовано студентами при подготовке к государственному экзамену, а также всеми, кто в своих исследованиях применяет методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.

УДК 517.9
ББК 22.161.6
К-44

Содержание

Введение

В учебно-методическом пособии рассматриваются методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. Этот раздел теории дифференциальных уравнений [1-3], как показывает опыт, является наиболее сложным для усвоения студентами. Для всех типов уравнений приведены примеры с подробными решениями.

Предполагается, что рассматриваемые уравнения являются нелинейными относительно искомой функции и её производных.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Обыкновенные дифференциальные уравнения», а также может быть использовано всеми, кто в своих исследованиях применяет методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называют **дифференциальными уравнениями высших порядков**.

Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где x - независимая переменная, $y(x)$ - искомая функция, а функция F непрерывна в некоторой действительной области G всех своих аргументов и во всяком случае зависит от $y^{(n)}$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.**

Решение уравнения (1) на интервале $x \in (A, B)$ - всякая функция $y = \varphi(x)$, непрерывная, n - раз дифференцируемая и обращающая это уравнение в тождество по x:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Общее решение уравнения (1) зависит от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и может быть записано в явном виде

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \qquad (2)$$

в неявном виде (**общий интеграл**) $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ или в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n) \\ y = \psi(t, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Во многих случаях при интегрировании уравнения (1) получают соотношение $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, \ldots, C_k) = 0$, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=y(x)$, её производные до порядка $0<n-k<n$ (производная $y^{(n-k)}$ входит непременно) и k произвольных постоянных. Такое соотношение называется **промежуточным интегралом** уравнения (1).

Промежуточный интеграл вида $\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)},C_1)=0$, содержащий только одну произвольную постоянную, называется **первым интегралом**.

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

называется **задачей Коши (начальной задачей).**

Если известно общее решение (2), то для решения задачи Коши (3) нужно из системы

$$\begin{cases} \varphi(x_0,C_1,...,C_n)=y_0 \\ \varphi'(x_0,C_1,...,C_n)=y_0' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,...,C_n)=y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{4}$$

найти числовые значения $C_1^0,...,C_n^0$ произвольных постоянных $C_1,...,C_n$ и подставить их в (2). Решение

$$y=\varphi(x,C_1^0,...,C_n^0) \tag{5}$$

будет решением поставленной задачи Коши.

Замечание. Разрешение системы (4) относительно $C_1,...,C_n$ заведомо возможно, если якобиан $\dfrac{D(\varphi,\varphi',...,\varphi^{(n-1)})}{D(C_1,C_2,...,C_n)}\neq 0$.

Если требуется решить только задачу Коши, а общее решение не записывать, то целесообразно находить значения произвольных постоянных уже в промежуточных интегралах, так как при произвольных постоянных дальнейшее интегрирование может быть затруднено или вообще невозможно в элементарных функциях.

Решение (5), выделяемое из общего заданием начальных условий, называется **частным решением**.

График частного решения на плоскости x,y называется **интегральной кривой**.

2. Существование и единственность решения задачи Коши

Подставим начальные условия (3) в уравнение (1), получим соотношение

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \qquad (6)$$

Оно определяет значения $y^{(n)}(x_0) = y_{0_i}^{(n)}, i = \overline{1,m}$.

Теорема. Пусть дано уравнение (1), поставлена задача Коши (3) и выбрано направление $y_{0_i}^{(n)}$, определяемое соотношением (6). Если в области $D: |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b,\ |y' - y_0'| \le b, \ldots, \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \le b,\quad \left|y^{(n)} - y_{0_i}^{(n)}\right| \le b$

1) функция $F(x\ , y\ , y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ непрерывна по совокупности переменных,

2) существуют непрерывные $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial y'}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$,

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \ne 0$,

то существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (3) и дополнительному условию $y^{(n)}(x_0) = y_{0_i}^{(n)}$, по крайней мере в окрестности $|x - x_0| \le h \le a$.

Замечание. Рассмотрение тех значений, для которых $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$, приводит к рассмотрению решений уравнения (1), подозрительных на особые. Мы их исследовать не будем.

3. Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Рассмотрим нелинейные дифференциальные уравнения высших порядков, которые после некоторых преобразований могут быть проинтегрированы в квадратурах.

3.1. Уравнение $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Для уравнения

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \qquad (7)$$

имеют место два случая:

1) уравнение (7) разрешимо относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Последовательно интегрируя, получаем

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2,$$

………………………………………..

$$y = \iint\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

Пример 1

Найти общее решение уравнения $y'' - xe^x = 0$ и решение задачи Коши

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Разрешаем уравнение относительно y'':

$$y'' = xe^x.$$

Интегрируя дважды, находим общее решение

$$y' = \int xe^x dx = (x-1)e^x + C_1,$$

$$y = \int((x-1)e^x + C_1)dx = \int xe^x dx - \int e^x dx + C_1\int dx = (x-1)e^x - e^x + C_1x + C_2 =$$

$$= (x-2)e^x + C_1x + C_2.$$

Для решения задачи Коши подставляем начальные условия $x_0 = 0, y_0 = 1, y_0' = 0$ в выражения для $y(x), y'(x)$ и записываем систему

$$\begin{cases} 1 = -2 + 2C_2 \\ 0 = -1 + C_1. \end{cases}$$

Она имеет решение $C_1 = 1, C_2 = 3$, так что искомым решением задачи Коши будет $y = (x-2)e^x + x + 3$.

2) Уравнение (7) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Чтобы получить общее решение в параметрической форме, найдем зависимость $y(t)$.

Имеем

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,$$

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Аналогично находим

$$y^{(n-2)} = \psi_2(t, C_1, C_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Общее решение уравнения (7) записывается в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

Пример 2

Решить уравнение $y''^3 - 2y'' - x = 0$.

Параметризуем это уравнение

$$\begin{cases} y'' = t \\ x = t^3 - 2t \end{cases}$$

и найдем $y(t)$.

Имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dx}, dy' = y''dx, \ dy' = t(3t^2 - 2)dt = (3t^3 - 2t)dt,$$

$$y' = \int (3t^3 - 2t)dt = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

Далее

$$y' = \frac{dy}{dx}, dy = y'dx,$$

$$dy = (\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1)(3t^2 - 2)dt = (\frac{9}{4}t^6 - 3t^4 + 3C_1t^2 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^2 - 2C_1)dt =$$

$$= (\frac{9}{4}t^6 - \frac{9}{2}t^4 + (3C_1 + 2)t^2 - 2C_1)dt,$$

$$y = \int (\frac{9}{4}t^6 - \frac{9}{2}t^4 + (3C_1 + 2)t^2 - 2C_1)dt = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + (C_1 + \frac{2}{3})t^3 - 2C_1t + C_2.$$

Общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + (C_1 + \frac{2}{3})t^3 - 2C_1t + C_2. \end{cases}$$

3.2. Уравнение $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Для уравнения

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (8)$$

также возможны два случая:

1) Если уравнение разрешимо относительно $y^{(n)}$, то есть

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \qquad (9)$$

то вводим новую искомую функцию $z = y^{(n-1)}$ и записываем уравнение (9) в виде $z' = f(z)$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое всегда интегрируется в квадратурах. Пусть его общий интеграл имеет вид $\Phi(x, z, C_1) = 0$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем уравнение $\Phi(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ вида (7), интегрируемое в квадратурах.

Пример 3

Решить уравнение $y''^2 = y'^2 + 1$.

Положив $y' = z$, получим уравнение $z'^2 = z^2 + 1$, откуда $\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{1 + z^2}$. Решаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \pm dx$, $\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \pm(x + C_1)$.

Делая обратную замену, приходим к уравнению первого порядка

$$\ln\left|y' + \sqrt{1+y'^2}\right| = \pm(x + C_1), \qquad (10)$$

не разрешенному относительно производной. Параметризуем его: $y' = sht$,

$$x + C_1 = \pm\ln\left|sht + \sqrt{1+sh^2 t}\right| = \pm\ln|sht + cht| = \pm\ln\left|\frac{1}{2}(e^t - e^{-t} + e^t + e^{-t})\right| =$$

$$= \pm\ln e^t = \pm t.$$

Таким образом, уравнение (10) допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} y' = sht \\ x + C_1 = \pm t. \end{cases}$$

Далее имеем $\dfrac{dy}{dx} = sht, \quad dy = shtdx = \pm shtdt$, откуда $y = \pm cht + C_2$.

Общее решение исходного уравнения записывается в виде:

$$y = \pm ch(\pm(x + C_1)) + C_2 = \pm ch(x + C_1) + C_2.$$

2) Если уравнение (8) не разрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} y'^{(n)} = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t), \end{cases}$$

то процесс интегрирования происходит следующим образом. Из соотношения $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$ получаем $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = \dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, откуда $x = \displaystyle\int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1 \equiv \chi_1(t, C_1)$.

Далее последовательно находим

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt + C_2 \equiv \chi_2(t, C_2),$$

$$y^{(n-2-} = \frac{dy^{(n-3)}}{dx}.$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx = \frac{\chi_2(t,C_2)\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-3)} = \int \frac{\chi_2(t,C_2)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt + C_3 = \chi_3(t,C_2,C_3),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \chi_n(t,C_2,C_3,\dots,C_n).$$

Общее решения уравнения (8) в параметрической форме записывается в виде

$$\begin{cases} x = \chi_1(t,C_1) \\ y = \chi_n(t,C_2,C_3,\dots,C_n). \end{cases}$$

3.3. Уравнение $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \qquad (11)$$

Могут представиться два случая:

1) Уравнение (11) разрешимо относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}). \qquad (12)$$

С помощью замены

$$z = y^{(n-2)} \qquad (13)$$

уравнение (12) приводится к уравнению второго порядка $z'' = f(z)$. Один из методов его интегрирования таков: умножив обе части на $2z'$, получаем

$$2z''z' = 2f(z)z',$$

$$2z''z'dx = 2f(z)dz,$$

$$d(z'^2) = 2f(z)dz,$$

откуда $z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1$,

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными $\pm\dfrac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx$, которое интегрируется в квадратурах.

Пусть его общий интеграл имеет вид $\Phi(x, z, C_1, C_2) = 0$. Учитывая замену (13), получаем дифференциальное уравнение $(n-2)$- го порядка $\Phi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$ типа (7), интегрируемое в квадратурах.

Пример 4

Решить задачу Коши $2y''' - 3y'^2 = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1.$

Разрешаем уравнение относительно y''':

$y''' = \dfrac{3}{2} y'^2$ и, делая замену $z = y'$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$z'' = \frac{3}{2} z^2. \qquad (15)$$

Умножим (15) на $2z'$:

$$2z''z' = 3z^2 z',$$

отсюда $2z''z'dx = 3z^2 dz$,

$$d(z'^2) = 3z^2 dz,$$

$$z'^2 = \int 3z^2 dz = z^3 + C_1,$$

$$z' = \pm\sqrt{z^3 + C_1} \quad (z^3 + C_1 \geq 0). \qquad (16)$$

Используя заданные начальные условия для функции $y(x)$, найдем начальные условия для $z(x)$: $z(0) = 1,\ z'(0) = -1$. Для выполнения этих начальных условий в (16) следует взять знак “минус“:

$$z' = -\sqrt{z^3 + C_1} \quad (z^3 + C_1 \geq 0). \qquad (17)$$

Учтем начальные условия: $-1 = -\sqrt{1 + C_1}$ и найдем $C_1 = 0$. Теперь (17) принимает вид

$$z' = -z^{\frac{3}{2}}, \quad z \geq 0. \qquad (18)$$

Решаем это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = -z^{\frac{3}{2}}, \ -\frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}} = dx,$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{\sqrt{z}}=x+C_2;\\ z=0.\end{array}\right.$$

Решение $z=0$ не удовлетворяет начальным условиям, поэтому $\sqrt{z}=\dfrac{2}{(x+C_2)}$.

Найдем C_2, подставляя начальные условия:

$$1=\frac{2}{C_2},\ C_2=2.$$

Значит

$$\sqrt{z}=\frac{2}{x+2},$$

$$z=\frac{4}{(x+2)^2}\qquad(x+2>0).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем уравнение первого порядка

$$y'=\frac{4}{(x+2)^2}\quad(x+2>0)\tag{19}$$

с разделяющимися переменными. Заметим, что $y'>0$, то есть условие $z\geq 0$ в (18) выполняется. Интегрируя уравнение (19), находим $y=\int\dfrac{4}{(x+2)^2}dx=-\dfrac{4}{x+2}+C_3$.

Постоянную C_3 определяем, используя начальные условия: $-3=-2+C_3$, $C_3=-1$.

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является $y=-\dfrac{4}{x+2}-1,\ \ x>-2$.

2) Если уравнение (11) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но имеет параметрическое представление

$$\begin{cases}y^{(n)}=\varphi(t)\\ y^{(n-2)}=\psi(t),\end{cases}$$

то интегрирование его совершается следующим образом:

$$y^{(n)}=\frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}},$$

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{y^{(n-1)}dy^{(n-1)}}{y^{(n)}},$$

$$y^{(n)}dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dy^{(n-1)},$$

$$\varphi(t)\psi'(t)dt = d(\frac{y^{(n-1)^2}}{2}),$$

$$y^{(n-1)^2} = 2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1,$$

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1} = \chi(t, C_1).$$

Теперь имеем параметрическое представление

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \chi(t, C_1) \end{cases}$$

и задача сведена к интегрированию уравнения типа (8), случай **2)**. Дальнейшие квадратуры введут $n-1$ новых произвольных постоянных, так как $y^{(n-2)}(t)$ уже известно. Действительно, используя изложенный в разделе 3.2 способ, получим

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\chi'(t, C_1)dt}{\varphi(t)},$$

$$x = \int \frac{\chi'(t, C_1)}{\varphi(t)}dt + C_2 \equiv \chi_2(t, C_1, C_2),$$

$$y^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx = \frac{\psi(t)\chi'(t, C_1)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-3)} = \int \frac{\psi(t)\chi'(t, C_1)}{\varphi(t)}dt + C_3 \equiv \chi_3(t, C_1, C_3)$$

$$y^{(n-4)} = y^{(n-3)}dx = \frac{\chi_3(t, C_1, C_3)\chi'(t, C_1)dt}{\varphi(t)}$$

$$y^{(n-4)} = \int \frac{\chi_3(t, C_1, C_3)\chi'(t, C_1)}{\varphi(t)} dt + C_4 \equiv \chi_4(t, C_1, C_3, C_4),$$

……………………………………………………

$$y = \chi_n(t, C_1, C_3, \ldots, C_n).$$

Общее решение уравнения (11) в параметрической форме запишется в виде

$$\begin{cases} x = \chi_2(t, C_1, C_2) \\ y = \chi_n(t, C_1, C_3, \ldots, C_n). \end{cases}$$

4. Уравнения, допускающие понижение порядка

Основным методом интегрирования дифференциального уравнения (1) n-го порядка, нелинейного относительно искомой функции и её производных, является понижение порядка, то есть сведение путем замены переменных данного уравнения к другому, имеющему порядок ниже заданного. Понижение порядка возможно далеко не всегда. Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся типы нелинейных уравнений, допускающих понижение порядка.

4.1. Уравнение, не содержащее искомой функции и её производных до порядка $k-1$.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{20}$$

где $1 \le k < n$. (Если $k = n$, то имеем уже рассмотренное выше уравнение (7)).

Замена $y^{(k)} = z(x)$, где $z(x)$ - новая неизвестная функция, понижает порядок уравнения (20) на k единиц.

Действительно, после замены переменных уравнение (20) преобразуется в уравнение

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 \tag{21}$$

порядка $n-k < n$.

В противоположность уравнениям, рассмотренным в третьем разделе, нельзя утверждать, что уравнение (21) всегда интегрируется в квадратурах. Если найдем его общий интеграл $\Phi(x, z, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0$, то, возвращаясь к переменной y, получим промежуточный интеграл уравнения (20)

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0, \tag{22}$$

который является дифференциальным уравнением порядка k вида (7), интегрируемым в квадратурах. Интегрирование уравнения (22) введет k новых произвольных постоянных. В результате получим общее решение уравнения (20), зависящее от n произвольных постоянных (в явном виде или в параметрической форме).

Если будет найдено общее решение уравнения (21) в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, \ldots, C_{n-k}) \\ z = \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-k}), \end{cases}$$

то также придем к интегрируемому в квадратурах дифференциальному уравнению порядка k вида (7), допускающему параметрическое представление

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, \ldots, C_{n-k}) \\ y^{(k)} = \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-k}). \end{cases}$$

(см. раздел 3.1, случай **2)**).

Находя зависимость $y(p)$:

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)}dx = \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-k})\varphi'(p, C_1, \ldots, C_{n-k})dp,$$

$$y^{(k-1)} = \int \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-k})\varphi'(p, C_1, \ldots, C_{n-k})dp + C_{n-k+1} \equiv \chi_1(p, C_1, \ldots, C_{n-k+1}),$$

$$dy^{(k-2)} = y^{(k-1)}dx = \chi_1(p, C_1, \ldots, C_{n-k+1})\varphi'(p, C_1, \ldots, C_{n-k})dp,$$

$$y^{(k-2)} = \int \chi_1(p, C_1, \ldots, C_{n-k})\varphi'(p, C_1, \ldots, C_{n-k})dp + C_{n-k+2} \equiv \chi_2(p, C_1, \ldots, C_{n-k+2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = \chi_k(p, C_1, \ldots, C_n),$$

получим общее решение уравнения (20) в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, \ldots, C_{n-k}) \\ y = \chi_k(p, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Пример 5

Решить уравнение $y'' - xy''' + y'''^2 = 0$.

Это уравнение явно не содержит искомую функцию $y(x)$ и её первую производную $y'(x)$. Замена $y''(x) = z(x)$ приводит его к уравнению первого порядка $z - xz' + z'^2 = 0$, которое является уравнением Клеро

$$z = xz' - z'^2. \qquad (23)$$

Семейство его общего решения имеет вид $z = xC_1 - C_1^2$.

Существует также особое решение, которое найдем как огибающую семейства общего решения:

$$\begin{cases} z - xC_1 + C_1^2 = 0 \\ -x + 2C_1 = 0, \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{x}{2}, \quad z = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 0, \quad z = \frac{x^2}{4}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (23) записывается в виде

$$\left[\begin{array}{l} z = xC_1 - C_1^2, \\ z = \dfrac{x^2}{4}. \end{array} \right.$$

В силу произведенной замены имеем:

$$\left[\begin{array}{l} y'' = xC_1 - C_1^2, \\ y'' = \dfrac{x^2}{4}. \end{array} \right.$$

Последовательным интегрированием находим

$$\left[\begin{array}{l} y' = C_1 \dfrac{x^2}{2} - C_1^2 x + C_2, \\ y' = \dfrac{x^3}{12} + \tilde{C}_1, \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = C_1 \dfrac{x^3}{6} - C_1^2 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\ y = \dfrac{x^4}{48} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2. \end{array} \right.$$

Пример 6

Решить уравнение

$$y''^3 + xy'' = 2y'. \tag{24}$$

Это уравнение явно не содержит искомую функцию $y(x)$. Полагая $y' = z(x)$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z'^3 + xz' = 2z$.

Это уравнение Лагранжа. Разрешим его относительно z:

$$z = \frac{1}{2}z'^3 + \frac{1}{2}xz' \tag{25}$$

и решим методом введения параметра:

$$z' = p,$$

$$z = \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}xp,$$

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad dz = pdx,$$

$$\frac{1}{2}pdx + (\frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}x)dp = pdx,$$

$$\frac{1}{2}pdx - (\frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}x)dp = 0,$$

$$pdx - (3p^2 + x)dp = 0.$$

Значению $p = 0$ соответствует решение $z = 0$. Для $p \neq 0$ имеем линейное неоднородное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dp} = \frac{3p^2 + x}{p}$ или $\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = 3p$.

Его общее решение имеет вид $x_{он} = x_{оо} + x_{чн}$.

Для отыскания $x_{оо}$ решаем уравнение

$$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = 0, \quad \frac{dx}{dp} = \frac{x}{p}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}, \quad \left[\begin{array}{l} \ln|x| = \ln|p| + \ln|C_1|, \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = C_1 p, C_1 \neq 0; \\ x = 0, \end{array}\right.$$

$$x_{оо} = C_1 p.$$

Решение $x_{чн}$ ищем в виде $x_{чн} = C_1(p) \cdot p$:

$$C_1'(p)p + C_1(p) - \frac{1}{p}C_1(p)p = 3p,$$

$$C_1'(p) = 3, \quad C_1(p) = 3p,$$

$$x_{чн} = 3p \cdot p = 3p^2.$$

Итак, $x_{он} = C_1 p + 3p^2$.

Общее решение уравнения (25) записывается в виде:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = C_1 p + 3p^2 \\ z = \dfrac{1}{2}p^3 + \dfrac{1}{2}C_1 p^2 + \dfrac{3}{2}p^3,\end{cases} \\ z = 0\end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = C_1 p + 3p^2 \\ z = \dfrac{1}{2}C_1 p^2 + 2p^3,\end{cases} \\ z = 0.\end{array}\right.$$

Используя указанную замену, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(p) = C_1 p + 3p^2 \\ y'(p) = \dfrac{1}{2}C_1 p^2 + 2p^3,\end{cases} \\ y' = 0.\end{array}\right. \qquad (26)$$

Это два дифференциальных уравнения первого порядка.

Первое уравнение из (26) является уравнением, не разрешенным относительно производной, но допускающим параметрическое представление

$$\begin{cases}x(p) = C_1 p + 3p^2 \\ y'(p) = \dfrac{1}{2}C_1 p^2 + 2p^3\end{cases} \qquad (27)$$

Найдем зависимость $y(p)$:

$$y' = \frac{dy}{dz}, \quad dy = y'dx,$$

$$dy = (\frac{1}{2}C_1 p^2 + 2p^3)(C_1+6p)dp = (\frac{1}{2}C_1^2 p^2 + 2C_1 p^3 + 3C_1 p^3 + 12p^4)dp =$$

$$= (12p^4 + 5C_1 p^3 + \frac{1}{2}C_1^2 p^2)dp,$$

$$y(p) = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5}{4}C_1 p^4 + \frac{1}{6}C_1^2 p^3 + C_2.$$

Общее решение уравнения (27) запишется в параметрической форме

$$\begin{cases} x(p) = C_1 p + 3p^2 \\ y(p) = \dfrac{12}{5} p^5 + \dfrac{5}{4} C_1 p^4 + \dfrac{1}{6} C_1^2 p^3 + C_2. \end{cases}$$

Второе уравнение из (26) $y' = 0$, разрешенное относительно производной, имеет решение $y = C$. Непосредственной подстановкой в уравнение (24) убеждаемся, что эти функции являются его решениями.

Таким образом, общее решение исходного уравнения (24) имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(p) = C_1 p + 3p^2 \\ y(p) = \dfrac{12}{5} p^5 + \dfrac{5}{4} C_1 p^4 + \dfrac{1}{6} C_1^2 p + C_2; \end{cases} \\ y = C. \end{array} \right.$$

4.2. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Пусть имеем уравнение

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{28}$$

Порядок этого уравнения можно понизить на единицу заменой $y' = z(y)$, где y – новая независимая переменная, а $z(y)$ – новая искомая функция. При этом от дифференцирования по x следует перейти к дифференцированию по y по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dy}{dx} = z(y(x)),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(z(y(x)) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy} \equiv \varphi_1\left(z, \frac{dz}{dy}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = z\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2 z}{dy^2}\right) =$$

$$= z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \equiv \varphi_2\left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}\right),$$

……………………………………………… .

Методом полной индукции можно доказать, что

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \varphi_k\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{k-1} z}{dy^{k-1}}\right).$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (28), получим дифференциальное уравнение порядка $n-1$:

$$F(y,z,\varphi_1(z,\frac{dz}{dy}),\varphi_2(z,\frac{dz}{dy},\frac{d^2z}{dy^2}),...,\varphi_{n-1}(z,\frac{dz}{dy},...,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}))=0$$

или

$$\tilde{F}(y,z,\frac{dz}{dy},...,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})=0. \qquad (29)$$

Если удастся найти общий интеграл уравнения (29) $\tilde{\Phi}(y,z,C_1,...,C_{n-1})=0$, то соотношение

$$\tilde{\Phi}(y,y',C_1,...,C_{n-1})=0 \qquad (30)$$

является промежуточным интегралом уравнения (28) и дифференциальным уравнением первого порядка, интегрируемым в квадратурах. Общий интеграл уравнения (30) $\Phi(x,y,C_1,...,C_n)=0$ является общим интегралом исходного уравнения (28).

Замечание. Уравнение второго порядка $z''=f(z)$, полученное в разделе 3.3, можно решать изложенным способом. Действительно, положив $\frac{dz}{dx}=u(z)$, где z – новая независимая переменная, а $u(z)$ – новая неизвестная функция, откуда $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}u(z(x))=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=u\frac{du}{dz}$, получаем

$$u\frac{du}{dz}=f(z), \quad udu=f(z)dz,$$

$$\frac{u^2}{2}=\int f(z)dz+\tilde{C}_1,$$

$$u^2=2\int f(z)dz+C_1,$$

$$z'^2=2\int f(z)dz+C_1.$$

Последнее выражение совпадает с (14).

Дальнейшее интегрирование дает

$$\int\frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz+C_1}}=x+C_2.$$

Пример 7

Решить уравнение

$$yy'' - y'^2 = 0. \tag{31}$$

Уравнение явно не содержит независимую переменную x.

Полагаем $\dfrac{dz}{dx} = z(y)$,

тогда $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{d}{dx}(z(y(x))) = \dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = z\dfrac{dz}{dy}$, получаем уравнение $yz\dfrac{dz}{dy} - z^2 = 0$ или $z(y\dfrac{dz}{dy} - z) = 0$.

Случай $z = 0$ соответствует $y' = 0$, то есть $y = C$. Непосредственной подстановкой в уравнение (31) проверяем, что функции $y = C$ являются его решениями. Для $z \neq 0$ имеем дифференциальное уравнение первого порядка $y\dfrac{dz}{dy} - z = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим его общее решение:

$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y}$, $\ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1|$, $z = C_1 y \quad (C_1 \neq 0)$. Заменяя z на $\dfrac{dy}{dx}$, приходим к уравнению $\dfrac{dy}{dx} = C_1 y \quad (C_1 \neq 0)$. Снова разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx, \quad \left[\begin{array}{l} \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = C_2 e^{C_1 x} \quad (C_2 \neq 0); \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}. \tag{32}$$

Решения $y = C$ содержатся в семействе (32) при $C_1 = 0$, $C_2 = C$. Таким образом (32) – общее решение уравнения (31).

4.3. Уравнение в точных производных

Рассмотрим уравнение вида (1), в котором левая часть является полной производной по x от некоторого дифференциального выражения $(n-1)$ - го порядка, то есть $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \dfrac{d}{dx}\varPhi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Такое уравнение называется **уравнением в точных производных** и принимает вид $\dfrac{d}{dx}\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0$. Отсюда следует, что

$$\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=C_1. \qquad (33)$$

Выражение (33) является первым интегралом уравнения (1), представляющим собой дифференциальное уравнение $(n-1)$ - го порядка относительно искомой функции.

Таким образом, уравнения в точных производных допускают понижение порядка на единицу.

Замечание. Если исходное уравнение (1) не является уравнением в точных производных, то можно пытаться подобрать **интегрирующий множитель**, то есть такую функцию $\mu(x,y,y',...y^{(n)})\neq 0$, после умножения на которую уравнение (1) становится уравнением в точных производных. При этом следует помнить, что умножение на интегрирующий множитель может привести к появлению посторонних решений $\mu=0$ и потере решений $\dfrac{1}{\mu}=0$. Например, уравнение $z''=f(z)$ в разделе 3.3 решалось с помощью интегрирующего множителя $\mu=2z'$.

Пример 8

Решить уравнение $yy''+y'^2=0$.

Это уравнение можно записать в виде $\dfrac{d}{dx}(yy')=0$, откуда $yy'=C_1$.

Первый интеграл является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, интегрируя которое имеем

$$y\frac{dy}{dx}=C_1, \quad ydy=C_1dx, \quad \frac{y^2}{2}=C_1x+C_2.$$

Полученное выражение является общим интегралом исходного уравнения.

Пример 9

Вернемся к уравнению (31) $yy''-y'^2=0$, рассмотренному в примере 7.

Левая часть этого уравнения не является точной производной.

Умножим его на множитель $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ $(y \neq 0)$, получим

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = C_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|,$$

$$y = C_2 e^{C_1 x} \quad (C_2 \neq 0).$$

При умножении на множитель $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ можно потерять решение $y = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение проверяем, что функция $y = 0$ является решением. Его можно включить в семейство общего решения, если разрешить произвольной постоянной C_2 принимать значение, равное нулю. Окончательно ответ записывается в виде $y = C_2 e^{C_1 x}$, что совпадает с выражением (32) полученным в примере 7.

4.4. Однородное уравнение

Уравнение вида (1), в котором функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ является однородной относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, то есть

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k\, F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \qquad (34)$$

для любого λ (число k - степень однородности), называется **однородным уравнением**. Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой

$$y' = yz, \qquad (35)$$

где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция.

Действительно, дифференцируем последовательно (35) по x и заменяем каждый раз y' на yz:

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z') = y\varphi_1(z, z'),$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') =$$

$$= y(z^3 + zz' + 2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'') = y\varphi_2(z, z', z''),$$

………………………………………………………………………

$$y^{(i)} = y\varphi_{i-1}(z, z', \ldots, z^{(i-1)}),$$

………………………………………………………………………

$$y^{(n)} = y\varphi_{n-1}(z, z', \ldots, z^{(n-1)}).$$

(Убедиться в справедливости этих формул можно методом полной индукции).

Подставляем полученные выражения для производных в уравнение (1): $F(x, y, yz, y\varphi_1(z, z'), \ldots, y\varphi_{n-1}(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$. Воспользуемся однородностью функции F, полагая $\lambda = y$:

$$y^k F(x, 1, z, \varphi_1(z, z'), \ldots, \varphi_{n-1}(z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Функция $y = 0$ является решением однородного уравнения, иначе не выполнится (34). Для $y \neq 0$ сокращаем на y^k и получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$- го порядка относительно функции z:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Если найдем его общее решение $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$, то подставляя его в (35), придем к промежуточному интегралу уравнения (1) $y' = y\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$, являющемуся дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Интегрируя его (для $y \neq 0$), найдем

$$\frac{dy}{y} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx,$$

$$\ln|y| = \int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx + \ln|C_n|,$$

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx}, \quad (C_n \neq 0). \qquad (36)$$

Решение $y = 0$ можно включить в семейство (36), если разрешить C_n принимать нулевое значение. Общее решение уравнения (1) принимает вид $y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx}$.

Пример 10

Решить уравнение $yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$.

Уравнение является однородным степени 2, поскольку

$$F(x, y, y', y'') = yy'' - y'^2 - 6xy^2,$$

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^2 yy'' - \lambda^2 y'^2 - 6\lambda^2 xy^2 = \lambda^2 F(x, y, y', y'').$$

Делаем замену $y' = yz$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция, тогда

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

Внося выражения для y' и y'' в исходное уравнение, получаем

$$y^2(z^2 + z') - y^2 z^2 - 6xy^2 = 0,$$

$$y^2(z^2 + z' - z^2 - 6x) = 0,$$

$$y^2(z' - 6x) = 0.$$

Функция $y = 0$ является решением.

При $y \neq 0$ получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$z' - 6x = 0.$$

Интегрируем его:

$$\frac{dz}{dx} = 6x, \quad dz = 6xdx,$$

$$z = 3x^2 + C_1.$$

Согласно произведенной замене имеем первый интеграл исходного уравнения $y' = y(3x^2 + C_1)$.

Разделяя в этом уравнении первого порядка переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{y} = (3x^2 + C_1)dx,$$

$$\ln|y| = x^3 + C_1 x + \ln|C_2|,$$

$$y = C_2 e^{x^3 + C_1 x}, (C_2 \neq 0).$$

Решение $y=0$ можно включить в это семейство при $C_2=0$, поэтому окончательно записываем общее решение исходного уравнения в виде

$$y=C_2e^{x^3+C_1x}.$$

4.4. Обобщенное однородное уравнение

Уравнение вида (1) называется **обобщенным однородным**, если существует такое число m, что функция $F(x,y,y',...,y^{(n)})$ обладает свойством

$F(\lambda x,\lambda^m y,\lambda^{m-1}y',...,\lambda^{m-n}y^{(n)})=\lambda^k F(x,y,y',...,y^{(n)})$ для любого λ (число k - степень обобщенной однородности).

Замечание. Чтобы найти число m, следует записать функцию $F(\lambda x,\lambda^m y,\lambda^{m-1}y',...,\lambda^{m-n}y^{(n)})$ и приравнять показатели степеней, в которых λ будет входить в каждое слагаемое. Если полученная система окажется совместной, то m найдется. Если же система будет несовместной, то исходное уравнение не является обобщенным однородным.

С помощью замены

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=e^{mt}z(t), \end{cases} \tag{37}$$

где t – новая независимая переменная, а $z(t)$ – новая искомая функция, обобщенное однородное уравнение приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной t и, следовательно, допускающему понижение порядка на единицу. При этом от дифференцирования по x нужно перейти к дифференцированию по t.

Так как $\dfrac{dx}{dt}=e^t$, то производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{me^{mt}z+e^{mt}z'}{e^t}=e^{(m-1)t}(z'+mz)\equiv e^{(m-1)t}\varphi_1(z,z'),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}(e^{(m-1)t}(z'+mz))}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=\frac{(m-1)e^{(m-1)t}(z'+mz)+e^{(m-1)t}(z''+mz'')}{e^t}=$$

$$= e^{(m-2)t}(z'(m-1) + m(m-1)z + z'' + mz') =$$

$$= e^{(m-2)t}(z'' + (2m-1)z + m(m-1)z) \equiv e^{(m-2)t}\varphi_2(z, z', z''),$$

……………………………………………………………………

$$\frac{d^i y}{dx^i} = e^{(m-i)t}\varphi_i(z, z', \ldots, z^{(i)}),$$

……………………………………………

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{(m-n)t}\varphi_n(z, z', \ldots, z^{(n)}).$$

Внося теперь замену (37) в уравнение (1), получаем

$$F(e^t, e^{mt}z, e^{(m-1)t}\varphi_1(z, z'), \ldots, e^{(m-n)t}\varphi_n(z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0.$$

Полагая $\lambda = e^t$, по свойству обобщенной однородности функции F имеем: $e^{kt}F(1, z, \varphi_1(z, z'), \ldots, \varphi_n(z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0$. Сокращая на $e^{kt} \neq 0$, приходим к уравнению n-го порядка

$$\tilde{F}(z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0, \qquad (38)$$

явно не содержащему независимой переменной t.

Далее, как указывалось в третьем разделе, замена $\frac{dz}{dt} = u(z)$, где z – новая независимая переменная, а $u(z)$ – новая искомая функция, приведет уравнение (38) к дифференциальному уравнению $(n-1)$ - го порядка.

$$\tilde{\tilde{F}}(z, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}) = 0 \cdot \qquad (39)$$

Если будет найдено общее решение уравнения (39) $u = \varphi(z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, то получим промежуточный интеграл уравнения (38) $\frac{dz}{dt} = \varphi(z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ в виде дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Пусть его общее решение имеет вид $z = \psi(t, C_1, \ldots, C_n)$, тогда с учетом (37) общее решение исходного уравнения запишется в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{mt}\psi(t, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Замечание. При $x < 0$ нужно положить $x = -e^t$, что приведет к общему решению того же вида.

Пример 11

Решить уравнение $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

Перепишем уравнение в виде

$$x^3y'' - (y - xy')(y - xy' - x) = 0 \qquad (40)$$

и покажем, что оно является обобщенным однородным.

Имеем

$$F(x, y, y', y'') = x^3y'' - (y - xy')(y - xy' - x),$$

$$F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1}y', \lambda^{m-2}y'') = \lambda^3 x^3 \lambda^{m-2} y'' -$$

$$-(\lambda^m y - \lambda x \lambda^{m-1} y') \cdot (\lambda^m y - \lambda x \lambda^{m-1} y' - \lambda x) =$$

$$= \lambda^{m+1} x^3 y'' - \lambda^{2m} y^2 - \lambda^{2m} xyy' - \lambda^{m+1} xy - \lambda^{2m} xyy' + \lambda^{2m} x^2 y'^2 + \lambda^{m+1} x^2 y'.$$

Приравняем показатели степеней λ во всех слагаемых: $m+1 = 2m = 2m = m+1 = 2m = 2m = m+1$. Система совместна, $m = 1$. Выполним замену

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^t z(t). \end{cases}$$

При этом $\dfrac{dx}{dt} = e^t$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^t z + e^t z'}{e^t} = z + z'$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(z + z') = \frac{\frac{d}{dt}(z + z')}{\frac{dx}{dt}} = \frac{z' + z''}{e^t} = e^{-t}(z' + z'').$$

Уравнение (40) принимает вид:

$$e^3te^{-t}(z' + z'') - (e^t z - e^t(z + z'))\,(e^t z - e^t(z + z') - e^t) = 0,$$

$e^{2t}(z' + z'') - e^t z' e^t (z' + 1) = 0$, $e^{2t}(z' + z'' - z'^2 - z') = 0$, $e^{2t}(z'' - z'^2) = 0$, а после сокращения на e^{2t}:

$$z'' - z'^2 = 0. \qquad (41)$$

Это уравнение не содержит явно независимой переменной t. Можно понизить его порядок, приняв z за новую независимую переменную и полагая $\dfrac{dz}{dt} = u(z)$. Однако легче решить это уравнение как уравнение вида (20), не содержащее явно искомой функции $z(t)$, поскольку при этом не потребуется от дифференцирования по t переходить к дифференцированию по z.

Полагаем $z' = u(t)$, получаем уравнение первого порядка $\frac{du}{dt} - u^2 = 0$ с разделяющимися переменными.

Интегрируем его:

$$\frac{du}{u^2} = dt, \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{u} = t + C_1; \\ u = 0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} u = -\frac{1}{t + C_1}; \\ u = 0. \end{array}\right.$$

Заменяем u на $\frac{dz}{dt}$:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{t + C_1}; \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{array}\right.$$

Интегрируя еще раз, находим

$$\left[\begin{array}{l} z = -\ln|t + C_1| + \ln|C_2| = \ln\left|\frac{C_2}{t + C_1}\right|; \\ z = C. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем общее решение исходного уравнения в параметрической форме

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = e^t \\ y = e^t \ln\left|\frac{C_2}{t + C_1}\right|; \end{cases} \\ \begin{cases} x = e^t \\ y = Ce^t. \end{cases} \end{array}\right.$$

Можно исключить переменную t $(t = \ln|x|)$ и записать общее решение в явном виде

$$\left[\begin{array}{l} y = x \ln\left|\frac{C_2}{\ln|x| + C_1}\right|; \\ y = Cx. \end{array}\right.$$

Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: URSS: Изд-во ЛКИ, 2008. – 472 с.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: ЛИБРОКОМ, 2011. – 240 с.

Наталья Владимировна Киселева

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.