

Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

С. М. Грач

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН С ИОНОСФЕРОЙ

Часть 1. Возбуждение плазменной турбулентности
в верхней ионосфере

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического
факультета для студентов ННГУ, специализирующихся по
направлению подготовки 010800 «Радиофизика».

Нижний Новгород
2012

УДК 533.95
ББК В333.475
Г-78

Г-78 Грач С.М. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН С ИОНОСФЕРОЙ. Часть 1. Возбуждение плазменной турбулентности в верхней ионосфере. Учебное пособие.

— Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 58 с.

Рецензент:

зав. кафедрой электродинамики ННГУ, профессор **Кудрин А.В.**

Рассмотрены линейные свойства электромагнитных и квазипотенциальных (плазменных) волн в области взаимодействия мощной радиоволны обыкновенной поляризации с плазмой F -области ионосферы, а также параметрические неустойчивости для частот волны накачки, не близких к электронным гирогармоникам.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов физических и физико-технических специальностей, специализирующихся в области исследований нелинейного взаимодействия электромагнитных волн с магнитоактивной плазмой.

ББК В333.475

© Грач С. М., 2012
© Нижегородский Государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, 2012

Содержание

Введение	4
1. Электромагнитные и плазменные волны в F-слое ионосферы в области искусственной ионосферной турбулентности	9
2. Параметрические неустойчивости в области искусственной ионосферной турбулентности. Однородная плазма	20
2.1. Дисперсионное уравнение параметрической неустойчивости	20
2.2. Стрикционные параметрические неустойчивости	21
2.3. Тепловая параметрическая неустойчивость	24
3. Линейная стадия тепловой параметрической неустойчивости в неоднородной плазме (ионосфере)	27
3.1. Исходные уравнения	28
3.2. Анализ линейной стадии ТПН	31
4. Нелинейная стадия тепловой параметрической неустойчивости в ионосфере	37
4.1. Исходные уравнения, приближение случайных фаз	37
4.2. Стационарная тепловая параметрическая турбулентность	44
4.3. Обсуждение результатов	49
Список литературы	53

Введение

Околосферная плазма, в частности ионосфера, представляет собой удобный объект для изучения закономерностей возбуждения плазменной турбулентности как в естественных условиях, так и при различных искусственных воздействиях (излучение радиоволн с Земли и космических аппаратов, инжекция пучков заряженных частиц и различных химических реагентов). Систематические исследования процессов нелинейного взаимодействия мощного коротковолнового радиоизлучения с ионосферной плазмой проводятся с начала 70-х гг. в СССР и США, когда были введены в строй специализированные нагревные стенды в Боулдере (40° с. ш., 105° з.д., Колорадо, США, 1970 г.) [1], Аресибо (18° с. ш., 66° з.д., Пуэрто-Рико, США, 1971 г.) [2], и г. Горьком (стенд «Зименки», 1972 г.) [3]. Ранее эксперименты носили эпизодический характер, и нелинейные явления в ионосфере исследовались, в основном, теоретически [4, 5]. Ряд интересных результатов был получен также на стенде НИИРадио под Москвой [6] и среднеширотном стенде «Гиссар» (Душанбе, 38° с. ш., 68° в.д.) [7]. В настоящее время эксперименты по воздействию на ионосферу проводятся на специализированных нагревных стендах EISCAT в северной Норвегии (Тромсе, 70° с. ш., 19° в.д., о. Шпицберген, SPEAR, 70° с. ш., 16° в.д.), «Сура» (56° с. ш., 46° в.д., ФБГНУ НИРФИ, Россия), HAARP (69° с. ш., 145° з.д., Аляска, США), реконструируется стенд в Аресибо. Исследования проводятся с целью детального изучения поведения волн и частиц в околосферной среде (ионосфере и магнитосфере), моделирования естественных процессов в ионосфере и магнитосфере при различных внешних воздействиях, например, под влиянием мощных солнечных вспышек и корональных выбросов массы, изучения возможностей управления космической погодой и дальним распространением радиоволн, и т.д. Рабочие частоты нагревных стендов варьируются в пределах от 2.8 до 10 МГц (исключение составлял стенд НИИ Радио с частотой 1.35 МГц, близкой к электронной циклотронной частоте f_{ce}), максимальная эффективная мощность излучения действующих стендов составляет от 160 до 3600 МВт. После полного введения в строй в 2007 г. наиболее мощным нагревным стендом является стенд HAARP. Его эффективная мощность достигает 3600 МВт. Несомненным преимуществом стенда HAARP являются также возможность работы вблизи второй гармоники электронной циклотронной частоты ($2f_{ce} \approx 2.8$ МГц), где многие эффекты должны

заметно усиливаться, и возможность быстрого электронного сканирования диаграммы направленности. Стенд HAARP оснащен наиболее современными средствами диагностики. Наименьшая частота воздействия на ионосферу на стенде в Тромсе (EISCAT) близка к третьей электронной гирогармонике ($3f_{ce} \approx 4.04$ МГц), тогда как минимальная рабочая частота стенда «Сура» (4.3 МГц) заметно превышает $3f_{ce}$. Более подробные данные о технических параметрах зарубежных стендов можно найти в Интернет [см. например, <http://www.haarp.alaska.edu/>, <http://www.eiscat.uit.no/heater.html>].

Диагностика возмущенной области ионосферы осуществляется с помощью зондирования и просвечивания возмущенной области ионосферы радиоволнами КВ, УКВ и СВЧ диапазонов (пробные волны, ракурсное рассеяние, радары некогерентного рассеяния), а также при измерениях излучения из возмущенной области в оптическом и радио диапазонах; ряд измерений параметров возмущенной ионосферной плазмы *in situ* был проведен при запусках геофизических ракет через возмущенную область и при пролете ИСЗ над возмущенной областью ионосферы.

Генерация искусственных возмущений в ионосферной плазме (здесь и далее речь пойдет о верхней ионосфере, F -области), под действием мощной КВ радиоволны (волны накачки, ВН) обыкновенной поляризации с частотой f_0 связана с возбуждением в области плазменного резонанса, где $f_0 \sim f_{pe}$, $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi = (e^2 N_e / \pi m_e)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, различных параметрических неустойчивостей. В результате возникает так называемая искусственная ионосферная турбулентность. Высокочастотная ИИТ включает в себя ленгмюровские, верхнегибридные, электронные бернштейновские волны с частотами f , близкими к частоте ВН f_0 . Низкочастотные возмущения при возбуждении ИИТ представляют собой ионно-звуковые и нижнегибридные волны, вынужденные ионно-звуковые колебания, а также неоднородности концентрации плазмы, вытянутые вдоль геомагнитного поля, с поперечными масштабами от десятков сантиметров до километров (магнитоориентированные неоднородности). Эти возмущения, в свою очередь, ответственны за целый комплекс наблюдаемых на эксперименте явлений.

ВЧ плазменные волны, ускоряют электроны до энергий 10–50 эВ. Столкновения ускоренных электронов с нейтральными частицами, приводит к дополнительной ионизации ионосферной плазмы. Потенциал ионизации основных нейтральных составляющих на высотах F -области

- атомарного кислорода (O) и молекулярного азота (N_2) - составляет соответственно 13,6 и 15,6 эВ.

Столкновения энергичных электронов с нейтральными частицами и ионами приводит также к усилению оптического свечения ионосферы. В то же время, нагрев электронов плазменными волнами должен приводить к подавлению свечения за счет уменьшения коэффициента рекомбинации с ростом температуры. Оптическое свечение наблюдается, в частности, в линиях атомарного кислорода $O(^1D)$, $O(^1S)$, $O(3p^3P)$ и иона молекулярного азота $N_2^+(B_2\Sigma_u^+)$ с длинами волн 630 нм, 557,7 нм, 844,6 нм и 427,8 нм, порогами возбуждения ~ 2 эВ, 4,2 эВ, 11,0 эВ и 18,6 эВ, и характерными радиационными временами жизни ~ 110 с, 0,7 с, 10^{-6} с и 10^{-6} с, соответственно.

Богатую информацию о структуре ИИТ является генерация искусственного радиолучения ионосферы (ИРИ). ИРИ наблюдается как шумовая составляющая малой интенсивности ((-50)-(-80) дБ) в спектре отраженного от ионосферы сигнала волны накачки. Спектр ИРИ состоит из нескольких спектральных компонент с частотами как выше, так и ниже f_0 и значениями отстроек от частоты ВН $|\Delta f| = |f - f_0|$ от десятков Гц до ~ 200 кГц. ИРИ является результатом конверсии плазменных мод в электромагнитные. Каждая из спектральных компонент ИРИ несет информацию об определенном физическом процессе, происходящем в ионосфере под воздействием волны накачки, и измерения ИРИ при специально разработанных частотно-временных режимах воздействия используется для идентификации этих процессов.

В недавних экспериментах по воздействию были обнаружены т.н. эффект магнитного зенита — значительное усиление нагрева электронов и оптического свечения при излучении волны накачки вдоль геомагнитного поля, — и образование спускающихся слоев искусственной ионизации. Последний эффект существует при максимальных в настоящее время мощностях воздействия, доступных на стенде НААРР.

Практически все явления в возмущенной области ионосферы существенно зависят от соотношения частоты соотношения частоты ВН f_0 и гармоник электронной циклотронной частоты nf_{ce} , (n - номер гармоники). В частности, установлено, что практически все спектральные компоненты ИРИ существенно ослабляются при $f_0 \approx nf_{ce}$, компонента ВУМ (broad upshifted maximum) существует только при $f_0 \geq nf_{ce}$, а компонента ВС (broad continuum) — в области между гармониками и при приближении f_0 к nf_{ce} «снизу» при $n \geq 5$ и т.д. Такие свойства

стационарных спектров ИРИ позволяют использовать их для диагностики соотношения f_0 и nf_{ce} в области взаимодействия волны накачки с ионосферной плазмой. Обнаружена заметная асимметрия в модификации профиля электронной концентрации при переходе f_0 через nf_{ce} . Обнаружено, что при переходе f_0 через nf_{ce} «снизу вверх» заметно усиливается интенсивность мелкомасштабных неоднородностей, что минимальная интенсивность искусственных неоднородностей имеет место при $f_0 \approx nf_{ce}$. Существуют данные о том, что максимальная интенсивность оптического свечения и СВЧ излучения, инициированного КВ воздействием, и искусственная ионизация максимальны при $f_0 \gtrsim sf_{ce}$. В ионосфере циклотронная частота варьируется в зависимости от географической (геомагнитной) широты и высоты области взаимодействия волны накачки с ионосферной плазмой и составляет 1,32–1,45 МГц. Таким образом, на существующих в настоящее время стендах изучаются эффекты кратных циклотронных резонансов при $2 \leq s \leq 7$. Серия экспериментов при $f_0 \approx f_{ce}$ была проведена на стенде НИИРадио, в настоящее время такие эксперименты не проводятся.

Основные процессы, приводящие к возбуждению ИИТ, в настоящее время можно считать достаточно хорошо изученными. В то же время, новые экспериментальные факты требуют дальнейшего развития теоретического описания процессов, протекающих в возмущенной области ионосферы.

Проблема воздействия на ионосферу мощным радиоизлучением, обсуждается на специальных секциях на Генеральных ассамблеях URSI, Научных ассамблеях COSPAR, Всероссийских конференциях по распространению радиоволн, специальных конференциях и симпозиумах. Подробное изложение многих аспектов проблемы можно найти в многочисленных оригинальных статьях, обзорах и монографиях [1], [8]–[17], а также специальных выпусках журналов *Radio Science*, 1974, v. 9, no. 11, *Изв. вузов. Радиоп физика*, 1975, т. 18, № 9; 1977, т. 20, № 12; 1999, т. 42, № 7 и 8; 2005, т. 48, № 7; 2007, т. 50, № 8; 2012, т. 55, № 1–2, *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 1982, v. 44, no. 12, и 1985, v. 47, no. 12, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 1997, v. 59, no.18 и 1998, v. 60, no. 12.

В течение нескольких последних лет на радиофизическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского читается спецкурс (курс по выбору) «Взаимодействие мощных радиоволн с ионосферой». Курс предназначен для знакомства студентов старших курсов (магистрантов) и аспи-

рантов, специализирующихся в области физики космической и лабораторной плазмы, с процессами, происходящими в ионосфере Земли под действием мощного КВ радиоизлучения, как с данными экспериментов и их теоретическим описанием. Настоящее пособие является первым из серии пособий, по этому курсу. Конкретно, в пособии рассмотрены линейные свойства электромагнитных и квазипотенциальных (плазменных) волн, а также параметрические неустойчивости в ионосфере под действием мощной радиоволны для частот волны накачки, не близких к электронным гирогармоникам. Для успешного освоения курса необходимо предварительно ознакомиться также с материалами специальных курсов «Электромагнитные волны в однородной плазме», «Распространение волн в неоднородной плазме», «Нелинейные эффекты в плазме». Естественно, в течение семестрового курса лекций невозможно полностью изложить даже малую часть существующих к настоящему времени достижений в области искусственных ионосферных возмущений. Поэтому данное пособие (и последующие планируемые) следует рассматривать как материал для самостоятельного изучения, дополняющий и поясняющий сведения, кратко изложенные в лекциях.

1. Электромагнитные и плазменные волны в F -слое ионосферы в области искусственной ионосферной турбулентности

Искусственная турбулентность ионосферы возбуждается в области ионосферы, где могут одновременно распространяться электромагнитные и плазменные волны. В настоящем разделе даны краткие сведения о дисперсионных свойствах электромагнитных и плазменных волн в условиях F -области ионосферы.

Линейное дисперсионное уравнение, определяющее связь между частотой волны ω , ее волновым вектором \mathbf{k} и параметрами плазмы имеет вид:

$$D = \det \| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \| = 0, \quad (1.1)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости. На рисунке 1.1 приведена зависимость показателей преломления этих волн $n = ck/\omega$ от параметра v при $u \ll 1$. Здесь $v = \omega_{pe}^2/\omega^2$, $u = \omega_{ce}^2/\omega^2$, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 N/m_e}$ и $\omega_{ce} = eB/m_e c$ — соответственно электронные плазменная и циклотронная частоты, $(-e)$ и m_e — заряд и масса электрона, N — плотность плазмы, B — напряженность магнитного поля, c — скорость света. Показатели преломления обыкновенной (n_2) и необыкновенной (n_1) волн представлены для $\theta = 19^\circ$, зависимость $n_3(v)$ приведена для углов $\theta = 19^\circ$ и 90° (θ — угол между волновым вектором электромагнитной волны и магнитным полем \mathbf{B}). При вертикальном падении на ионосферу ($\mathbf{n}_1 \parallel \nabla N \parallel z$) необыкновенная волна (n_1) отражается от ионосферы при $v = v_1 = 1 - \sqrt{u}$ ниже области существования плазменных волн ($v_1 < v^*$) и, следовательно, не может возбуждать искусственную турбулентность. Исключение составляет случай $\omega_t \approx s\omega_{ce} < \omega_{pe}$, $s = 2, 3 \dots$, когда в результате параметрических неустойчивостей могут возбуждаться электронные бернштейновские моды. При этом, однако, порог неустойчивостей, ответственных за возбуждение искусственной ионосферной турбулентности, значительно возрастает.

В случае вертикального падения волны обыкновенной поляризации, на котором сосредоточено дальнейшее внимание, вблизи точки отражения ВН $v = 1$ справедливо квазипоперечное приближение [18]:

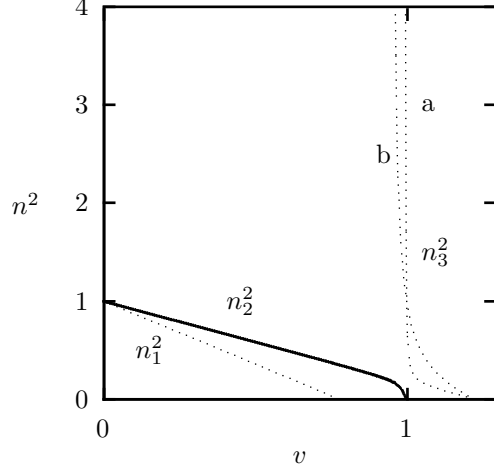


Рис. 1.1: Зависимость $n^2(v)$ при $u = 0.05$. n_1 — необыкновенная волна, n_2 — обыкновенная волна, n_3 — z -мода. $\theta_1 = \theta_2 = 20^\circ$, $20^\circ < \theta_3 < 90^\circ$

$$\sqrt{u} \sin^2 \theta \gg 2(1-v)|\cos \theta|. \quad (1.2)$$

Показатель преломления ВН при этом равен

$$n_2^2 \approx (1-v)/\sin^2 \theta, \quad (1.3)$$

а ее поляризация линейна, причем вектор электрического поля направлен вдоль постоянного магнитного, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$, а амплитуда в линейном слое плазмы $v = 1 - z/L_0$ при $z/L_0 \ll 1$ описывается формулой [18]:

$$E = A \left(\frac{k_0 L_0}{\sin^4 \theta} \right)^{1/6} \text{Ai}(\xi), \quad \xi = \frac{k_0^2 z}{L_0 \sin^2 \theta}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (1.4)$$

Здесь z — расстояние от точки отражения, $L_0 = N(dN/dz)^{-1}$ — характерный размер линейного слоя, $\text{Ai}(\xi)$ — функция Эйри, A — константа, определяемая, в частности, мощностью наземного передатчика. Согласно (1.4) при малых углах θ (в условиях эксперимента — в более высоких

широтах) разбухание поля оказывается более существенным. При $\xi \gg 1$ для описания распространения волны можно пользоваться распространением геометрической оптики [18]. В интересующих нас условиях F -слоя ионосферы области, определяемые неравенствами (1.2), $\xi \gg 1$ и $z/L_0 \ll 1$ перекрываются.

При $v < \tilde{v} = 1 - u \sin^2 \theta / 2 |\cos \theta|$ выполняется неравенство, обратное (1.2), для ВН справедливо квазипродольное приближение. Показатель преломления ВН здесь равен

$$n_2^2 \approx 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u} |\cos \theta|}, \quad (1.5)$$

а поляризация становится почти круговой в плоскости, ортогональной направлению распространения ВН, $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}_2$.

Оценки показывают, что при вертикальном падении волны накачки на ионосферу в условиях эксперимента на стенде Аресибо ($\theta = 45^\circ$) $\tilde{v} < v^*$, и во всей области существования плазменных волн $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$. В то же время, на стендах, расположенных в более высоких широтах (стенды «Сура», $\theta = 19^\circ$, HAARP, $\theta = 14^\circ$, и Тромсе, $\theta = 12^\circ$) $\tilde{v} > v^*$, и плазменные волны могут возбуждаться в результате параметрических неустойчивостей как в области квазипродольного ($\mathbf{E} \perp \mathbf{n}_2$), так и квазиперпендикулярного ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$) распространения ВН. Здесь v^* — нижняя по v граница существования высокочастотных плазменных волн в ионосфере.

При выполнении условия $\varepsilon = 0$ (здесь $\varepsilon = (k_i k_j / k^2) \varepsilon_{ij}^H(\omega, \mathbf{k})$ — скалярная, или продольная диэлектрическая проницаемость) показатель преломления $n \rightarrow \infty$ (для волны n_3 на рис. 1.1), ее поляризация становится практически продольной, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, а электрическое поле — потенциальным. Рассмотрим дисперсионные свойства таких продольных (плазменных) волн более подробно. Для продольных волн два первых члена в уравнении (1.1) уничтожаются и оно принимает вид (см., например, [19]):

$$\varepsilon = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 V_{\alpha}^2} \left(1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - s\omega_{c\alpha}} I_s(k_{\perp}^2 \rho_{\alpha}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho_{\alpha}^2} J_+(\beta_{s\alpha}) \right) = 0, \quad (1.6)$$

где α означает сорт частиц, $\alpha = e, i$, $\beta_{s\alpha} = (\omega - s\omega_{c\alpha}) / (|k_{\parallel}| V_{\alpha})$, $V_{\alpha} = \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}$ — тепловая скорость частиц сорта α , $\rho_{\alpha} = V_{\alpha}/\omega_{c\alpha}$ — радиус циклотронного вращения тепловых частиц соответствующего сорта,

индексы \parallel и \perp относятся к направлению магнитного поля \mathbf{B} , $I_s(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $J_+(x)$ — плазменная дисперсионная функция, которая для $x \gg 1$ может быть представлена в виде

$$J_+(x) \approx 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}xe^{-x^2/2}.$$

При $k^2\rho_\alpha^2 \ll 1$, $\omega \gg \omega_{ci}$, $\omega \neq s\omega_{ce}$ уравнение (1.6) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \\ & - \frac{3\omega_{pi}^2}{\omega_j^4} k^2 V_i^2 - \frac{3\omega_{pe}^2}{\omega^4} k^2 V_e^2 \left\{ \frac{\omega^4 \sin^4 \theta}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - 4\omega_{ce}^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \frac{\omega^2(\omega_{ce}^4 - 3\omega_{ce}^2\omega^2 + 6\omega^4)}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)^3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

Это уравнение определяет дисперсионные законы высокочастотной ω_u и низкочастотной ω_l ветвей плазменных волн, причем при рассмотрении высокочастотных плазменных волн ($\omega_{pe} < \omega \lesssim \omega_{uh}$) вкладом ионов, естественно, можно пренебречь. В условиях F -области ионосферы, где $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$, при $k\rho_e \rightarrow 0$ значение ω_u дается следующим простым выражением

$$\omega_u^2 \approx \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \sin^2 \theta_u = \omega_{uh}^2 - \omega_{ce}^2 \cos^2 \theta_u, \quad (1.8)$$

где $\omega_{uh} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$ — верхняя гибридная частота, резонансный угол θ_u определяется из соотношения

$$\text{tg}^2 \theta_u = \frac{u + v - 1}{(1 - u)(1 - v)}. \quad (1.9)$$

При $k \gtrsim k_0$ в дисперсионном уравнении для плазменных волн приходится учитывать электромагнитные поправки $\sim \omega/c$. При этом его решение при этом описывает z -моду:

$$k_{\parallel}^2 = \frac{-k_{\perp}^2 [2(1 - v) - u] \pm \sqrt{u^2 k_{\perp}^4 - 4u(1 - v)k_{\perp}^2 \omega^2/c^2}}{2(1 - v)}, \quad (1.10)$$

причем знак « $-$ » соответствует распространяющейся волне при $1 - v < u/2$, а знак « $+$ » — при $1 - v < u$. k_{\parallel} обращается в нуль при $k_{\perp}^2 = u\omega^2/c^2(u + v - 1)$.

При бóльших $k\rho_e, k\rho_e \gg \omega/c$ дисперсионное уравнение для ω_u удобно представить в следующем виде:

$$\tilde{k}^4 - 2B_1\tilde{k}^2 - \tilde{k}_\parallel^2 = 0, \quad (1.11)$$

где $\tilde{k}^2 = 3k^2\rho_e^2$, $2B_1 = (1-u-v)/uv$, а для тепловых поправок (фигурные скобки (1.7)) пренебрежено ω_{ce}^2 по сравнению с ω_{pe}^2 . Уравнение (1.11) определяет следующую связь k_\parallel и k_\perp :

$$\tilde{k}_\parallel = \pm \left(B_1 + \frac{1}{2} - \tilde{k}_\perp^2 \pm \sqrt{\left(B_1 + \frac{1}{2} \right)^2 - \tilde{k}_\perp^2} \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

При $4\omega^2(1-v)/c^2u \ll k_\perp^2 \ll (1-v)^2/12u\rho_e^2$ выражения (1.10) и (1.12) совпадают, естественно, с (1.9).

На рис. 1.2 изображены зависимости $k_\parallel(k_\perp)$ высокочастотных плазменных волн для $\omega_u = \text{const}$ и различных плотностей плазмы $N \propto \omega_{pe}^2$, через которые в эксперименте распространяется волна накачки обыкновенной поляризации. При построении рис. 1.2 учтены также поправки $\sim k_0^2 = \omega^2/c^2$. Компоненты групповой скорости ВЧ плазменных волн равны

$$V_{g\parallel} = -\frac{\omega v k_\parallel}{k^2} \left[\frac{\tilde{k}_\perp^2}{\tilde{k}^2} \left(1 - \frac{2\tilde{k}_0^2}{\tilde{k}^2} \right) - \tilde{k}^2 \right], \quad (1.13)$$

$$V_{g\perp} = \frac{\omega v k_\perp}{k^2} \left[\frac{\tilde{k}_\parallel^2}{\tilde{k}^2} \left(1 - \frac{\tilde{k}_0^2}{\tilde{k}^2} \right) + \frac{\tilde{k}_\perp^2 \tilde{k}_0^2}{\tilde{k}^4} + \tilde{k}^2 \right].$$

Отметим, что на рис. 1.2 участки кривых с $k_\parallel < k_\parallel(k_{\text{max}})$ и $k_\parallel > k_\parallel(k_{\text{max}})$ соответствуют различной групповой дисперсии волн¹: в первом случае $k_\parallel V_{g\parallel} < 0$ (такие волны в дальнейшем будем называть верхнегибридными, они соответствуют знаку «-» перед радикалом в (1.12)), во втором — $k_\parallel V_{g\parallel} > 0$ (ленгмюровские волны), здесь k_{max} — максимальное значение поперечного волнового числа,

¹Групповая скорость волны направлена по нормали к поверхности $k_\parallel(k_\perp)$

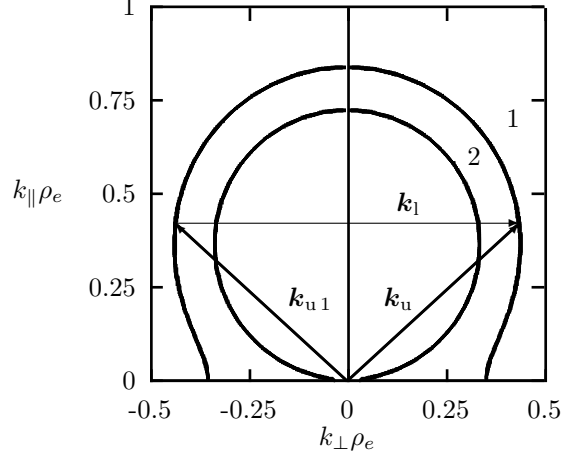


Рис. 1.2: Сечение дисперсионной поверхности $D(\omega_u, k_{\parallel}, k_{\perp}) = 0$ для высокочастотных плазменных волн при $u = \omega_{ce}^2/\omega_u^2 = 0.05$ и различных ω_{pe} . Кривая 1 соответствует $\omega_{pe}^2/\omega_u^2 = 0.934$ ($\omega_u/\omega_{uh} = 1.0075$), кривая 2 — $\omega_{pe}^2/\omega_u^2 = 0.949$ ($\omega_u/\omega_{uh} = 1.0002$). Стрелками условно изображены условия пространственного синхронизма для распадного взаимодействия верхне- и нижнегибридных волн

$$\tilde{k}_{\max}^2 = \begin{cases} (B_1 + \frac{1}{2})^2 & \text{при } B_1 \leq \frac{1}{2} \\ 2B_1 & \text{при } B_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Декремент затухания плазменных волн определяется их бесстокновительным взаимодействием с частицами плазмы (затухание Ландау) и электронными столкновениями.

$$\gamma = \gamma_L + \gamma_{col}. \quad (1.15)$$

Для высокочастотных (ленгмюровских и верхнегибридных) волн согласно [19]

$$\gamma_L^u = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_u^2}{k^3 V_e^3 |\cos \theta|} \exp \left\{ \frac{\omega_h^2}{k^2 V_e^2 \cos^2 \theta} \right\}, \quad \gamma_{col}^u \approx \frac{\nu_e}{2}. \quad (1.16)$$

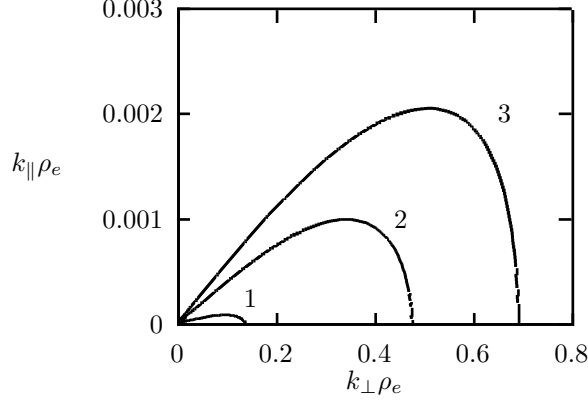


Рис. 1.3: Сечение дисперсионной поверхности $D(\omega_1, k_{\parallel}, k_{\perp}) = 0$ для низкочастотных плазменных волн при различных ω_1 . Кривая 1 соответствует $\omega_1/\omega_{1h} = 1.05$, кривая 2 — $\omega_1/\omega_{1h} = 1.5$ и кривая 3 — $\omega_1/\omega_{1h} = 2$. $\omega_{ce}^2/\omega_{pe}^2 = 0.05$, $m_i/m_e = 3 \cdot 10^4$

Здесь γ_L — декремент затухания Ландау на тепловых электронах с максвелловским распределением. Отметим, что в ионосфере существуют потоки фотоэлектронов — надтепловых частиц с энергиями 1–100 эВ [20], которые вносят дополнительный вклад в затухание плазменных волн. Кроме того, надтепловые частицы возникают в результате ускорения электронов искусственной плазменной турбулентностью (см. главу 3). Распределение этих частиц как правило не является максвелловским, и соответствующий декремент определяется выражением

$$\gamma_f = \frac{4\pi^2 e^2 k |\cos \theta|}{mk^2} \int \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \delta(\omega_{\text{u}} - k_{\parallel} v_{\parallel}) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \quad (1.17)$$

Здесь $f(\mathbf{v})$ — функция распределения надтепловых электронов. В выражениях (1.16), (1.17) не учтено циклотронное затухание при $\omega \sim s\omega_{ce}$. Согласно (1.7) и рис. 1.2, значение продольного волнового числа увеличивается при уменьшении плотности плазмы. Это приводит к значительному увеличению γ_L при $v < v^*$ ($\gamma_L(v^*) > \nu_e$, в ионосферных условиях $v^* \approx 0.9$), и здесь возбуждение плазменных волн в процессе параметрических неустойчивостей становится невозможным.

Для низкочастотных плазменных волн при $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$, $k\rho_e \rightarrow 0$

$$\omega_1^2 \approx \omega_{lh}^2 \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \cos^2 \theta_1\right), \quad (1.18)$$

где $\omega_{lh} = \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}/(1 + \omega_{ce}^2/\omega_{pe}^2)}$ — нижняя гибридная частота, $\omega_1 = \omega_{lh}$ при $\theta_1 = \pi/2$. Зависимость $k_{\parallel}(k_{\perp})$ при конечных $k\rho_e$ для различных значений ω_1 приведена на рис. 1.3.

При вычислении затухания низкочастотных (нижнегибридных) плазменных волн наряду с бесстолкновительным затуханием на электронах необходимо учитывать также ионное затухание Ландау. Здесь (см. [19])

$$\begin{aligned} \gamma_{col}^1 &= \frac{\nu_e}{2} \cdot \frac{\omega_{ce}^2 \cos^2 \theta_1 + \omega_l^2 \sin^2 \theta_1}{\omega_{ce}^2 (m_e/m_i + \cos^2 \theta_1)}, \\ \gamma_L^1 &= \gamma_L^e + \gamma_L^i = \\ &= \frac{\sqrt{\pi/8}}{(m_e/m_i + \cos^2 \theta_1)} \left(\frac{\omega_1^4}{k_{\parallel}^3 V_e^3 |\cos \theta_1|} e^{-\frac{\omega_1^2}{2k_{\parallel}^2 V_e^2 \cos^2 \theta_1}} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_1^4}{k_{\parallel}^3 V_i^3} e^{-\frac{\omega_1^2}{2k_{\parallel}^2 V_i^2}} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где m_e/m_i появляется благодаря вкладу ионов. В выражениях (1.7) и (1.19) предполагается, что ионы немагничены. Это приближение справедливо, если $\text{Re } \omega \gg \omega_{ci}$ (это условие необходимо для обоих выражений), и $\text{Im } \omega = \gamma > \omega_{ci}/2\pi$ (необходимо для (1.19)). Согласно (1.18), (1.19) затухание на замагниченных электронах исчезает при $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ и превышает ионное затухание Ландау при $\cos^2 \theta_1 \gg m_e/m_i$, где $\omega_l \simeq \omega_{ce} \cos \theta_1$.

При поперечном распространении относительно магнитного поля ($k_{\parallel} \rightarrow 0$, $\beta_{s\alpha} \gg 1$, $J_+(\beta_{s\alpha}) \approx 1$ уравнение (1.6) имеет дополнительные решения — волны Бернштейна. В коротковолновом $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \gg 1$ и длинноволновом $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \ll 1$ пределах частоты мод Бернштейна близки к гармоникам электронной циклотронной частоты, $\omega \approx n\omega_{ce}$. Рассмотрим несколько более подробно длинноволновый предел, для которого дисперсионное уравнение имеет вид:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{3k_{\perp}^2 \rho_e^2 \omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - 4\omega_{ce}^2)} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2 c_n (k\rho_e)^{2(n-1)}}{(\omega^2 - n^2 \omega_{ce}^2) \omega_{ce}^2} = 0, \quad (1.20)$$

где $c_n = 1/2^{n-1} n!$. Уравнение (1.20) имеет два решения. При достаточно

большой разности между ω_{uh} и $n\omega_{\text{ce}}$

$$(\omega_{\text{uh}}^2 - n\omega_{\text{ce}}^2)^2 \gg 4\omega_{\text{pe}}^2\omega_{\text{ce}}^2c_n(k\rho_e)^{2(n-1)} \quad (1.21)$$

эти решения соответствуют верхней гибридной

$$\omega \approx \omega_{\text{u}} = \omega_{\text{uh}} + \frac{3k^2\rho_e^2\omega_{\text{pe}}^2\omega_{\text{ce}}^2}{2\omega_{\text{uh}}(\omega_{\text{pe}}^2 - 3\omega_{\text{ce}}^2)}$$

и электронной циклотронной (бернштейновской, $\omega \approx n\omega_{\text{ce}}$) волнам. При выполнении неравенства, обратного (1.21) (двойной резонанс), решения уравнения (1.20) очень близки, и

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{\text{uh}}^2 + n^2\omega_{\text{ce}}^2}{2} \pm n\omega_{\text{ce}}\omega_{\text{pe}}c_n(k\rho_e)^{n-1}. \quad (1.22)$$

Отметим, что в области частот между верхней гибридной и кратной циклотронной решения уравнения (1.20) отсутствуют, и даже при $\omega_{\text{uh}} = n\omega_{\text{ce}}$ разница между частотами ω_+ и ω_- конечна: $\omega_+ - \omega_- = c_n\omega_{\text{pe}}(k\rho_e)^{n-1}$ (щель Гросса).

Решения (1.6) для плазменных волн с $\theta = \pi/2$ при произвольных $k\rho_e$ в верхнегибридной полосе, когда $n\omega_{\text{ce}} < \omega_{\text{uh}} < (n+1)\omega_{\text{ce}}$ и $n\omega_{\text{ce}} < \omega < (n+1)\omega_{\text{ce}}$ для различных $\omega_{\text{uh}}/\omega_{\text{ce}}$ (этот случай важен для интерпретации ионосферных экспериментов, см. раздел 4.5) представлены на рис. 1.4. Здесь участки дисперсионных кривых с $\partial\omega/\partial k > 0$ соответствуют верхнегибридным волнам, участки с $\partial\omega/\partial k < 0$ — бернштейновским.

Бесстолкновительное затухание плазменных волн при $\omega \approx n\omega_{\text{ce}}$ определяется электронным циклотронным затуханием:

$$\gamma_{\text{cycl}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{\text{pe}}^4}{k^2|k_{\parallel}|V_e^3} I_n(k^2\rho_e^2) e^{-k^2\rho_e^2} e^{-\Delta^2/k_{\parallel}^2V_e^2}. \quad (1.23)$$

В области двойного резонанса $\omega \approx \omega_{\text{uh}} \approx n\omega_{\text{ce}}$ из (1.20), (1.23) имеем ($\beta_n \gg 1$):

$$\gamma_{\text{cycl}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\Delta_{\text{u}}}{|k_{\parallel}|V_e(1 + \Delta_{\text{u}}/\Delta)} e^{-\Delta^2/k_{\parallel}^2V_e^2}, \quad (1.24)$$

где $\Delta = \omega - n\omega_{\text{ce}}$, $\Delta_{\text{u}} = \omega - \omega_{\text{u}}$. Отметим, что действительные решения уравнения (1.20) в области двойного резонанса могут существовать только при $\Delta\Delta_{\text{u}} > 0$.

К сожалению, в настоящее время отсутствует детальный анализ влияния соударений на затухание мод Бернштейна. В [21] для столкновительного члена в кинетическом уравнении в форме Ландау получено следующее выражение для γ_{col} при $\omega \approx n\omega_{ce}$, $k\rho_e \ll 1$:

$$\gamma_{\text{col}}^b = \frac{3}{8} \frac{2n!!}{(2n-1)!!} \nu_{ei}. \quad (1.25)$$

В ионосферных экспериментах $n = 2, 3, \dots, 7$, и γ_{col}^b превышает γ_{col}^h в 2–3.5 раза. Однако в [21] отсутствует оценка области частот вокруг $n\omega_{ce}$, в которой формула (1.25) справедлива.

Подробный анализ влияния соотношения частоты волны накачки f_0 и гармоник электронной циклотронной частоты nf_{ce} на эффективность возбуждения искусственной ионосферной турбулентности будет дан во второй части пособия.

В заключение раздела приведем типичные параметры плазмы, которые имеют место в экспериментах по модификации ионосферы.

Рассматриваемые в диссертации эффекты происходят в F -слое ионосферы, на высотах порядка 200 – 300 км над поверхностью Земли. Величина плазменной частоты $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$ в области отражения мощной радиоволны определяется, естественно, частотой последней f_0 и в различных экспериментах составляет от 3.5 до 9.5 МГц. Небольшая часть экспериментов проводилась на частотах, близких к электронной циклотронной частоте $f_{ce} = \omega_{ce}/2\pi$ и ее второй гармонике. Величина f_{ce} в зависимости от высоты области взаимодействия может варьироваться приблизительно от 1.30 до 1.35 МГц. Разница между частотой волны накачки и плазменной частотой в области верхнего гибридного резонанса ($f_{uh} = \sqrt{f_0^2 - f_{ce}^2}$), где происходит возбуждение тепловой параметрической турбулентности, составляет, таким образом, $\Delta f \approx \omega_{ce}/2f_{pe}$ от 100 до 250 кГц. Расстояние между областью отражения обыкновенной волны и областью верхнего гибридного резонанса $\Delta z_{uh} \approx Lf_{ce}^2/f_{pe}^2$ составляет 0.6–10 км при различных f_0 (типичный масштаб регулярной неоднородности в F -слое $L \simeq 30$ –100 км). Величина нижнегибридной частоты определяется ионным составом плазмы и на указанных высотах (ионы O^+) составляет $\omega_{lh}/2\pi \approx 7.5$ кГц. Типичная величина электронной температуры в ионосфере составляет $T_e \simeq 2 \cdot 10^{-13}$ эрг ($\approx 1500^\circ\text{K}$), а частота электронных соударений $\nu_e \simeq 300$ –500 c^{-1} .

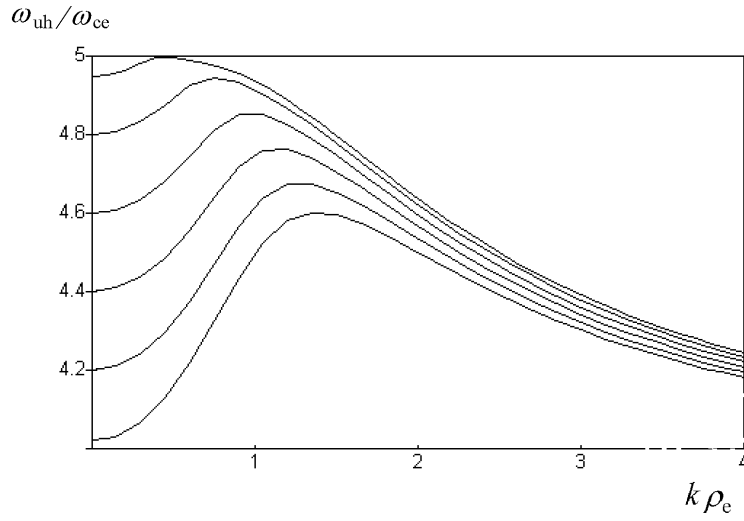


Рис. 1.4: Дисперсионные кривые для плазменных волн в верхнегибридной полосе при различных ω_{uh}/ω_{ce} в пределах $4\omega_{ce} < \omega_{uh} < 5\omega_{ce}$ при $\text{th} = \pi/2$. Величина ω_{uh}/ω_{ce} для каждой кривой близка к значению ω/ω_{ce} при $k\rho_e \rightarrow 0$

2. Параметрические неустойчивости в области искусственной ионосферной турбулентности. Однородная плазма

2.1. Дисперсионное уравнение параметрической неустойчивости

Рассмотрение параметрических неустойчивостей в верхней ионосфере, возникающих при воздействии на нее высокочастотной волн конечной амплитуды (волны накачки, ВН) с электрическим полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \times \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + \text{к. с.}$, начнем со случая однородной плазмы. Дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений с низкой частотой $\Omega \ll \omega_0$ и волновым вектором $\boldsymbol{\kappa}$ при частоте накачки, близкой к одной из частот электронных потенциальных волн плазмы ($\omega \approx \omega^{(j)}$, $\text{Re} \varepsilon(\omega^{(j)}, \mathbf{k}) = 0$), и для относительно малых амплитуд накачки ($\boldsymbol{\kappa} r_E \ll 1$, r_E — амплитуда пространственных осцилляций электрона в поле ВН) получено в работе [22] на основе простых гидродинамических уравнений. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1 + i\kappa^2 D_{ee}/\Omega}{\varepsilon_e(\Omega, \boldsymbol{\kappa})} + \frac{1 + i\kappa^2 D_{ii}/\Omega}{1 + \varepsilon_i(\Omega, \boldsymbol{\kappa})} + \frac{E_0^2}{NT_e} \left(\frac{1}{\varepsilon_-^*} + \frac{1}{\varepsilon_+} \right) \times \\ & \times \left[A + \frac{4}{3} \frac{A_T}{\Omega(\Omega + i\delta\nu_e + i\kappa^2 \chi_e/N)} \left(\frac{\kappa^2 D_{Te}}{\varepsilon_e(\Omega, \boldsymbol{\kappa})} + \frac{\kappa^2 D_{Tie}}{1 + \varepsilon_i(\Omega, \boldsymbol{\kappa})} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ε_e и ε_i — вклады электронов и ионов в скалярную диэлектрическую проницаемость на частоте Ω , $\varepsilon_{\pm}(\omega^{\pm}, \mathbf{k}^{\pm})$ — скалярные диэлектрические проницаемости на частотах ω^{\pm} ,

$$\omega^{\pm} = \omega_0 \pm \Omega, \quad \mathbf{k}^{\pm} = \mathbf{k}_0 \pm \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.2)$$

$\chi_e = (\kappa_i \chi_{ij} \kappa_j)/\kappa^2$ — скалярная электронная теплопроводность, аналогично определены скалярные коэффициенты электронной и ионной диффузии (D_{ee} , D_{ii}) и термодиффузии (D_{Te} , D_{Tie}),

$$A = \frac{\kappa^2 V_e^2}{16\pi\omega_{pe}^2} |\mathbf{a}_0 \hat{\varepsilon}_0^e \mathbf{a}|^2, \quad A_T = (\mathbf{a}_0^* \hat{\sigma}_0^H \mathbf{a})(\mathbf{a}_0 \hat{\varepsilon}_0^e \mathbf{a}),$$

$\mathbf{a}_0 = \mathbf{E}_0/E_0$, $\mathbf{a}_\pm = \mathbf{k}^\pm/k^\pm$ – векторы поляризации волны накачки и возбуждающихся ВЧ плазменных волн с частотами ω^\pm , $\hat{\varepsilon}_0^e$ – вклад электронов в тензор диэлектрической проницаемости на частоте ω_0 , $\hat{\sigma}_0^H$ – эрмитова часть тензора проводимости на частоте ω_0 . Индекс (j) означает тип волны и может относиться, например, к ленгмюровской, верхнегибридной или бернштейновской модам.

Уравнение (2.1) представляет собой дисперсионное уравнение параметрической неустойчивости с учетом как тепловой (A_T), связанной с источником нагрева ВЧ полем в уравнении электронной теплопроводности $Q = (2/3N_e)(\mathbf{E}\hat{\sigma}^e(\omega)\mathbf{E})$ так и стрикционной (A , усредненная высокочастотная сила $F = -(e^2/2m_e\omega_{pe}^2)\nabla(\mathbf{E}\hat{\varepsilon}^e(\omega)\mathbf{E})$ в уравнении движения электронов) нелинейностей. При

$$\Omega < \nu_e, \quad \kappa_{\parallel}^2 V_e^2 < \nu_e^2 (1 + \omega_{ce}/\omega_0)^{-1}, \quad \kappa_{\perp}^2 V_e^2 < \omega_{ce}^2 (1 + \omega_{ce}/\omega_0)^{-1} \quad (2.3)$$

преобладает нагрев плазмы. Если неравенства (2.3) не выполняются, более существенным оказывается стрикционное воздействие. В пренебрежении членами, связанными с нагревом и диффузией плазмы уравнение (2.1) совпадает с приведенным, например, в [19, 23].

Используя малость отличия частоты ВН от резонансных частот $\omega^{(j)}$, а также тот факт, что $\Omega \ll \omega_0$, высокочастотные слагаемые уравнения (2.1) можно преобразовать к виду [23]

$$\frac{1}{\varepsilon_-^*} + \frac{1}{\varepsilon_+} = \frac{\omega_0 \Delta\omega}{S - 2i(\gamma + \gamma^{(j)})\Omega} \frac{1}{J^{(j)}}, \quad J^{(j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon(\omega))}{\omega \partial\omega} \Big|_{\omega=\omega^{(j)}}, \quad (2.4)$$

где

$$S = \Delta\omega^2 + (\gamma + \gamma^{(j)})^2 - \Omega^2, \quad \Delta\omega = \omega_0 - \omega^{(j)}, \quad (2.5)$$

$\gamma = \text{Im} \omega$, $\gamma^{(j)} = \omega^{(j)} \text{Im} \varepsilon(\omega^{(j)})/2J^{(j)}$ – декремент затухания собственных колебаний в плазме.

2.2. Стрикционные параметрические неустойчивости

Рассмотрим кратко стрикционные параметрические неустойчивости, которые развиваются при воздействии мощным коротковолновым радиоизлучением на плазму верхней ионосферы, положив в (2.1) $A_T = 0$.

Характерные особенности ионосферной плазмы (изотермичность, наличие столкновений и магнитного поля, геометрия экспериментов) определяют типы параметрических неустойчивостей, которые могут иметь место в возмущенной области ионосферы.

Когда $\Omega > \gamma$, $\varepsilon_-(\omega^-) \ll \varepsilon_+(\omega^+)$, а частота Ω далека от собственных частот плазмы, имеет место индуцированное рассеяние. В этом случае $\Omega \approx \Delta\omega_0$, $E^- \gg E^+$, т. е. энергия перекачивается в сторону низких частот, а дисперсионное уравнение (2.1) преобразуется к простому виду

$$\gamma = \gamma_{n1} - \gamma^{(j)}, \quad \gamma_{n1} = \omega^{(j)} \frac{|\mathbf{a}_0 \hat{\varepsilon}_0 \mathbf{a}_-|^2}{2J^{(j)}} \frac{E_0^2}{16\pi NT} F(\Omega, \boldsymbol{\kappa}), \quad (2.6)$$

$$F(\Omega, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\kappa^2 V_e^2}{\omega_{pe}^2} \frac{|\varepsilon_e(\Omega, \boldsymbol{\kappa})|^2 \text{Im} \varepsilon_i(\Omega, \boldsymbol{\kappa}) + |1 + \varepsilon_i(\Omega, \boldsymbol{\kappa})|^2 \text{Im} \varepsilon_e(\Omega, \boldsymbol{\kappa})}{|1 + \varepsilon_e(\Omega, \boldsymbol{\kappa}) + \varepsilon_i(\Omega, \boldsymbol{\kappa})|^2}.$$

При $\omega^{(j)} = \omega_u, \omega_0 \gg \omega_{ce}$ пороговое поле неустойчивости E_{th1} и максимальный инкремент индуцированного рассеяния даются выражениями

$$\frac{F_m |\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_-|^2 E_{th1}^2}{16\pi NT} = \frac{\gamma_h}{\omega_0}, \quad \gamma = \gamma_h \left(\frac{E_0^2}{E_{th1}^2} - 1 \right). \quad (2.7)$$

Здесь γ_h определяется выражениями (1.15) и (1.16), F_m – максимальное значение функции F . При $\Omega > \omega_{ci}$ и направлениях $\boldsymbol{\kappa}$, не очень близких к поперечному относительно магнитного поля, $\cos^2 \angle \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} > m_e/m_i$ максимум F достигается при $\Omega \sim \kappa V_i$, т. е. происходит рассеяние волны накачки на изотропных тепловых ионах. При $\cos^2 \angle \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} < m_e/m_i$ максимум F имеет место при $\Omega \sim \kappa_z V_e$, т. е. рассеяние происходит на замагниченных электронах. Величина $F_m \sim 1$ определяется отношением электронной и ионной температур, и $F_m \approx 0.58$ при $T_e = T_i$.

Наряду с индуцированным рассеянием в изотермической плазме наблюдается аperiodическая неустойчивость с $\Omega = 0, \Delta\omega_0 = -\gamma + \gamma^{(j)}$, $E^+ \approx E^-$. Порог и инкремент этой неустойчивости также задаются выражениями (2.7), но с заменой коэффициента F_m на $(1 + T_i/T_e)^{-1}$.

При $\gamma \gg \kappa V_i$ зависимость максимального инкремента неустойчивости от интенсивности ВН оказывается более медленной,

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\kappa^2 V_s^2 \frac{E_0^2}{16\pi NT_e} \right)^{1/3}, \quad V_s^2 = \frac{T_e}{m_i}. \quad (2.8)$$

Регулярная неоднородность ионосферной плазмы слабо влияет на развитие этих неустойчивостей, так как критерий $(k_u L_0)^{-1} \ll \gamma_h / \omega_0$ (см. [23]) в условиях эксперимента можно считать выполненным. В то же время в неоднородной среде — ионосфере существенным становится эффект разбухания поля ВН. При увеличении мощности ВН порог рассмотренных неустойчивостей достигается сначала в первых максимумах функции Эйри — вблизи точки отражения ВН (см. (1.4)). Здесь возбуждается одномерная турбулентность: волновые векторы плазменных волн и низкочастотных возмущений с $\Omega \sim \kappa V_i$ параллельны магнитному полю. Этот факт определяется поляризацией ВН в квазиперечном приближении (1.2). При удалении от точки отражения разбухание поля ВН уменьшается. Меняется также поляризация волны — она становится круговой в плоскости $\perp z$. Эти факторы приводят к увеличению пороговой мощности волны накачки по мере удаления от точки отражения.

Многочисленные авторы исследовали различные сценарии развития нелинейной стадии этих неустойчивостей, как в приближении слабой, так и сильной турбулентности, см., например [23]– [37]. Обсуждение сценариев развития нелинейной стадии, также, как их сопоставление результатов с данными экспериментов выходит за рамки настоящего пособия, и их для изучения следует обратиться к перечисленным работам и цитируемой там литературе. Отметим лишь, что в настоящее время считается общепринятым, что индуцированное рассеяние и аперiodическая параметрическая неустойчивость ответственны за возбуждение искусственной плазменной турбулентности ионосферы на начальных этапах воздействия мощного радиоизлучения на ионосферную плазму вблизи точки отражения волны накачки.

При

$$\operatorname{Re}(1 + \varepsilon_e(\Omega, \kappa) + \varepsilon_i(\Omega, \kappa)) = 0, \quad \operatorname{Im}\varepsilon_{e,i}(\Omega, \kappa) \ll \operatorname{Re}\varepsilon_{e,i}(\Omega, \kappa) \quad (2.9)$$

биения плазмы в поле ВЧ волн E_0 и E^+ , E_0 и E^- с частотой Ω могут попадать в резонанс с собственными низкочастотными колебаниями плазмы, $\Omega \approx \omega^{(j)}$. В этом случае говорят о распадном взаимодействии волн. В условиях экспериментов по модификации ионосферы ($T_e \approx T_i$) такими низкочастотными волнами могут быть нижнегибридные, $\Omega = \omega_1$, и ионноциклотронные, $\Omega \approx n\omega_{ci}$, волны. Если при распаде частота НЧ продукта распада превышает затухание ВЧ плазменных волн, $\omega_1, \omega_{ci} \gg \gamma_h \approx \nu_e/2$, то $\Omega \approx \Delta\omega_0$, $E^- \gg E^+$, энергия перекачивается в

сторону низких частот, а дисперсионное уравнение (2.1) преобразуется к виду $(\text{Im } \varepsilon(\Omega, \kappa) \approx (\gamma + \gamma_l) \partial \text{Re } \varepsilon(\Omega, \kappa) / \partial \Omega|_{\Omega=\omega_1})$

$$(\gamma + \gamma_h)(\gamma + \gamma_l) = \gamma_{n2}^2, \quad (2.10)$$

$$\gamma_{n2}^2 = \frac{\omega_u \omega_l k_1^2 V_e^2}{\omega_{pe}^2} \frac{|1 + \varepsilon_i(\omega_1, \mathbf{k}_1)|^2 |\mathbf{a}_0 \varepsilon_0^e \mathbf{a}_u|^2}{\left| \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\omega \partial \omega} \right|_{\omega=\omega_u} \left| \frac{\partial \omega^2 \varepsilon}{\omega \partial \omega} \right|_{\omega=\omega_l}} \cdot \frac{|E_0|^2}{4\pi N T_e},$$

Здесь мы для определенности положили $\omega^- = \omega_u$, $\Omega = \omega_l$. Отметим, что, пороговые поля распадов, определяемые формулой $\gamma_{n2}^2 = \gamma_h \gamma_l$, оказываются ниже, чем для индуцированного рассеяния,

При максимальных мощностях стендов EISCAT и HAARP при воздействии в направлении магнитного поля («магнитный зенит») отмечается существенный нагрев электронов, их температура T_e увеличивается в 2-3 раза. При этом возможным низкочастотным участником распадного взаимодействия становятся ионно-звуковые волны с частотой $\omega = \kappa V_s$ (эти волны слабо затухают только при $T_e \gg T_i$).

Стрикционные параметрические неустойчивости, а также нелинейное взаимодействие плазменных волн типа индуцированного рассеяния и распада играют определяющую роль в формировании их частотного спектра, и следовательно, спектра искусственного радиоизлучения ионосферы (ИРИ), являющегося продуктом трансформации плазменных волн в электромагнитные. Этот вопрос будет подробно обсуждаться в разделе пособия, посвященном ИРИ.

2.3. Тепловая параметрическая неустойчивость

При выполнении неравенств (2.3) вклад стрикционной нелинейности в развитие параметрической неустойчивости можно считать малым, и в (2.1) положить $A = 0$. Полагая Ω действительным, выделяя действительную и мнимую часть уравнения (2.1), и используя выражения элементарной теории для электронной теплопроводности χ_e и диэлектрической проницаемости при $\Omega < \nu$ (см. [5]), получим выражения для Ω на пороге неустойчивости и порогового поля:

$$\Omega = 0, \quad \frac{k_T |\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_h|^2 E_{th2}^2}{4\pi N T_e} = \frac{3}{8} \frac{\nu_e}{\omega_0} \frac{S}{\omega_0 \Delta \omega} (\delta + \kappa_z^2 l_e^2 + \kappa_{\perp}^2 \rho_e^2), \quad (2.11)$$

и минимальный порог неустойчивости достигается при $\Delta\omega = -\gamma_h$. Здесь $k_T = (\sigma_e D_{Tie} + \sigma_i D_{Te}) / (\sigma_e D_{ii} + \sigma_i D_{ee}) \sim 1$ – термодиффузионное отношение, δ – доля энергии, теряемая электроном при одном соударении с тяжелой частицей, $\delta \ll 1$, для соударений электронов с ионами $\delta = 2m_e/m_i$; $\kappa_z = \kappa \cos \theta$ и $\kappa_\perp = \kappa \sin \theta$ – компоненты волнового вектора возмущений концентрации (неоднородностей), параллельная и перпендикулярная магнитному полю, $l_e = V_e/\nu_e$ и $\rho_e = V_e/\omega_{ce}$ – длина свободного пробега и гирорадиус тепловых электронов. Кроме того, предположено, что $\omega_0 = \omega_u$, т. е. в процессе неустойчивости возбуждаются высокочастотные плазменные волны, при этом $A_T \approx -\nu_e |\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_h|^2$, $J_u = 1$ и $\gamma_h = \nu_e/2$. В силу $\delta \ll 1$ и неравенств (2.3) пороговое поле (2.11) оказывается существенно меньшим, чем порог стрикционных параметрических неустойчивостей, рассмотренных в разделе 1.3.2.

Для достаточно сильного магнитного поля $\omega_{ce}\omega_{ci} \gg \nu_e\nu_i$ (ν_i – частота ионных соударений) вблизи порога неустойчивости находим

$$\operatorname{Re} \Omega = 0, \gamma = \omega_0 \frac{E_0^2 - E_{th2}^2}{6\pi N T_e} \frac{|\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_h|^2 (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \theta \omega_{ci}^2 / \nu_i^2)}{2 + T_i/T_e + (\kappa_z^2 V_e^2 + \omega_{ce}\omega_{ci} \operatorname{ctg}^2 \theta) / 2\nu_e\nu_i} \quad (2.12)$$

при $\cos^2 \theta \gg \nu_e^2 / \omega_{ce}^2$, и

$$\operatorname{Re} \Omega = 0, \quad \gamma = \omega_0 \frac{E_0^2 - E_{th2}^2}{6\pi N T_e} \frac{|\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_h|^2}{(2 + T_i/T_e)(1 + \nu_{ei}/\nu_e)} \quad (2.13)$$

при $\cos^2 \theta \ll \nu_e^2 / \omega_{ce}^2$. Неустойчивость, таким образом является апериодической, и в результате ее развития волны с \mathbf{k}^+ и \mathbf{k}^- (стоксова и антистоксова компоненты) будут иметь приблизительно равные амплитуды.

Таким образом, при воздействии на столкновительную магнитоактивную плазму ВЧ электромагнитной волной в области плазменного резонанса наиболее низким порогом обладает тепловая параметрическая неустойчивость (ТПН). В процессе возбуждения ТПН биения волны накачки и плазменных волн создают неоднородный источник нагрева электронов. В результате вытеснения плазмы из прогретых областей вследствие процесса термодиффузии образуются сильно вытянутые вдоль магнитного поля мелкомасштабные неоднородности концентрации плазмы (МН) с поперечными размерами $l_\perp \lesssim \lambda_0$ ($2\pi/k_0$ – длина ВН), что вытекает из особенностей дисперсионных свойств плазменных

и электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Плазменные волны, в свою очередь, возникают в результате рассеяния (трансформации) ВН на МН. Сильная вытянутость МН вдоль \mathbf{B} ($\kappa_z \ll \kappa_\perp$) обусловлена резко анизотропным характером процессов переноса в магнитоактивной плазме (ионосфере): диффузия и теплопроводность в поперечном к магнитному полю направлении при $\omega_{ce}\omega_{ci} \gg \nu_e\nu_i$ оказываются значительно подавленными [5]. Действительно, из (2.11) следует, что, поскольку $l_e \gg \rho_e$, наименьшим порогом возбуждения обладают как раз вытянутые неоднородности. Поскольку $k_0 \ll k_h$, а $\kappa_z \ll \kappa_\perp$, из условий синхронизма (2.2) следует, что плазменные волны при развитии ТПН должны быть почти ортогональны \mathbf{B} , т. е. ТПН должна развиваться вблизи уровня верхнего гибридного резонанса, где¹

$$\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2, \quad \text{или} \quad v = 1 - u. \quad (2.14)$$

Далее, поскольку пороговое поле и инкремент неустойчивости определяются скалярным произведением векторов поляризации и ВН и плазменной волны $|\mathbf{a}_0\mathbf{a}_h|^2$, а $\mathbf{a}_h \parallel \mathbf{k}_h$, эффективное взаимодействие между волной накачки, плазменными волнами и вытянутыми неоднородностями происходит только в том случае, когда электрическое поле ВН имеет достаточно большую компоненту, ортогональную магнитному полю, $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}$, т. е. верхний гибридный резонанс ВН должен попадать в область ее квазипродольного распространения, что в силу (1.2), (2.14), выполняется при

$$\sin^2 \theta/2 |\cos \theta| < \sqrt{u}. \quad (2.15)$$

В случае квазипоперечного распространения ВН (см. (1.2)) $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{B}$ и взаимодействие ВН с плазменными волнами в области верхнего гибридного резонанса существенно ослабляется.

¹То же справедливо для распадных неустойчивостей с участием нижнегибридных и ионно-циклотронных волн.

3. Линейная стадия тепловой параметрической неустойчивости в неоднородной плазме (ионосфере)

В разделе 2 показано, что при воздействии на ионосферную плазму мощным электромагнитным излучением тепловая параметрическая неустойчивость обладает наименьшим порогом. В процессе ТПН возбуждаются плазменные (верхнегибридные) волны и сильно вытянутые вдоль \mathbf{B} ($\kappa_z \ll \kappa_\perp$, $\kappa_z \rightarrow 0$) неоднородности плотности плазмы. В реальных условиях F -слоя ионосферы, когда угол $\alpha = \angle(\mathbf{B}\nabla N)$ мал, продольный масштаб МН $l_z \sim 1/\kappa_z$ может сравниваться с масштабом регулярной неоднородности ионосферы L , который, в свою очередь, существенно превышает размер области существования плазменных волн $\sim (1 - v^*)L$. Результаты, полученные для однородной плазмы, становятся, естественно, неприменимыми. Кроме того, для описания таких важных свойств тепловой параметрической турбулентности, как стационарные спектры плазменных волн и мелкомасштабных неоднородностей, величина поглощения (аномального ослабления) волны накачки и т. д. необходимо построение нелинейной теории ТПН. Эти вопросы рассматриваются в настоящем разделе.

Значение порога ТПН в неоднородной плазме можно оценить из простых энергетических соображений, используя тот факт, что порог неустойчивости определяется балансом поступления и потерь энергии. Действительно, размер области выделения энергии (нагрева плазмы) в этом случае будет определяться масштабом синхронизма

$$l_m = \left| \frac{\partial \Delta k(z_m)}{\partial z} \right|^{-1/2} \simeq \left| \frac{\partial k_{uz}(z_m)}{\partial z} \right|^{-1/2},$$

где $\Delta k(z_m) = k_0 - k_{uz} = 0$, \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_u – волновые векторы электромагнитной и плазменной волн и считается что $\mathbf{k}_0 \parallel z \parallel \nabla N$, а в точке z_m выполнены условия пространственного синхронизма $\mathbf{k}_0(z_m) = \mathbf{k}_u(z_m) \pm \boldsymbol{\kappa}$. Распределяться эта энергия будет на длине теплопроводности $L_T = l_e(\delta + \kappa^2 \rho_e^2)^{-1/2} \gg l_m$. Кроме того, время жизни плазменных волн в области взаимодействия (синхронизма) определяется теперь временем их группового распространения l_m/V_{gz} , а не временем затухания плазменных волн ν_e^{-1} . Таким образом общее уменьшение эффективности взаимодействия будет характеризоваться фактором $\beta = (l_m \nu_e / V_{gz}) \cdot (l_m / L_T)$.

Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\left| \frac{\partial k_{u,z}}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_{u,z}} \right|^{-1} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right|; \quad |V_{gz}| = \left| \frac{\partial \omega}{\partial k_{u,z}} \right| = \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_{u,z}} \right| \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right|^{-1};$$

$$\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right| = \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \approx \frac{2}{\omega},$$

имеем

$$\beta = 2\pi \frac{\nu_e}{\omega_0} \frac{L}{L_T}.$$

Домножая, далее, правую часть (2.11) на β^{-1} , мы получим приближенное выражение для порога ТПН в неоднородной плазме:

$$\frac{E_{\text{th}}^2}{4\pi N T_e} \sim \frac{l_e}{L} (\delta + \kappa_{\perp}^2 \rho_e^2)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Эти оценки подтверждаются (с точностью до коэффициентов порядка единицы) более строгим выводом, приведенным ниже.

3.1. Исходные уравнения

Пусть на слабонеоднородный слой плазмы с $\nabla N \parallel z$ падает волна обыкновенной поляризации с частотой ω_0 и волновым вектором $\mathbf{k}_0 \parallel \nabla N$, которая отражается от уровня $v = 1$. Электрическое поле падающей и отраженной волн представим в виде:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{1,2} \cdot \exp \left\{ -i\omega_0 t \pm \int_0^z k_0(z') dz' \mp i \frac{\pi}{4} \right\} + \text{к. с.}, \quad (3.2)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют отраженной и падающей волнам; считается что падающая волна распространяется в $-z$, а отраженная — в $+z$ направлениях.

Напряженность электрического поля возбуждающихся плазменных волн $\mathbf{E}_u^{(1,2)} = \mathbf{E}_{u,1,2}(\mathbf{r}, t) \exp\{-i\omega_u t\} + \text{к. с.}$ представим в виде интеграла Фурье по координатам, ортогональным¹ ∇N .

$$\mathbf{E}_{u,1,2}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d\delta\omega d\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_{\perp}, \delta\omega}^{(1,2)} \cdot \exp\{-i\delta\omega t + i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}\}, \quad (3.3)$$

¹Далее мы будем полагать для простоты, что $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}_0 \parallel \nabla N \parallel z$. Линейная стадия ТПН в случае наклонного магнитного поля подробно рассмотрена в [38, 39] (см. также [40]).

причем в приближении геометрической оптики

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)} = \mathbf{a}_u A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)} \cdot \exp \left\{ i \int_{z_1}^z k_{z,1,2}(z') dz' \pm i \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (3.4)$$

а дисперсионное уравнение для $\omega = \omega_u(\mathbf{k}_\perp, k_z(z))$ (1.1) (1.7) считается выполненным в линейном приближении. Для медленно меняющихся амплитуд $A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)}$ справедливо следующее уравнение переноса (см., например, [38])

$$V_{gz}^{1,2} \frac{\partial A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)}}{\partial z} + \left(\gamma_u - i\delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial V_{gz}^{1,2}}{\partial z} \right) A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)} = i \iint d\Omega d\boldsymbol{\kappa} \beta_{0u} n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}} E_{1,2} \times \exp \left\{ i \int_0^z (\pm k_0(z') - k_{z,1,2}) dz' \right\} \delta(\mathbf{k}_\perp - \boldsymbol{\kappa}) \delta(\omega - \omega_0 - \Omega), \quad (3.5)$$

где

$$\beta_{0u} = (\mathbf{a}_u \hat{\varepsilon}_0 \mathbf{a}_0) \left(N \frac{\partial \varepsilon(\omega_u)}{\partial \omega} \right)^{-1}.$$

В выражениях (3.3) – (3.5) так же, как и в (3.2), индекс «1» соответствует волне, распространяющейся «вниз» вдоль z ($V_{gz}^{(1)} > 0$), а индекс «2» – волне, распространяющейся «вверх»² ($V_{gz}^{(2)} < 0$). Как видно из выражений (1.10) – (1.13) и рис. 1.2, плазменная (верхнегибридная) волна при распространении в слое $1 - u \lesssim v < 1$ имеет две точки поворота, в которых $V_{gz} = 0$. «Верхняя» точка поворота (z_2) существует при $|B_1| < 1/2$, $(1 - u)/(1 + u) < v < 1$, а ее положение определяется равенством нулю радикала в (1.12): $\tilde{k}_\perp^2 = (B_1 + 1/2)^2$. При этом $k_z \neq 0$, $\tilde{k}_{z,2}^2 = 1/4 - B_1^2$. Нижняя точка поворота (z_1) имеет место при $k_z = 0$: $k_\perp^2 \approx u\omega^2/c^2(u + v - 1)$ для $v > 1 - u$, $k_\perp^2 < \sqrt{\omega/3c\rho_e}$ или $\tilde{k}_\perp^2 = 1 - u - v$ для $v < 1 - u$. Нелинейное взаимодействие плазменных волн с падающей на ионосферу электромагнитной волной (волной накачки) в области верхнего гибридного резонанса происходит при выполнении условий пространственного синхронизма $k_{z,1}(z_m) = k_0$. Поэтому

²Напомним, что верхнегибридные волны имеют отрицательную дисперсию, $k_z V_{gz} < 0$.

плазменные волны, уходящие вверх ($k_{z,2}$) во взаимодействии не участвуют. Волна же, идущая вниз, после прохождения достаточно близко расположенной точки поворота z_1 снова попадает в область синхронизма, но на этот раз с отраженной волной накачки. Поэтому граничные условия для амплитуд плазменных волн $A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)}$ будем задавать при $z = z_1$ и $z = -\infty$:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1,2)} &= 0 && \text{при } z = -\infty \\ A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(1)} &= A_{\mathbf{k}_\perp, \delta\omega}^{(2)} && \text{при } z = z_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Низкочастотные возмущения плотности плазмы n и электронной температуры T_e будем, как и в [39], описывать следующими уравнениями амбиполярной диффузии и теплопроводности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \hat{D}_a \nabla n - k_T \frac{N}{T_{e0}} \nabla \hat{D}_a \nabla T_e = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} - \nabla \hat{D}_T \nabla T_e + \delta\nu_e T_e = Q. \quad (3.8)$$

Масштабы изменения компонент тензоров амбиполярной диффузии \hat{D}_a и теплопроводности $\hat{\chi}_e = N \hat{D}_T$ существенно превышают все характерные масштабы задачи [5, 41], и мы будем считать, что они не зависят от координат. В (3.8) Q – источник нагрева, связанный с взаимодействием электромагнитной волны накачки и плазменных волн:

$$Q = \frac{2}{3N} (\mathbf{E} \hat{\sigma}^e \mathbf{E}) = \frac{4}{3N} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \hat{\sigma}^e (\mathbf{E}_u^{(1)} + \mathbf{E}_u^{(2)}). \quad (3.9)$$

Для \hat{D}_a , \hat{D}_T будем использовать выражения, полученные в элементарном приближении [5]:

$$D_{a\parallel} = 2l_i^2 \nu_{in}, \quad D_{a\perp} = 2\rho_e^2 \nu_e, \quad D_{T\parallel} = l_e^2 \nu_e, \quad D_{T\perp} = \rho_e^2 \nu_e. \quad (3.10)$$

Система уравнений двухжидкостной гидродинамики, описывающая перенос частиц в частично ионизованной плазме в магнитном поле [5, 42] сводится к одному уравнению для концентрации n – уравнению амбиполярной диффузии (3.7) – лишь в некоторых специальных случаях [41, 43], например, в плазме с достаточно высокой степенью ионизации

$$m_e \nu_{ei} > m_i \nu_{in} \quad (3.11)$$

(ν_{ei}, ν_{in} — частоты столкновений электронов с ионами и ионов с нейтра-
лами) или для сильно вытянутых вдоль магнитного поля возмущений
концентрации

$$l_{\parallel}/l_{\perp} > l_e/\rho_e. \quad (3.12)$$

В то же время, согласно работам [44, 45], точечные возмущения кон-
центрации расплываются униполярным образом. Дополнительные ма-
тематические трудности возникают при рассмотрении неоднородностей
с поперечными масштабами $l_{\perp} < \rho_i$ ($\rho_i = V_i/\omega_{ci}$ — радиус циклотронно-
го вращения ионов). Уравнения, описывающие эволюцию возмущений
плотности и электронной температуры в этом предельном случае, полу-
ченные в [46], имеют существенно более сложный вид, чем (3.7), (3.8).
Важную роль в динамике неоднородностей играют непотенциальность
возбуждающихся низкочастотных электрических полей и различные
низкочастотные нелинейности [46]–[49]. Детальный анализ поведения
низкочастотной турбулентности ионосферной плазмы в поле мощных
радиоволн не входит в цели настоящего пособия. Поэтому в дальней-
шее рассмотрение строится на основе пользоваться уравнениями (3.7),
(3.8), считая одно из условий (3.11), (3.12) выполненным.

Уравнения (3.5), (3.7) и (3.8) образуют самосогласованную систему
для описания линейной стадии тепловой параметрической неустойчи-
вости.

3.2. Анализ линейной стадии ТПН

Представим, далее, n и T_e в виде интегралов Фурье ($\boldsymbol{\kappa} \perp \mathbf{B}$)

$$(n, T_e)(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d\Omega d\boldsymbol{\kappa}_{\perp} (n, T)_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z) \exp\{-i\Omega t + i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}_{\perp}\}, \quad (3.13)$$

из (3.7), (3.8) получим выражение, связывающее Фурье-образ низкоча-
стотного возмущения плотности $n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z)$ с источником нагрева Q :

$$n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z) = \frac{k_T N}{T_{e0} D_{T\parallel} (\Lambda_T^2 - \Lambda_N^2)} \left[\frac{\Lambda_N^2 - \Lambda_{N0}^2}{2\Lambda_N} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z') e^{-\Lambda_N |z-z'|} dz' \right. \\ \left. + \frac{\Lambda_T^2 - \Lambda_{N0}^2}{2\Lambda_T} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z') e^{-\Lambda_T |z-z'|} dz' \right]. \quad (3.14)$$

Здесь $\Lambda_N^2 = (-i\Omega + \kappa^2 D_{a\perp})/D_{a\parallel}$, $\Lambda_T^2 = (-i\Omega + \kappa^2 D_{T\perp})/D_{T\parallel}$, $\Lambda_{N0}^2 =$
 $\kappa^2 D_{a\perp}/D_{a\parallel}$. Возмущение плотности $n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}$ с частотой Ω и волновым век-

тором $\boldsymbol{\kappa}$ может возбуждаться при взаимодействии волны накачки с двумя плазменными волнами с частотами $\omega^\pm = (\omega_u + \delta\omega)^\pm = \omega_0 \pm \Omega$ и волновыми векторами \mathbf{k}_\perp^\pm , причем $\mathbf{k}_\perp^\pm = \pm \boldsymbol{\kappa}$ (стоксова (-) и антистоксова (+) компоненты). Подставляя (3.2) – (3.4) и решения (3.5) с граничными условиями (3.6) в (3.9), мы найдем величину $Q_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}$. Она равна:

$$Q_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}} = Q_1^+ + Q_1^- + Q_2^+ + Q_2^-, \quad (3.15)$$

где Q_2^+ обусловлено взаимодействием падающей волны накачки (E_2) с волной $A_{\mathbf{k}_\perp^+, \delta\omega}^{(1)}$, Q_1^- – взаимодействием падающей волны накачки с волной $A_{\mathbf{k}_\perp^-, \delta\omega}^{(2)}$, Q_2^- – взаимодействием отраженной волны накачки (E_1) с волной $A_{\mathbf{k}_\perp^+, \delta\omega}^{(2)}$ – взаимодействием отраженной волны накачки с волной $Q_2^- A_{\mathbf{k}_\perp^-, \delta\omega}^{(1)}$,

$$Q_1^\pm = \pm i \int_z^{z_1} dz' \frac{A_T}{V_{gz} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \frac{n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z')}{N} |E_1|^2 \exp \left\{ \int_{z'}^z [\mp i \Delta k^\pm(z'') + \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz''] \right\} \\ \pm i \int_{-\infty}^{z_1} dz' \frac{A_T}{V_{gz} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \frac{n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z')}{N} E_1 E_2^* \exp \left\{ i \psi^\pm - \int_z^{z_1} \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz'' - \int_z^{z_1} \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz'' \right\}, \quad (3.16)$$

$$Q_2^\pm = \pm i \int_{-\infty}^z dz' \frac{A_T}{V_{gz} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \frac{n_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}(z')}{N} |E_2|^2 \exp \left\{ \int_{z'}^z [\pm i \Delta k^\pm(z'') - \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz''] \right\}. \quad (3.17)$$

Здесь $\psi^\pm = \pm \int_{z'}^{z_1} \Delta k^\pm dz'' \pm \int_z^{z_1} \Delta k^\pm dz'' \mp 2 \int_0^{z_1} k_0(z'') dz''$, $V_{gz} = |V_{gz}^{(1)}| = |V_{gz}^{(2)}|$, $A_T = (\mathbf{a}_0^* \hat{\sigma}_0 \mathbf{a}_u)(\mathbf{a}_0 \hat{\varepsilon}_0^e \mathbf{a}_u)$, при $u \ll 1$ $A_T \approx (-\nu_e/4\pi) |\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_u|^2$, $\mathbf{a}_0^{(1,2)} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{E}_{1,2}/E_{1,2}$, $\mathbf{a}_u = \pm \mathbf{k}_u^\pm/k_u^\pm$ – векторы поляризации соответствующих волн, $|\mathbf{k}_u^\pm| \gg k_0$, $\Omega \ll \omega_0$, $\Delta\omega$, $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_u$,

$$\Delta k^\pm = k_0 - k_z^\pm - \frac{\Delta\omega}{V_{gz}}, \quad (3.18)$$

$k_z = k_z^{(2)} = -k_z^{(1)}$, при $z \parallel \mathbf{B}$ $k_z^+ = k_z^-$.

Дополнительные слагаемые в Q_1^\pm по сравнению с Q_2^\pm обусловлены взаимодействием отраженной электромагнитной волны E_1 с плазменными волнами, которые возбудились при взаимодействии падающей

электромагнитной волны E_2 с возмущением плотности $n_{\Omega, \kappa}(z)$ и прошли точку поворота z_1 . Подставив теперь выражения (3.15)–(3.17) в (3.14), мы можем с учетом того, что $N, T, A_T, E_{1,2}$ и $n_{\Omega, \kappa}$ слабо меняются на пути интегрирования, провести в правой части (3.14) интегрирование методом стационарной фазы. Точка стационарной фазы z_m находится из уравнения

$$\Delta k^{\pm}(z) = 0. \quad (3.19)$$

Из (3.18), (3.19) видно, что основной вклад в интегралы в правой части (3.14) вносят точки пространственного синхронизма z_m , в которых $\mathbf{k}_{0(1,2)} = \mathbf{k}_{u(1,2)}^{\pm} \mp \boldsymbol{\kappa}$. В рассматриваемом случае параллельных $\nabla N, \mathbf{B}$ и \mathbf{k}_0 при $k_0 \ll \kappa$ в точке синхронизма имеем (см. (1.11))

$$v(z_m) = \frac{1 - u}{1 + u(\tilde{\kappa}^2 - \tilde{k}_0^2/\tilde{\kappa}^2)}. \quad (3.20)$$

Таким образом, в условиях F -слоя ионосферы ($\tilde{\kappa}^2 \ll 1$, $u \ll 1$) точки стационарной фазы лежат вблизи уровня верхнего гибридного резонанса волны накачки. Полагая в (3.14) $z = z_m$, получим дисперсионное уравнение ТПН в неоднородной плазме:

$$\frac{(\Lambda_N + \Lambda_T)\Lambda_N\Lambda_T}{\Lambda_N\Lambda_T + \Lambda_{N0}} = A_{NL}, \quad (3.21)$$

где

$$A_{NL} = \frac{2\pi}{3} \frac{k_T A_T}{D_{T\parallel}} \frac{l_m^2 E_1 E_2}{N T_{e0} V_{gz} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \cdot \cos \Psi \cdot \exp\left(-2 \int_{z_m}^{z_1} \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz'\right), \quad (3.22)$$

$$\Psi = 2 \int_{z_m}^{z_1} \Delta k dz' - 2 \int_0^{z_1} k_0 dz', \quad l_m = \left| \frac{\partial \Delta k(z)}{\partial z} \right|_{z=z_m}^{-1/2},$$

l_m – «длина синхронизма», или характерная длина взаимодействия электромагнитных, плазменных волн и неоднородностей в неоднородной среде.

Дисперсионное уравнение ТПН (3.21) имеет решения с $\text{Im}\Omega > 0$, $\text{Re}\Omega = 0$ (аперiodическая неустойчивость) при $A_{NL} > 0$. Из (3.14) и (3.22) видно, что Q_2^{\pm} (см. (3.17)) и первые два члена Q_1^{\pm} (см. (3.16)) не дают вклада в A_{NL} : оказывается, что вклады стоксовой и антистоксовой компонент в возбуждение $n_{\Omega, \kappa}$ находятся в противофазе и

компенсируются. Иное дело, если взаимодействие волны накачки, плазменных волн и неоднородности с данным κ происходит дважды. Например, Падающая ВН E_2 при рассеянии на неоднородности n_Ω, κ в точке z_m возбуждает плазменные волны $A_{\mathbf{k}_\perp^+}^{(1)}$ и $A_{\mathbf{k}_\perp^-}^{(1)}$. После прохождения точки поворота эти волны ($A_{\mathbf{k}_\perp^+}^{(2)}$ и $A_{\mathbf{k}_\perp^-}^{(2)}$, индекс (1) поменялся на (2)) взаимодействуют с отраженной ВН E_1 и при определенных фазовых соотношениях ($\cos \Psi > 0$) усиливают неоднородность n_Ω, κ . Таким образом, отраженные волны обеспечивают положительную обратную связь, необходимую для возбуждения ТПН (абсолютной неустойчивости) в неоднородной среде. Множитель $\exp(-2 \int_{z_m}^{z_1} (\gamma_u/V_{gz}) dz')$ характеризует затухание плазменных волн при их распространении от точки стацфазы до точки поворота и обратно к области взаимодействия. Аналогичная картина возникает, если отраженная электромагнитная волна отсутствует, но на пути интегрирования в (3.14) есть две точки стацфазы. Такая ситуация в ионосферных экспериментах имеет место, когда частота ВН несколько (менее, чем на $\approx \omega_{ce}^2/2\omega_0$) превышает критическую частоту F -слоя.

Условие оптимального возбуждения неустойчивости

$$\Psi = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.23)$$

легко удовлетворяется автоматическим выбором нелинейного сдвига частоты $\Delta\omega$.

В знаменатель (3.22) входит выражение $V_{gz} \left| \frac{\partial \Delta k(z)}{\partial z} \right| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}$. Наиболее быстро в $\Delta k(z)$ меняется k_z – проекция волнового вектора плазменной волны на ось z , и $\left| \frac{\partial \Delta k(z)}{\partial z} \right| \approx \left| \frac{\partial k_z}{\partial z} \right|$. Учитывая, что $|V_{gz}| = \left| \frac{\partial \varepsilon / \partial k_z}{\partial \varepsilon / \partial \omega} \right|$, имеем

$$V_{gz} \left| \frac{\partial \Delta k(z)}{\partial z} \right| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \approx \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_z} \left| \frac{\partial k_z}{\partial z} \right| = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \approx \frac{1}{L}, \quad (3.24)$$

где L – локальный масштаб неоднородности среды,

$$L = \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dz} \right)^{-1}. \quad (3.25)$$

Таким образом, для A_{NL} имеем

$$A_{NL} = |\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_u|^2 k_T \frac{L}{l_e^2} \frac{E_1 E_2}{6NT_{e0}} \exp \left(-2 \int_{z_m}^{z_1} \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz' \right), \quad (3.26)$$

а на пороге неустойчивости (сравни (3.1))

$$\frac{(E_1 E_2)_{\text{th}}}{4\pi N T_e} = \frac{3}{2\pi} \frac{l_e (\delta + \kappa^2 \rho_e^2)^{1/2}}{|\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_u|^2 k_T L} \cdot \exp \left(2 \int_{z_m}^{z_1} \frac{\gamma_u}{V_{gz}} dz' \right). \quad (3.27)$$

Видно, что минимальный порог неустойчивости наблюдается в области достаточно крупных масштабов возмущений, при $\delta \gg \kappa_{\perp}^2 \rho_e^2$. Зависимость инкремента неустойчивости $\gamma = \text{Im}\Omega$ от $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2$ при различных A_{NL} приведена на рис. 2.1. Видно, что при некоторых оптимальных значениях $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2$, зависящих от A_{NL} , инкремент максимален. При $\gamma \gg \delta \nu_e$, $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2 \gg \delta$ инкремент максимален при

$$(\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2)_{\text{opt}} \approx 0.75 l_e^2 A_{NL}^2 = 0.75 \delta (E_0 / E_{\text{th}})^4 \quad (3.28)$$

и равен

$$\gamma \approx 0.6 \nu_e l_e^2 A_{NL}^2 = 0.6 \delta \nu_e (E_0 / E_{\text{th}})^4. \quad (3.29)$$

Из рис. 2.1 и выражения для порога ТПН (3.27) видно также, что ширина спектра неоднородностей при возбуждении ТПН растет при увеличении A_{NL} .

В заключение раздела отметим, что неизотермичность плазмы может привести к заметному снижению порога ТПН. Так, в работе [54] показано, что при $\delta_{en} \nu_{en} \ll \delta_{ei} \nu_{ei}$ (ν_{ei}, ν_{en} — частоты столкновений электронов с ионами и нейтралами, δ_{ei}, δ_{en} — доля энергии, теряемая электроном при одном столкновении с соответствующей частицей) порог ТПН снижается с ростом $\tau = T_e / T_i$, а при $\tau > 1.58$ неоднородности возникают в плазме самопроизвольно, вследствие развития термодиффузионной неустойчивости [51].

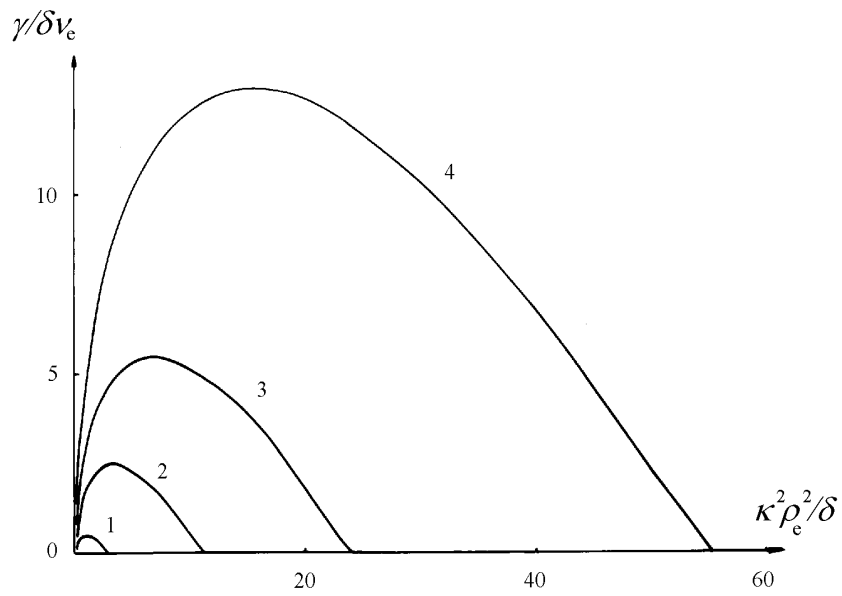


Рис. 3.1: Зависимость инкремента ТПН в неоднородной плазме от $\kappa^2 \rho_e^2 / \delta$ при различных ϵ_0 . 1 — $\epsilon_0 = 2$, 2 — $\epsilon_0 = 3.5$, 3 — $\epsilon_0 = 5$, 4 — $\epsilon_0 = 7.5$

4. Нелинейная стадия тепловой параметрической неустойчивости в ионосфере

4.1. Исходные уравнения, приближение случайных фаз

При построении теории нелинейной стадии ТПН необходимо учитывать следующие факторы: 1) нелинейный источник нагрева электронов, связанный с взаимодействием плазменных волн между собой; 2) насыщение неустойчивости, связанное с пространственным затуханием волны накачки (аномальным ослаблением); 3) многократное рассеяние плазменных волн на вытянутых неоднородностях $n_{\mathbf{k}}$, приводящее к растеканию энергии плазменных волн по большому фазовому объему пространственных масштабов. Анализ нелинейной стадии ТПН проведен в данном разделе в приближении слабой турбулентности, когда возмущения можно представить в виде квазисинусоидальных волн, слабо взаимодействующих между собой.

За исходные уравнения для описания высокочастотных возмущений возьмем укороченное уравнение для комплексной амплитуды в геометрическом приближении (3.5), дополненное членом, описывающим многократное рассеяние плазменных волн на неоднородностях $n_{\mathbf{k}}$. Поведение последних будем описывать по-прежнему уравнениями амбиполярной диффузии и теплопроводности (3.7), (3.8) с источником Q , в который войдут дополнительные по сравнению с (3.9) члены, типа $(4/3N)E_u^{(1)}\delta^e E_u^{(1)}$, обусловленные нагревом плазмы при биениях плазменных волн. Мы будем интересоваться стационарными решениями этих уравнений на стадии насыщения неустойчивости. Узкий частотный спектр неоднородностей (апериодический характер неустойчивости) позволяет представить Фурье-компоненту $n_{\Omega, \mathbf{k}}$ в виде

$$n_{\Omega, \mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}\delta(\Omega).$$

Два последних предположения позволяют записать связь между $n_{\mathbf{k}}$ и $Q_{\mathbf{k}}$ как (сравни (3.14))

$$n_{\mathbf{k}} = -\frac{k_T N}{2T_{e0} D_{T\parallel}} \Lambda_T \int (Q_0 + Q_u)_{\mathbf{k}}(z') \exp\{-\Lambda_T |z - z'|\} dz'. \quad (4.1)$$

Здесь $\Lambda_T = L_T^{-1} = \sqrt{\nu_e(\delta + \kappa^2 l_{T\perp}^2)}/l_e$ – характерная обратная длина продольной теплопроводности, $l_{T\perp} = \rho_e \delta^{-1/2}$ – характерная длина поперечной теплопроводности, источник нагрева Q_0 связан с взаимодействием электромагнитных и плазменных волн и определен соотношением (3.9) (см. также (3.5), (3.16), (3.17)), Q_u связан с взаимодействием плазменных волн между собой и равен

$$Q_u \boldsymbol{\kappa} = \frac{4}{3N} \iint d\mathbf{k}'_\perp d\mathbf{k}''_\perp (\mathbf{a}_{u1} \hat{\sigma}_0^H \mathbf{a}_{u2}) A_{\mathbf{k}'_\perp} A_{\mathbf{k}''_\perp} \times \\ \times \exp \left\{ i \int_{z_1}^z \Delta k_u(z') dz' \right\} \delta(\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{k}''_\perp), \quad \Delta k_u = k_z(\mathbf{k}'_\perp, \omega_0) - k_z(\mathbf{k}''_\perp, \omega_0). \quad (4.2)$$

Уравнение переноса (3.5) запишем теперь в виде

$$V_{gz} \frac{\partial A_{\mathbf{k}_\perp}}{\partial z} + \left(\gamma_u - i\delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial V_{gz}^{1,2}}{\partial z} \right) A_{\mathbf{k}_\perp} = \\ i \int d\boldsymbol{\kappa} \beta_{0u} n_{\boldsymbol{\kappa}} E_{1,2} \exp \left\{ i \int_{z_1}^z [\pm k_0 - k_z(\mathbf{k}_\perp)] dz' \right\} \delta(\mathbf{k}_\perp - \boldsymbol{\kappa}) + \\ + i \iint d\boldsymbol{\kappa} d\mathbf{k}'_\perp \beta_{uu} n_{\boldsymbol{\kappa}} A_{\mathbf{k}'_\perp} \exp \left\{ i \int_{z_1}^z \Delta k_u dz' \right\} \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \quad (4.3)$$

где $A_{\mathbf{k}_\perp} = \int A_{\mathbf{k}_\perp \omega} d\delta\omega$, $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_u$, второй член в правой части (4.3) связан с многократным рассеянием плазменных волн на МН, $\beta_{0u,uu} = (\mathbf{a}_u \hat{\varepsilon}_0 \mathbf{a}_{0,u}) (N \partial \varepsilon(\omega_u) / \partial \omega)^{-1}$.

Как частный случай, полагая $A_{\mathbf{k}_\perp} = E_{1,2} \delta(\mathbf{k}_\perp)$ и интегрируя (4.3) по $d\mathbf{k}_\perp$, имеем уравнение для амплитуды волны накачки:

$$V_0 \frac{\partial E_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial z} E_{1,2} + \gamma_0 E_{1,2} = \\ = i \iint d\boldsymbol{\kappa} d\mathbf{k}_\perp \beta_{u0} n_{\boldsymbol{\kappa}} A_{\mathbf{k}'_\perp} \exp \left\{ i \int_{z_1}^z [k_z(\mathbf{k}_\perp) \mp k_0] dz' \right\} \delta(\mathbf{k}_\perp + \boldsymbol{\kappa}), \quad (4.4) \\ \beta_{u0} = (\mathbf{a}_0^* \hat{\varepsilon}_0^e \mathbf{a}_u) \left(N \frac{\partial(\mathbf{a}_0^* \hat{\varepsilon} \mathbf{a}_0)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1}.$$

Здесь V_0 – групповая скорость волны накачки. В (4.3), (4.4) мы не учли рассеяние в электромагнитные волны k'_0 . Этот процесс, важный для генерации искусственного радиоизлучения ионосферы, оказывает слабое

влияние на амплитуды плазменных волн и волны накачки, поскольку $V_0 \gg V_{gz}$.

Граничные условия для амплитуд плазменных волн $A_{\mathbf{k}_\perp}$ по-прежнему будем задавать в виде (3.6). Амплитуду падающей на ионосферу волны накачки будем считать заданной на входе в плазму (точка z_{en}). При этом граничные условия для ВН запишутся следующим образом ($z = 0$ – точка отражения ВН):

$$E_2(z_{\text{en}}) = E_0, \quad E_1(z = 0) = E_2(z = 0). \quad (4.5)$$

Уравнения (4.1) – (4.4) мало обозримы и практически не решаемы. Существенных упрощений можно добиться, предположив случайность фаз плазменных волн и неоднородностей. Физически это предположение вполне оправдано, особенно в условиях, когда в момент включения накачки в плазме уже имелись начальные неоднородности со случайным распределением. Случайному распределению фаз способствуют нарастание плазменных волн в процессе неустойчивости от уровня тепловых флуктуаций и пространственная неоднородность среды. Свою лепту в стохастизацию фаз вносят нелинейные процессы перекачки плазменных волн по спектру пространственных масштабов и нагрева плазмы при сбивании плазменных волн.

Приближению случайных фаз соответствует дельта-коррелированность спектральных компонент $A_{\mathbf{k}_\perp}$ и $n_{\mathbf{k}}$ в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathbf{k}_\perp}^{(0)} A_{\mathbf{k}'_\perp}^{(0)} \rangle &= 8\pi [\partial(\omega^2 \varepsilon(\omega)) / \omega \partial \omega]^{-1} W_{\mathbf{k}_\perp} \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \\ \langle n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \rangle &= n_{\mathbf{k}}^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $W_{\mathbf{k}_\perp}$ – спектральная плотность интенсивности плазменных волн, $n_{\mathbf{k}}^2$ – спектр интенсивности флуктуаций плотности плазмы, угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Взаимодействие при этом обусловлено слабой корреляцией, возникающей при учете правых частей в уравнениях (4.1) – (4.4). После проведения в этих уравнениях стандартной процедуры усреднения по фазам (см., например, [52]) и интегрирования по z методом стационарной фазы получим уравнения для плотности энергии накачки W_t , спектральной плотности энергии плазменных волн $W_{\mathbf{k}_\perp}$ и интенсивности неоднородностей $n_{\mathbf{k}}^2$. Более подробно процедура вывода описана в работе [53].

Своеобразие рассматриваемого случая связано с пространственной неоднородностью среды и вырождением пространственного спектра

низкочастотных возмущений по одному направлению (вдоль \mathbf{B}). Последнее приводит к сохранению корреляции на масштабах $\Delta z = |z - z'| \sim L_T$, т. е.

$$\langle n_{\boldsymbol{\kappa}}(z)n_{\boldsymbol{\kappa}'}(z') \rangle = n_{\boldsymbol{\kappa}}^2(z^*)\delta(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}'),$$

z^* – некая средняя точка интервала $[z, z']$. Сильная вытянутость неоднородностей вдоль \mathbf{B} приводит также к тому, что высокочастотные волны эффективно взаимодействуют только тогда, когда равны проекции их волновых векторов на направление магнитного поля: взаимодействие максимально, когда $\Delta k_{\parallel}^{\pm}, \Delta k_{\perp} = 0$. Этот факт уже был использован при рассмотрении линейной теории ТПН.

В приближении случайных фаз уравнение для плотности энергии волны накачки удобно представить в виде

$$W_t(z) = W_0(z_{\text{en}}) \exp\{-\Gamma(z)\}, \quad (4.7)$$

$$\Gamma(z) = \sum_{\pm} \int_{\boldsymbol{\kappa}(z)}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa} \frac{\beta_{0h}\beta_{h0}}{V_0 V_{gz}} \frac{\pi}{|\partial\Delta k(z)/\partial z|_{z=z_m(\boldsymbol{\kappa})}} n_{\boldsymbol{\kappa}}^2(z_m), \quad (4.8)$$

где $W_0 = \frac{\partial\omega^2(a_{0\alpha}^* \varepsilon_{\alpha\beta} a_{0\beta})}{\omega\partial\omega} \frac{E_0^2}{8\pi}$ – плотность энергии ВН на входе в область возбуждения ТПН, $\partial\Delta k(z)/\partial z \approx \partial k_z/\partial z$, $z_m(\boldsymbol{\kappa})$ – точка синхронизма, в которой $\Delta k(z) = 0$, $\boldsymbol{\kappa} = \pm\mathbf{k}_{\perp}$ и выполнено дисперсионное уравнение для плазменных волн¹ $D(\omega_u, k_z, k_{\perp}, z) = 0$ (см.(1.11)), т. е.

$$D(\omega_0, \boldsymbol{\kappa}, k_0(z), N(z)) = 0. \quad (4.9)$$

Отметим, что условие равенства продольных составляющих волновых векторов плазменных и электромагнитных волн приводит к тому, что взаимодействие происходит в узкой области $\Delta z \sim l_m$ вблизи точки z_m , причем в каждой точке z это условие выполняется для различных $\boldsymbol{\kappa}$ и k_{\perp} . В силу дисперсионных свойств плазменных волн $\partial N(z_m)/\partial\kappa^2 > 0$, т. е. при меньших плотностях плазмы N возбуждаются плазменные волны и неоднородности с большими значениями волновых чисел. Поэтому интегрирование в (4.8) для падающей на ионосферу волны накачки ведется от $\boldsymbol{\kappa}(z = z_m(\boldsymbol{\kappa}))$ до ∞ ($\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \infty$ на входе в область возбуждения

¹Напомним, что при $z \parallel \nabla N \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{k}_0$ позиция точки синхронизма не зависит от азимутального угла φ .

ТПН). В уравнении для отраженных электромагнитных волн интегрирование следует проводить от $\kappa_{\min} \sim \omega/c$ (точка $z_m(\kappa_{\min})$ лежит вблизи точки отражения ВН) до $\kappa(z)$. Принимая во внимание (3.24) и (3.25), (4.8) можно переписать в виде

$$\Gamma(z(\kappa)) = \int_{\kappa(z)}^{\infty} \frac{a}{V_0} n_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}, \quad d\mathbf{k} = 2\pi\kappa d\kappa, \quad a = \frac{\pi\omega L}{2N^2}. \quad (4.10)$$

Множитель $1/2$ появился в a вследствие учета циркулярной поляризации обыкновенной волны накачки в области верхнего гибридного резонанса, где возбуждается ТПН. Величина $\Gamma(z(\kappa))$ представляет собой аномальное поглощение (ослабление) электромагнитной волны при распространении от входа в область тепловой параметрической турбулентности до точки z , в которой выполнено соотношение (4.9). Полное аномальное ослабление электромагнитной волны (с учетом двукратного прохождения области турбулентности вследствие отражения) равно

$$\Gamma_m = 2\Gamma(\kappa_{\min}) = \frac{2a}{V_0} \Delta n^2, \quad (4.11)$$

Где $\Delta n^2 = \int_{\kappa_{\min}}^{\infty} n_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}$ – интегральная интенсивность неоднородностей, а изменением V_0 и L с z пренебрежено. Отметим, что при $|\omega - \omega_0| \lesssim |\Lambda_T(\partial z_m/\partial\omega)|^{-1} \sim \omega_0 L_T/2L$ формулы (4.10) и (4.11) описывают аномальное ослабление электромагнитных волн с отличающейся от ω_0 частотой ω , так как в силу вытянутости неоднородностей взаимодействие происходит при практически той же их интенсивности.

Качественно нелинейная стадия ТПН протекает следующим образом. С ростом амплитуды плазменных волн в первую очередь начинает сказываться нелинейный источник нагрева Q_n . Это приводит к более быстрому росту неоднородностей и интенсивному отбору энергии у волны накачки. На этой стадии можно пренебречь многократным рассеянием плазменных волн (второй член в правой части (4.3)). В таком случае амплитуда плазменных волн связана с амплитудами волны накачки и возмущения плотности так же, как и на линейной стадии (см. (3.5)), корреляция стоковой и антистоковой компонент плазменных волн сохраняется, а статистика системы сводится к статистике возмущений плотности.

Можно показать [9, 53], что нагрев электронов плазменными волнами становится более эффективным, чем нагрев при взаимодействии ВН

и плазменной волны, при $\delta n = |n/N| > \nu_e/\omega_0$. ($n = \sqrt{\Delta n^2}$, $\Delta n^2 = \int n_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}$). В этой ситуации низкочастотные динамические уравнения (3.7) и (3.8) преобразуются к уравнению вида $\partial n/\partial t \propto n^2$, и развитие неустойчивости приобретает характер взрыва, $n \propto 1/(t - t_0)$, t_0 — характерное время. Такой процесс авторы [40, 50] назвали резонансной неустойчивостью. Наличие в плазме начальных возмущений δn_0 приводит в силу указанных обстоятельств к снижению порога ТПН [9]:

$$\epsilon_{\text{th}} = \frac{E_{\text{th}}^2}{(E_0^2)_{\text{th}}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \omega_0^2 \delta n_0^2 / 2\nu_e^2}}{\omega_0^2 \delta n_0^2 / 4\nu_e^2}. \quad (4.12)$$

Здесь $(E_0^2)_{\text{th}}$ — минимальное пороговое поле, определяемое соотношением (3.27). Видно, что при малых начальных возмущениях плотности, $\delta n_0^2 \rightarrow 0$, $\epsilon_{\text{th}} = 1$ и порог ТПН совпадает с (3.27). При $\delta n_0^2 \gg 2\nu_e^2/\omega_0^2$ порог полностью определяется начальными возмущениями и совпадает с порогом резонансной неустойчивости.

При достаточно больших мощностях ВН необходимо учитывать многократное рассеяние плазменных волн. В этом случае, которому в данном разделе уделено основное внимание, при выводе уравнений для плотности энергии плазменных волн $W_{\mathbf{k}_\perp}$ и интенсивности вытянутых неоднородностей $n_{\mathbf{k}}^2$ необходимо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, перемешивание фаз плазменных волн приводит к потере корреляции между стоксовой $\mathbf{k}^- = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ и антистоксовой $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}$ компонентами. Вклады стоксовой и антистоксовой компонент теперь складываются, а не компенсируются, как это происходит, например, на линейной стадии неустойчивости. Таким образом, при достаточно больших значениях аномального ослабления Γ нет необходимости включать в рассмотрение отраженные электромагнитные волны. Во-вторых, в силу узости частотного спектра неоднородностей ($\Omega \ll \nu$) перекачка плазменных волн по спектру на этих неоднородностях происходит без изменения частоты в соответствии с дисперсионным уравнением (1.11), которое определяет связь k_z и k_\perp . Взаимодействие волн, как уже указывалось, происходит в узкой области по k'_z в окрестности точки $k_z = k'_z$ (это определяется наличием быстрых фазовых множителей в (4.3)), где $k_\perp = k'_\perp$. Таким образом, наиболее быстро при многократном рассеянии плазменных волн происходит их изотропизация по азимутальному углу φ в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} . Изотропизации спектра также способствует круговая поляризация ВН и, следовательно, эквивалент-

ность всех φ при возбуждении ТПН. Это позволяет в дальнейшем считать $W_{\mathbf{k}_\perp}$ и $n_{\mathbf{k}}^2$ изотропными в этой плоскости. Конечная ширина пространственных резонансов, обусловленная столкновительным затуханием плазменных волн (член $\gamma_u A_{\mathbf{k}_\perp}$ в левой части (4.3), $\gamma_u \approx \gamma_{\text{col}}^u \approx \nu_e/2$) приводит к изменению модуля \mathbf{k} при рассеянии, причем в пределах малых ν изменение модуля \mathbf{k} при одном акте рассеяния мало, $\Delta k/k \ll 1$. Это позволяет при выводе уравнения в приближении случайных фаз для $W_{\mathbf{k}_\perp}$ перейти от интегральной формы к диффузионному приближению. В результате оно принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (V_{gz} W_{\mathbf{k}_\perp}) + \nu_e W_{\mathbf{k}_\perp} = a \int d\boldsymbol{\kappa} W_t(z) n_{\boldsymbol{\kappa}}^2 \delta(\mathbf{k}_\perp - \boldsymbol{\kappa}) \delta(z - z_m(\boldsymbol{\kappa})) + \\ + \frac{\pi \omega_0^2 \nu_e \Delta n^2}{2 N^2} \frac{\partial}{\partial k_\perp^2} \left[\frac{k_\perp^4}{V_{g\perp}^4} \frac{\partial}{\partial k_\perp^2} \left(\frac{V_{g\perp}^2}{k_\perp^2} W_{\mathbf{k}_\perp} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вывод уравнения (4.13) дан в [53]. Здесь первый член в правой части, обусловленный взаимодействием электромагнитных и плазменных волн, представлен в виде набора точечных источников, расположенных в соответствии с условиями синхронизма при $z = z_m(\boldsymbol{\kappa})$.

Уравнение для интенсивности низкочастотных возмущений $n_{\mathbf{k}}^2$ записывается в виде [53]:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}}^2 = \frac{2k_T^2}{9(1 + \kappa^2 l_{T\perp}^2) \delta l_e^2 N^2 T^2} \int \int dz' dz'' \exp\{-\Lambda_t |z - z'| - \Lambda_t |z - z''|\} \\ \times \left[\int d\mathbf{k}_\perp W_{\mathbf{k}_\perp}(z') W_t(z'') (\exp\{i \int_{z'}^{z''} \Delta k dz\} + \text{к. с.}) \delta(\mathbf{k}_\perp - \boldsymbol{\kappa}) + \right. \\ \left. + \int \int d\mathbf{k}'_\perp d\mathbf{k}''_\perp |\mathbf{a}_{u1} \mathbf{a}_{u2}|^2 W_{\mathbf{k}'_\perp}(z') W_{\mathbf{k}''_\perp}(z'') \times \right. \\ \left. \times (\exp\{i \int_{z'}^{z''} \Delta k_u dz\} + \text{к. с.}) \delta(\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{k}''_\perp + \boldsymbol{\kappa}) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

где первый интеграл в правой части соответствует взаимодействию электромагнитной и плазменных волн, а второй — взаимодействию плазменных волн между собой.

4.2. Стационарная тепловая параметрическая турбулентность

Уравнения (4.7), (4.13), (4.14) с аномальным ослаблением в виде (4.10) представляют собой полную систему для описания нелинейной стадии ТПН в приближении случайных фаз. Анализ системы начнем с уравнения (4.13) для спектральной плотности энергии плазменных волн $W_{\mathbf{k}_\perp}$. Оно представляет собой уравнение диффузионного типа с источником, связанным с возбуждением плазменных волн электромагнитными. Диффузия плазменных волн в пространстве z, \mathbf{k}_\perp происходит при $\omega = \text{const}$ в соответствии с дисперсионным уравнением (1.11) определяющим зависимость $k_z(k_\perp^2)$ (1.12) (см. рис. 1.2). Граничным условием по z для уравнения (4.13) служит равенство нулю плотности энергии плазменных волн на входе в область возбуждения ТПН ($z = z_{\text{en}}$), граничные условия по k_\perp^2 должны быть заданы на при $k_\perp^2 = k_{\text{min}}^2$ и $k_\perp^2 = k_{\text{max}}^2$ (см. рис. 1.2 и (1.14)). Поверхность $k_z(k_\perp^2)$, по которой происходит диффузия, имеет достаточно сложный вид, в частности, в области турбулентности она неоднозначна. Решение задачи осложняется также наличием точек поворота: $V_{gz} = 0$ при $k_\perp^2 = k_{\text{min}}^2, k_{\text{max}}^2$. Кроме того, в области верхнего гибридного резонанса величина k_{min}^2 довольно резко зависит от z . Все это делает невозможным решение уравнения (4.13) в полном объеме. Мы ограничимся его анализом в приближении сильной диффузии, когда $\Delta n^2/N^2 > u^2/\pi^3$. Граничное условие при $k_\perp^2 = k_{\text{min}}^2$ определяется отсутствием потока энергии через границу $k_\perp^2 = k_{\text{min}}^2$, т. е. симметрией распределения $W_{\mathbf{k}_\perp}$ для волн, распространяющихся в $+z$ и $-z$ направлениях (это оправдано при сильной диффузии):

$$\frac{\partial}{\partial k_\perp^2} \left(W_{\mathbf{k}_\perp} \frac{V_{g\perp}^2}{k_\perp^2} \right)_{k_\perp^2 = k_{\text{min}}^2} = 0. \quad (4.15)$$

Граничное условие при $k_\perp^2 = k_{\text{max}}^2$ зависит от параметров, для которых решается поставленная задача, и интенсивности накачки. Так, когда частота ВН не слишком близка к гармоникам электронной микрочастицы, а интенсивность ВН не слишком велика, бесстолкновительное затухание верхнегибридных волн можно не учитывать на всем интервале $[k_{\text{min}}^2, k_{\text{max}}^2]$. При этом поток энергии через границу отсутствует, и граничное условие совпадает с (4.15) с заменой k_{min}^2 на k_{max}^2 . Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных в

этом случае следует, что при сильной диффузии функция $W_{\mathbf{k}_\perp} V_{g_\perp}^2/k_\perp^2$ постоянна на интервале $[k_{\min}^2, k_{\max}^2]$,

$$W_{\mathbf{k}_\perp} \frac{V_{g_\perp}^2}{k_\perp^2} = \text{const}, \quad (4.16)$$

что соответствует наличию собственного числа $\lambda_0 = 0$ в задаче Штурма-Лиувилля для оператора диффузии в (4.13). При этом возбуждающиеся плазменные волны прежде, чем затухнуть из-за столкновений, успевают перераспределиться по различным поперечным масштабам вследствие многократного рассеяния на неоднородностях. Кроме того, будем полагать, что величины $k_{\min}, k_{\max}, V_{gz}, V_{g_\perp}$ адиабатически медленно меняются с z , так что зависимость от z можно подставлять уже в решение уравнения (4.13). Интегрируя, далее, (4.13) по \mathbf{k}_\perp с учетом неоднозначности поверхности $k_z(k_\perp)$, находим для полной плотности энергии плазменных (верхнегибридных) волн на интервале $[k_{\min}, k_{\max}]$ ($k_{\min} \ll k_{\max}$, $W_{\text{tot}} \approx 2\pi \int W_{\mathbf{k}_\perp} k_\perp dk_\perp$)

$$W_{\text{tot}}(z) = \frac{\pi a W_t(z) n_{\mathbf{\kappa}}^2(z=z_m(\kappa))}{\nu_e |dz_m/d\kappa^2(\kappa = \kappa(z_m))|}. \quad (4.17)$$

В выражение (4.17) вошла производная $|dz_m/d\kappa^2|$, которая находится из уравнений (4.9), (1.11), и при $k_0 \ll \kappa, u \ll 1$

$$\left| \frac{dz_m}{d\kappa^2}(\kappa = \kappa(z_m)) \right| \approx 3\rho_e^2 u L \frac{\tilde{\kappa}^4 + \tilde{k}_0^2}{\tilde{\kappa}^4}. \quad (4.18)$$

Спектральная плотность энергии находится согласно (4.16) как

$$W_{\mathbf{k}_\perp}(z) = \frac{k_\perp^2}{V_{g_\perp}^2} \left(\frac{k_\perp^2}{V_{g_\perp}^2} \right)^{-1} \frac{W_{\text{tot}}(z)}{\pi k_{\max}^2} \approx \frac{a W_0 \exp\{-\Gamma(z)\} n_{\mathbf{\kappa}}^2(z)}{\nu_e k_{\max}^2 |dz_m/d\kappa^2(z)|}, \quad (4.19)$$

где $\left(\frac{k_\perp^2}{V_{g_\perp}^2} \right)^{-1}$ – некоторое среднее значение. Здесь учтено, что согласно (1.13) V_{g_\perp}/k_\perp мало меняется на интервале $[k_{\min}, k_{\max}]$, и $V_{g_\perp}/k_\perp \approx 3V_e^2/\omega$.

Отметим, что относительно равномерное распределение энергии на интервале $[k_{\min}, k_{\max}]$ приводит к сосредоточению большей доли энергии плазменных волн в области малых масштабов (больших k_\perp) просто

в силу большего фазового объема указанной области, $dk_{\perp}^2 = 2k_{\perp} dk_{\perp}$. Спектр неоднородностей $n_{\mathbf{k}}^2$ оказывается существенно более узким, поскольку его ширина определяется множителем $1/\Lambda_T^2$ в (4.14) (см. формулу (4.24)).

В случае $\omega_0 \sim s\omega_{ce}$, либо при больших интенсивностях ВН (когда порог ТПН превышен при достаточно низких плотностях плазмы) бесстолкновительное затухание становится существенным. Поскольку в случае верхнегибридных волн $\partial|k_z|/\partial k_{\perp} > 0$, его величина резко возрастает при $k_{\perp} \rightarrow k_{\max}$, и на границе $k_{\perp} = k_{\max}$ возникает сток энергии. Граничное условие для (4.13) при этом надо брать в виде

$$W_{\mathbf{k}_{\perp}}(k_{\max}^2) = 0. \quad (4.20)$$

Более того, при дальнейшем приближении ω_0 к $s\omega_{ce}$, когда $|\omega_0 - s\omega_{ce}| \lesssim k_z(k_{\max}^2)V_e$, циклотронное затухание начинает уменьшать саму область существования плазменных волн в \mathbf{k} -пространстве. В приближении сильной диффузии и достаточно сильного столкновительного затухания ($\nu \gg V_{gz}\partial/\partial z$) решение (4.13) можно записать как

$$W_{\mathbf{k}_{\perp}}(z) \approx \frac{V_{g\perp}^2(\kappa(z))k_{\perp}^2}{V_{g\perp}^2(k_{\perp})\kappa^2(z)} \frac{a\psi_1(k_{\perp}^2)\psi_1(\kappa^2)W_0 e^{-\Gamma(z)}n_{\mathbf{k}(z)}^2}{\nu_e(\lambda_1\pi\Delta n^2\omega^4/18V_e^4 N^2)|dz_m/d\kappa^2(z)|}. \quad (4.21)$$

Здесь λ_1 и ψ_1 – первые собственное число и собственная функция для задачи Штурма - Лиувилля уравнения (4.13) (собственное число $\lambda_0 = 0$ для оператора диффузии теперь отсутствует). В предположении, что $V_{g\perp}^2/k_{\perp}^2 = \text{const}$, $k_{\max}^2 \gg k_{\min}^4$ они равны

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4k_{\max}^4} + \frac{18V_e^4 N^2}{\pi\omega^2\Delta n^2}, \quad \psi_1 = \frac{\sqrt{2}}{k_{\max}} \cos\sqrt{\lambda_1}k_{\perp}^2,$$

и для $W_{\mathbf{k}_{\perp}}(z)$ имеем (ср. (4.19)):

$$W_{\mathbf{k}_{\perp}}(z) \approx \frac{2a \cos\sqrt{\lambda_1}k_{\perp}^2 \cos\sqrt{\lambda_1}\kappa^2 W_0 \exp\{-\Gamma(z)\} n_{\mathbf{k}(z)}^2}{\nu_e \left(1 + \frac{2\pi^3 \Delta n^2}{\tilde{k}_{\max}^4(z)u^2 N^2}\right) k_{\max}^2(z) |dz_m/d\kappa^2(z)|}. \quad (4.22)$$

Здесь $\tilde{k}_{\max}^2 = 3k_{\max}^2\rho_e^2$. В рассматриваемом случае сильной диффузии (высокой интенсивности МН) вторым членом в выражении для λ_1 и единицей в скобках можно пренебречь. Плотность энергии плазменных

волн оказывается в этом случае заметно меньшей, чем при отсутствии стока на границе.

Перейдем теперь к анализу низкочастотных возмущений. Как указывалось выше, первый член в правой части (4.14), обязанный своим происхождением взаимодействию электромагнитных и плазменных волн, существенен только в припороговой области при $\Gamma \rightarrow 0$, $\delta n^2 \lesssim \nu_e^2/\omega_0^2$, когда несущественно многократное рассеяние плазменных волн, и его можно опустить при нахождении $n_{\mathbf{\kappa}}^2$ в стационарном состоянии. Во втором члене (4.14) интегрирование следует проводить с учетом того факта, что взаимодействие плазменных волн наиболее эффективно при $k_z(\mathbf{k}'_{\perp}) \approx k_z(\mathbf{k}''_{\perp})$, $|\mathbf{k}'_{\perp}| \approx |\mathbf{k}''_{\perp}| = |\mathbf{k}'_{\perp} - \mathbf{\kappa}|$, и максимальный вклад интеграл дает область, где $\Delta k_{\parallel} = 0$. Раскладывая $k_z(\mathbf{k}''_{\perp})$ в ряд по k_{\perp}^2 вблизи $k_{\perp 1}^2 = k_{\perp 2}^2$

$$k_z(\mathbf{k}''_{\perp}) \approx k_z(\mathbf{k}'_{\perp}) + \frac{\partial k_z}{\partial k_{\perp}^2} \Delta k_{\perp}^2; \quad \Delta k_{\perp}^2 = k_{\perp 1}^2 - k_{\perp 2}^2 = 2\kappa k_{\perp} \left(\cos \phi - \frac{\kappa}{2k_{\perp}} \right)$$

(ϕ – угол между \mathbf{k}'_{\perp} и $\mathbf{\kappa}$), после ряда вычислений (более подробно см. [10]) приходим к выражению

$$n_{\mathbf{\kappa}}^2 = \frac{8\pi k_T^2}{9\delta l_e^2 T^2} \frac{1}{\kappa(1 + \kappa^2 l_{T\perp}^2)} \int_{\kappa/2}^{k_{\max}} \frac{dk_{\perp} (1 - \kappa^2/2k_{\perp}^2)}{(1 - \kappa^2/4k_{\perp}^2)^{1/2}} \times \\ \times \int dz' W_{\mathbf{k}_{\perp}}(z') W_{\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{\kappa}}(z') \frac{k_z(z') \exp\{\Lambda_T |z - z'|\}}{1 - \frac{1}{2} \left[(B + \frac{1}{2})^2 - k_{\perp}^2 \right]^{-1/2}}, \quad (4.23)$$

Учитывая далее тот факт, что спектр неоднородностей узок по сравнению со спектром плазменных волн ($W_{\mathbf{k}_{\perp}} \kappa \ll k_{\perp}$), положим $|\mathbf{a}_{h1} \mathbf{a}_{h2}|^2 = 1 - \kappa^2/2k_{\perp}^2 \approx 1$; $\sqrt{1 - \kappa^2/4k_{\perp}^2} \approx 1$, а интегрирование будем проводить от 0 до k_{\max} , считая, что вклад интервала $[0, \kappa/2]$ мал. При этом из выражения (4.23) следует важный вывод: вид спектра интенсивности флуктуаций плотности не зависит от плотности энергии накачки и имеет универсальный вид

$$n_{\mathbf{\kappa}}^2 = \frac{\Delta n^2 l_{T\perp}}{\pi^2 \kappa (1 + \kappa^2 l_{T\perp}^2)}, \quad (4.24)$$

где по-прежнему Δn^2 – полная интенсивность флуктуаций плотности. Знание спектра неоднородностей позволяет найти асимптотическую за-

висимость Δn^2 от плотности энергии накачки на входе в область турбулентности W_0 . В частности, при достаточно больших Γ_m , $\Gamma_m > \pi/2$, основной вклад в интегрирование по z вносит область $\kappa^2 l_{T\perp}^2 > 1$, где $|dz_m/d\kappa^2(z)| \approx uL$. При этом в отсутствие бесстолкновительного затухания (граничные условия (4.15) при $k_\perp = k_{\max}^2$, решение (4.19) для $W_{\mathbf{k}_\perp}(z)$), подставляя (4.19) в (4.23), используя (4.24), (4.10), имеем:

$$\Gamma_m \approx 0.6 \frac{\pi^{4/3}}{\delta^{1/2}} \left(\frac{1}{\beta_e u^{5/4}} \right)^{1/3} \left(\frac{k_T W_0}{NT} \right)^{2/3}, \quad (4.25)$$

где $\beta_e = V_e/c$. В случае граничного условия (4.20) и решения (4.22) имеем более медленную зависимость Γ_m от W_0 :

$$\Gamma_m \approx 0.6 \frac{u^{0.55}}{\delta^{0.3} \beta_T^{0.2}} \left(\frac{k_T \omega_0 L}{V_0} \frac{W_0}{NT} \right)^{2/5}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.24) становится несправедливым в области малых Γ_m , где несущественно многократное рассеяние плазменных волн на неоднородностях, а в правой части уравнения (4.14) необходимо учитывать первый член. Тем не менее, для построения качественного вида кривой стационарных состояний $\Gamma_m(W_0)$ при всех значениях Γ_m можно приближенно положить спектр $n_{\mathbf{k}}^2$ близким к (4.24). При этом из (4.14) с использованием (4.19) получаем

$$1 - \epsilon_0 \exp\{-\Gamma_m\} = q \epsilon_0^2 \Gamma_m I(\Gamma_m), \quad (4.27)$$

где $\epsilon_0 = W_0/W_{t0\text{th}}$ – отношение плотности энергии накачки на входе в плазму к минимальной пороговой плотности энергии для ТПН, определяемой выражением (3.27) при $\kappa \rightarrow 0$,

$$I(\Gamma_m) = \int_0^{\pi/2 - p_0} \frac{dp \sin^3 p}{\cos p} \exp\left\{ \frac{2}{\pi} p \Gamma_m \right\}, \quad p_0 = \frac{\omega_0}{c\sqrt{\delta}}, \quad q = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\omega_0^2}{\nu_e^2} \frac{l_{T\perp}}{u^{3/4} k_0 L^2},$$

значение верхнего предела в интеграле $I(\Gamma_m)$ определяется минимальным $\kappa_{\min} \sim \omega_0/c$ в (4.19). Зависимость $\Gamma_m(\epsilon_0)$ для типичных параметров ионосферной плазмы ($q = 50$, $p_0 = 0.1$) приведена на рис. 4.1. В соответствии с рис. 4.1, развитие ТПН происходит следующим образом. При малых начальных возмущениях плотности ($n_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow 0$) неустойчивость начинается при превышении порога ($\epsilon_0 > 1$) по амплитуде волны накачки.

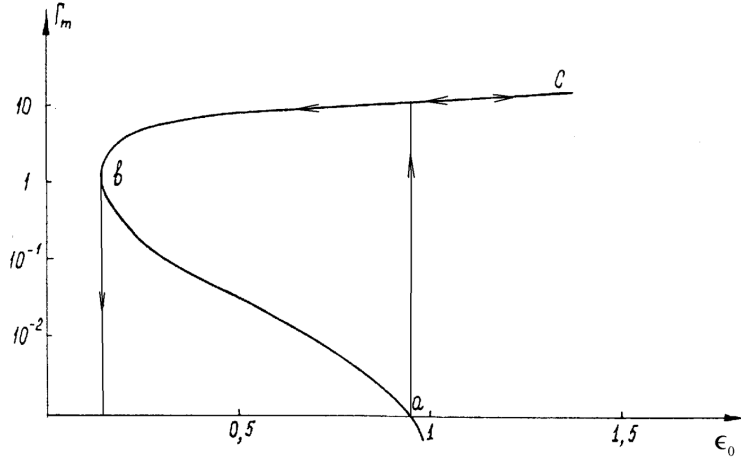


Рис. 4.1: Зависимость Γ_m от ϵ_0 , определяемая формулой (4.27) при $q = 50$

Стационарный уровень турбулентности на нелинейной стадии неустойчивости высок даже в припороговой области и соответствует участку bc кривой $\Gamma_m(\epsilon_0)$ (жесткий режим возбуждения). При наличии в плазме начальных возмущений конечной амплитуды $n_{\mathbf{k}0}^2$ реализуется режим возбуждения ТПН с жестким возбуждением (участок ab), который соответствует резонансной неустойчивости, рассмотренной в [40, 50]. Наличие такого режима приводит к гистерезисной зависимости интенсивности флуктуаций плотности $n_{\mathbf{k}}^2$ от плотности энергии падающей волны W_0 , причем срыв неустойчивости происходит при значительно меньших $\epsilon_0 = \epsilon_{0b}$, чем ее включение, $\epsilon_{0b} \approx 1.2/\sqrt{q} \ll 1$.

4.3. Обсуждение результатов

На основе проведенного в разделах 3 и 4 теоретического анализа сделаем оценки для условий F -слоя ионосферы и сопоставим их кратко с данными эксперимента.

На эксперименте тепловая параметрическая турбулентность традиционно исследуется с помощью измерений аномального ослабления волн

ны накачки и пробных волн с частотами $|f - f_0| \lesssim f_0 L_T / 2L$, которое развивается за время порядка γ^{-1} , и с помощью эффекта ракурсного рассеяния радиоволн на мелкомасштабных неоднородностях и плазменных волнах. Результаты экспериментов приведены в большом числе журнальных статей суммированы в обзорах и монографиях [1, 8, 9, 11, 13, 14, 15]. Более подробное сопоставление данных эксперимента с теорией дано в [9, 10].

Для типичных параметров $T_e = 2 \cdot 10^{-13}$ эрг, $N = 4.5 \cdot 10^5$ см $^{-3}$ (что соответствует частоте $f_0 \approx 5.7$ МГц), $\delta = 10^{-4}$, $l_e = 300$ м, $L = 150$ км $\nu_e = 500$ с $^{-1}$ для минимального порогового поля ТПН (при $\kappa^2 \rho_e^2 < \delta$, $l = 2\pi/\kappa > 12$ м) имеем из (3.27) $(E_2)_{\text{th}} \sim 100$ мВ/м, что оказывается заметно ниже порога индуцированного рассеяния и соответствует эффективной мощности излучения² $\tilde{P}_{\text{ef}} \simeq 7$ МВт при высоте области взаимодействия над поверхностью Земли $h \sim 200$ км. Согласно экспериментальным данным [8, 11] порог возбуждения искусственной мелкомасштабной турбулентности несколько ниже и составляет $\tilde{P}_{\text{ef}} \simeq 2-4$ МВт. Снижение порога по сравнению с вычисленным теоретически может быть обусловлено рядом факторов. В частности, при наличии начальных затравочных неоднородностей уже при достаточно низком их уровне $\delta n_0 \sim 2\nu_e/\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{-5}$ порог ТПН снижается вдвое. Как уже указывалось, к заметному снижению порога может приводить неизотермичность ионосферной плазмы [54]. Дополнительным фактором может являться также фокусировка накачки на естественных крупномасштабных неоднородностях ионосферной плазмы [55].

При пятикратном превышении мощности накачки над пороговой (см. рис. 3.1, кривая 3) на линейной стадии ТПН возбуждаются неоднородности с 3.5 м $< l \lesssim c/f_0 \approx 50$ м. Максимальный инкремент неустойчивости при этом равен (см. (3.28), (3.29)) $\gamma \simeq 5\delta\nu_e$ при $l \simeq 5-6$ м, и при $\nu_e = 500$ с $^{-1}$ характерное время развития неустойчивости составляет $\tau \sim \gamma^{-1} \sim 4$ с, что близко к значениям, измеряемым на эксперименте.

При $W_0/NT = 10^{-5}$ для Γ_m из (4.25) получаем оценку $\Gamma_m \sim 4$, что соответствует $\sqrt{\Delta n^2/N^2} \sim 10^{-2}$ и близко к данным эксперимента. Качественно правильно описывает спектр неоднородностей, наблюдаемый в экспериментах, формула (4.24). Отметим, что согласно [10, 12] при $\kappa > k_{\text{min}} \simeq (\omega_0/c\rho_e)^{1/2}$ должен иметь место более резкий спад n_{κ}^2 по

² $\tilde{P}_{\text{ef}} = P_{\text{ef}}G\gamma$, где P_{ef} — мощность наземного передатчика, G — передающей антенны, γ учитывает линейное поглощение волны накачки.

сравнению с зависимостью $n_{\kappa}^2 \propto \kappa^{-3}$, определенной формулой (4.24). Согласно (4.16), (4.19) пространственный спектр плазменных волн оказывается гораздо шире спектра МН, основная доля их энергии сосредоточена в области масштабов $k \sim k_{\max}$. Эти факты также подтверждаются на эксперименте. В работе [56] приведены экспериментальные свидетельства существования плазменных волн, направленных под углом $\approx 45^\circ$ к магнитному полю. Эти волны наблюдались через 15–20 с после включения ВН, что отвечало характерным временам развития мелкомасштабных неоднородностей. Последний факт свидетельствует в пользу важной роли многократного рассеяния плазменных волн на МН и существования «косых» плазменных волн в области тепловой параметрической турбулентности.

В эксперименте [57] был четко выявлен гистерезисный характер возбуждения МН: срыв искусственной турбулентности происходил при мощностях ВН в 2–3 раза меньших, чем ее возбуждение. Отметим, что порог срыва неустойчивости, вычисленный с помощью (4.27), хорошо согласуется с экспериментально измеренными значениями.

Результаты нелинейной теории ТПН получены с использованием приближений слабой турбулентности и случайных фаз. Они позволяют интерпретировать многие данные эксперимента. В то же время, вопрос о применимости такого подхода должен решаться на основе полной системы нелинейных уравнений, описывающих тепловое расслоение плазмы в магнитном поле. В частности, при достаточно больших амплитудах неоднородностей, $\delta n > 3k_{\text{u}}^2 d_e^2$ (d_e — дебаевский радиус), необходимо учитывать их влияние на дисперсионные свойства плазменных волн. При этом необходимо рассматривать возбуждение тепловой модуляционной неустойчивости верхнегибридных волн и их захват в МН. Существенное влияние на форму и амплитуду МН при их больших амплитудах может оказывать зависимость коэффициентов переноса (диффузии и теплопроводности) от температуры, т. е. учет низкочастотных нелинейностей. Эти вопросы рассматривались в целой серии работ (см. [58]–[69] и ссылки там).

Далее, из выражений (3.20), (4.17) (4.18), (4.24) следует, что плазменные волны при развитии ТПН сосредоточены в узкой области вблизи уровня верхнего гибридного резонанса ВН $\Delta v \approx \Delta z/L \simeq 10^{-3}$. Максимальная (по z) плотность энергии плазменных волн составляет в здесь достигает $W_{\text{tot}}^{\max} \sim 10^{-3} W_0 \omega_0 / \delta \nu_e u$. Эта величина в типичных условиях эксперимента существенно превышает порог стрикционных параметри-

ческих неустойчивостей (см. (2.7), (2.10)). Последние, таким образом, должны быть включены в рассмотрение при построении теории тепловой параметрической турбулентности. При достаточно больших интенсивностях накачки для описания турбулентности верхнегибридных волн, возникающих в процессе ТПН, необходимо учитывать процессы образования ленгмюровского конденсата, модуляционной неустойчивости и коллапса, связанных со стрикционной нелинейностью. Процессы модуляционной неустойчивости, образования солитонов и коллапса в случае верхнегибридных волн рассматривались в [35, 70, 71]. Имеется также ряд работ, где развивается теория стрикционных параметрических неустойчивостей верхнегибридных колебаний, захваченных в МН [72]–[74].

Не останавливаясь подробно на анализе перечисленных работ, отметим лишь, что в них не учитывается регулярная неоднородность среды, неоднородность процессов в направлении поперек магнитного поля (рассматриваются одномерные либо цилиндрически симметричные образования; исключение составляет лишь работа [75], где показана возможность появления мультисолитонных образований для тепловой нелинейности), не учитывается возможность появления «косых» волн. Все эти факторы, которые необходимо учитывать для понимания результатов эксперимента, требуют своего решения.

Список литературы

- [1] Utlaut W. F., Cohen R. Modifying the Ionosphere with Intense Radio Waves. // Science. 1971. V.174. P. 245–254.
- [2] Gordon W. E., Showen R. L., Carlson H. C., Ionospheric heating at Arecibo: First tests. // J. Geophys. Res. 1971, v. 76, pp. 7808–7813.
- [3] Гегманцев Г.Г., Комраков Г.П. и др. Некоторые результаты исследований нелинейных явлений в F-слое ионосферы. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 1. № 10. С. 621–624.
- [4] Гинзбург В. Л., Гуревич А. В., УФН. 1960. Т. 70. С. 201–246, 393–428.
- [5] А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, М., Наука, 1973.
- [6] Гуревич А. В., Шлюгер И. С. Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. С. 1237–1260.
- [7] Ерухимов Л. М., Ковалев В. Я. и др. Исследования взаимодействия мощного радиоизлучения с ионосферной плазмой на низких широтах. // Геомагнетизм и аэрномия. 1987. Т. 27. С. 758–763.
- [8] Ерухимов Л. М., Метелев С. А. и др. Искусственная ионосферная турбулентность (обзор). // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. С. 208–225.
- [9] Митяков Н. А., Грач С. М., Митяков С. Н. «Возмущение ионосферы мощными радиоволнами» // Итоги науки и техники, Серия: Геомагнетизм и высокие слои атмосферы, М., ВИНТИ. 1989. 138 с.
- [10] Грач С. М., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Тепловая параметрическая неустойчивость в ионосферной плазме. // В кн.: «Тепловые нелинейные явления в плазме.» ИПФ АН СССР. Горький. 1979. С. 46–80.
- [11] Ерухимов Л. М., Метелев С. А. и др. Экспериментальные исследования искусственной ионосферной турбулентности. // В кн.: «Тепловые нелинейные явления в плазме.» ИПФ АН СССР. Горький. 1979. С. 7–45.

- [12] Васьков В. В., Гуревич А. В. Самофокусирующая и резонансная неустойчивость в F -области ионосферы. // В кн.: «Тепловые нелинейные явления в плазме.» ИПФ АН СССР. Горький. 1979. С. 81–138.
- [13] Насыров А. М. Рассеяние радиоволн анизотропными ионосферными неоднородностями. Изд. Казанского университета, 1991.
- [14] Авдеев В. Б., Белей В. С. и др. Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37. С. 479–492.
- [15] Frolov V. L., Erukhimov L. M., Metelev S. A., Sergeev E. N. Temporal behaviour of artificial small-scale ionospheric irregularities: Review of experimental results. // J. Atm. Solar-Terr. Phys. 1997. V. 59. P. 2317–2333.
- [16] Гуревич А.В. Нелинейные явления в ионосфере.//УФН. 2007. Т.177, №11. С. 1145–1177.
- [17] Беликович В. В., Грач С. М., Караштин А. Н., Котик Д. С., Токарев Ю. В. Стенд "Сура": исследования атмосферы и космического пространства (обзор)// Известия вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50. № 7. С. 545-576.
- [18] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М. Наука. 1967.
- [19] Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. //М. Наука. 1975.
- [20] Криенберг И. А. Кинетика электронов в ионосфере и плазмосфере Земли. М., Наука, 1978.
- [21] Istomin Ya. N., Leyser T. B. Phys. of Plasmas, 1994, v. 2., pp. 2084–2097.
- [22] Грач С. М., Трахтенгерц В. Ю. О параметрическом возбуждении ионосферных неоднородностей, вытянутых вдоль магнитного поля. Изв. вузов. Радиофизика, 1975, Т. 18. С. 1288 – 1296.
- [23] В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, М., Наука, 1973.

- [24] Мима К., Нишикава К. В кн.: Основы физики плазмы, М., Энергоатомиздат, 1984, 434–497.
- [25] Васьков В. В., Гуревич А. В., Изв. ВУЗов — Радиофизика, 1973, **16**, 188–198.
- [26] Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Геомагнетизм и аэрономия. 1974. Т. 14. С. 36–42.
- [27] Perkins F. W., Valeo E. J., Phys.Rev. Let., 1974, v.32, pp. 1234–1237.
- [28] Альбер Я. И., Кротова З. Н., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. ЖЭТФ, 197. Т. 66. С. 574–578.
- [29] Perkins F. W., Valeo C. R., Oberman E. J., J. Geophys. Res., 1974, v. 79, 1478–1483.
- [30] Жислин Г. М., Литвак А. Г. и др. Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 617–621.
- [31] Fejer J. A., Ionospheric modification and parametric instabilities, Rev. Geophys.Space Phys., 1979, **17**, no. 1, 135–153.
- [32] Захаров В. Е. В кн.: Основы физики плазмы, М., Энергоатомиздат, 1984, 78–118.
- [33] Шапиро В. Д., Шевченко В. И. В кн.: Основы физики плазмы, М., Энергоатомиздат, 1984, 119–173.
- [34] Sheerin J.R., Weatherall J.C. et al., J. Atm. Terr. Phys., 1982, **44**, no. 12, 1043–1048.
- [35] Литвак А. Г., Сергеев А. М. В кн. "Высокочастотный нагрев плазмы ИПФ АН СССР, Горький, 1983, 324–370.
- [36] DuBois D. F., Rose A. H., Russel D., J. Geophys. Res., 1990, v. 95, no. A12, 21221–21272.
- [37] DuBois D. F., Russel D., Rose A. H., Phys. Plasmas, 1995, **2**, no. 1, 75–96.

- [38] Грач С. М., Караштин А. Н., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Тепловая параметрическая неустойчивость в неоднородной плазме. Часть 1. Линейная теория. //Препринт НИРФИ N 114, Горький. 1978.
- [39] Грач С. М., Караштин А. Н., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. К теории тепловой параметрической неустойчивости в неоднородной плазме. //Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 1321–1329.
- [40] Васьков В. В., Гуревич А. В. //ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 176–178.
- [41] Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Движение и расплывание неоднородностей в плазме //УФН. 1967. Т. 91. С. 609–643.
- [42] С. И. Брагинский. Явления переноса в плазме. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. С. 183–272. М. Госатомиздат. 1963.
- [43] Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. //М. Наука, 1974. 256 с.
- [44] Рожанский В. А., Цендин Л. Д. Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 382.
- [45] Курина Л.Е. Об особенностях неоднородной диффузии искусственных плазменных неоднородностей при локальном нагреве ионосферной плазмы. //Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. №2. С. 221–219.
- [46] Васьков В. В. В кн. «Взаимодействие радиоволн КВ- и УКВ диапазонов с ионосферной плазмой», М., ИЗМИРАН, 1980, С. 4.
- [47] Васьков В. В. Гуревич А. В. //Геомagnetизм и астрономия. 1982. Т. 22. С. 565–572.
- [48] Васьков В. В., Гуревич А. В. //Геомagnetизм и астрономия. 1983. Т. 23. С. 901–908.
- [49] Ерухимов Л. М., Мясников Е. Н. //Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. С. 194–205.
- [50] Васьков В. В., Гуревич А. В. ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 929–936.
- [51] Поляков С. В., Яхно В. //Физика плазмы. 1980.

- [52] Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. //М. Наука. 1967. 258 с.
- [53] Грач С. М., Караштин А. Н., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Грахтенгерц В. Ю. Тепловая параметрическая неустойчивость в неоднородной плазме (нелинейная теория). //Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 1330–1340.
- [54] Грач С. М., Поляков С. В., Рапопорт В. О. О влиянии рекомбинационных процессов и неизотермичности ионосферной плазмы на тепловую параметрическую неустойчивость. //Изв. вузов. Радиофизика, 1979, Т. 22. С. 711–715.
- [55] Ерухимов Л. М., Метелев С. А. В кн.: Модификация ионосферы мощным радиоизлучением. (Материалы Межд. симпоз., Суздаль, 1986). М.: ИЗМИРАН, 1986, С. 67–69.
- [56] Hedberg A., Thidé V. et al. //J. Geophys. Res. 1984. V. A84. P. 11038–11042.
- [57] Ерухимов Л. М., Метелев С. А. и др. Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. С. 1738–1741.
- [58] Буринская Т. М., Волокитин А. С., Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 1350–1354.
- [59] Литвак А. Г., Миронов В. А. В кн.: "Тепловые нелинейные явления в плазме ИПФ АН СССР, Горький. 1979. С. 191–215.
- [60] Литвак А. Г., Миронов В. А. ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 562–572.
- [61] Inhester V., J. Atm. Terr. Phys., 1982, v. 44, pp. 1049–1060.
- [62] Dysthe K. B., Mjølhus E., Pecseli H., Ripdal K. Phys. Scripta, 1982, v.2/2, pp.548–559.
- [63] Dysthe K. B., Mjølhus E., Pecseli H., Stenflo L. Phys. Fluids, 1983, v.26, p. 146.
- [64] Mjølhus E. J. Plasma Phys., 1983 v. 30, pp. 195–198.
- [65] Mjølhus, E. J. Atmos. Terr. Phys., 1993, v. 55, pp. 907–918.

- [66] Васьков В. В., Рябова Н. А. Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. С. 541–560.
- [67] Gurevich A. V., Zybin, K. P., Lukyanov, A. V. Phys. Rev. Lett., 1995, v. 75, pp. 2622–2625.
- [68] Gurevich A. V., Zybin, K. P., Lukyanov, A. V. Phys. Lett. A, 1995, v. 206, pp. 2247–259.
- [69] Istomin Ya. N., Leyser T. B. Phys. of Plasmas, 1997, v. 4., pp. 817–828.
- [70] Porkolab M., Goldman M. N. Phys. Fluids, 1976, v. 18, pp. 872–881.
- [71] Буринская Т. М. //Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 819–826.
- [72] Istomin Ya. N., Leyser T. B. Phys. of Plasmas, 1998, v. 5., pp. 921–932.
- [73] Gurevich A. G., Carlson H. C., Lukyanov A. V., Zybin K. P., Phys. Lett. A, 1997, v. 231, pp. 97–108.
- [74] Mjølhus E., J. Plasma Phys., 1997, v.58, pp.747–769.
- [75] Горшков К. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. Связанные стационарные солитонные образования. Препринт ИПФ АН N 49, Горький, 1982.