

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

В.Г. Гавриленко
В.А. Яшнов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Учебное пособие

Рекомендовано учёным советом радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2015

УДК 533.951
ББК 22.3
Г-17

Г-17 Гавриленко В.Г., Яшнов В.А. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 101 с.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор ННГУ **А.В. Кудрин**
к.ф.-м.н., зав. сектором НИРФИ **Д.С. Котик**

В учебном пособии излагаются основы теории распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме. Основное внимание уделяется методу геометрической оптики (лучевому приближению), широко используемому для расчетов волновых полей в плавно неоднородных средах. Рассматриваются применения метода геометрической оптики к решению задач радиосвязи и зондирования ионосферы.

Учебное пособие предназначено для студентов радиофизического факультета, обучающихся по направлениям подготовки 011800 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 090302 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственные за выпуск:
председатель методической комиссии радиофизического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**,
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета
ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 533.951
ББК 22.3

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2015

Предисловие

Проблемы, возникающие при проектировании и эксплуатации современных систем радиосвязи, радиолокации и радионавигации, требуют высокого уровня подготовки специалистов в области распространения радиоволн в околоземном пространстве, в том числе в ионосфере Земли. Учебное пособие "Распространение волн в неоднородной плазме" создает необходимую теоретическую базу для изучения механизмов распространения волн в ионосферной плазме. Пособие предназначено для подготовки специалистов в области распространения радиоволн и физики ионосферы и написано на основе спецкурса, читаемого для студентов, специализирующихся на кафедре распространения радиоволн и радиоастрономии. Курс опирается на материал, излагаемый в общем курсе электродинамики (раздел "Электромагнитные волны в диспергирующих средах"), в спецкурсе "Введение в физику ионосферы и магнитосферы" (раздел "Волны в однородной плазме"). Подробное изложение теории распространения волн в неоднородной плазме можно найти в монографиях [1-5], отдельные вопросы рассмотрены в книгах [6-12], а также в обзорных статьях [13-17].

Цель курса - сформировать у студентов современное представление об основных закономерностях распространения электромагнитных волн в неоднородных средах, о методах расчета электромагнитных полей в неоднородной плазме.

Полученные знания должны способствовать умению:

- выполнять расчеты электромагнитных полей в слоисто-неоднородной плазме;
- рассчитывать лучевые траектории электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме;
- проводить оценки влияния неоднородности ионосферной или космической плазмы на характер распространения радиоволн при решении конкретных задач радиосвязи и радиоастрономии, возникающих при выполнении курсовых и дипломных работ.

Введение

Плазмой обычно называют ионизованный газ, содержащий свободные заряженные частицы – электроны и ионы. Приведем некоторые параметры, характеризующие плазму как среду, в которой распространяются электромагнитные волны. Основными параметрами плазмы являются концентрация и температура заряженных и нейтральных частиц. Если N_e – концентрация электронов в плазме, а N_n – концентрация нейтральных частиц, то отношение

$$\delta = \frac{N_e}{N_e + N_n} \quad (1)$$

есть степень ионизации плазмы.

Средние энергии различных типов частиц, составляющих плазму, могут отличаться. В таком случае плазму нельзя охарактеризовать одним значением температуры T . Различают электронную температуру T_e , ионную температуру T_i и температуру нейтральных частиц T_n . Подобная плазма называется неизотермической, в то время как плазма, в которой $T_e = T_i = T_n$ называется изотермической.

Если средняя кинетическая энергия частиц плазмы $E_k \approx \kappa T$ велика по сравнению с энергией кулоновского взаимодействия между ними $E_e \approx e^2/l$ (здесь κ – постоянная Больцмана, T – температура, e – заряд электрона, l – среднее расстояние между частицами), то плазму можно рассматривать как идеальный газ. Условие газообразного состояния среды можно представить в виде

$$\kappa T \gg e^2 N_e^{1/3}. \quad (2)$$

В космической и ионосферной плазме с достаточной степенью точности выполняется условие квазинейтральности, которое в простейшем случае двухкомпонентной плазмы имеет вид

$$N_e \cong N_i. \quad (3)$$

Важным параметром плазмы является дебаевский радиус r_D – характерное расстояние, на которое в плазме распространяется действие электрического поля отдельного заряда. Выражение для электростатического потенциала φ заряда q в плазме на расстоянии r от него имеет вид

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad (4)$$

где

$$r_D = \left(\frac{\kappa T}{8\pi e^2 N_e}\right)^{1/2}. \quad (5)$$

В плазме возможно существование плазменных колебаний (волн) с плазменной (ленгмюровской) частотой ω_p

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{m_e}, \quad (6)$$

где m_e – масса электрона. При наличии внешнего магнитного поля с индукцией \vec{B}_0 на электроны действует сила Лоренца, под действием которой частицы движутся по винтовым линиям с циклотронной частотой ω_B

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m_e c}, \quad (7)$$

где c – скорость света в вакууме.

Для иллюстрации приведем параметры некоторых типичных видов плазмы. Начнем с плазменных объектов в космосе. Большинство звезд, включая и наше Солнце, имеет температуры, при которых вещество находится в состоянии плазмы. Межзвездный газ также ионизован, и, несмотря на относительно малую концентрацию заряженных частиц, его также можно считать плазмой, так как пространственный масштаб его существенно превышает дебаевский радиус. Плазма распространена и в ближнем космосе. Она заполняет магнитосферу Земли и образует ионосферные области.

В технике широко используются различные виды газовых разрядов. К ним относятся стационарные или импульсные электродные разряды – тлеющий разряд с холодными электродами, дуговой разряд. В последнее время для различных целей широко используется плазма, создаваемая СВЧ-разрядом, лазерная плазма и т.п.

В качестве примера приведем параметры некоторых плазменных объектов. Здесь L – характерный масштаб неоднородности плазмы.

Объект	Газ	L, см	H, Э	$N_n, \text{см}^{-3}$	$N_e, \text{см}^{-3}$	$T_e, \text{эВ}$	$r_D, \text{см}$
Ионосфера (область E)	Воздух	10^6	1	$10^{12}-10^{13}$	10^5	0,03	0,3
Ионосфера (область F)	Воздух	10^6-10^7	1	10^9-10^{12}	10^5-10^6	0,03-0,1	0,2
Солнечная корона	H	$10^{11}-10^{12}$			10^4-10^8	100	1-100
Межзвездная среда	H	10^{18}			$10^{-3}-10$	0,01-1	10^2-10^4
Лазерная плазма		10^{-1}			10^{17}	1-3	10^{-7}

Из данных, приведенных в таблице, видно многообразие параметров плазмы. Характерные масштабы неоднородности плазмы различных объектов изменяются в широких пределах. В связи с этим при исследовании распространения электромагнитных волн в плазме широко используются различные приближенные методы, некоторые из них будут рассмотрены в данном пособии.

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

1.1. Исходные уравнения

Запишем уравнения Максвелла для монохроматических волн с частотой ω в холодной изотропной неоднородной плазме, свойства которой описываются комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, \omega)$ ¹, где \vec{r} – радиус вектор точки наблюдения,

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} - ik_0\vec{H} &= 0; \\ \text{rot}\vec{H} + ik_0\varepsilon(\vec{r})\vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} – напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме. Исключив из уравнений (1.1.1) напряженность электрического, либо магнитного поля, можно перейти к уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta\vec{E} - \text{grad}\text{div}\vec{E} + k_0^2\varepsilon(\vec{r})\vec{E} &= 0; \\ \Delta\vec{H} + \left[\frac{\nabla\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon(\vec{r})}, \text{rot}\vec{H} \right] + k_0^2\varepsilon(\vec{r})\vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Таким образом, расчеты полей электромагнитных волн в неоднородной изотропной среде сводятся к решению дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с переменными коэффициентами (1.1.2). Строгие решения этих уравнений известны лишь для очень узкого круга частных задач, поэтому особое значение имеют приближенные (асимптотические) методы решения этих уравнений.

1.2. Распространение плоских волн в однородной среде

В случае пространственно-однородной среды, свойства которой характеризуются не зависящей от координат комплексной диэлектрической проницаемостью ε , уравнения (1.1.2) допускают решение в виде плоской волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r}), \quad (1.2.1)$$

¹ Холодная плазма является примером среды без пространственной дисперсии, в которой связь между индукцией и напряженностью электрического поля является локальной в пространстве.

где \vec{k} и \vec{E}_0 – постоянные (не зависящие от координат) векторы. В результате подстановки (1.2.1) в первое уравнение (1.1.2) получаем систему алгебраических уравнений относительно компонент вектора \vec{E}_0 , которая в векторной форме имеет вид

$$k^2 \vec{E}_0 - \vec{k} (\vec{k} \vec{E}_0) - k_0^2 \varepsilon \vec{E}_0 = 0. \quad (1.2.2)$$

В декартовой системе координат (x, y, z) система уравнений (1.2.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (k^2 - k_x^2 - k_0^2 \varepsilon) E_{0x} - k_x k_y E_{0y} - k_x k_z E_{0z} &= 0; \\ -k_x k_y E_{0x} + (k^2 - k_y^2 - k_0^2 \varepsilon) E_{0y} - k_y k_z E_{0z} &= 0; \\ -k_x k_z E_{0x} - k_y k_z E_{0y} + (k^2 - k_z^2 - k_0^2 \varepsilon) E_{0z} &= 0; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Из условия существования нетривиального решения системы (1.2.3) получаем дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega) [k^2 - k_0^2 \varepsilon(\omega)] = 0. \quad (1.2.4)$$

В холодной изотропной плазме без учета соударений электронов с другими частицами диэлектрическая проницаемость определяется выражением [1]

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.2.5)$$

где ω_p – плазменная или ленгмюровская частота. Очевидно, что дисперсионное уравнение (1.2.4) распадается на два независимых уравнения. Первое уравнение $\varepsilon(\omega) = 0$ приводит к соотношению

$$\omega^2 = \omega_p^2. \quad (1.2.6)$$

Это дисперсионное уравнение для продольных колебаний в плазме [1]. Решение второго уравнения $k^2 - k_0^2 \varepsilon(\omega) = 0$ можно представить в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (1.2.7)$$

Последнее уравнение описывает поперечные электромагнитные волны. Таким образом, в однородной изотропной холодной плазме могут существовать продольные плазменные колебания на ленгмюровской частоте и распространяться поперечные электромагнитные волны, волновой вектор которых удовлетворяет соотношению

$$|\vec{k}| = k_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (1.2.8)$$

Эти волны и колебания при слабых полях в линейном приближении могут существовать независимо.

1.3. Отражение плоской волны от границы раздела двух сред

В качестве простейшего примера неоднородной среды можно рассмотреть плоскую границу раздела двух сред. Пусть плоскость $z=0$ совпадает с границей раздела. В верхнем полупространстве ($z>0$) относительная диэлектрическая проницаемость среды равна ε , магнитная проницаемость — $\mu=1$.

При $z<0$ находится вакуум ($\varepsilon = \mu = 1$). Предположим, что из вакуума на границу раздела под углом ϑ_0 к оси z падает плоская волна (рис. 1.1). Хорошо известно, что волновые векторы падающей, преломленной и отраженной волн

лежат в одной плоскости (плоскости падения). Углы преломления ϑ и падения ϑ_0 связаны между собой законом Снеллиуса

$$\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} = \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.3.1)$$

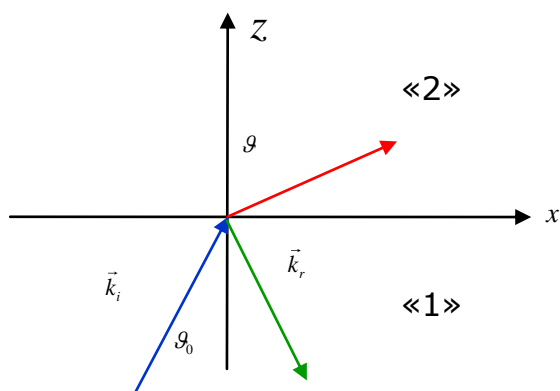


Рис. 1.1

Коэффициенты отражения и преломления волны зависят от поляризации падающей волны, поэтому рассмотрим

отдельно два случая: падение ТЕ- и ТМ-волн. При падении ТЕ-волны выражения для компонент электрического поля в области $z < 0$ можно представить в виде суммы падающей и отраженной волн

$$E_x^{(1)} = E_z^{(1)} = 0, \quad (1.3.2)$$

$$E_y^{(1)} = \exp(ik_0 \sin \vartheta_0 \cdot x + ik_0 \cos \vartheta_0 \cdot z) + R_1 \exp(ik_0 \sin \vartheta_0 \cdot x - ik_0 \cos \vartheta_0 \cdot z). \quad (1.3.3)$$

Напряженность электрического поля прошедшей волны имеет вид

$$E_y^{(2)} = D_{\perp} \exp\left(ik_0 \sin \vartheta_0 \cdot x + ik_0 \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0} \cdot z\right). \quad (1.3.4)$$

В формуле (1.33) амплитуда падающей волны считается равной единице. Используя условие непрерывности тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного поля волн на границе раздела двух сред, получаем два уравнения для определения коэффициентов прохождения D_{\perp} и отражения R_{\perp}

$$\begin{aligned} 1 + R_{\perp} &= D_{\perp} \\ ik_0 \cos \vartheta_0 (1 - R_{\perp}) &= ik_0 \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0} D_{\perp}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

откуда

$$R_{\perp} = \frac{\cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}{\cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}, \quad (1.3.6)$$

$$D_{\perp} = \frac{2 \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}. \quad (1.3.7)$$

Аналогично получаются выражения для коэффициентов отражения и прохождения ТМ-волны

$$R_{\parallel} = \frac{\varepsilon \cos \vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}{\varepsilon \cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}, \quad (1.3.8)$$

$$D_{\parallel} = \frac{2\varepsilon \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0}}. \quad (1.3.9)$$

Отметим, что законы преломления не зависят от вида поляризации волны, в то время как коэффициенты отражения и прохождения для волн различных поляризаций отличаются.

На рис. 1.2 показаны зависимости коэффициентов отражения волн от угла падения. Заметим, что коэффициент отражения R_{\parallel} обращается в нуль при значении угла $\vartheta_0 = \vartheta_B$, где ϑ_B – угол Брюстера.

$$\operatorname{tg} \vartheta_B = \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.3.10)$$

Другим характерным углом является угол полного внутреннего отражения, наблюдаемого при падении волны из оптически более плотной среды на границу с менее плотной средой. Угол полного внутреннего отражения ($R_{\parallel} = R_{\perp} = 1$) определяется выражением

$$\sin \vartheta_R = \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.3.11)$$

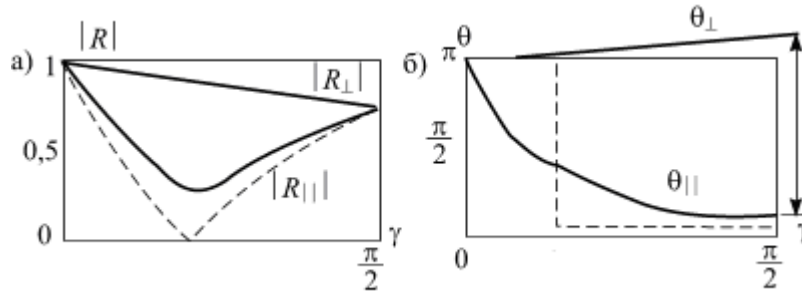


Рис. 1.2

Таким образом, наличие неоднородности (границы) приводит к появлению новых эффектов по сравнению со случаем однородной среды:

- изменение направления распространения волны (преломление);
- отражение волны от границы;
- изменение поляризации (эффект Брюстера);
- возможность полного отражения (появление непрозрачности).

Поскольку в плазме $\varepsilon < 1$, на ее границах с вакуумом могут наблюдаться все эти эффекты.

1.4. Метод возмущений (борновское приближение)

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в холодной изотропной пространственно неоднородной плазме. Предположим, что свойства среды зависят от одной пространственной координаты z . Исследуем распространение волны в направлении оси z . Из уравнений Максвелла получаем уравнение для напряженности электрического поля волны

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 (1 - \nu) E = 0, \quad (1.4.1)$$

где $\nu = \omega_p^2 / \omega^2$, ω_p – ленгмюровская частота, ω – частота волны. Ограничимся рассмотрением распространения высокочастотных волн, для которых справедливо условие

$$\max(\nu(z)) \ll 1. \quad (1.4.2)$$

В этом случае решение уравнения (1.4.1) можно искать в виде ряда по степеням параметра малости ν

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots, \quad (1.4.3)$$

где E_0 не зависит от ν , т.е. E_0 – поле электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме. Слагаемые E_1, E_2 удовлетворяют неравенствам

$$|E_1| \ll |E_0|, \quad |E_2| \ll |E_1|. \quad (1.4.4)$$

Стандартным образом получим систему уравнений последовательных приближений

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_0}{dz^2} + k_0^2 E_0 = 0; \\ \frac{d^2 E_1}{dz^2} + k_0^2 E_1 = k_0^2 \nu(z) E_0; \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Решения первого уравнения системы (1.4.5) запишем в виде плоской волны единичной амплитуды, распространяющейся в положительном направлении оси z

$$E_0(z) = \exp(ik_0 z). \quad (1.4.6)$$

Далее, подставляя выражение (1.4.6) в правую часть второго уравнения системы

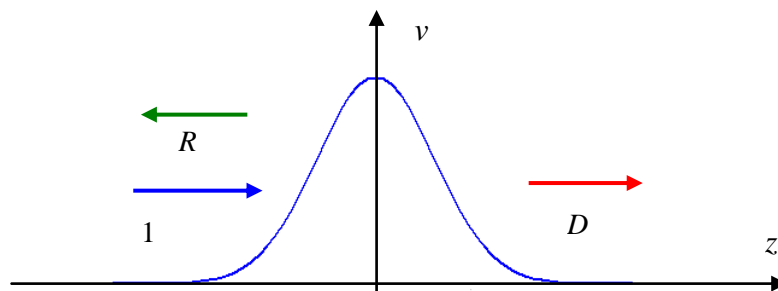


Рис. 1.3

(1.4.5), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + k_0^2 E_1 = k_0^2 \nu(z) \exp(ik_0 z). \quad (1.4.7)$$

Решение уравнения первого приближения (1.4.6) запишем с помощью функции Грина. Функция Грина $G(z, z')$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + k_0^2 G = \delta(z - z'). \quad (1.4.8)$$

Будем искать решение этого уравнения с помощью метода преобразования Фурье. Для этого представим решение в виде интеграла

$$G(z, z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\kappa, z') e^{i\kappa z} d\kappa. \quad (1.4.9)$$

Используем известное представление δ -функции

$$\delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa(z-z')} d\kappa. \quad (1.4.10)$$

Подставив два последних выражения в исходное уравнение (1.4.8), получим

$$(-\kappa^2 + k_0^2)G(\kappa, z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\kappa z'}. \quad (1.4.11)$$

Тогда

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\kappa(z-z')}}{\kappa^2 - k_0^2} d\kappa. \quad (1.4.12)$$

Этот интеграл может быть вычислен методом теории вычетов. В результате имеем

$$G(z, z') = \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|z-z'|}. \quad (1.4.13)$$

Выражение (1.4.13) определяет искомую функцию Грина.

Рассмотрим теперь уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + k_0^2 E_1 = k_0^2 \nu(z) E_0. \quad (1.4.14)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде свертки правой части уравнения и функции Грина

$$E_1 = -\frac{ik_0}{2} \int \nu(z') e^{ik_0 z'} e^{ik_0 |z-z'|} dz'. \quad (1.4.15)$$

Представим полученное решение в виде суммы двух слагаемых, разбив область интегрирования на две части,

$$E_1 = -\frac{ik_0}{2} \left\{ \left[\int_{-\infty}^z \nu(z') dz' \right] e^{ik_0 z} + \left[\int_z^{+\infty} \nu(z') e^{2ik_0 z'} dz' \right] e^{-ik_0 z} \right\}. \quad (1.4.16)$$

Тогда решение задачи с точностью до слагаемых порядка $\nu(z)$ может быть записано в виде

$$E \cong E_0 + E_1 = \left[1 - \frac{ik_0}{2} \int_{-\infty}^z \nu(z') dz' \right] e^{ik_0 z} - \left[\frac{ik_0}{2} \int_z^{+\infty} \nu(z') e^{2ik_0 z'} dz' \right] e^{-ik_0 z}. \quad (1.4.17)$$

Очевидно, что первое слагаемое при $z \rightarrow +\infty$ описывает прошедшую волну, а второе при $z \rightarrow -\infty$ – отраженную волну. Следовательно, коэффициенты отражения и прохождения имеют вид

$$R = -\frac{ik_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(z') e^{2ik_0 z'} dz', \quad (1.4.18)$$

$$D = 1 - \frac{ik_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(z') dz'. \quad (1.4.19)$$

В качестве примера рассмотрим прохождение волн через неоднородность гауссовой формы

$$\nu(z) = \nu_0 \exp(-z^2 / L^2), \quad (1.4.19)$$

где L – характерный масштаб и ν_0 – амплитуда неоднородности. В этом случае для коэффициентов отражения и прохождения из (1.4.18) и (1.4.19) получаем

$$R = -\frac{ik_0 L}{2} \nu_0 \sqrt{\pi} e^{-k_0^2 L^2}, \quad (1.4.20)$$

$$D = 1 - \frac{ik_0 L}{2} \nu_0 \sqrt{\pi}. \quad (1.4.21)$$

Анализ полученных выражений показывает, что борновское приближение справедливо, если выполняется условие $k_0 L \nu_0 \ll 1$. Очевидно, что при $k_0 L \gg 1$ отражение волны от неоднородности экспоненциально мало, а при $k_0 L < 1$ есть заметное рассеяние волны на неоднородности.

1.5. Метод геометрической оптики для одномерного случая

Рассмотрим метод геометрической оптики (МГО) решения одномерного уравнения Гельмгольца вида

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \quad (1.5.1)$$

описывающего распространение электромагнитной волны в неоднородной среде, свойства которой определяются относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)$. Этот метод применим, если функция $\varepsilon(z)$ является достаточно плавной, т.е. характерный масштаб неоднородности среды L велик по сравнению с длиной волны λ .

Хорошо известно, что в квантовой механике при решении уравнения Шредингера для волновой функции ψ

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(z)] \psi = 0, \quad (1.5.2)$$

аналогичного уравнению (1.5.1), используется квазиклассическое приближение или метод ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна) [18].

Здесь

m – масса частицы,

$E = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – постоянная Планка,

$U(z)$ – потенциал, p – импульс.

В квазиклассическом приближении решение уравнения Шредингера представляется в следующем виде:

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p dz\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int p dz\right), \quad \text{при } E > U \quad (1.5.3)$$

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int |p| dz\right) + \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int |p| dz\right), \quad \text{при } E < U \quad (1.5.4)$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. Эти решения справедливы вдали от точки поворота, где $p = 0$.

Аналогичный метод может быть использован для решения уравнения (1.5.1). Отправным пунктом при рассмотрении МГО является строгое решение уравнения Гельмгольца (1.5.1) для однородной среды, в которой ε не зависит от z

$$E(z) = E_0 \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon} z). \quad (1.5.5)$$

Если среда неоднородна, но свойства ее мало изменяются на масштабах порядка длины волны, характер поведения поля на небольших расстояниях должен быть близким к характеру поведения поля в однородной среде. Поэтому в случае плавно неоднородной среды естественно искать решение в виде [3]

$$E(z) = E_0(z) \exp(ik_0 \psi(z)), \quad (1.5.6)$$

где $E_0(z)$ – амплитуда волны, а функция $\psi(z)$ определяет фазу волны и называется эйконалом. Подставим решение (1.5.6) в уравнение (1.5.1). Получаем

$$E_0'' + 2ik_0 \psi' E_0' + ik_0 \psi'' E_0 + k_0^2 [\varepsilon(z) - \psi'^2] E_0 = 0. \quad (1.5.7)$$

Мы считаем $E_0(z)$ и $\psi'(z)$ медленными функциями, т.е. характерный масштаб их изменения определяется масштабом неоднородности среды L ($L \gg \lambda$). Оценим по порядку величины слагаемые в уравнении (1.5.7). Видно, что максимальным является последнее слагаемое. Далее по порядку малости следуют второе и третье слагаемое и, наконец, первое. Решение уравнения (1.5.7) можно найти, приравняв нулю отдельно слагаемые одного порядка малости. В результате получаем

$$[\varepsilon(z) - \psi'^2] E_0(z) = 0, \quad (1.5.8)$$

$$E_0' + \frac{\psi''}{2\psi'} E_0 = 0. \quad (1.5.9)$$

Первое равенство приводит к уравнению эйконала

$$\psi'^2 - \varepsilon(z) = 0, \quad (1.5.10)$$

откуда определяется неизвестная функция $\psi(z)$ – эйконал

$$\psi(z) = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz', \quad (1.5.11)$$

Два решения (1.5.11) соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях вдоль оси z .

Второе уравнение легко интегрируется методом разделения переменных

$$\frac{E_0'}{E_0} = -\frac{1}{2} \frac{\psi''}{\psi'}. \quad (1.5.12)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$E_0(z) = \frac{C}{\sqrt{\psi'}} = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}}. \quad (1.5.13)$$

Таким образом, решение уравнения (1.5.1) в приближении геометрической оптики можно представить в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях

$$E(z) = \frac{C_+}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} \exp\left(ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz'\right) + \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} \exp\left(-ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz'\right), \quad (1.5.14)$$

где C_+ и C_- – константы, определяющие амплитуды волн. Заметим, что в приближении геометрической оптики эти волны независимы, так же как это имеет место в однородной среде.

1.6. Более строгое получение уравнений геометрической оптики

Рассмотрим, следуя [3], более строгую процедуру построения асимптотического решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \quad (1.6.1)$$

описывающего распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в изотропной слоисто-неоднородной плазме. Будем считать, что свойства среды медленно меняются в пространстве на масштабах порядка длины волны. Удобно ввести «медленную» координату $\zeta = \mu z$, где

$$\mu = \frac{\hat{\lambda}_0}{L} = \frac{\lambda}{2\pi L} = \frac{1}{k_0 L} \ll 1. \quad (1.6.2)$$

Представим решение уравнения (1.6.1) в виде произведения медленно меняющейся амплитуды $\tilde{E}(\zeta)$ на быстро осциллирующий множитель

$$E(z) = \tilde{E}(\zeta) \exp\left[i \frac{\psi(\zeta)}{\mu}\right], \quad (1.6.3)$$

где ψ – эйконал. Амплитуду будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра μ

$$\tilde{E}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (i\mu)^m E_m. \quad (1.6.4)$$

Сделаем замену переменных в уравнении Гельмгольца $\zeta = \mu z$. Получаем

$$\mu^2 E'' + k_0^2 \varepsilon(\zeta) E = 0. \quad (1.6.5)$$

Здесь и далее штрих означает производную по ζ . Подставив решение (1.6.3) - (1.6.4) в уравнение (1.6.5) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях параметра μ , получаем систему уравнений последовательных приближений

$$\begin{aligned} \mu^0 : & \quad [-\psi'^2 + k_0^2 \varepsilon(\zeta)] E_0(\zeta) = 0; \\ \mu^1 : & \quad 2\psi' E_0' + \psi'' E_0 = 0; \\ \mu^2 : & \quad 2\psi' E_1' + \psi'' E_1 = E_0''; \\ & \quad \vdots \\ \mu^{m+1} : & \quad 2\psi' E_m' + \psi'' E_m = E_{m-1}'' . \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Условием существования нетривиального решения первого уравнения (1.6.6) является равенство

$$\psi'^2 - k_0^2 \varepsilon = 0. \quad (1.6.7)$$

Уравнение (1.6.7) – это уравнение эйконала. Его решение, соответствующее распространяющейся в положительном направлении оси z волне, может быть представлено в виде

$$\psi(\zeta) = k_0 \int \sqrt{\varepsilon(\zeta)} d\zeta = \mu k_0 \int \sqrt{\varepsilon(z)} dz. \quad (1.6.8)$$

При этом быстро осциллирующий (фазовый) множитель в решении (1.6.3) принимает вид

$$\exp\left[i \frac{\psi(\zeta)}{\mu}\right] = \exp\left[i k_0 \int \sqrt{\varepsilon(z)} dz\right]. \quad (1.6.9)$$

Из уравнения первого приближения по параметру μ системы (1.6.6) находим амплитуду нулевого приближения $E_0(\zeta)$

$$E_0(\zeta) = \frac{C}{\sqrt{\psi'(\zeta)}} = \frac{\tilde{C}}{\sqrt[4]{\varepsilon(\zeta)}}. \quad (1.6.10)$$

Рассмотрим решение уравнения второго приближения

$$2\psi' E_1' + \psi'' E_1 = E_0''. \quad (1.6.11)$$

Приведем уравнение (1.6.11) к виду

$$E_1' + \frac{\psi''}{2\psi'} E_1 = \frac{E_0''}{2\psi'}. \quad (1.6.12)$$

Решение однородного уравнения (1.6.12) имеет вид

$$E_1 = \frac{A}{\sqrt{\psi'}}, \quad (1.6.13)$$

где A – некоторая константа. Решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных. При этом будем считать, что $A = A(\zeta)$. Тогда

$$E_1' = \frac{A'}{\sqrt{\psi'}} - \frac{\psi''}{2\psi'} \frac{A}{\sqrt{\psi'}}. \quad (1.6.14)$$

Подставив (1.6.14) в уравнение (1.6.12), получим

$$A' = \frac{E_0''}{2\sqrt{\psi'}}$$

и

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{\psi'}} \int \frac{E_0''}{\sqrt{\psi'}} d\zeta. \quad (1.6.15)$$

Аналогично могут быть записаны выражения для амплитуд следующих приближений

$$E_m = \frac{1}{2\sqrt{\psi'}} \int \frac{E_{m-1}''}{\sqrt{\psi'}} d\zeta. \quad (1.6.16)$$

Таким образом, формулы (1.6.8), (1.6.10) и (1.6.16) дают асимптотическое решение уравнения (1.6.1) при $\mu \rightarrow 0$.

1.7. Строгое решения уравнения Гельмгольца. Линейный слой

При исследовании распространения волн в неоднородных средах часто нельзя ограничиться нулевым приближением геометрической оптики. Метод геометрической оптики не позволяет, в частности, найти структуру поля в окрестности точки отражения. В приближении геометрической оптики получается неограниченное возрастание амплитуды волны вблизи этой точки. В связи с этим большие значения приобретают строгие методы решения волнового уравнения для эталонных профилей [1, 2].

В окрестности точки отражения ($\varepsilon(z_r) = 0$) диэлектрическая проницаемость среды может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(z_r) + \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)_{z=z_r} (z - z_r) + \dots \quad (1.7.1)$$

В холодной изотропной плазме без учета соударений электронов с другими частицами вблизи точки отражения $\varepsilon(z)$ представим в виде

$$\varepsilon(z) = n^2(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - \frac{z}{L}, \quad (1.7.2)$$

где L – характерный масштаб неоднородности среды.

Будем считать, что на слой плазмы из области отрицательных значений координаты z падает плоская волна, волновой вектор которой перпендикулярен границе раздела (нормальное падение) (рис. 1.4). В области $z < 0$ представим поле в виде суперпозиции падающей и отраженной волн

$$E(z) = \exp(ik_0 z) + R \cdot \exp(-ik_0 z). \quad (1.7.3)$$

Здесь предполагается, что амплитуда падающей волны равна единице. Тогда R – коэффициент отражения волны от неоднородной плазмы. В области $z > 0$ волновое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \quad (1.7.4)$$

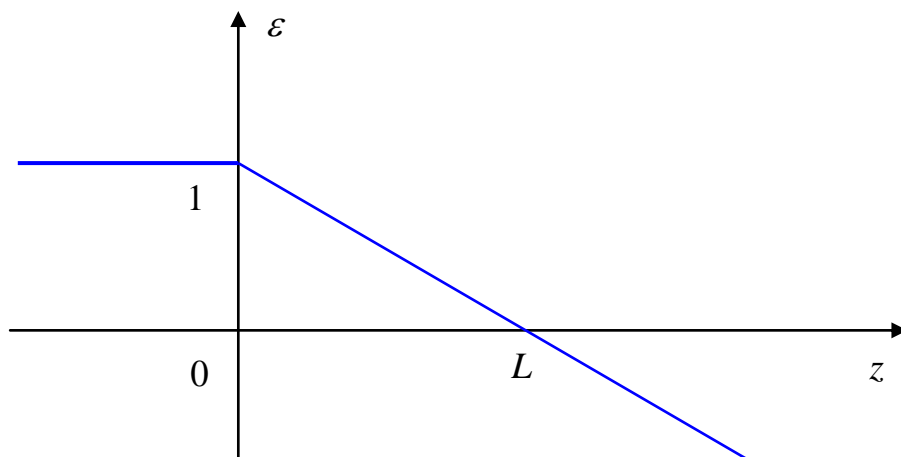


Рис. 1.4

которое с помощью замены переменной

$$\zeta = (k_0 L)^{2/3} \frac{z - L}{L} = -(k_0 L)^{2/3} \varepsilon(z) \quad (1.7.5)$$

приводится к виду

$$\frac{d^2 E}{d\zeta^2} - \zeta E = 0. \quad (1.7.6)$$

Уравнение (1.7.6) – уравнение Эйри. Решение этого уравнения можно представить в виде комбинации двух линейно независимых решений

$$E(\zeta) = C_1 Ai(\zeta) + C_2 Bi(\zeta), \quad (1.7.7)$$

где функции Эйри $Ai(\zeta)$ и $Bi(\zeta)$ могут быть выражены через функции Бесселя следующим образом [19]:

$$Ai(\zeta) = \frac{1}{3} \sqrt{\zeta} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta}{3}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right), \quad (1.7.8)$$

$$Ai(-\zeta) = \frac{1}{3} \sqrt{\zeta} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta}{3}} \left[e^{i\frac{\pi}{6}} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + e^{-i\frac{\pi}{6}} H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right], \quad (1.7.9)$$

$$Bi(z) = \sqrt{\frac{\zeta}{3}} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right], \quad (1.7.10)$$

$$Bi(-\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta}{3}} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] = \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{\zeta}{3}} \left[e^{i\frac{\pi}{6}} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) - e^{-i\frac{\pi}{6}} H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right]. \quad (1.7.11)$$

Здесь $J_n(x)$ – функции Бесселя порядка n , $I_n(x)$ и $K_n(x)$ – модифицированные функции Бесселя, $H_n^{(1,2)}(x)$ – функции Ханкеля. При больших значениях аргументов можно использовать следующие асимптотические представления функций Эйри [19]:

$$Ai(\zeta) \approx \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right), \quad (1.7.12)$$

$$Ai(-\zeta) \approx \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.7.13)$$

$$Bi(\zeta) \approx \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right), \quad (1.7.14)$$

$$Bi(-\zeta) \approx \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.7.15)$$

Решение уравнения (1.7.6), удовлетворяющее условию излучения при $z \rightarrow \infty$, представим в виде

$$E(\zeta) = CAi(\zeta). \quad (1.7.16)$$

Вид функции $Ai(\zeta)$ показан на рисунке 1.5.

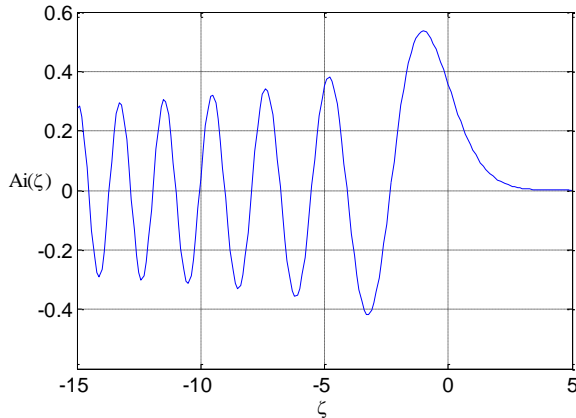


Рис. 1.5

Рассмотрим поведение решения вдали от точки отражения, т.е. при $\zeta \rightarrow -\infty$. В этом случае можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Эйри, справедливым при $|\zeta| \rightarrow \infty$, т.е. при условии

$$(k_0 L)^{2/3} \gg 1. \quad (1.7.17)$$

Последнее неравенство совпадает с условием применимости приближения геометрической оптики. При этом решение (1.7.16) переходит в решение, полученное в рамках этого приближения.

Получим выражение для коэффициента отражения волны от слоя неоднородной плазмы, диэлектрическая проницаемость которой определяется следующим образом:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z < 0; \\ 1 - \frac{z}{L}, & z \geq 0. \end{cases} \quad (1.7.18)$$

Электрическое поле волны представим следующим образом:

$$E(z) = \begin{cases} \exp(ik_0z) + R\exp(-ik_0z), & z < 0; \\ CAi(\zeta), & z \geq 0. \end{cases} \quad (1.7.19)$$

Условия непрерывности поля и его производной по координате при $z=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} 1 + R &= CAi(-x_0); \\ ik_0(1 - R) &= \frac{(k_0L)^{2/3}}{L} CAi'(-x_0). \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

Здесь

$$x_0 = (k_0L)^{2/3}$$

Из системы уравнений (1.7.19) получаем выражение для коэффициента отражения

$$R = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = x_0^{-1/2} \frac{Ai'(-x_0)}{Ai(-x_0)}. \quad (1.7.21)$$

Нетрудно убедиться в том, что при отсутствии поглощения $|R| = 1$. В этом случае коэффициент отражения удобно представить в виде

$$R = \exp(i\varphi_r). \quad (1.7.22)$$

При $|x_0| \gg 1$ можно воспользоваться асимптотикой функции Эйри и ее производной

$$\begin{aligned} Ai(-x_0) &\approx \pi^{-1/2} x_0^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} x_0^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right); \\ Ai'(-x_0) &\approx -\pi^{-1/2} x_0^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3} x_0^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

При этом для фазы коэффициента отражения получаем

$$\varphi_r = 2 \arctg \left[-\text{ctg} \left(\frac{2}{3} x_0^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = 2 \frac{2}{3} x_0^{3/2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} (k_0L) - \frac{\pi}{2}. \quad (1.7.24)$$

В приближении геометрической оптики фаза определяется выражением

$$\varphi_r = 2k_0 \int_0^L \sqrt{\varepsilon(z)} dz = \frac{4}{3}(k_0 L), \quad (1.7.25)$$

т.е. строгое решение дает дополнительный сдвиг фазы при отражении $\Delta\varphi = \pi / 2$.

1.8. Наклонное падение электромагнитных волн на слоисто-неоднородную изотропную плазму

Рассмотрим наклонное падение плоской электромагнитной волны на слой изотропной слоисто-неоднородной плазмы. Введем декартову систему координат с осью z , направленной вдоль градиента электронной концентрации. Предположим, что волна падает на слой плазмы из вакуума (область $z < 0$) под углом ϑ_0 к оси z , и волновой вектор падающей волны лежит в плоскости (x, z) (рис. 1.6).

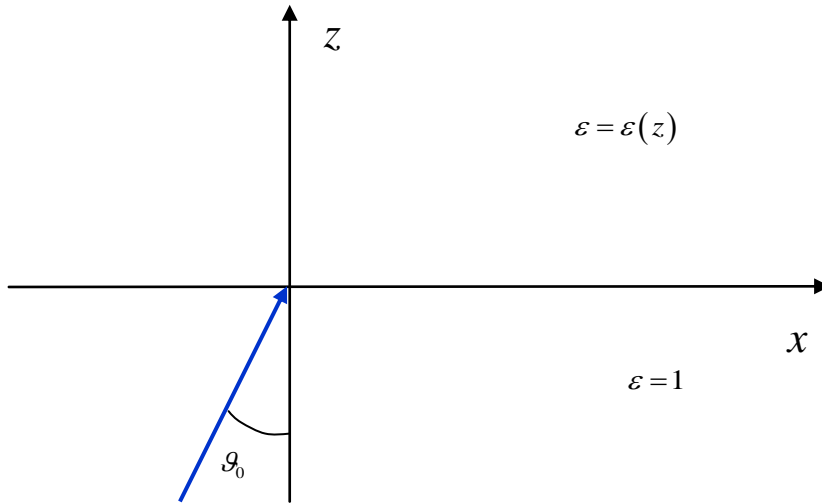


Рис. 1.6

Выражение для электрического поля падающей волны можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[ik_0(\cos \vartheta_0 z + \sin \vartheta_0 x)\right]. \quad (1.8.1)$$

Электрическое поле волны в плазменном слое в соответствии с (1.1.2) определяется уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E_x - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{E} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E_z - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{E} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Для ТЕ-волны $E_x = E_z = 0$, $E_y \neq 0$. Представим компоненту E_y в виде

$$E_y = E_1(z) \exp[ik_0 \sin \vartheta_0 x]. \quad (1.8.3)$$

Тогда из (1.8.2) следует

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + k_0^2 [\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0] E_1 = 0. \quad (1.8.4)$$

Уравнение (1.8.4) отличается от уравнения (1.5.1) лишь видом коэффициента. Следовательно, аналогично (1.5.14), решение уравнения (1.8.4) в приближении геометрической оптики можно представить в виде суперпозиции двух волн

$$E_y(x, z) = \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}} \exp \left[ik_0 \left(\sin \vartheta_0 x + \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2 \vartheta_0} dz' \right) \right] + \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}} \exp \left[ik_0 \left(\sin \vartheta_0 x - \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2 \vartheta_0} dz' \right) \right]. \quad (1.8.5)$$

В рамках приближения геометрической оптики можно перейти от волновой трактовки к лучевой. В однородной изотропной среде направление луча (направление потока энергии или групповой скорости) совпадает с направлением нормали к фазовому фронту. То же имеет место в области применимости геометрической оптики. Выражение для фазы волны, распространяющейся в положительном направлении оси z , можно представить в виде $\varphi = k_0 \psi$

$$\psi = \left(\sin \vartheta_0 x + \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2 \vartheta_0} dz' \right). \quad (1.8.6)$$

Введем вектор волновой нормали $\vec{p} = \nabla \psi$. Компоненты вектора имеют вид

$$p_x = \sin \vartheta_0, \quad p_z = \sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}. \quad (1.8.7)$$

Уравнение луча, касательная к которому в каждой точке совпадает с направлением вектора волновой нормали, в дифференциальной форме можно представить в виде

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dz}{p_z} \quad (1.8.8)$$

или

$$\frac{dx}{\sin \mathcal{G}_0} = \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \mathcal{G}_0}}. \quad (1.8.9)$$

Проинтегрировав, получаем

$$x = \sin \mathcal{G}_0 \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2 \mathcal{G}_0}}. \quad (1.8.10)$$

Из (1.8.8) следует, что угол \mathcal{G} между вектором волновой нормали и вертикалью в слое неоднородной плазмы определяется выражением

$$n(z) \sin \mathcal{G} = \sin \mathcal{G}_0. \quad (1.8.11)$$

В точке отражения вектор волновой нормали ориентирован горизонтально, следовательно, отражение волны происходит на высоте z_r , где

$$n(z_r) = \sin \mathcal{G}_0. \quad (1.8.12)$$

Для некоторых простых зависимостей $\varepsilon(z)$ интеграл в (1.8.10) вычисляется аналитически, и можно получить уравнение траектории в аналитическом виде. Для более сложных функций $\varepsilon(z)$ применяется численное интегрирование уравнения (1.8.8).

1.9. Наклонное падение ТМ-волны на слой плазмы

При анализе распространения ТМ-волны в неоднородной плазме удобно рассматривать уравнение для напряженности магнитного поля волны

$$\Delta \vec{H} + \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}, \text{rot} \vec{H} \right] + k_0^2 \varepsilon \vec{H} = 0, \quad (1.9.1)$$

которое в плоскостной среде имеет вид [1]

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon(z)} \frac{dH_y}{dz} + k_0^2 [\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0] H_y = 0. \quad (1.9.2)$$

Здесь предполагается, что свойства плазмы зависят от одной координаты z , а волновой вектор падающей на слой плазмы волны лежит в плоскости (x, z) и направлен под углом ϑ_0 к вертикали (к оси z). Отметим, что уравнение (1.9.2) имеет особенность при $\varepsilon(z) = 0$, т.е. в области, где частота волны совпадает с локальным значением плазменной частоты.

Компоненты электрического поля волны выражаются через H_y следующим образом:

$$E_x = -\frac{i}{k_0 \varepsilon(z)} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\sin \vartheta_0}{\varepsilon(z)} H_y. \quad (1.9.3)$$

Запишем решение уравнения (1.9.2) в приближении геометрической оптики

$$H_y = H_0(z) \exp(ik_0 \psi(z)), \quad (1.9.4)$$

где $\psi(z)$ – эйконал, $H_0(z)$ – амплитуда волны. После подстановки решения (1.9.4) в уравнение (1.9.2) получаем

$$\left[H_0'' - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} H_0' \right] + ik_0 \left[2H_0' \psi' + H_0 \psi'' - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} H_0 \psi' \right] + k_0^2 [\varepsilon - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_0 - \psi'^2] H_0 = 0. \quad (1.9.5)$$

В уравнении (1.9.5) слагаемые сгруппированы по порядку параметра k_0 . Приравняв нулю отдельно слагаемые при различных степенях волнового числа, получаем систему уравнений последовательных приближений. В нулевом приближении имеем уравнение эйконала

$$\psi'^2 = \varepsilon - \sin^2 \vartheta_0, \quad (1.9.6)$$

решение которого можно записать в виде

$$\psi_{1,2}(z) = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0} dz. \quad (1.9.7)$$

В (1.9.7) разные знаки соответствуют волнам, распространяющимся в противоположные стороны по отношению к оси z .

В следующем приближении получаем уравнение переноса

$$2H_0'\psi' + H_0\psi'' - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}H_0\psi' = 0, \quad (1.9.8)$$

определяющее изменение амплитуды волны. Разделяя переменные в уравнении (1.9.8), получаем

$$2\frac{d}{dz}\ln H_0 = \frac{d}{dz}[\ln \varepsilon - \ln \psi']. \quad (1.9.9)$$

Интегрируя (1.9.9), получаем формулу, определяющую зависимость амплитуды волны от координаты z

$$H_0(z) = C \frac{\sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}}. \quad (1.9.10)$$

Заметим, что зависимости амплитуд ТМ- и ТЕ- волн от координаты различны.

Полное выражение для напряженности магнитного поля волны в приближении геометрической оптики имеет вид

$$H_y(x, z) = C_1 \frac{\sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}} \exp \left[ik_0 \sin \vartheta_0 x + ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz \right] + \\ + C_2 \frac{\sqrt{\varepsilon(z)}}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0}} \exp \left[ik_0 \sin \vartheta_0 x - ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta_0} dz \right] \quad (1.9.11)$$

Здесь C_1 и C_2 – константы, определяющие амплитуды волн. Выражение (1.9.11) несправедливо в окрестности точки отражения, где $\varepsilon(z) = \sin^2 \vartheta_0$.

Рассмотрим особенность поля вблизи точки $\varepsilon = 0$. Вернемся к исходному уравнению (1.9.2). Будем считать зависимость $\varepsilon(z)$ линейной

$$\varepsilon(z) = -z/L = -\zeta. \quad (1.9.12)$$

Здесь L – характерный масштаб неоднородности среды. Введем безразмерный параметр $\rho = k_0 L$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{d^2 H_y}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{dH_y}{d\zeta} - \rho^2 [\zeta + \alpha^2] H_y = 0. \quad (1.9.13)$$

В плавно неоднородной плазме $\rho \gg 1$. Далее для сокращения записи обозначим $\alpha = \sin \mathcal{G}_0$.

Заменой $u(\zeta) = H_y(\zeta) / \sqrt{\zeta}$ уравнение (1.9.13) приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + N^2(\zeta)u = 0, \quad (1.9.14)$$

где

$$N^2(\zeta) = -\rho^2(\zeta + \alpha^2) - \frac{3}{4\zeta^2}.$$

Зависимость $N^2(\zeta)$ качественно имеет вид, показанный на рис. 1.7. Приближение геометрической оптики нарушается в окрестностях двух точек: точки отражения (поворота) $\zeta_r = -\alpha^2$ и резонанса $\zeta = 0$. В окрестности каждой из этих точек существует свое представление решения. Вблизи точки поворота уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} - \rho^2[\zeta + \alpha^2]u_1 = 0. \quad (1.9.15)$$

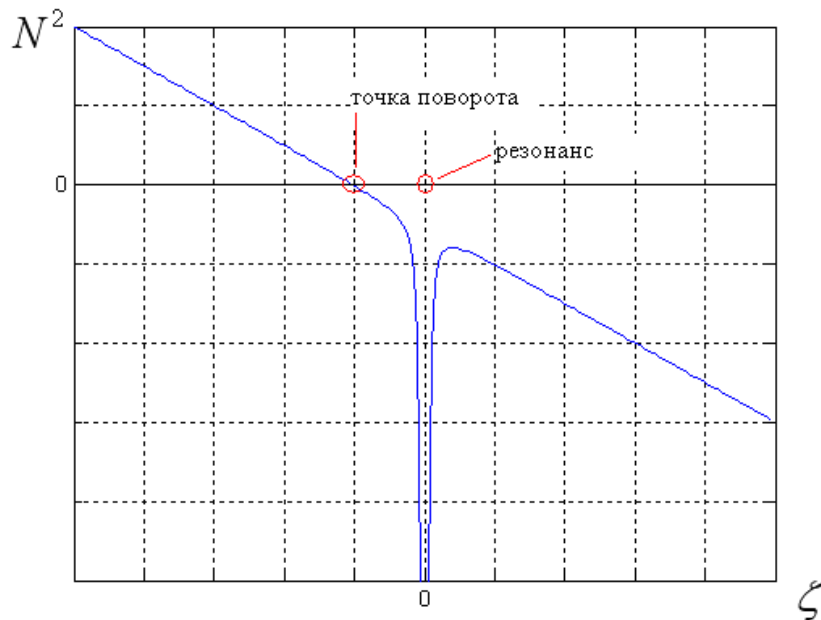


Рис. 1.7

Уравнение (1.9.15) сводится к уравнению Бесселя и его решение выражается через функции Эйри

$$u_1(\zeta) = Ai\left[\rho^{2/3}(\zeta + \alpha^2)\right] \quad (1.9.16)$$

или функции Макдональда

$$u_1(\zeta) = C_1(\zeta + \alpha^2)^{1/2} K_{1/3}\left[\frac{2}{3}\rho(\zeta + \alpha^2)^{3/2}\right]. \quad (1.9.17)$$

Здесь в соответствии с условием излучения на бесконечности выбрано решение, экспоненциально спадающее при $\zeta > 0$.

Асимптотика функции Макдональда при больших значениях аргумента имеет вид [16]

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x). \quad (1.9.18)$$

Рассмотрим область справа от точки отражения. Ограничимся окрестностью $|\zeta| \ll \alpha^2$. Будем считать, что $\rho\alpha^3 \gg 1$. Тогда решение уравнения (1.9.15) с учетом (1.9.18) может быть представлено в следующем виде:

$$u_1(\zeta) \approx C_1 \sqrt{\frac{3\pi}{4\rho\alpha}} \exp\left(-\frac{2}{3}\rho\alpha^3\right) \exp(-\rho\alpha\zeta). \quad (1.9.19)$$

Теперь исследуем решение в резонансной области ($\zeta \approx 0$). В этом случае уравнение (1.9.14) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 u_2}{d\zeta^2} - \left[\rho^2 \alpha^2 + \frac{3}{4\zeta^2} \right] u_2 = 0. \quad (1.9.20)$$

Решение уравнения (1.9.20) имеет вид

$$u_2(\zeta) = C_2 \zeta^{1/2} K_1(\rho\alpha\zeta). \quad (1.9.21)$$

Асимптотика этого решения при $\rho\alpha\zeta \gg 1$ может быть представлена в виде

$$u_2(\zeta) \approx C_2 \sqrt{\frac{\pi}{2\rho\alpha}} \exp(-\rho\alpha\zeta). \quad (1.9.22)$$

Каждое из полученных решений (1.9.19) и (1.9.22) справедливо в окрестности «своей» особой точки ($\zeta \approx -\alpha^2$) или ($\zeta = 0$). В интервале $-\alpha^2 < \zeta < 0$ асимптотики этих решений должны совпадать. Из этого условия получаем связь между константами C_1 и C_2

$$C_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2}{3}\rho\alpha^3\right) C_1. \quad (1.9.23)$$

Теперь с учетом (1.9.23) запишем решение в окрестности точки отражения

$$u_2(\zeta) = C_1 \sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2}{3}\rho\alpha^3\right) \zeta^{1/2} K_1(\rho\alpha\zeta). \quad (1.9.24)$$

Используем известное соотношение, связывающее функции Макдональда и Ханкеля

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (1.9.25)$$

При малых значениях ζ можно воспользоваться разложением функции Ханкеля в ряд

$$H_\nu^{(1)}(ix) \approx -\frac{2}{\pi x} - \frac{x}{\pi} \ln x. \quad (1.9.26)$$

С учетом соотношения $H_y = \zeta^{1/2} u$ получаем, что при малых ζ

$$H_y \approx C_1 \sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2}{3}\rho\alpha^3\right) = \text{const} \quad (1.9.27)$$

Таким образом, величина напряженности магнитного поля волны в резонансной области имеет конечное значение, а величина напряженности электрического поля волны, как это следует из (1.9.3), стремится к бесконечности

$$|E_z| = \left| -\frac{\sin \vartheta_0}{\varepsilon(z)} H_y \right| = \left| \frac{\alpha}{\zeta} H_y \right|. \quad (1.9.28)$$

Отметим, что при переходе к нормальному падению волны на слой плазмы $\alpha \rightarrow 0$, и особенность поля в окрестности плазменного резонанса исчезает. Другая компонента вектора напряженности электрического поля имеет логарифмическую особенность

$$|E_x| \approx |\ln \zeta|. \quad (1.9.29)$$

Таким образом, при отсутствии поглощения при наклонном падении ТМ-волны получается бесконечно большое значение напряженности электрического поля вблизи плазменного резонанса (в точке $\zeta = 0$).

При учете соударений электронов комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы может быть представлена в виде

$$\varepsilon(z) = -z/L + i \frac{\nu}{\omega} = -\zeta + is. \quad (1.9.30)$$

В предположении, что эффективная частота соударений электронов ν слабо изменяется с координатой z , можно считать $s = \text{const}$. Тогда в области плазменного резонанса $|E_z| \propto 1/s$, т.е. напряженность электрического поля принимает максимальное значение.

При учете пространственной дисперсии происходит частичная трансформация электромагнитной волны в продольную плазменную волну, что приводит к ограничению амплитуды электрического поля в точке $\varepsilon = 0$.

При рассмотрении особенности поля в области плазменного резонанса необходимо также учитывать нелинейные эффекты, так как в сильном поле на плазму действуют силы, которые могут изменять распределение концентрации заряженных частиц.

1.10. Распространение волн в трехмерно-неоднородной изотропной плазме

Предположим, что свойства плазмы описываются комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(x, y, z)$. Уравнения Максвелла для монохроматических волн в трехмерно-неоднородной среде имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= ik_0 \vec{H}, \\ \text{rot} \vec{H} &= -ik_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}. \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

Решение системы уравнений (1.10.1) представим в виде разложения Дебая [3]

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{E}_m(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0 \psi(\vec{r})], \quad \vec{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{H}_m(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0 \psi(\vec{r})], \quad (1.10.2)$$

где амплитуды полей представлены в виде асимптотических рядов по обратным степеням волнового числа. Подставив (1.10.2) в (1.10.1), можно получить систему уравнений последовательных приближений. Приведем системы нулевого и первого приближения

$$\begin{aligned} \left[\vec{p}, \vec{E}_0 \right] - \vec{H}_0 &= 0, & \left[\vec{p}, \vec{E}_1 \right] - \vec{H}_1 &= -\text{rot} \vec{E}_0, \\ \left[\vec{p}, \vec{H}_0 \right] + \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_0 &= 0, & \left[\vec{p}, \vec{H}_1 \right] + \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_1 &= \text{rot} \vec{H}_0. \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

Здесь $\vec{p} = \nabla \psi$.

Рассмотрим систему уравнений нулевого приближения. Исключив \vec{H}_0 , получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно проекций вектора \vec{E}_0

$$a_{ij} E_{0j} = 0, \quad a_{ij} = (p^2 - \varepsilon) \delta_{ij} - p_i p_j \quad (1.10.4)$$

Условие существования нетривиального решения системы (1.10.4) имеет вид

$$\det(\hat{a}) = 0 \quad (1.10.5)$$

или

$$\Re(\vec{p}, \vec{r}) \equiv \frac{1}{2} [p^2 - n^2(\vec{r})] = 0, \quad (1.10.6)$$

где $n(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon(\vec{r})}$ – локальное значение показателя преломления электромагнитной волны.

Уравнение (1.10.6) – это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка типа Гамильтона-Якоби, которое можно переписать в виде

$$\Re(\vec{p}, \vec{r}) \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - n^2(\vec{r}) \right] = 0 \quad (1.10.7)$$

Это уравнение может быть решено методом характеристик [17]. Их уравнения записываются в виде

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\partial \Re}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \Re}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \vec{p} \frac{\partial \Re}{\partial \vec{p}}. \quad (1.10.8)$$

Или с учетом (1.10.6)

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = n^2. \quad (1.10.9)$$

Здесь τ – параметр, изменяющийся вдоль характеристик. Как будет показано ниже, характеристики представляют собой траектории распространения электромагнитной волны в неоднородной среде (лучи). Интегрируя последнее уравнение (1.10.9) вдоль траектории можно вычислить эйконал, а, следовательно, фазу волны.

$$\psi = \psi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} n^2 d\tau, \quad (1.10.10)$$

Удобно от формального параметра τ перейти к длине траектории σ

$$d\tau = \frac{d\sigma}{n}. \quad (1.10.11)$$

Тогда эйконал находится интегрированием показателя преломления вдоль луча

$$\psi = \psi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n d\sigma, \quad (1.10.12)$$

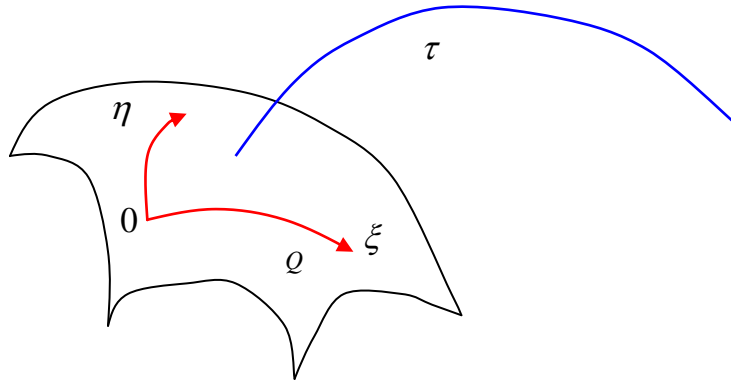


Рис.1.8

Выражение (1.10.12) показывает, что эйконал равен оптическому пути волны.

При решении задач распространения волн в неоднородной плазме удобно ввести систему лучевых координат ξ, η, τ . При этом начальные условия задаются на некоторой поверхности Q , уравнение которой можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}_0(\xi, \eta)$. Здеc ξ, η – криволинейные координаты на поверхности, где заданы начальные условия для амплитуды и фазы волны (рис. 1.8). В частности, начальные условия для уравнения эйконала можно записать в виде

$\psi_0 = \psi_0(\xi, \eta)$. На рис. 1.8 показана одна из характеристик, выходящая из некоторой точки с координатами (ξ_0, η_0) на поверхности Q .

Проанализируем поляризацию волны в нулевом приближении. Вернемся к системе уравнений нулевого приближения (1.10.3). Из нее следуют условия ортогональности

$$(\vec{p}\vec{H}_0) = 0, \quad (\vec{p}\vec{E}_0) = 0, \quad (\vec{E}_0\vec{H}_0) = 0, \quad (1.10.13)$$

т.е. векторы \vec{E}_0 и \vec{H}_0 лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{p} , касательному к лучу. Введем единичные векторы нормали \vec{v} и бинормали \vec{b} к лучу, определяемые выражениями

$$\vec{v} = \rho \frac{d\vec{l}}{d\sigma}, \quad \vec{l} = \frac{\vec{p}}{p}, \quad \vec{b} = [\vec{l}, \vec{v}]. \quad (1.10.14)$$

Здесь ρ – радиус кривизны, $d\sigma$ – элемент длины луча.

Тогда векторы \vec{E}_0 и \vec{H}_0 удобно представить в виде

$$\vec{E}_0 = \Phi_v \vec{v} + \Phi_b \vec{b}, \quad \vec{H}_0 = n(\Phi_v \vec{b} - \Phi_b \vec{v}). \quad (1.10.15)$$

Здесь Φ_v и Φ_b – проекции \vec{E}_0 на нормаль и бинормаль к лучу.

Рассмотрим систему уравнений первого приближения, которую легко привести к виду

$$a_{ij} E_{1j} = Z_i, \quad (1.10.16)$$

где

$$\vec{Z} = -rot\vec{H}_0 - [\vec{p}, rot\vec{E}_0]. \quad (1.10.17)$$

Детерминант системы (1.10.16) равен нулю, следовательно, система будет совместной при выполнении условий

$$(\vec{v}\vec{Z}) = 0, \quad (\vec{b}\vec{Z}) = 0. \quad (1.10.18)$$

Уравнения (1.10.18) можно переписать в виде

$$\vec{v} \cdot rot \left[\sqrt{\varepsilon} (\Phi_v \vec{b} - \Phi_b \vec{v}) \right] - \vec{b} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot rot (\Phi_v \vec{v} + \Phi_b \vec{b}) = 0; \quad (1.10.19)$$

$$\vec{b} \cdot \text{rot} \left[\sqrt{\varepsilon} (\Phi_v \vec{b} - \Phi_b \vec{v}) \right] + \vec{v} \sqrt{\varepsilon} \cdot \text{rot} (\Phi_v \vec{v} + \Phi_b \vec{b}) = 0. \quad (1.10.20)$$

Обозначим через κ кручение луча, определяемое выражением

$$\kappa = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \text{rot} \vec{v} + \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{b}). \quad (1.10.21)$$

Вспользуемся известным тождеством

$$\text{div} \vec{l} = \text{div} [\vec{v}, \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \text{rot} \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{b}). \quad (1.10.22)$$

В результате вместо (1.10.19) и (1.10.20) получаем

$$2(\vec{l} \nabla) \Phi_v + \text{div} \vec{l} \cdot \Phi_v + \frac{(\vec{l} \nabla) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \Phi_v = -2\kappa \Phi_b; \quad (1.10.23)$$

$$2(\vec{l} \nabla) \Phi_b + \text{div} \vec{l} \cdot \Phi_b + \frac{(\vec{l} \nabla) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \Phi_b = 2\kappa \Phi_v. \quad (1.10.24)$$

Выделяя вещественную часть из (1.10.23) – (1.10.24), получаем

$$(\vec{l} \nabla) A^2 + \text{div} \vec{l} \cdot A^2 + \frac{(\vec{l} \nabla) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} A^2 = 0, \quad (1.10.25)$$

где

$$A^2 = |\Phi_v|^2 + |\Phi_b|^2. \quad (1.10.26)$$

Из (1.10.25) следует

$$(\vec{p} \nabla) A^2 + \text{div} \vec{p} \cdot A^2 = 0 \quad (1.10.27)$$

или

$$\text{div} (A^2 \vec{p}) = 0. \quad (1.10.28)$$

Последнее равенство выражает закон сохранения потока энергии в лучевой трубке, т.к. стоящее в скобках выражение с точностью до константы совпадает с вектором Пойнтинга, вычисляемым в нулевом приближении геометрической оптики.

Приведем уравнение (1.10.28) к виду

$$2\frac{dA}{d\tau} + A\operatorname{div}\vec{p} = 0. \quad (1.10.29)$$

Воспользуемся теоремой Лиувилля

$$\operatorname{div}\vec{p} = \frac{d}{d\tau} \ln D(\tau), \quad (1.10.30)$$

где $D(\tau)$ – якобиан перехода от лучевых координат ξ, η, τ к декартовым x, y, z . В результате получаем

$$\frac{dA}{d\tau} + \frac{1}{2} A \frac{d}{d\tau} \ln D(\tau) = 0. \quad (1.10.31)$$

Решение уравнения (1.10.31) имеет вид

$$A(\tau) = A(\tau_0) \sqrt{\frac{D(\tau_0)}{D(\tau)}}, \quad (1.10.32)$$

или

$$A(\tau) = A(\tau_0) / J, \quad J = \sqrt{\frac{D(\tau)}{D(\tau_0)}}. \quad (1.10.33)$$

Здесь J – обобщенная расходимость лучевой трубки. Формула (1.10.33) позволяет рассчитать амплитуду волны в произвольной точке на луче.

Положение вектора \vec{E}_0 в плоскости (\vec{v}, \vec{b}) можно определить с помощью угла θ (см. рис. 1.9). На рисунке синим цветом изображен один из лучей, красным – вектор \vec{E}_0 в локальной декартовой системе координат с осями $\vec{l}, \vec{v}, \vec{b}$. Здесь \vec{l} – единичный вектор, касательный к лучу, \vec{v} и \vec{b} – векторы нормали и бинормали соответственно.

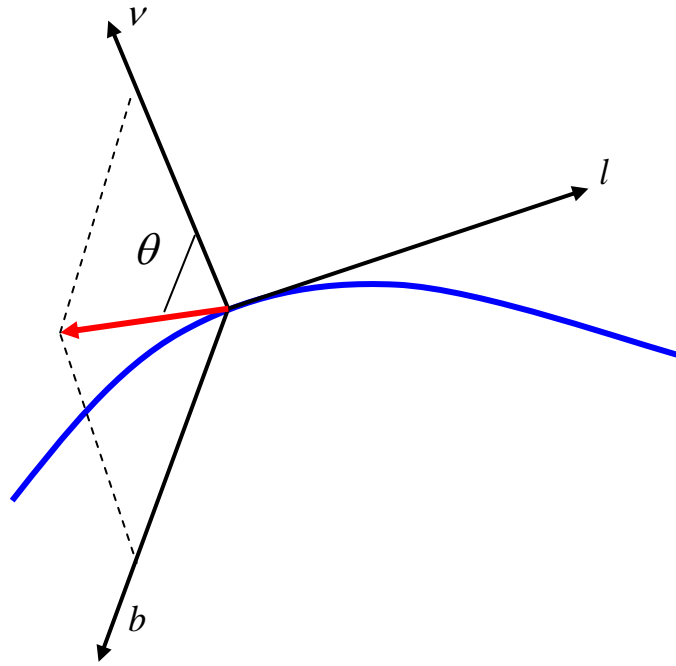


Рис. 1.9

Введем величину угол θ с помощью соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Phi_b}{\Phi_v}. \quad (1.10.34)$$

Тогда

$$\Phi_v = A \cos \theta, \quad \Phi_b = A \sin \theta. \quad (1.10.35)$$

Подставив выражения (1.10.35) в уравнения (1.10.23) – (1.10.24), получим

$$(\vec{l} \nabla) \theta - \kappa = 0$$

или

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \kappa. \quad (1.10.36)$$

Уравнение (1.10.36) определяет закон Рытова поворота вектора \vec{E}_0 относительно локальной системы координат в плоскости (\vec{v}, \vec{b}) . Вместе с тем на сравнительно малых расстояниях вектор электрического поля практически сохраняет свое положение относительно какой-либо неподвижной системы координат, поскольку одновременно с вращением вектора поля относительно локальной системы координат (в соответствии с (1.10.36)) происходит вращение самой локальной декартовой системы относительно \vec{l} с той же скоро-

стью, но в противоположном направлении в силу одной из известных формул Серре-Френе

$$\frac{d\vec{b}}{d\sigma} = \kappa\vec{v}. \quad (1.10.37)$$

Чтобы убедиться в этом продифференцируем единичный вектор электрического поля $\vec{e}_0 = \vec{E}_0 / A$ по σ с учетом (1.10.36), (1.10.37) и известного соотношения

$$\frac{d\vec{v}}{d\sigma} = -\frac{1}{\rho}\vec{l} - \kappa\vec{b}. \quad (1.10.38)$$

В результате получим

$$\frac{d\vec{e}}{d\sigma} = -\frac{1}{\rho}\vec{l}\cos\theta. \quad (1.10.39)$$

Согласно этому элементарное приращение $d\vec{e}$ направлено вдоль касательной к лучу и не имеет компонент по \vec{v} и \vec{b} . Таким образом, закон Рытова (1.10.36) отражает определенную инерционность вектора электрического поля, который не успевает следовать за кручением луча.

В случае распространения эллиптически поляризованной волны угол θ является комплексным $\theta = \theta' + i\theta''$. Из (1.10.36) следует

$$\theta'(\sigma) = \theta'(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \kappa d\sigma, \quad \theta''(\sigma) = \theta''(\sigma_0), \quad (1.10.40)$$

т.е. вдоль луча меняется относительно локальной системы координат лишь ориентация эллипса поляризации, но не его форма.

Уравнения последовательных приближений позволяют определить амплитуды следующих приближений. Рассмотрим уравнение первого приближения

$$[\vec{p}, \vec{H}_1] + \varepsilon\vec{E}_1 = -\text{rot}\vec{H}_0. \quad (1.10.41)$$

Запишем проекцию уравнения (1.10.41) на вектор \vec{l} , касательный к лучу

$$\varepsilon(\vec{l} \cdot \vec{E}_1) = -(\vec{l} \cdot \text{rot}\vec{H}_0). \quad (1.10.42)$$

Из (1.10.42) можно получить оценку для продольной составляющей вектора напряженности электрического поля

$$\left| \frac{E_{1z}}{ik_0} \right| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{H_0}{k_0 L}. \quad (1.10.43)$$

Из последнего выражения видно, что продольная компонента вектора напряженности электрического поля всюду мала за исключением области плазменного резонанса ($\varepsilon = 0$).

1.11. Методы решения уравнения эйконала

При решении некоторых задач оказывается удобным решать не уравнения лучей, а непосредственно уравнение эйконала. Строгие решения уравнения эйконала известны лишь для ограниченного круга задач. В этой связи большое значение имеют приближенные методы, такие как метод возмущений. Рассмотрим некоторые методы решения уравнения эйконала.

Метод разделения переменных в уравнении эйконала

Одним из методов решения является метод разделения переменных [3]. Этот метод предполагает отыскание эйконала в виде суммы слагаемых, каждое из которых зависит только от одной обобщенной координаты q_j

$$\psi = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \psi_3(q_3). \quad (1.11.1)$$

В качестве обобщенных координат выбираются декартовы, цилиндрические сферические или любые другие криволинейные координаты в зависимости от геометрии задачи. При этом уравнение эйконала сводится к трем независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\Re_j \left(q_j, \frac{\partial \psi}{\partial q_j}; \alpha_1, \alpha_2 \right) = 0, \quad (1.11.2)$$

где $j=1,2,3$ и α_1, α_2 – постоянные разделения. Решение уравнений (1.11.2) можно получить в квадратурах, если удастся разрешить относительно $\partial \psi / \partial q_j$.

Найденная таким путем функция ψ будет содержать две независимые постоянные α_1, α_2 , а с учетом того, что в уравнение эйконала функция ψ в явном виде не входит, к решению может быть добавлена еще одна константа

$$\psi = \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3. \quad (1.11.3)$$

Число независимых постоянных в решении (1.11.3) равно числу независимых переменных. Решение (1.11.3) есть полный интеграл уравнения эйконала.

В качестве примера рассмотрим метод разделения переменных в двумерном случае в декартовых координатах. При этом квадрат показателя преломления представим в виде

$$n^2(x, y) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y). \quad (1.11.4)$$

Тогда уравнение эйконала

$$(\nabla \psi)^2 - n^2 = 0 \quad (1.11.5)$$

можно искать в виде $\psi(x, y) = \psi_1(x) + \psi_2(y)$.

При этом вместо (1.11.5) имеем

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 - \varepsilon_1(x) = -\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)^2 + \varepsilon_2(y). \quad (1.11.6)$$

Равенство (1.11.6) должно выполняться тождественно для любых значений x и y , поэтому обе его части равны некоторой произвольной постоянной α . Тогда

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \pm \sqrt{\varepsilon_1(x) + \alpha}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \pm \sqrt{\varepsilon_2(y) - \alpha}. \quad (1.11.7)$$

Интегрируя (1.11.7), получаем полный интеграл уравнения эйконала

$$\psi(x, y) = \pm \int_{x^0}^x \sqrt{\varepsilon_1(x) + \alpha} dx \pm \int_{y^0}^y \sqrt{\varepsilon_2(y) - \alpha} dy + \alpha_0. \quad (1.11.8)$$

Постоянные α и α_0 определяются из начальных условий.

Метод возмущений в уравнении эйконала

Для некоторых зависимостей показателя преломления от координат удастся получить строгие решения уравнения эйконала. Предположим, что уравнение

$$(\nabla \psi)^2 - \varepsilon_0(\vec{r}) = 0 \quad (1.11.9)$$

имеет строгое решение $\psi_0(\vec{r})$. Будем считать, что свойства плазмы определяются относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{r})$, которую можно представить в виде

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0(\vec{r}) + \varepsilon_1(\vec{r}), \quad (1.11.10)$$

где $|\varepsilon_1(\vec{r})| \ll |\varepsilon_0(\vec{r})|$. В этом случае решение уравнения эйконала можно искать в виде ряда [3]

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) + \dots, \quad (1.11.11)$$

где $|\psi_1(\vec{r})| \ll |\psi_0(\vec{r})|$. Подставляя (11) в (10) и приравнивая слагаемые одного порядка малости, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (\nabla \psi_0)^2 &= \varepsilon_0(\vec{r}); \\ 2(\nabla \psi_0, \nabla \psi_1) &= \varepsilon_1(\vec{r}); \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.11.12)$$

Полагая решение невозмущенного уравнения известным и учитывая, что уравнение невозмущенного луча можно записать в виде

$$\frac{d\vec{r}_0}{d\tau} = \vec{p}_0, \quad (1.11.13)$$

где $\vec{p}_0 = \nabla \psi_0$, в первом приближении получаем

$$2(\vec{p}_0, \nabla \psi_1) = 2 \frac{d\psi_1}{d\tau} = \varepsilon_1(\vec{r}) \quad (1.11.14)$$

Интегрируя (1.11.14) вдоль невозмущенного луча, находим первую поправку к эйконалу

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon_1 d\tau = \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}} d\sigma. \quad (1.11.15)$$

Область применимости полученных выражений ограничена такими расстояниями, на которых боковое смещение лучей относительно невозмущенного положения мало по сравнению с характерным поперечным масштабом возмущения.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

2.1. Распространение волн в плоскостой магнитоактивной плазме

Рассмотрим нормальное падение плоской электромагнитной волны на слой магнитоактивной неоднородной плазмы. Свойства плазмы определяются тензором комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, компоненты которого в декартовой системе координат с осью z , ориентированной вдоль внешнего магнитного поля (рис. 2.1), имеют вид [1]

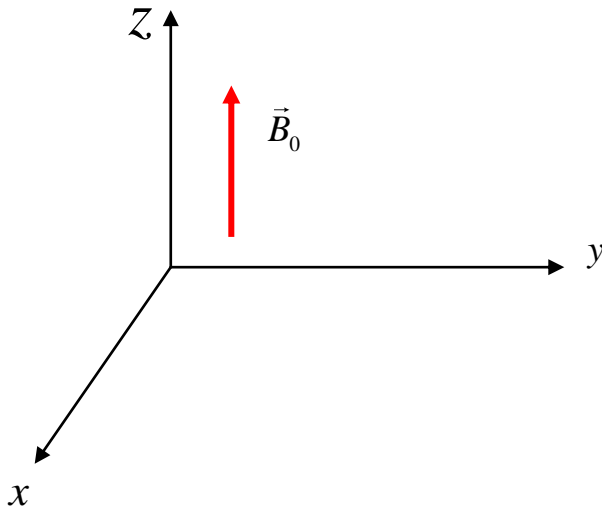


Рис. 2.1

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.1.1)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2};$$

$$g = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \cdot \frac{\omega_B}{\omega}; \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2};$$

Здесь ω_p – плазменная частота, ω_B – гирочастота электронов, ω – частота волны. Соударения электронов с другими частицами здесь не учитываются. Из уравнений Максвелла для монохроматических волн получаем уравнение для напряженности электрического поля волны

$$\Delta \vec{E} - \nabla \operatorname{div} \vec{E} + k_0^2 \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0. \quad (2.1.2)$$

В системе координат, показанной на рис. 2.2, где вектор \vec{B}_0 лежит в плоскости (y, z) , из (2.1.2) получаем систему двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка для компонент поля E_x и E_y

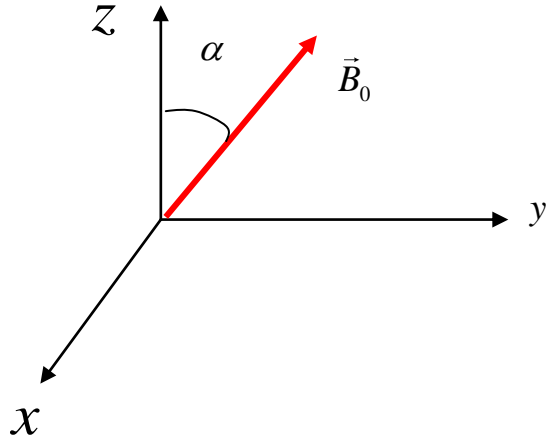


Рис. 2.2

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 (A E_x + i C E_y) &= 0; \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 (-i C E_x + B E_y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Коэффициенты A , B и C определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \frac{u - (1 - \nu)^2 - u \nu \cos^2 \alpha}{u - (1 - \nu) - u \nu \cos^2 \alpha}; \\ B &= \frac{u(1 - \nu) - (1 - \nu)^2}{u - (1 - \nu) - u \nu \cos^2 \alpha}; \quad C = \frac{\sqrt{u \nu} (1 - \nu) \cos \alpha}{u - (1 - \nu) - u \nu \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Здесь использованы принятые обозначения для безразмерных параметров плазмы

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad u = \frac{\omega_B^2}{\omega^2}. \quad (2.1.5)$$

Компонента поля E_z выражается через E_x и E_y следующим образом:

$$E_z = -\frac{i \sqrt{u \nu} \sin \alpha}{u - (1 - \nu) - u \nu \cos^2 \alpha} E_x + \frac{u \nu \sin \alpha \cos \alpha}{u - (1 - \nu) - u \nu \cos^2 \alpha} E_y. \quad (2.1.6)$$

В общем случае система двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (2.1.3) не имеет строгого решения. Поэтому проанализируем сначала некоторые частные случаи.

Продольное распространение ($\alpha = 0$)

При распространении волны вдоль внешнего магнитного поля коэффициенты системы уравнений (2.1.3) имеют простой вид

$$A = B = 1 - \frac{\nu}{1 - u}; \quad C = -\frac{\nu \sqrt{u}}{1 - u}. \quad (2.1.7)$$

В этом случае можно ввести новые переменные

$$F_{\pm} = E_x \pm iE_y \quad (2.1.8)$$

и перейти к уравнениям

$$\frac{d^2 F_{\pm}}{dz^2} + k_0^2 n_{\pm}^2(z) F_{\pm} = 0, \quad (2.1.9)$$

где

$$n_{\pm}^2(z) = 1 - \frac{\nu(z)}{1 \mp \sqrt{u(z)}}. \quad (2.1.10)$$

Заметим, что при продольном распространении система уравнений (2.1.3) расщепляется на две независимых системы второго порядка, каждая из которых описывает волну с круговой поляризацией. Таким образом, при продольном распространении в слоисто-неоднородной магнитоактивной плазме волны с правой и левой круговыми поляризациями распространяются независимо одна от другой. Характер поведения каждой из волн определяется уравнением второго порядка аналогично тому, как это имеет место в изотропной плазме.

Поперечное распространение ($\alpha = \pi/2$)

При распространении волны в поперечном по отношению к внешнему магнитному полю направлении исходная система уравнений (2.1.3) также расщепляется на два независимых уравнения

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 \left[1 - \frac{\nu(1-\nu)}{1-u-\nu} \right] E_x = 0; \quad (2.1.11)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 (1-\nu) E_y = 0. \quad (2.1.12)$$

Первое уравнение описывает необыкновенную волну, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости (x, z) . При этом компоненты поля E_x и E_z связаны соотношением

$$E_z = i \frac{\sqrt{u\nu}}{1-u-\nu} E_x. \quad (2.1.13)$$

Как видно из (2.1.13) необыкновенная волна имеет эллиптическую поляризацию.

Второе уравнение описывает волну с линейной поляризацией, называемую обыкновенной. Из (2.1.12) следует, что характер распространения обыкновенной волны не зависит от внешнего магнитного поля.

При поперечном распространении обыкновенная и необыкновенная волны распространяются независимо (отсутствует линейная трансформация одной волны в другую). Здесь также распространение каждой нормальной волны описывается уравнением второго порядка.

Распространение под произвольным углом к внешнему магнитному полю

Перейдем к рассмотрению распространения волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Будем искать решение исходной системы уравнений (2.1.3) в приближении геометрической оптики. Используем разложение Дебая [3], аналогичные (1.10.2)

$$\vec{E}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{E}^{(m)}(z)}{(ik_0)^m} \exp[-ik_0\psi(z)]. \quad (2.1.14)$$

Здесь $\psi(z)$ – эйконал волны, $\vec{E}^{(m)}(z)$ – амплитуда m -го приближения. Амплитуда волны в (2.1.14) представлена в виде асимптотического ряда по обратным степеням параметра k_0 .

Стандартным образом получаем систему уравнений последовательных приближений:

– система уравнений нулевого приближения:

$$\begin{aligned} [A - (\psi')^2] E_x^{(0)} + iCE_y^{(0)} &= 0; \\ -iCE_x^{(0)} + [B - (\psi')^2] E_y^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

– система уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} [A - (\psi')^2] E_x^{(1)} + iCE_y^{(1)} &= -[2\psi' E_x^{(0)'} + \psi'' E_x^{(0)}] \equiv Y^{(0)}; \\ -iCE_x^{(1)} + [B - (\psi')^2] E_y^{(1)} &= -[2\psi' E_y^{(0)'} + \psi'' E_y^{(0)}] \equiv X^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Компоненты $E_x^{(0)}$ и $E_y^{(0)}$ удовлетворяют однородной системе алгебраических уравнений. Для существования нетривиального решения этой системы необходимо равенство нулю ее детерминанта. Из этого условия получаем уравнение эйконала, решения которого можно представить в виде

$$\psi_{1,2}'^2(z) = \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + C^2} \equiv n_{1,2}^2(z). \quad (2.1.17)$$

Нетрудно убедиться в том, что $n_{1,2}^2(z)$ – локальные значения квадратов показателей преломления нормальных волн в однородной магнитоактивной плазме с параметрами, соответствующими координате z неоднородной среды.

Из уравнений нулевого приближения можно также определить поляризацию нормальных волн. Определим коэффициент поляризации следующим образом:

$$K_{1,2}(z) = E_y^{(0)}(z) / E_x^{(0)}(z). \quad (2.1.18)$$

Тогда из (2.1.13) получаем

$$K_{1,2}(z) = -\frac{A(z) - n_{1,2}^2(z)}{iC(z)} = \frac{iC(z)}{B(z) - n_{1,2}^2(z)}. \quad (2.1.19)$$

Заметим, что при распространении волн под произвольным углом к внешнему магнитному полю обе нормальные волны имеют эллиптические поляризации.

Перейдем к рассмотрению системы уравнений первого приближения (2.1.16). Приведем ее к виду

$$\left[\frac{A - \psi'^2}{-iC} - \frac{iC}{B - \psi'^2} \right] E_x^{(1)} = \frac{2\psi'}{-iC} E_x^{(0)'} + \frac{\psi''}{-iC} E_x^{(0)} + \frac{2\psi'}{B - \psi'^2} E_y^{(0)'} + \frac{\psi''}{B - \psi'^2} E_y^{(0)}. \quad (2.1.20)$$

Из (2.1.19) следует, что выражение в квадратных скобках в левой части (2.1.20) равно нулю. Приравняв нулю правую часть уравнения (2.1.20), получаем уравнение для определения амплитуды нулевого приближения

$$E_x^{(0)'} + \left[\frac{\psi''}{2\psi'} - \frac{2KK'}{2(1-K^2)} \right] E_x^{(0)} = 0 \quad (2.1.21)$$

или

$$\frac{d}{dz} \ln E_x^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln [\psi'(1-K^2)], \quad (2.1.22)$$

откуда

$$E_{x1,2}^{(0)} = \frac{D_{1,2}}{\sqrt{\psi'_{1,2}(1-K_{1,2}^2)}} = \frac{D_{1,2}}{\sqrt{n_{1,2}(1-K_{1,2}^2)}}. \quad (2.1.23)$$

В результате в нулевом приближении геометрической оптики получаем следующие формулы для компонент электрического поля нормальных волн

$$E_{x1,2} = \frac{D_{1,2}}{\sqrt{n_{1,2}(1-K_{1,2}^2)}} \exp\left(\mp ik_0 \int_{z_0}^z n_{1,2} dz\right); \quad (2.1.24)$$

$$E_{y1,2} = K_{1,2} E_{x1,2}.$$

Здесь $D_{1,2}$ - произвольные константы. Условие применимости метода геометрической оптики в данном случае имеет вид

$$\hat{\lambda}_0 \left| \frac{dn_{1,2}}{dz} \right| \ll 1. \quad (2.1.25)$$

Из приведенного неравенства следует, что приближение геометрической оптики не работает в окрестности точек поворота, где показатели преломления нормальных волн обращаются в нуль, и в областях резкого изменения показателей преломления нормальных волн. Более детальный анализ показывает, что помимо этого оно несправедливо в начале плазменного слоя, где показатели преломления нормальных волн близки ($n_1 \approx n_2 \approx 1$), а также внутри слоя в области, где $n_1 \approx n_2$. В последнем случае имеет место линейная трансформация нормальных волн.

2.2. Наклонное распространение волн в плоскостой магнитоактивной плазме

Представление о характере распространения радиоволн в плоскостой магнитоактивной плазме можно получить, анализируя решение уравнения эйконала

$$\det(p^2 \delta_{ij} - p_i p_j - \varepsilon_{ij}) = 0, \quad (2.2.1)$$

где p_i – проекции вектора волновой нормали на декартовы оси координат, ε_{ij} – компоненты тензора комплексной диэлектрической проницаемости. Пред-

положим, что свойства плазмы зависят лишь от координаты z , т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(z)$. Внешнее магнитное предполагаем направленным произвольно по отношению к выбранной системе координат. Проекции вектора напряженности поля обозначим H_{0x} , H_{0y} и H_{0z} . Будем считать, что вектор волновой нормали лежит в плоскости (x, z) . В этом случае $p_y = 0$ и в силу закона Снеллиуса $p_x = p_{x0}$, где p_{x0} – начальное значение проекции вектора волновой нормали. При выполнении этих условий из (2.2.1) получается кватрика Букера – алгебраическое уравнение четвертой степени для вертикальной компоненты вектора волновой нормали p_z [1,3,4]

$$ap_z^4 + bp_z^3 + cp_z^2 + dp_z + e = 0, \quad (2.2.2)$$

где коэффициенты уравнения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} a = (1-u) - (1-u_z) \cdot \nu; \\ b = up_x \nu \sqrt{u_y u_z}; \\ c = -2[(1-p_x^2 - \nu)(1-\nu) - (1-p_x^2)u] + \nu[p_x^2 u_y - (1-p_x^2)u_z - u]; \\ d = -2p_x(1-p_x^2)\nu \sqrt{u_y u_z}; \\ e = (1-p_x^2 - \nu)[(1-p_x^2 - \nu)(1-\nu) - (1-p_x^2)u] - (1-p_x^2)p_x^2 u_y \nu. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Здесь ν и u – безразмерные плазменные параметры, $u_{x,y,z} = (eH_{0x,y,z} / mc\omega)^2$.

В некоторых частных случаях вместо уравнения четвертой степени (2.2.2) получается биквадратное уравнение (квадрика Букера). Это имеет место при нормальном падении волны на слой плазмы ($p_x = 0$), при распространении волн на магнитном полюсе ($\alpha = 0$) и магнитном экваторе $\alpha = \pi/2$.

Четыре корня уравнения (2.2.2) соответствуют двум падающим (обыкновенной и необыкновенной) и двум отраженным волнам. Для каждой нормальной волны решение уравнения (2.2.1) может быть представлено в виде

$$\psi = \psi^0 + p_x(x - x^0) + \int_{z^0}^z p_z dz. \quad (2.2.4)$$

Отметим, что траектории лучей в этом случае не являются плоскими, в то время как вектор волновой нормали лежит в плоскости (x, z) .

На рис. 2.3-2.4 приведены примеры зависимостей вертикальной компоненты вектора волновой нормали p_z от параметра ν .

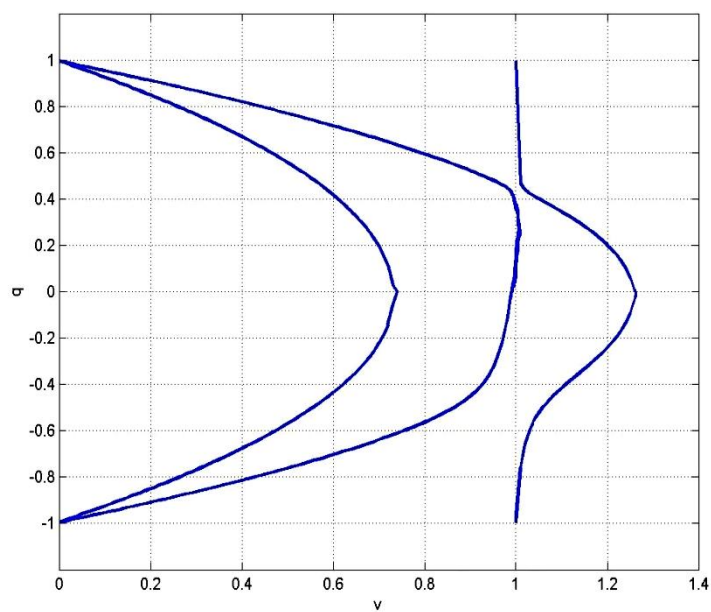


Рис. 2.3

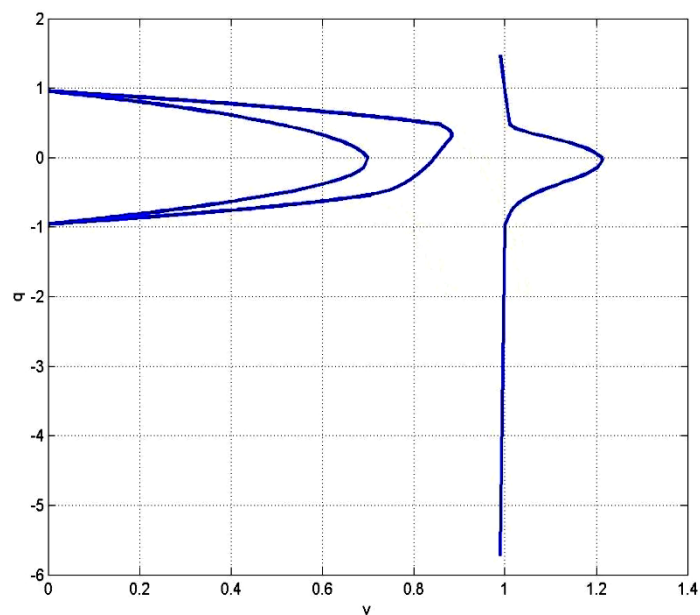


Рис. 2.4

В магнитоактивной плазме траектории волновой нормали и лучи не совпадают. Обращение в нуль p_z соответствует горизонтальному направлению вектора волновой нормали. Точка отражения луча, т.е. максимальная высота точки на луче, определяется условием [1]

$$\frac{dp_z}{d\nu} = \infty. \quad (2.2.5)$$

Качественный анализ распространения волн в слоисто-неоднородной магнитоактивной плазме можно провести также путем построения поверхностей волновых нормалей. С этой целью из некоторого центра проводится вектор волновой нормали \vec{p} под углом θ к оси z при фиксированных значениях параметров ν и u . Предполагается, что внешнее магнитное поле направлено под некоторым углом к оси z . Геометрическое место точек конца вектора \vec{p} образует поверхность волновой нормали, обладающую важным свойством: вектор групповой скорости волны в любой точке поверхности ортогонален касательной к поверхности плоскости. Сечение получающейся поверхности плоскостью падения волны определяет некоторую кривую, пример которой для обыкновенной волны показан на рис. 2.5.

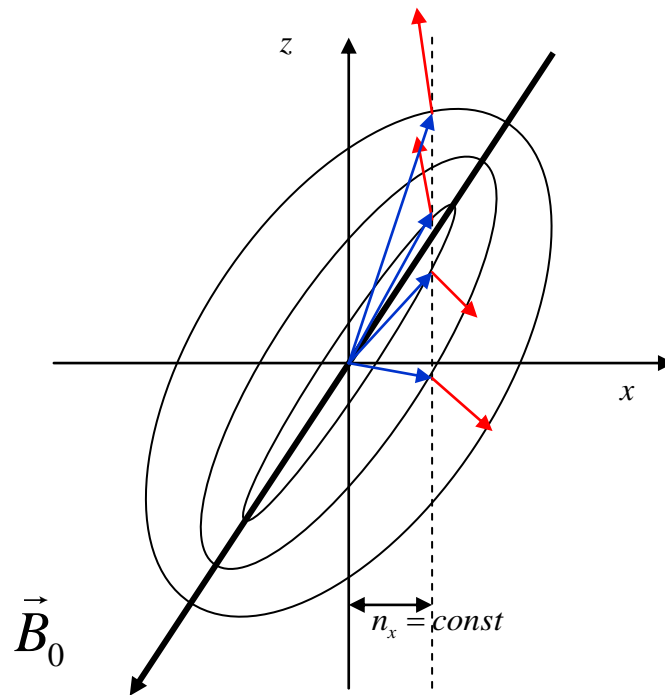


Рис. 2.5

Здесь приведены несколько сечений поверхностей волновой нормали для различных значений параметра ν в окрестности точки $\nu = 1$. Стрелками синего цвета показаны направления векторов волновой нормали, а стрелками красного цвета – векторов групповой скорости. Пунктирная линия определяет горизонтальную составляющую вектора волновой нормали, которая в силу закона Снеллиуса остается постоянной.

Из приведенного построения видно, что небольшое изменение направления вектора волновой нормали при квазипродольном распространении приводит к значительному изменению направления групповой скорости. В ре-

зультате, лучевые траектории обыкновенной волны в области плазменного резонанса имеют острия. На рис. 2.6 приведены траектории обыкновенной волны в плоскости геомагнитного меридиана, выходящие с земной поверхности. На рисунке пунктиром показано направление геомагнитного поля.

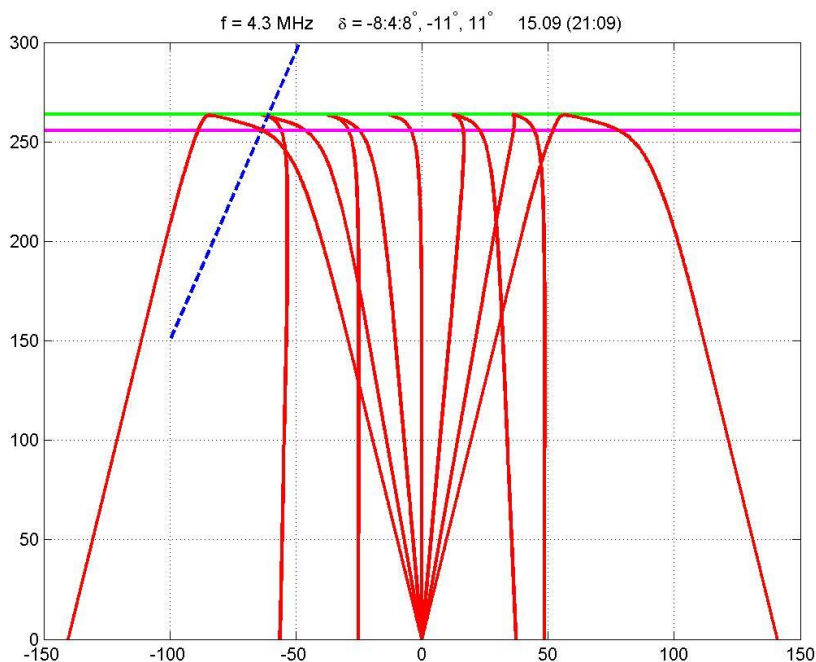


Рис. 2.6

Заметим, что при $\nu \rightarrow 0$ поверхность волновой нормали вырождается в «спицу» – отрезок прямой. При этом вектор групповой скорости оказывается перпендикулярным направлению внешнего магнитного поля.

2.3. Распространение в трехмерно-неоднородной магнитоактивной плазме

Проанализируем особенности распространения электромагнитных волн в трехмерно-неоднородной магнитоактивной плазме. Предположим, что свойства плазмы описываются тензором комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \varepsilon_{ij}(x, y, z)$, где \vec{r} – радиус-вектор в декартовой системе координат (x, y, z) . Уравнения Максвелла для монохроматических волн в неоднородной магнитоактивной плазме имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= ik_0 \vec{H}, \\ \text{rot} \vec{H} &= -ik_0 \hat{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Решение системы уравнений (2.3.1) представим в виде разложения Дебая [3]

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{E}^{(m)}(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0\psi(\vec{r})], \quad \vec{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{H}^{(m)}(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0\psi(\vec{r})], \quad (2.3.2)$$

где $\psi(\vec{r})$ – эйконал волны, $\vec{E}^{(m)}(\vec{r})$ и $\vec{H}^{(m)}(\vec{r})$ – амплитуды m -го приближения электрического и магнитного поля. Подставив (2.3.2) в (2.3.1), получаем систему уравнений последовательных приближений

$$\begin{aligned} [\vec{p}, \vec{E}^{(0)}] - \vec{H}^{(0)} &= 0, & [\vec{p}, \vec{E}^{(1)}] - \vec{H}^{(1)} &= -\text{rot}\vec{E}^{(0)}, \\ [\vec{p}, \vec{H}^{(0)}] + \hat{\varepsilon}(\vec{r})\vec{E}^{(0)} &= 0, & [\vec{p}, \vec{H}^{(1)}] + \hat{\varepsilon}(\vec{r})\vec{E}^{(1)} &= \text{rot}\vec{H}^{(0)}. \end{aligned} \quad \vec{p} = \nabla\psi. \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим систему уравнений нулевого приближения. Исключив $\vec{H}^{(0)}$, получаем однородную систему алгебраических уравнений для компонент вектора \vec{E}_0

$$a_{ij}E_j^{(0)} = 0, \quad a_{ij} = p^2\delta_{ij} - p_i p_j - \varepsilon_{ij} \quad (2.3.4)$$

Условие существования нетривиального решения системы (2.3.4) имеет вид

$$\det(\hat{a}) = 0 \quad \text{или} \quad \det(p^2\delta_{ij} - p_i p_j - \varepsilon_{ij}) = 0. \quad (2.3.5)$$

Представим вектор \vec{p} в виде $\vec{p} = p\vec{l}$, где \vec{l} – единичный вектор. Тогда из (2.3.5) получаем уравнение эйконала в виде

$$Ap^4 + 2Bp^2 + C = 0. \quad (2.3.6)$$

Коэффициенты A , B и C определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta; \\ 2B &= -\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \sin^2 \theta; \\ C &= \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Здесь $\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}, g$ – компоненты тензора комплексной проницаемости плазмы в декартовой системе координат с осью z , направленной вдоль внешнего магнитного поля, θ – угол между вектором \vec{p} и внешним магнитным полем.

Уравнение (2.3.6) – это локальное дисперсионное уравнение для нормальных волн в магнитоактивной плазме. Решение этого уравнения можно записать в виде

$$p_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \equiv n_{1,2}^2, \quad (2.3.7)$$

где $n_{1,2}$ – показатели преломления нормальных волн.

Принимая во внимание, что $\vec{p} = \nabla \psi$, можно видеть, с другой стороны, что уравнение (2.3.6) – это уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\psi(\vec{r})$. Это уравнение относится к классу уравнений Гамильтона – Якоби. Для решения уравнения можно использовать метод характеристик. При этом соответствующий гамильтониан можно представить в виде [3]

$$\mathfrak{R} \equiv A(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) = 0. \quad (2.3.8)$$

Уравнение (2.3.8) распадается на два независимых уравнения

$$\mathfrak{R}_{1,2} \equiv \frac{1}{2}(p^2 - n_{1,2}^2) = 0, \quad (2.3.9)$$

соответствующие двум нормальным волнам. В соответствии с этим необходимо искать решение системы уравнений Максвелла в виде суперпозиции двух нормальных волн (обыкновенной и необыкновенной)

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\vec{E}_1^{(m)}}{(ik_0)^m} \exp(ik_0\psi_1) + \frac{\vec{E}_2^{(m)}}{(ik_0)^m} \exp(ik_0\psi_2) \right\}. \quad (2.3.10)$$

Определим критерий независимости нормальных волн. Характерными масштабами рассматриваемой задачи являются длина волны в среде $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0/n$, пространственный масштаб биений нормальных волн, определяемый разностью показателей преломления нормальных волн $l_b = 1/k_0|\Delta n|$ и характерный масштаб неоднородности среды L . Нормальные волны можно считать независимыми, если масштаб биений мал по сравнению с характерным масштабом неоднородности среды. В противном случае изменения амплитуды волны, связанные с биениями и с неоднородностью среды неразличимы, поэтому нормальные волны нельзя считать независимыми.

Таким образом, критерием независимости нормальных волн является условие

$$l_b \ll L \quad \text{или} \quad |\Delta n| \gg 1/k_0L. \quad (2.3.11)$$

Неравенство (2.3.11) нарушается в области пересечения или квазипересечения дисперсионных кривых, где показатели нормальных волн совпадают или принимают близкие значения.

Далее будем предполагать, что условие (2.3.11) выполняется. При этом можно рассматривать распространение каждой нормальной волн независимо.

Представим уравнение эйконала для одной из волн в виде

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{1}{2}(p^2 - n^2) = 0. \quad (2.3.12)$$

Уравнения характеристик (1.10.8) в этом случае имеют вид [3]

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \vec{p}} \equiv \vec{s}(\vec{p}, \vec{r}), \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \vec{r}}, \quad (2.3.13)$$

где τ – параметр, изменяющийся вдоль характеристики. Введем элемент длины характеристики

$$d\sigma = \sqrt{|d\vec{r}|^2} = \left| \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vec{p}} \right| d\tau = |\vec{s}| d\tau. \quad (2.3.14)$$

Здесь вектор \vec{s} определяется выражением

$$\vec{s} = \vec{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \vec{p}} = \vec{p} - n \frac{\partial n}{\partial \vec{p}} = \vec{p} + \vec{q}. \quad (2.3.15)$$

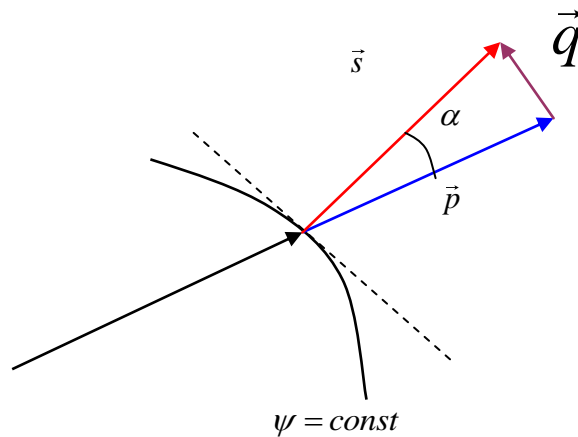


Рис. 2.7

На рис. 2.7 показано сечение фазового фронта ($\psi = \text{const}$) плоскостью и взаимное расположение векторов \vec{p} , \vec{q} и \vec{s} . Нетрудно показать, что $(\vec{p}\vec{q}) = 0$,

т.е. векторы \vec{p} и \vec{q} ортогональны. При этом $s = \sqrt{p^2 + q^2}$. На рисунке показан также угол α между вектором волновой нормали \vec{p} и вектором \vec{s} . Косинус этого угла вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (q/n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{p}}\right)^2}}. \quad (2.3.16)$$

Уравнение эйконала (2.3.12) можно представить в ином виде

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{1}{2} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \left(\vec{r}, \omega, \frac{\vec{k}}{k} \right) \right] = 0. \quad (2.3.17)$$

Здесь $\vec{k} = k_0 \vec{p}$. Используя (2.3.17), вычислим групповую скорость $\vec{v}_g = \partial \omega / \partial \vec{k}$

$$\vec{v}_g = - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vec{k}} / \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} = \frac{\vec{k} - \frac{\omega^2}{2c} \frac{\partial n^2}{\partial \vec{k}}}{\frac{1}{2c^2} \frac{\partial (\omega^2 n^2)}{\partial \omega}} = \frac{c \vec{s}}{n \frac{\partial (\omega n)}{\partial \omega}}. \quad (2.3.18)$$

Из (2.3.18) видно, что вектор \vec{s} сонаправлен с вектором групповой скорости и вектором Пойнтинга.

Начальные условия обычно задаются на некоторой поверхности, уравнение которой в общем случае можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0(\xi, \eta), \quad (2.3.19)$$

где ξ и η – криволинейные координаты на поверхности (2.3.19). Решение уравнение эйконала можно представить в виде

$$\psi = \psi_0(\xi, \eta) + \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{p} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vec{p}} d\tau, \quad (2.3.20)$$

где $\psi_0(\xi, \eta)$ – начальное значение эйконала на поверхности (2.3.19).

Учитывая, что

$$\left(\vec{p} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vec{p}} \right) = (\vec{p} \vec{s}) = p^2 = n^2, \quad (2.3.21)$$

перепишем (2.3.20) в виде

$$\psi = \psi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} n^2 d\tau \quad (2.3.22)$$

и преобразуем выражение под знаком интеграла следующим образом:

$$n^2 d\tau = n |\vec{s}| d\tau \left(\frac{n}{|\vec{s}|} \right) = n |\vec{s}| d\tau \cos \alpha = n \cos \alpha d\sigma. \quad (2.3.23)$$

В результате получаем

$$\psi = \psi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n_r d\sigma, \quad (2.3.24)$$

Величина $n_r = n \cos \alpha$ носит название лучевого показателя преломления. Таким образом, в неоднородной магнитоактивной плазме эйконал можно определить интегрированием лучевого показателя преломления вдоль луча.

Определим поляризацию нормальных волн в нулевом приближении геометрической оптики. Для этого рассмотрим систему уравнений нулевого приближения (2.3.3). Нетрудно показать, что $(\vec{p}\vec{H}_0) = 0$, $(\vec{p}\vec{E}_0) \neq 0$, $(\vec{E}_0\vec{H}_0) = 0$. Введем вектор поляризации \vec{f} с помощью соотношения

$$\vec{E}^{(0)} = \Phi \vec{f}, \quad (2.3.25)$$

где Φ – амплитудный множитель. Тогда

$$\vec{H}_0 = [\vec{p}, \vec{E}_0] = \Phi [\vec{p}, \vec{f}] = \Phi \vec{h}. \quad (2.3.26)$$

Из системы уравнений нулевого приближения следует, что компоненты вектора поляризации удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 &= -a_{13}f_3, \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 &= -a_{23}f_3. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Из (2.3.27) получаем

$$\frac{f_1}{A_{31}} = \frac{f_2}{A_{32}} = \frac{f_3}{A_{33}}, \quad (2.3.28)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы однородной системы уравнений нулевого приближения. Вектор поляризации удобно норми-

ровать на единицу $f_\alpha^* f_\alpha = 1$. Условие нормировки вместе с системой уравнений (2.3.27) позволяет однозначно, как в однородной среде, определить вектор поляризации.

Перейдем к анализу системы уравнений первого приближения. Эту систему можно свести к уравнению

$$\left[\vec{p} \left[\vec{p} \vec{E}^{(1)} \right] \right] + \varepsilon \vec{E}^{(1)} = -\text{rot} \vec{H}^{(0)} - \left[\vec{p} \text{rot} \vec{E}^{(0)} \right]. \quad (2.3.29)$$

Заметим, что (2.3.29) – это система неоднородных алгебраических уравнений, детерминант которой равен нулю. Условие совместности такой системы можно записать в виде

$$\vec{E}^{(0)*} \text{rot} \vec{H}^{(0)} - \vec{H}^{(0)*} \text{rot} \vec{E}^{(0)} = 0. \quad (2.3.30)$$

Прибавив к выражению (2.3.30) комплексно-сопряженное, получаем закон сохранения потока энергии в лучевой трубке

$$\text{div} \vec{S}^{(0)} = 0, \quad (2.3.31)$$

где $\vec{S}^{(0)}$ – вектор Пойнтинга в нулевом приближении

$$\vec{S}^{(0)} = \frac{c}{16\pi} \left(\left[\vec{E}^{(0)} \vec{H}^{(0)*} \right] + \left[\vec{E}^{(0)*} \vec{H}^{(0)} \right] \right). \quad (2.3.32)$$

Уравнение (2.3.31) с учетом (2.3.25) – (2.3.26) можно переписать в виде

$$\text{div} \left(\frac{c}{16\pi} |\Phi|^2 \vec{\xi} \right) = 0. \quad (2.3.33)$$

Здесь

$$\vec{\xi} = 2\vec{p} - \vec{f} \left(\vec{p} \vec{f}^* \right) - \vec{f}^* \left(\vec{p} \vec{f} \right). \quad (2.3.34)$$

Нетрудно убедиться, что $\vec{\xi} = \zeta \vec{s}$,

где

$$\zeta = 2 \frac{\partial (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta})}{\partial \omega} f_\alpha f_\beta^* \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 n^2 \right)^{-1}. \quad (2.3.35)$$

Амплитудный множитель удобно представить в виде $\Phi = |\Phi| \exp(i\delta)$. Из (2.3.33), используя теорему Лиувилля, получаем выражение для модуля амплитудного множителя

$$|\Phi(\tau)| = |\Phi(\tau_0)| \sqrt{\frac{\zeta(\tau_0)D(\tau_0)}{\zeta(\tau)D(\tau)}}. \quad (2.3.36)$$

Выделяя мнимую часть из условия совместности (2.3.30) получаем уравнение для нахождения аргумента амплитудного множителя

$$(\vec{\xi} \nabla) \delta = M, \quad (2.3.37)$$

где

$$M = \text{Im} \left(\vec{f}^* \text{rot} [\vec{p}\vec{f}] + [\vec{p}\vec{f}] \text{rot} \vec{f}^* \right). \quad (2.3.38)$$

Таким образом, в приближении геометрической оптики решение имеет вид

$$\vec{E} = \Phi_1 \vec{f}_1 \exp(ik_0\psi_1) + \Phi_2 \vec{f}_2 \exp(ik_0\psi_2). \quad (2.3.39)$$

В результате приходим к следующей схеме вычисления полей в неоднородной магнитоактивной плазме:

1. определение лучей для каждой из нормальных волн из уравнений (2.3.13);
2. вычисление эйконала по формулам (2.3.22) или (2.3.24);
3. нахождения вектора поляризации из уравнений (2.3.28);
4. определение модулей и аргументов амплитуд (2.3.36) и (2.3.37).

2.4. Численные методы решения уравнений геометрической оптики

В произвольной двумерно- или трехмерно-неоднородной среде уравнения лучей не могут быть решены аналитически. В этих случаях используются численные методы решения лучевых уравнений с учетом соответствующих начальных условий. В результате интегрирования можно построить семейство лучей, дающее качественное представление о характере распространения волн в неоднородной среде.

Запишем лучевые уравнения в произвольной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3

$$\frac{dq_i}{d\tau} = p_i - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i}, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i}. \quad (2.5.2)$$

Здесь $p_i = \partial\psi / \partial q_i$ – обобщенные импульсы, $n^2(\vec{q}, \vec{p})$ – квадрат показателя преломления нормальной волны. В векторной форме эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \vec{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{p}}, \quad (2.5.3)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{q}}. \quad (2.5.4)$$

Уравнения (2.5.1)-(2.5.2) или (2.5.3)-(2.5.4) обычно интегрируются совместно с уравнением

$$\frac{d\psi}{d\tau} = n^2(\vec{q}, \vec{p}), \quad (2.5.5)$$

позволяющим вычислить эйконал ψ в произвольной точке на луче.

Сложнее обстоит дело с вычислением амплитуды поля на луче, так как для этого необходимо определить расходимость лучевой трубки. Приближенный метод вычисления расходимости связан с определением удельного сечения лучевой трубки $da/d\xi d\eta$. Здесь ξ и η – криволинейные координаты на поверхности, на которой заданы начальные условия, da – сечение лучевой трубки. Для вычисления расходимости можно воспользоваться приближенной формулой

$$\left| \frac{\Delta a}{\Delta \xi \Delta \eta} \right| = \left| \left[\begin{array}{cc} \Delta \vec{r}_1 & \Delta \vec{r}_2 \\ \Delta \xi & \Delta \eta \end{array} \right] \right| = \left| \left(\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta \xi} \right)^2 \left(\frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta \eta} \right)^2 - \left(\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta \xi} \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta \eta} \right)^2 \right|^{1/2}, \quad (2.5.6)$$

где Δa – площадь, вырезаемая на фронте волны $\psi = \text{const}$ трубкой лучей с координатами точек выхода (ξ, η) , $(\xi + \Delta \xi, \eta)$, $(\xi, \eta + \Delta \eta)$, $(\xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta)$, а $\Delta \vec{r}_1$ и $\Delta \vec{r}_2$ – приращения лучей, вычисленные соответственно при $\eta = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ или при $\xi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$. Следует заметить, что точность численного дифференцирования невелика.

Возможен прямой численный метод расчета величины якобиана $D(\tau)$ и амплитуды поля, основанный на численном интегрировании присоединенной системы уравнений для производных $\partial \vec{r} / \partial \xi$ и $\partial \vec{r} / \partial \eta$. Эта система получается из (2.5.3) – (2.5.4) дифференцированием по параметрам ξ и η .

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{p} \partial \xi}, \quad (2.5.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n^2(\vec{q}, \vec{p})}{\partial \vec{q} \partial \xi}. \quad (2.5.8)$$

При этом задача вычисления полей сводится к интегрированию системы однотипных обыкновенных дифференциальных уравнений, в результате чего вычисляются лучевые траектории, амплитуды, фазы и поляризации нормальных волн.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

3.1. Квазиизотропное приближение геометрической оптики

В слабо анизотропной среде условие применимости геометрической оптики (2.3.11) нарушается. В этом случае компоненты тензора комплексной диэлектрической проницаемости можно представить в виде [3, 17]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(1)}. \quad (3.1.1)$$

где $|\varepsilon_{ij}^{(1)}| \ll \varepsilon^{(0)}$.

Предположим, что

$$\left| \frac{\varepsilon_{ij}^{(1)}}{\varepsilon^{(0)}} \right| \approx \mu = \frac{1}{k_0 L} \quad (3.1.2)$$

Уравнения Максвелла представим в виде

$$\text{rot} \vec{E} - ik_0 \vec{H} = 0, \quad \text{rot} \vec{H} + ik_0 \varepsilon^{(0)} \vec{E} = -ik_0 \hat{\varepsilon}^{(1)} \vec{E}. \quad (3.1.3)$$

Решение уравнений (3.1.3) будем искать в виде разложения Дебая

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{E}^{(m)}(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0 \psi(\vec{r})], \quad \vec{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{H}^{(m)}(\vec{r})}{(ik_0)^m} \exp[ik_0 \psi(\vec{r})]. \quad (3.1.4)$$

Системы уравнений нулевого и первого приближений имеют вид

$$\begin{aligned} [\vec{p}, \vec{E}^{(0)}] - \vec{H}^{(0)} &= 0, & [\vec{p}, \vec{E}^{(1)}] - \vec{H}^{(1)} &= -\text{rot} \vec{E}^{(0)}, \\ [\vec{p}, \vec{H}^{(0)}] + \varepsilon^{(0)}(\vec{r}) \vec{E}^{(0)} &= 0, & [\vec{p}, \vec{H}^{(1)}] + \varepsilon^{(0)}(\vec{r}) \vec{E}^{(1)} &= -\text{rot} \vec{H}^{(0)} - ik_0 \hat{\varepsilon}^{(1)} \vec{E}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Поляризация волны в нулевом приближении остается поперечной

$$\vec{E}^{(0)} = \Phi_v \vec{v} + \Phi_b \vec{b}, \quad (3.1.6)$$

однако амплитудные коэффициенты подчиняются более сложным уравнениям

$$(\vec{l} \nabla) \Phi_v + \frac{1}{2} \text{div} \vec{l} \cdot \Phi_v + \frac{(\vec{l} \nabla) \sqrt{\varepsilon_0}}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \Phi_v + \kappa \Phi_b - ik_0 (\varepsilon_{lv} \Phi_v + \varepsilon_{lvb} \Phi_b) = 0; \quad (3.1.7a)$$

$$(\vec{l} \nabla) \Phi_b + \frac{1}{2} \text{div} \vec{l} \cdot \Phi_b + \frac{(\vec{l} \nabla) \sqrt{\varepsilon_0}}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \Phi_b - \kappa \Phi_v - ik_0 (\varepsilon_{lbv} \Phi_v + \varepsilon_{lbb} \Phi_b) = 0, \quad (3.1.7b)$$

где компоненты тензора $\hat{\varepsilon}^{(1)}$ записаны в локальной системе координат $(\vec{l}, \vec{v}, \vec{b})$.

Уравнения квазиизотропного приближения (3.1.7) можно записать в другом виде. Введем новые переменные

$$A^2 = |\Phi_v|^2 + |\Phi_b|^2, \quad \Phi_v = \Gamma_v A, \quad \Phi_b = \Gamma_b A. \quad (3.1.8)$$

Эти величины удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d\Gamma_v}{d\sigma} = \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}}(\varepsilon_{1vv}\Gamma_v + \varepsilon_{1vb}\Gamma_b) - \kappa\Gamma_b, \quad (3.1.9a)$$

$$\frac{d\Gamma_b}{d\sigma} = \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}}(\varepsilon_{1bv}\Gamma_v + \varepsilon_{1bb}\Gamma_b) + \kappa\Gamma_v. \quad (3.1.9b)$$

Можно показать, что в отсутствие поглощения

$$|\Gamma_v|^2 + |\Gamma_b|^2 = 1. \quad (3.1.10)$$

Для угла $\theta = \arctg\left(\frac{\Phi_b}{\Phi_v}\right)$ и величины $\ln \Gamma^2 = \ln(\Gamma_v^2 + \Gamma_b^2)$ получаются уравнения

$$\frac{d}{d\sigma} \ln \Gamma^2 = \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}} [(\varepsilon_{1vv} + \varepsilon_{1bb}) + (\varepsilon_{1vv} - \varepsilon_{1bb}) \cos 2\theta + (\varepsilon_{1vb} + \varepsilon_{1bv}) \sin 2\theta], \quad (3.1.11a)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \kappa + \frac{ik_0}{4\sqrt{\varepsilon_0}} [(\varepsilon_{1bv} - \varepsilon_{1vb}) + (\varepsilon_{1bv} + \varepsilon_{1vb}) \cos 2\theta - (\varepsilon_{1vv} \varepsilon_{1bb}) \sin 2\theta]. \quad (3.1.11b)$$

При $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ из (3.1.11) получаются поперечные волны в изотропной среде. При больших значениях недиагональных компонент тензора решение системы уравнений (3.1.11)

$$\vec{E} = (\Phi_v \vec{v} + \Phi_b \vec{b}) \exp(ik_0 \psi_0) = A(\Gamma_v \vec{v} + \Gamma_b \vec{b}) \exp(ik_0 \psi_0). \quad (3.1.12)$$

переходит в сумму невзаимодействующих нормальных волн

$$\vec{E} = \tilde{\Phi}_1 \vec{f}_1 \exp(ik_0 \psi_1) + \tilde{\Phi}_2 \vec{f}_2 \exp(ik_0 \psi_2), \quad (3.1.13)$$

амплитуды, векторы поляризации и эйконалы которых вычисляются не по точным формулам, а по приближенным, полученным с учетом только поправок первого порядка малости.

3.2. Метод фазовых интегралов

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в слое изотропной неоднородной плазмы, свойства которой характеризуются относительной диэлектрической проницаемостью ε . Введем декартову систему координат (x, y, z) и предположим, что свойства среды изменяются вдоль оси z , т.е.

$\varepsilon = \varepsilon(z)$. Напряженность электрического поля волны E , распространяющейся вдоль оси z , удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0. \quad (3.2.1)$$

Общее решение уравнения (3.2.1) в приближении геометрической оптики можно представить в виде

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) = \frac{A}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{ik_0 \int \sqrt{\varepsilon(z)} dz} + \frac{B}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{-ik_0 \int \sqrt{\varepsilon(z)} dz}, \quad (3.2.2)$$

где константы A и B при положительных значениях диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ определяют амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z . В области непрозрачности плазмы (при $\varepsilon(z) < 0$) одно из слагаемых в (3.2.2) экспоненциально растет, а другое – убывает.

Пусть зависимость $\varepsilon(z)$ имеет вид, показанный на рис. 3.1, т.е. в области положительных z плазма прозрачна, а при $z < 0$ – непрозрачна. Таким образом точка $z = 0$ – это точка поворота. Очевидно, что решение (3.2.2) имеет особенность в окрестности точки поворота, в то время как строгое решения уравнения (3.2.1) не должно иметь этой особенности. Одной из основных трудностей при использовании решения (3.2.2) является «сшивка» решений по разные стороны от точки поворота, т.е. при $z < 0$ и $z > 0$. Изящный способ решения указанной задачи был предложен Цваном в 1929 г. Этот метод применялся при анализе линейной трансформации нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме [13].

Если точка $z = 0$ – простой нуль функции $\varepsilon(z)$, то в окрестности точки поворота можно записать

$$\varepsilon(z) = \alpha z, \quad (3.2.3)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)_{z=0}.$$

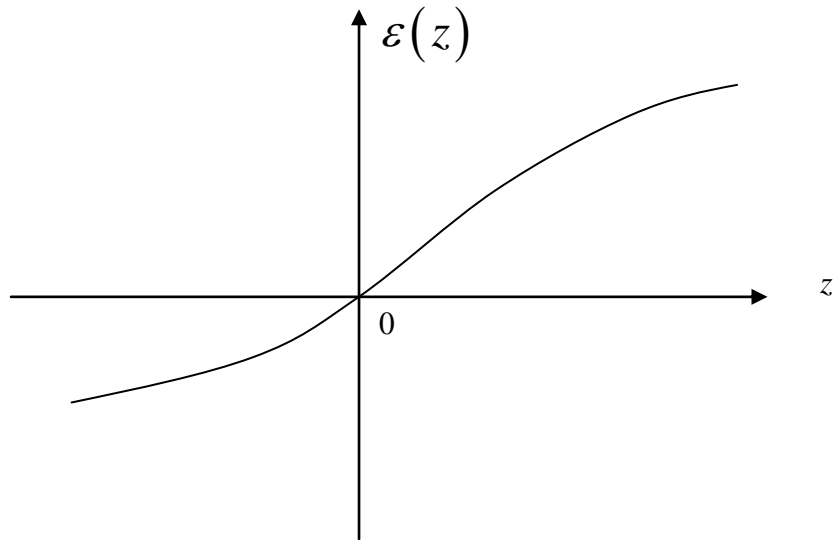


Рис. 3.1

При этом два линейно независимых решения (3.2.2) в окрестности точки поворота принимают вид

$$E_1 \propto \exp\left(\frac{2}{3}ik_0\sqrt{\alpha}z^{3/2}\right) \quad (3.2.4)$$

$$E_2 \propto \exp\left(-\frac{2}{3}ik_0\sqrt{\alpha}z^{3/2}\right) \quad (3.2.5)$$

Рассмотрим поведение решений (3.2.4) и (3.2.5) на комплексной плоскости переменной z . Запишем

$$z = r \exp(i\varphi), \quad r = |z|. \quad (3.2.6)$$

Тогда

$$E_1 \propto \exp\left(\frac{2}{3}ik_0\sqrt{\alpha}r^{3/2}e^{i\frac{3}{2}\varphi}\right), \quad E_2 \propto \exp\left(-\frac{2}{3}ik_0\sqrt{\alpha}r^{3/2}e^{i\frac{3}{2}\varphi}\right). \quad (3.2.7)$$

Заметим, что фаза решений (3.2.7) принимает вещественные значения на лучах

$$\varphi = 2m\frac{\pi}{3}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad (3.2.8)$$

показанных на рис. 2 сплошными линиями, и мнимые – при

$$\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{3}, \quad m = 0, 1, 2, \quad (3.2.9)$$

(пунктирные линии). Разрез выбран по линии 1. Линии 1 – 4 называют линиями уровня [12].

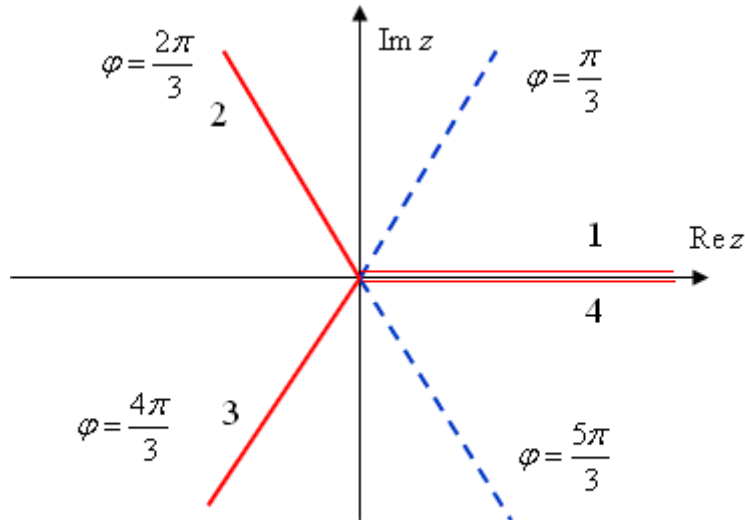


Рис. 3.2

Линии, определяемые выражением (3.2.9) называются линиями Стокса. На этих линиях одно из решений экспоненциально растет, а другое убывает. В процессе исследования асимптотических решений дифференциальных уравнений Стокс обнаружил, что при переходе через такие линии в комплексной плоскости коэффициенты при решениях типа (3.2.7) меняются скачкообразно. В этом состоит явление Стокса. Причина, в силу которой асимптотические формулы для непрерывного решения могут быть разрывными, заключается в том, что асимптотическая формула всегда содержит некоторую погрешность. Эта погрешность в некоторой области может стать большей, чем главный член асимптотики. Асимптотические ряды, как правило, расходятся, но при больших значениях $|z|$ их можно просуммировать с большой степенью точности, если учесть только первые члены ряда, такие, что каждый последующий член меньше предыдущего.

Рассмотрим изменение решений (3.2.4) – (3.2.5) при обходе точки поворота по окружности достаточно большого радиуса. Пусть на линии 1 задано решение (3.2.2) с коэффициентами A_1 и B_1 . Между лучами 1 и 2 решение E_2 является экспоненциально растущим, поэтому на линии 2

$$B_2 = B_1. \quad (3.2.10)$$

Коэффициент при E_1 неизвестен, поэтому в соответствии с правилом Стокса его можно представить в виде

$$A_2 = A_1 + \alpha B_1. \quad (3.2.11)$$

Таким образом, коэффициент при экспоненциально малом решении при переходе через линию Стокса увеличивается на величину, пропорциональную коэффициенту при экспоненциально растущем решении. Здесь α – неизвестный пока коэффициент Стокса. В секторе (2,3) экспоненциально растущим является решение E_1 , следовательно,

$$A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2 + \beta A_2. \quad (3.2.12)$$

Аналогично,

$$B_4 = B_3, \quad A_4 = A_3 + \gamma B_3. \quad (3.2.13)$$

Здесь β и γ – постоянные Стокса.

Теперь следует учесть, что строгое решение уравнения (1) является аналитическим, и в результате обхода вокруг точки поворота должно вернуться к исходному выражению. Значит, решения на верхнем и нижнем берегах разреза (на линиях 1 и 4) должны совпадать. С учетом предэкспоненциального множителя это условие принимает вид

$$B_4 = iA_1, \quad A_4 = iB_1. \quad (3.2.14)$$

С учетом (3.2.10) – (3.2.13) из (3.2.14) получаем

$$\begin{aligned} \beta A_1 + (1 + \alpha\beta) B_1 &= iA_1; \\ (1 + \beta\gamma) A_1 + [\alpha + \gamma(1 + \alpha\beta)] B_1 &= iB_1. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Уравнения (3.2.15) должны выполняться при произвольных A_1, B_1 . Отсюда находим четыре уравнения

$$\begin{aligned} \beta = i, \quad 1 + \alpha\beta = 0, \quad 1 + \beta\gamma = 0, \\ \alpha + \gamma(1 + \alpha\beta) = i. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Первые три уравнения (3.2.16) дают

$$\alpha = \beta = \gamma = i. \quad (3.2.17)$$

Четвертое уравнение есть следствие первых трех.

Заметим, что для определения постоянных Стокса не требуется знать точный вид предэкспоненциального множителя в решении (3.2.2).

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

4.1. Зондирование ионосферы

Вертикальное зондирование ионосферы

На распространение радиоволн в околоземном пространстве значительное влияние оказывает ионосфера. Для прогнозирования качества радиосвязи необходимо знать параметры ионосферной плазмы. Исследование ионосферы проводится различными методами, в том числе и радиофизическими [1,4-6,9-11]. Среди них широкое распространение получил метод вертикального зондирования, позволяющий определить зависимость электронной концентрации в ионосфере от высоты.

Для контроля за плазмой нашей планеты существует около 240 стационарных ионосферных станций, которые каждые 15 минут методом радиозондирования определяют характеристики ионосферы, на основе которых и делается радиопрогноз. На Земле имеются три международных центра сбора информации о состоянии ионосферы – в Москве, Вашингтоне и Токио.

Станция ионосферного зондирования представляет собой радиолокатор, работающий в диапазоне 1 – 20 МГц. На ионосферной станции используется антенна, диаграмма направленности которой имеет максимум в вертикальном направлении. Отраженные от ионосферы радиосигналы регистрируются приемным устройством, где определяется время задержки отраженного сигнала. По величине времени запаздывания отраженного импульса относительно момента его излучения можно судить о высоте области отражения. В отличие от обычной радиолокации скорость импульса в ионосферной плазме не является постоянной величиной. Она зависит от частоты сигнала и электронной концентрации, следовательно, от высоты. Время задержки импульса в ионосфере легко вычислить по формуле

$$\Delta t = 2\Delta t_0 + 2\Delta t' = \frac{2}{c}(z_0 + L'), \quad (4.1.1)$$

где Δt_0 – время распространения импульса от поверхности Земли до нижней границы ионосферы, расположенной на высоте z_0 , $\Delta t'$ – время распространения от нижней границы ионосферы до области отражения, c – скорость света в вакууме, L' – групповой путь сигнала в ионосфере. В приближении геометрической оптики

$$L' = c \int_{z_0}^{z_r} \frac{dz}{v_g}, \quad (4.1.2)$$

где z_0 – высота нижней границы ионосферы, z_r – высота области отражения, v_g – групповая скорость сигнала. Без учета влияния магнитного поля

$$v_g = cn = c \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N_e(z)}{m\omega^2}}. \quad (4.1.3)$$

Высота отражения волны находится из условия обращения в нуль показателя преломления

$$1 - \frac{4\pi e^2 N_e(z_r)}{m\omega^2} = 0. \quad (4.1.4)$$

Величина

$$h_{ef} = z_0 + L' \quad (4.1.5)$$

называется действующей высотой отражения и связана с временем задержки импульса Δt соотношением

$$h_{ef} = \frac{c\Delta t}{2} \quad (4.1.6)$$

или

$$h_{ef}(\omega) = z_0 + \int_0^{z_r} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N_e(z)}{m\omega^2}}}. \quad (4.1.7)$$

Обращение уравнения (4.1.7) приводит к следующему выражению:

$$z_r(\omega) = z_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} h_{ef}(\omega \sin \chi) d\chi. \quad (4.1.8)$$

Групповая скорость в ионосфере всегда меньше скорости света в вакууме, поэтому действующая высота больше истинной. Отличие действующей высоты от истинной возрастает при стремлении частоты зондирующего сигнала к критической частоте, равной максимальной плазменной частоте в ионосфере, поскольку групповая скорость при этом стремится к нулю. Зави-

симось действующей высоты от частоты называется высотно-частотной характеристикой (ВЧХ) или ионограммой. На рис. 4.1 приведен пример ионограммы. На ней хорошо видна ветвь, соответствующая отражению от области E. При стремлении частоты зондирующего сигнала к критической частоте области E наблюдается плавное, а затем скачкообразное изменение действующей высоты, связанное с переходом точки отражения сигнала из области E в область F.

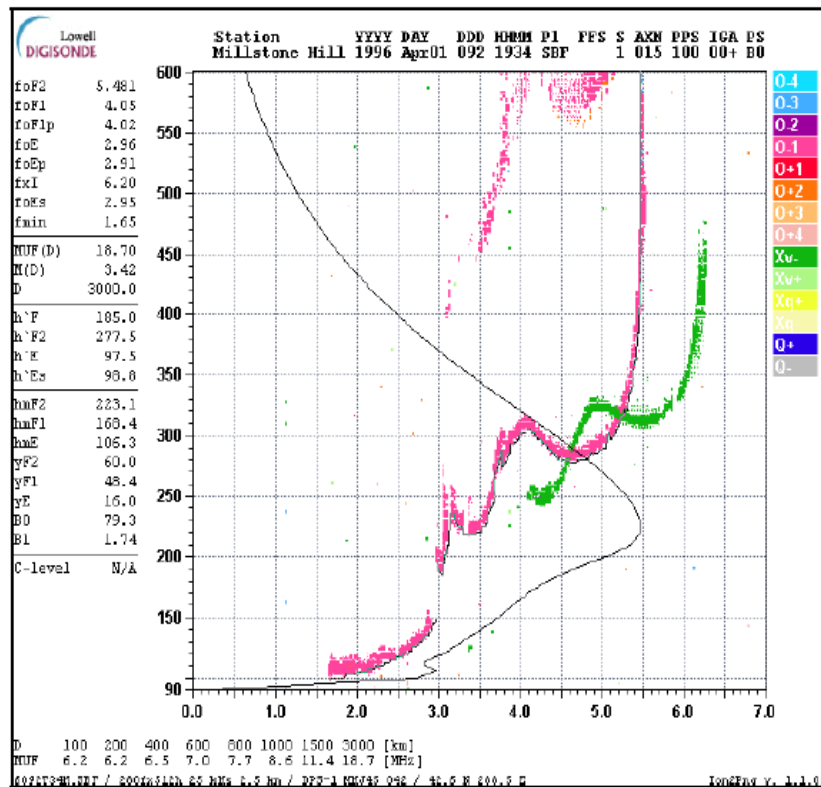


Рис. 4.1

Можно видеть расщепление ветви ионограммы, соответствующей отражению от области F, связанное с влиянием геомагнитного поля. Получившиеся два следа соответствуют обыкновенной и необыкновенной волнам. Заметим, что критическая частота F-области для обыкновенной волны f_o меньше соответствующего значения для необыкновенной волны f_x . По величине расщепления ионограммы можно судить о напряженности геомагнитного поля в ионосфере. Пусть f_m – максимальное значение плазменной частоты в ионосфере

$$f_m = \left(e^2 N_m / \pi m \right)^{1/2}, \quad (4.1.9)$$

где N_m – максимальное значение концентрации электронов в области F. Для обыкновенной волны критическая частота $f_o = f_m$. Критическая частота необыкновенной моды удовлетворяет соотношению [1]

$$f_x^2 = f_m^2 + f_x f_B, \quad (4.1.10)$$

где f_B – гирочастота электронов. Решая (4.1.10) относительно f_x , получаем

$$f_x = \frac{f_B}{2} + \sqrt{f_0^2 + \left(\frac{f_B}{2}\right)^2}. \quad (4.1.11)$$

В тех случаях, когда критическая частота велика по сравнению с гирочастотой f_B

$$f_x - f_0 \approx \frac{f_B}{2}. \quad (4.1.12)$$

Определив по ионограмме разность критических частот обыкновенной и необыкновенной волн, можно вычислить значение напряженности геомагнитного поля в ионосфере.

Нижняя часть области F хорошо аппроксимируется параболическим слоем

$$N_e(z) = N_m \left(1 - \frac{(z - z_m)^2}{\Delta z^2} \right). \quad (4.1.13)$$

Здесь $\Delta z = z_m - z_0$ – полутолщина слоя, N_m – значение концентрации электронов в максимуме слоя. Показатель преломления волны в этом случае определяется выражением

$$n^2(z) = 1 - \frac{f_k^2}{f^2} \left(1 - \frac{(z - z_0)^2}{\Delta z^2} \right). \quad (4.1.14)$$

Здесь $f_k = \sqrt{\frac{e^2 N_m}{\pi m}} \approx 9 \cdot 10^3 \sqrt{N_m}$.

В рамках модели параболического слоя

$$h_{ef}(f) = z_0 + \frac{\Delta z}{2} \frac{f}{f_k} \ln \frac{f_k + f}{f_k - f}. \quad (4.1.15)$$

Введем функцию

$$F\left(\frac{f}{f_k}\right) = \frac{1}{2} \frac{f}{f_k} \ln \frac{f_k + f}{f_k - f}. \quad (4.1.16)$$

Зависимость действующей высоты от значения функции (4.1.16) для параболической модели должна быть линейной. По графику зависимости $h_{ef}(F)$ можно определить нижнюю высоту ионосферы z_0 (по пересечению прямой с осью h_{ef}) и полутолщину слоя Δz (по углу наклона прямой).

На рис. 4.2 схематически изображены параболическая модель распределения концентрации электронов в ионосфере и соответствующая этой модели ионограмма.

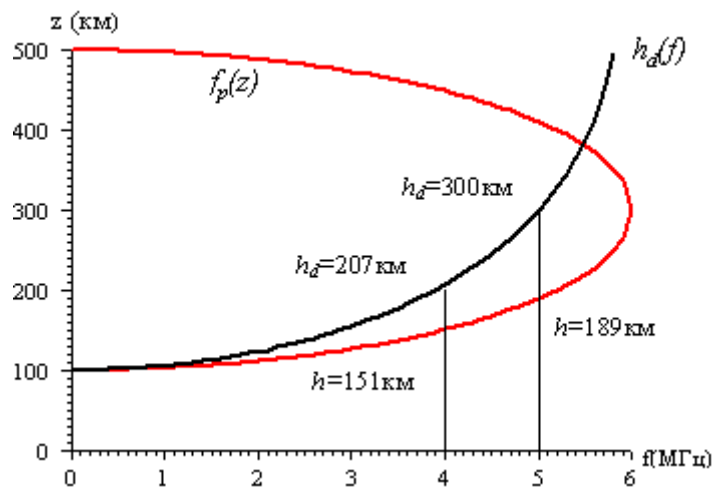


Рис. 4.2

Ниже приведены примеры реальных ионограмм, полученных в различное время суток в различных географических широтах.

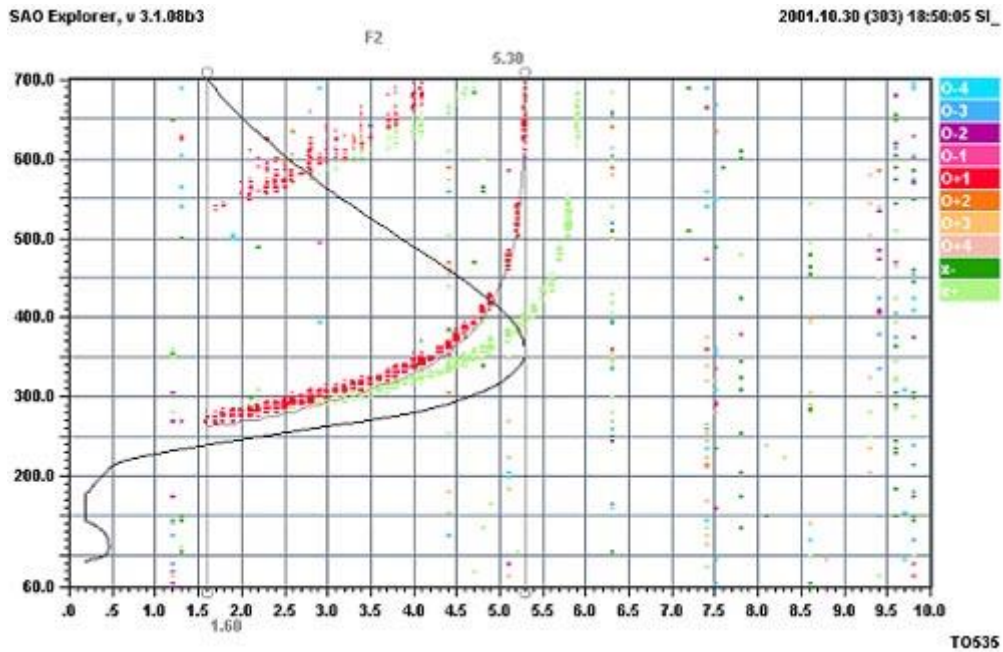


Рис. 4.3. Среднеширотная ионосфера. Ночь. На ионограмме видны следы отражения от одного F-слоя. Кокубуджи. Япония. 35.7 ° с.ш., 139.5 ° в.д. 31.10.2001 03:50 L.T.

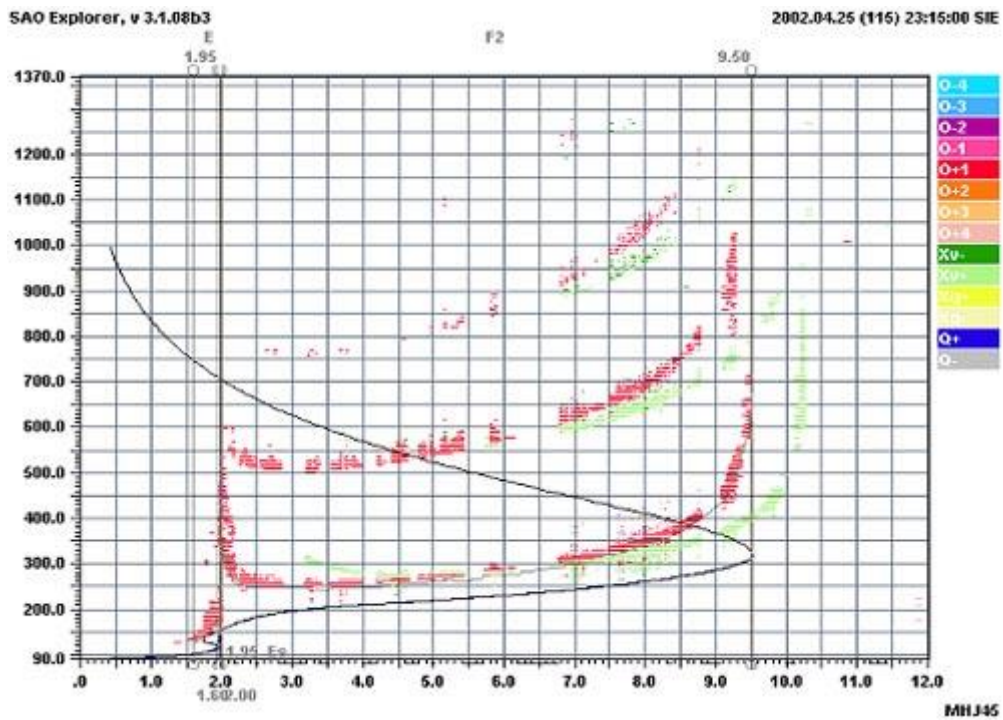


Рис. 4.4. Среднеширотная ионосфера. Вечер. На ионограмме видны следы отражения от E- и F- слоя. Миллстон Хилл. США. 42.6 ° с.ш., 71.5 ° з.д. 25.04.2002 18:15 L.T.

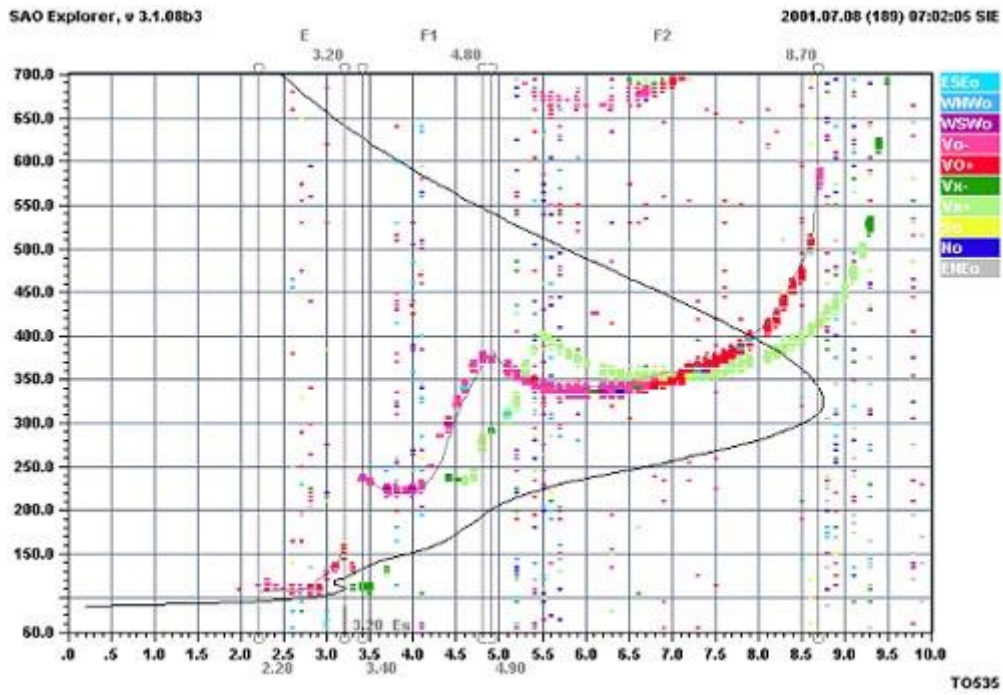


Рис. 4.5. Среднеширотная ионосфера. День. На ионограмме видны следы отражения от E-, F1- и F-слоя. Кокубуджи. Япония. 35.7 ° с.ш., 139.5 ° в.д. 08.07.2001 16:02 L.T.

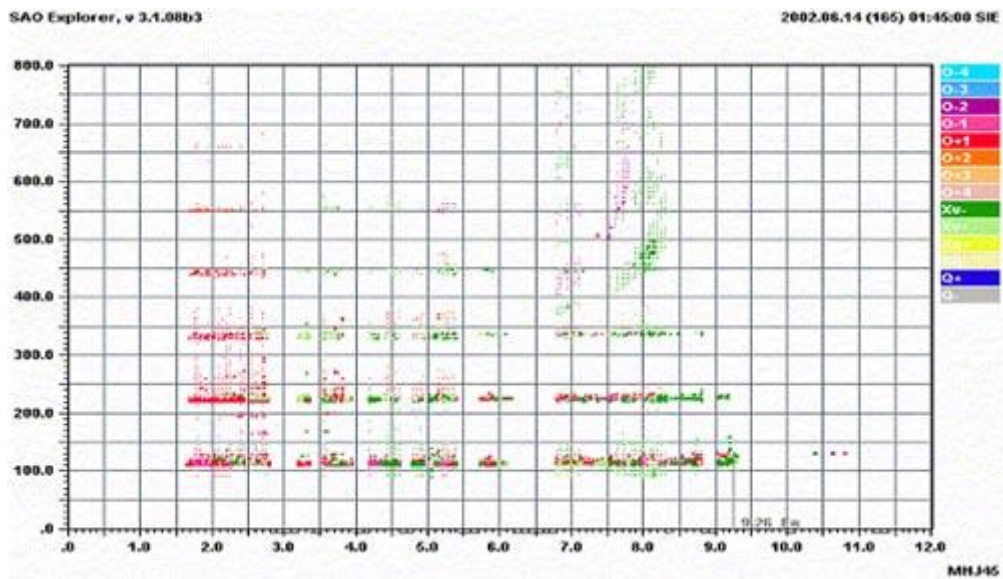


Рис. 4.6. Среднеширотная ионосфера. Вечер. Полная экранировка Es - слоем. Миллстон Хилл. США. 42.6 ° с.ш., 71.5 ° з.д. 25.04.2002 20:45 L.T.

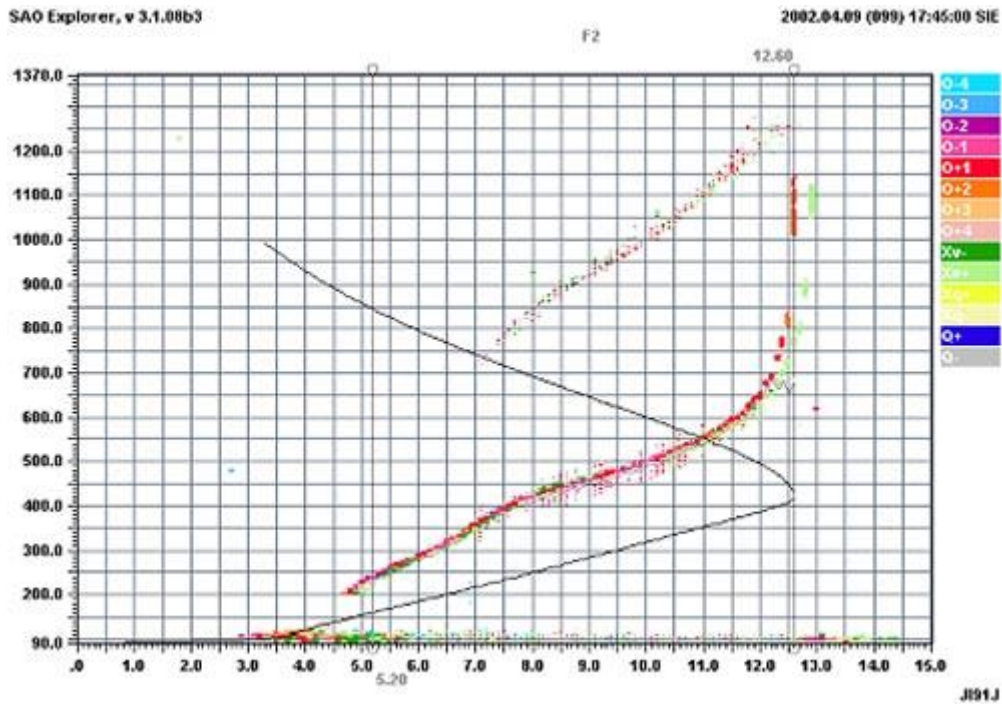


Рис. 4.7. Экваториальная ионосфера. Следы от о- и х-компонент различимы только вблизи критической частоты Джикамарка. Перу. 12.0° ю.ш., 76.8° з.д. 09.04.2002 12:45 L.T.

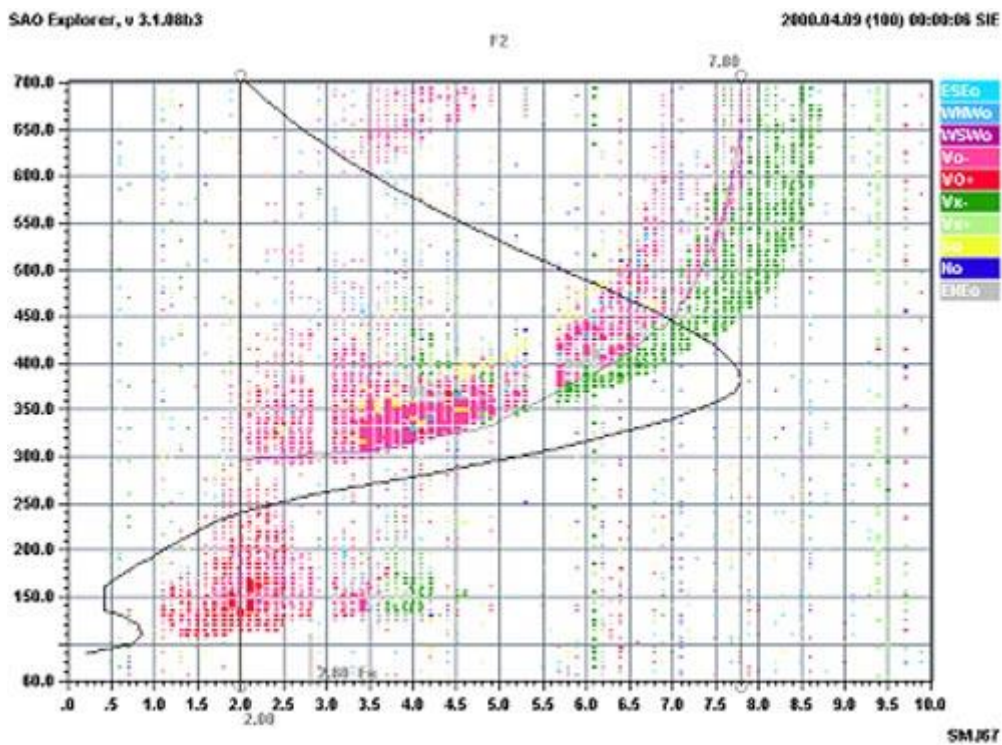


Рис. 4.8. Полярная ионосфера. Диффузные отражения от F – слоя. Сондрестром. Гренландия. 67.0° с.ш., 50.7° з.д. 08.04.2000 21:00 L.T.

Зондирование ионосферы сверху

Метод вертикального зондирования ионосферы с использованием наземных ионозондов не позволяет получить информацию о высотном рас-

пределении концентрации электронов выше максимума F-области. Решение этой задачи возможно с помощью станций ионосферного зондирования, устанавливаемых на космических аппаратах [4].

Уже в 1962 г. был запущен первый спутник, зондирующий ионосферу сверху, – канадский Alouette 1. В дальнейшем целая серия ионозондов была запущена на спутниках: Alouette 2, ISIS-1, ISIS-2 (все канадские), Explorer 20 (США, Канада, Великобритания), ISS-b, ISS-c (Япония), «Интеркосмос-19» и «Космос-1809» (Советский Союз). На рис. 4.9 схематически изображен ИСЗ «Интеркосмос-19», с установленным на нем ионозондом. Измерения электронной концентрации, проводимые с борта специально запускаемых ракет и по трассам полетов ИСЗ, подтвердили и уточнили полученные ранее радиометодами с земной поверхности данные о структуре ионосферы, распределении содержания электронов с высотой над различными районами Земли и позволили получить значения электронной концентрации выше главного максимума слоя F.

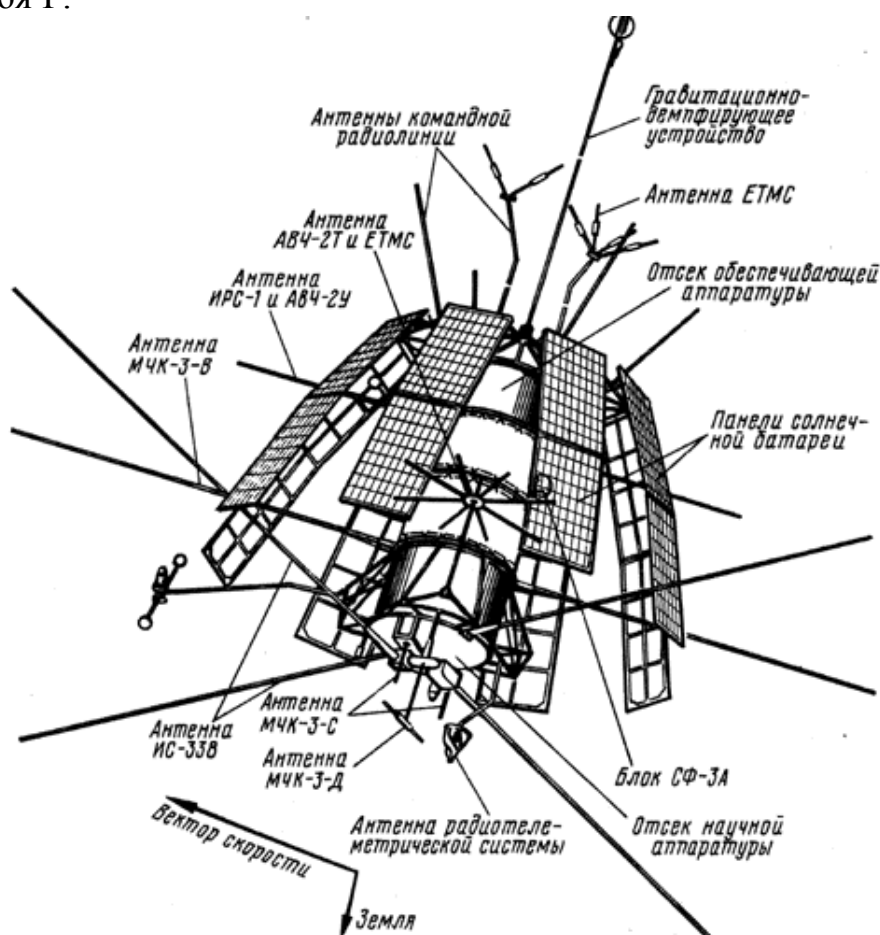


Рис. 4.9. Размещение исследовательской аппаратуры на ИСЗ «Интеркосмос-19»: ИС-338 — ионосферная станция импульсного зондирования, работающая последовательно на 338 частотах.

Пример ионограммы, полученной с борта космического аппарата показан на рис. 4.10. На ионограмме кроме следов, обусловленных отражением радиоволн от ионосферы, наблюдаются так называемые резонансы – относи-

тельно узкие всплески на гирочастоте f_H , плазменной f_N и верхней гибридной $f_T = \sqrt{f_N^2 + f_H^2}$ частотах, а также на гармониках гирочастоты вплоть до шестой. Наблюдаемые резонансы связаны с возбуждением в окружающей космической аппаратуре плазме медленных продольных волн.

Рассмотрим особенности распространения ленгмюровских волн в неоднородной плазме.

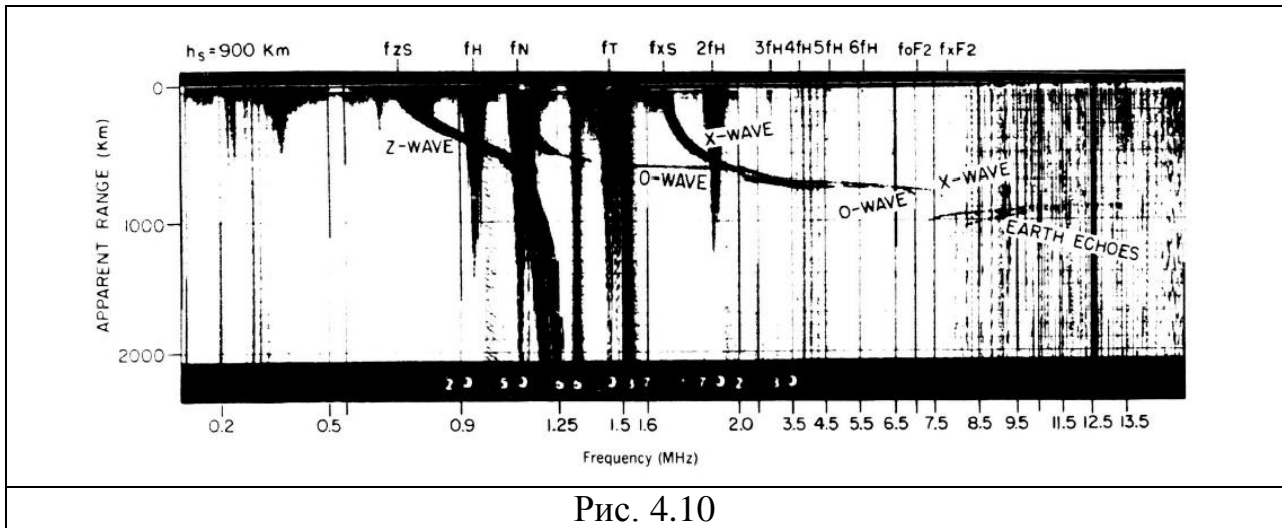


Рис. 4.10

Дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн в изотропной плазме имеет вид [1]

$$n^2 = (1 - \omega_p^2 / \omega^2) / 3\beta_{T_e}^2, \quad (4.1.17)$$

где $\beta_{T_e}^2 = \kappa T_e / mc^2$. Из (4.1.17) с учетом того, что в неоднородной плазме вектор волновой нормали определяется выражением $\vec{p} = \nabla \psi$, где ψ – эйконал, получаем уравнение эйконала

$$3\beta_{T_e}^2 (\nabla \psi)^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / \omega^2. \quad (4.1.18)$$

Групповая скорость ленгмюровских волн определяется выражением

$$\vec{v}_g = 3v_{T_e}^2 \vec{k} / \omega. \quad (4.1.19)$$

При распространении в плоскости (y, z) уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{p_{y0}} = \frac{dz}{p_z} \quad (4.1.20)$$

принимает вид

$$\frac{dy}{p_{y0}} = \frac{dz}{\left\{ \left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} - p_{y0}^2 + \left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} \omega_{p0}^2 / \omega^2 \right\}^{1/2}}. \quad (4.1.21)$$

Из (4.1.19) следует, что векторы групповой и фазовой скоростей параллельны. Следовательно, совпадают лучевые и фазовые траектории.

Предположим, что концентрация электронов меняется с высотой по линейному закону. Тогда

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 + b_e z, \quad (4.1.22)$$

где b_e – некоторый коэффициент, характеризующий градиент электронной концентрации. Уравнение траекторий (4.1.21) с учетом (4.1.22) можно записать в виде

$$\frac{dy}{p_{y0}} = \frac{dz}{\sqrt{A - Bz}}, \quad (4.1.23)$$

где $A = \left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} - p_{y0}^2 + \omega_{p0}^2 / 3\beta_{T_e}^2 \omega^2$, $B = b_e / 3\beta_{T_e}^2 \omega^2$.

Интегрируя (4.1.15), получаем

$$(y - y_0) / p_{y0} = 2 \left(\sqrt{A - Bz} - \sqrt{A - Bz_0} \right). \quad (4.1.24)$$

Координата точки отражения определяется выражением $z_r = A/B$. Время группового запаздывания можно вычислить по формуле

$$t_{zp} = \int \frac{dl}{v_{zp}} = \frac{2\omega^2}{\sqrt{3}\omega_{p0}^2} \cdot \frac{\left(1 - \omega_{p0}^2 / \omega^2 - 3\beta_{T_e}^2 n_{y0}^2\right)^{1/2}}{b_e}. \quad (4.1.25)$$

Вычисленные по формуле (4.1.25) значения времени запаздывания зондирующего сигнала находятся в соответствии с результатами измерений, что подтверждает гипотезу о том, что резонансные всплески, наблюдаемые на ионограммах, обусловлены возбуждением плазменных волн антенной ионозонда.

Наклонное зондирование ионосферы

Исследование распространения радиоволн при наклонном падении на ионосферу важно с точки зрения радиосвязи. Первоочередной задачей в этом случае является определение диапазона применимых частот. Верхний предел частотного спектра определяется максимальным значением электронной концентрации в ионосфере. Наибольшую частоту, которая может быть использована на данной трассе, обычно называют максимально применимой частотой (МПЧ). Поскольку для исследования ионосферы в большинстве случаев используются станции вертикального зондирования (ВЗ), представляет большой интерес определение параметров наклонного зондирования (НЗ), в частности, МПЧ, по данным (ВЗ). В общем случае с учетом кривизны земной поверхности, влияния геомагнитного поля решение этой задачи связано с определенными трудностями. Однако для плоскостной модели ионосферы без учета геомагнитного поля определить характеристики наклонного распространения довольно легко. Существует несколько теорем, связывающих определенные характеристики волн при наклонном и вертикальном распространении.

Закон секанса

Рассмотрим соотношение между частотой f_i наклонно падающей на ионосферу волны и частотой f_n вертикально распространяющейся волны, при условии отражения их на одной высоте. Введем декартову систему координат с осью z , направленной вертикально вверх и осью x – вдоль земной поверхности. Пусть волна падает на нижнюю границу ионосферы под углом ϑ_0 к вертикали (рис. 4.11). С учетом закона Снеллиуса вертикальная компонента волнового вектора в ионосферной плазме имеет вид

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \frac{e^2 N_e}{\pi m f^2} - \sin^2 \vartheta_0}. \quad (4.1.26)$$

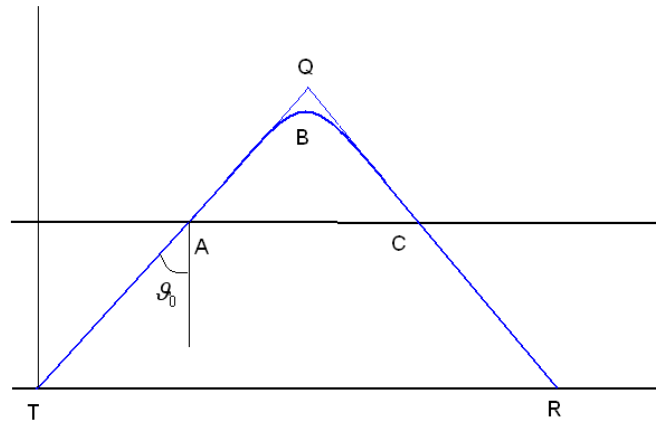


Рис. 4.11

Частота волны, отражающейся от высоты с заданным значением электронной концентрации N_e , определяется из условия обращения k_z в нуль и равна

$$f_i = \frac{1}{\cos \vartheta_0} \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\pi m}}. \quad (4.1.27)$$

При нормальном падении из (4.1.27) следует

$$f_n = \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\pi m}}. \quad (4.1.28)$$

Таким образом, частоты f_i и f_n связаны соотношением

$$f_i = f_n \sec \vartheta_0, \quad (4.1.29)$$

называемым законом секанса.

Теорема Брайта и Тьюва

Рассмотрим луч, выходящий из точки T на поверхности Земли и падающий на ионосферу под углом ϑ_0 . Высоту нижней границы ионосферы примем равной z_0 . Время группового запаздывания сигнала, распространяющегося вдоль траектории $TABCR$, равно

$$t' = \frac{1}{c} L' = \frac{2}{c} \left[\frac{z_0}{\cos \vartheta_0} + \int_A^B \frac{d\sigma}{n(z, \omega)} \right]. \quad (4.1.30)$$

Из рис. 4.11 видно, что элемент длины луча можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{dz}{\cos \vartheta} = \frac{dx}{\sin \vartheta}, \quad (4.1.31)$$

где ϑ – угол между волновой нормалью и вертикалью. Тогда с учетом закона Снеллиуса выражение (30) может быть приведено к виду

$$t' = \frac{2}{c} \left[\frac{z_0}{\cos \vartheta_0} + \int_A^B \frac{dx}{\sin \vartheta_0} \right] = \frac{TQ + QR}{c}. \quad (4.1.32)$$

Следовательно, время распространения сигнала вдоль траектории $TABCR$ равно времени прохождения сигнала со скоростью света c в вакууме вдоль пути TQR .

Теорема Мартина

Рассмотрим две волны, одна из которых с частотой f_n распространяется в ионосфере вертикально, а другая с частотой f_i – наклонно. Их показатели преломления на некоторой фиксированной высоте в ионосфере определяются выражениями

$$n_n^2 = 1 - \frac{e^2 N_e}{\pi m f_n^2}, \quad (4.1.33)$$

$$n_i^2 = 1 - \frac{e^2 N_e}{\pi m f_i^2}, \quad (4.1.34)$$

Исключая концентрацию электронов N_e из соотношений (4.1.33) и (4.1.34), получаем

$$n_i^2 = 1 - \frac{f_n^2}{f_i^2} (1 - n_n^2). \quad (4.1.35)$$

С другой стороны

$$n_i^2 = n_n^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta_0). \quad (4.1.36)$$

Приравнивая выражения (35) и (36), с учетом закона секанса получаем

$$n_i \cos \vartheta = n_n \cos \vartheta_0. \quad (4.1.37)$$

Из рис. 4.11 видно, что высота эквивалентного треугольного пути сигнала в ионосфере равна

$$h_e = \frac{AQ + QC}{2} \cos \vartheta_0 = \frac{\cos \vartheta_0}{2} \int \frac{d\sigma}{n_i} = \cos \vartheta_0 \int_{z_0}^{z_r} \frac{dz}{n_i \cos \vartheta}. \quad (4.1.38)$$

Принимая во внимание (4.1.37), можно записать

$$h_e = \int_{z_0}^{z_r} \frac{dz}{n_n}. \quad (4.1.39)$$

Из (4.1.39) следует, что действующая высота $h'(f_i)$ при наклонном падении волны с частотой f_i равна действующей высоте $h'(f_n)$ при нормальном падении волны с частотой f_n .

Переход от ВЧХ нормального падения к ВЧХ наклонного падения

Рассмотрим ионограмму вертикального зондирования ионосферы. Выберем некоторое значение частоты зондирующего сигнала f_{n1} и определим по ионограмме соответствующее значение действующей высоты $h'(f_{n1})$. нетрудно убедиться, что для заданной дальности радиосвязи d

$$\sec \vartheta_0 = \frac{\sqrt{d^2 / 4 + h'^2(f_n)}}{h'(f_n)}. \quad (4.1.40)$$

Используя закон секанса и теорему Мартина, можно вычислить значение частоты f_{i1} , соответствующее условию $h'(f_{i1}) = h'(f_{n1})$, по формуле

$$f_{i1} = f_{n1} \sec \vartheta_0 = f_{n1} \frac{\sqrt{d^2 / 4 + h'^2(f_n)}}{h'(f_n)}. \quad (4.1.41)$$

Описанную процедуру можно повторить для других значений f_n . С увеличением значения f_n соответствующие величины $h'(f_i) = h'(f_n)$ растут, а значение $\sec \vartheta_0$ уменьшается. При этом произведение $f_n \sec \vartheta_0 = f_i$ сначала возрастает, затем, достигнув максимума (МПЧ), начинает уменьшаться. Подчеркнем, что отражение на максимальной частоте происходит не на уровне максимальной

концентрации, а несколько ниже, где достигает максимума произведение $f_n \sec \vartheta_0$.

Кривые передачи

Для определения угла падения ϑ_0 и действующей высоты $h'(f)$ удобен графический подход. Строится семейство кривых, выражающих зависимость f_n от $h'(f_n)$ в соответствии с формулой (4.1.41) при фиксированных значениях D и ряде фиксированных значений f_i . В тех же координатах строится ионограмма вертикального зондирования. Семейство указанных кривых называется кривыми передачи. Примерный вид кривых передачи приведен на рис. 4.12. Для частот $f_i < 20$ МГц ионограмма дважды пересекает каждую

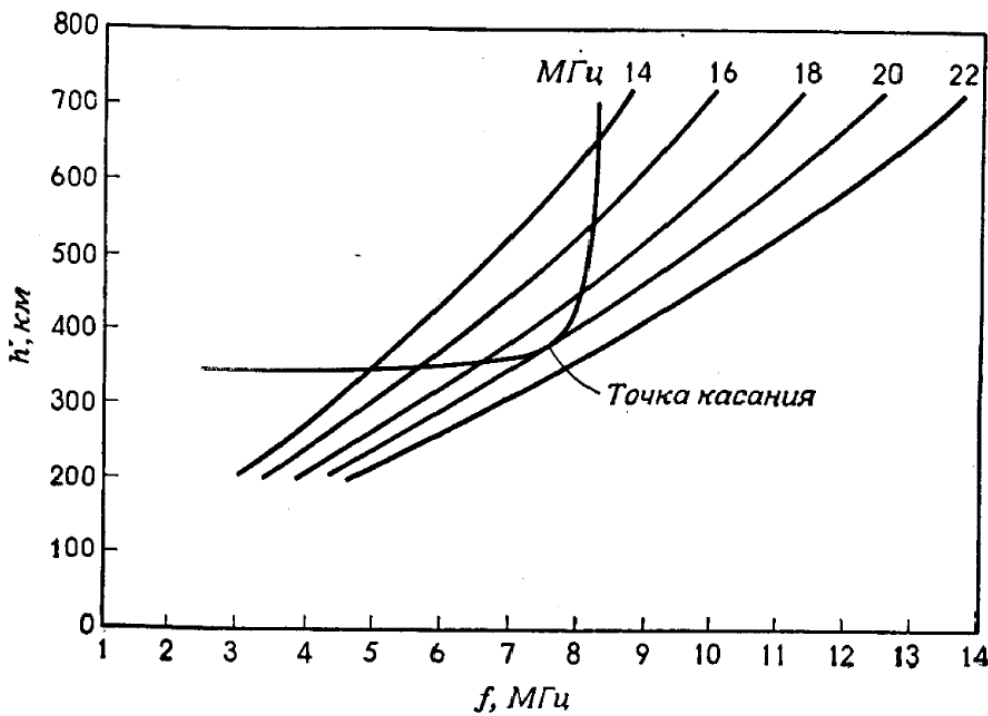


Рис. 4.12

кривую, т.е. при заданных положениях передатчика и приемника существуют два различных пути распространения сигнала. Луч с большим значением действующей высоты называется верхним или педерсеновским, второй – нижним или обычным. Кривая передачи, соответствующая частоте $f_i = 20$ МГц, касается ионограммы, т.е. верхний и нижний лучи совпадают. Кривые для больших значений частоты не имеют пересечений с ионограммой. Это означает, что волны с такими частотами не испытывают отражения от ионосферы. Следовательно, в приведенном примере $f_{\text{МПЧ}} = 20$ МГц.

На рис. 4.13 приведена для иллюстрации ионограмма НЗ, которая представляет собой зависимость наклонной дальности L' от частоты зондирования. Хорошо видно, что основной особенностью ионограммы НЗ является наличие в некотором диапазоне частот двух сигналов одной поляризации. Сигналы с большей групповой задержкой движутся в ионосфере по более высоким траекториям.

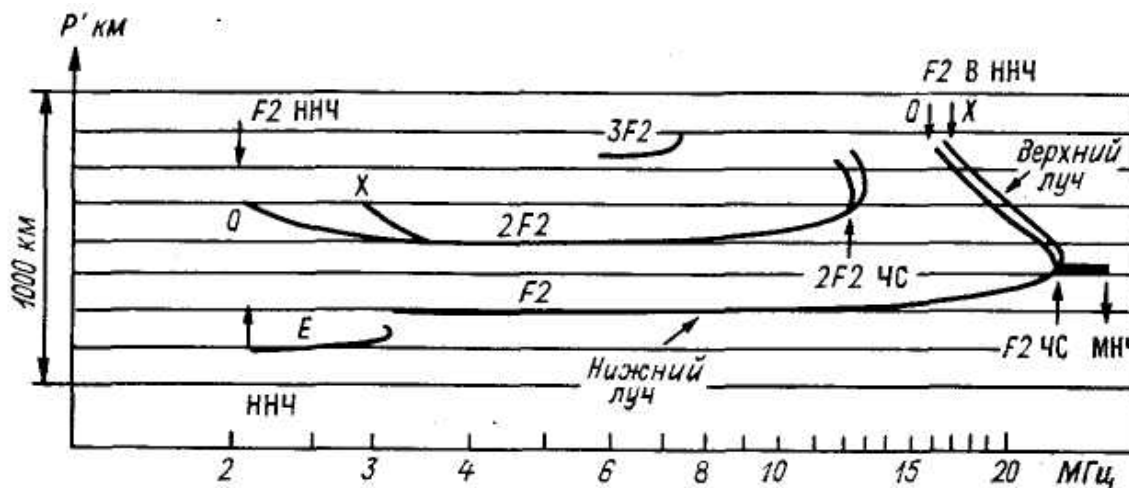


Рис. 4.13. ННЧ – наименьшая наблюдаемая частота, МНЧ – максимальная наблюдаемая частота, ЧС — частота смыкания верхнего и нижнего лучей, $2F_2$ и $3F_2$ – следы двукратного и трехкратного отражения от слоя F_2 .

Аппаратура для получения ионограмм НЗ мало отличается от аппаратуры ВЗ. Эти отличия в основном касаются способов синхронизации при изменении частоты на передающем и приемном конце трасс НЗ. Частотный диапазон в случае НЗ в несколько раз больше, чем в случае ВЗ, и зависит от длины трассы. Созданные в настоящее время цифровые ионосферные комплексы являются, как правило, одновременно ионозондами и вертикального, и наклонного зондирования.

4.2. Распространение свистящих атмосфериков в околоземной плазме

Часть энергии электромагнитного поля, генерируемого при молниевых разрядах, может просачиваться в ионосферу и далее в магнитосферу, распространяясь в форме волн обыкновенного типа по подковообразным траекториям, связанным с геомагнитным полем \vec{B}_0 . Сигналы такого происхождения, прошедшие значительные пути в приземной плазме (в несколько радиусов Земли), называются свистящими атмосфериками (свистами) [11, 14]. Различают два типа распространения свистов: каналированное и неканалированное. В первом случае распространение из области генерации в магнитно-сопряжённую область происходит вдоль ориентированных по геомагнитному полю неоднородностей электронной концентрации (в геомагнитных каналах) (см. рис. 4.14). Во втором случае траектории могут отклоняться от силовых

линий поля \vec{B}_0 . Однако и при неканализованном распространении магнитное поле Земли оказывает на свистовые волны существенное направляющее воздействие.

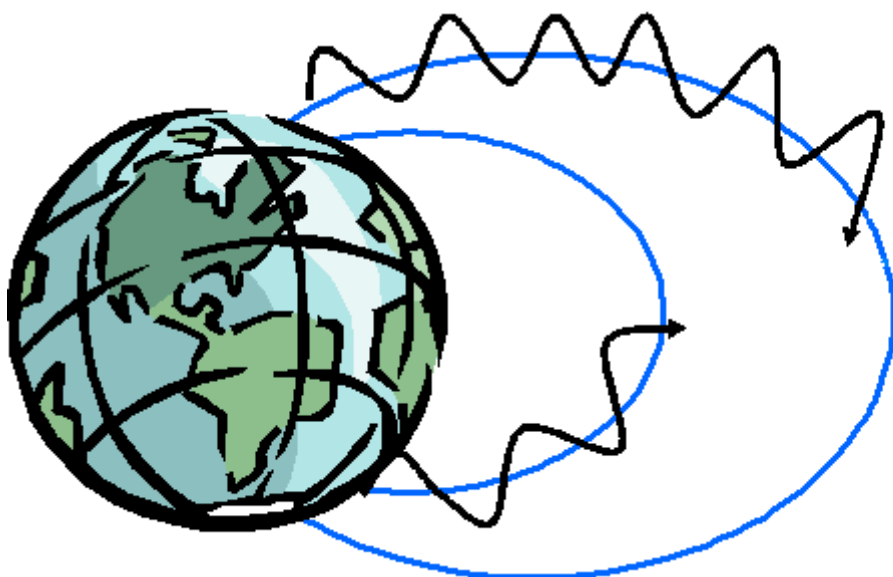


Рис. 4.14

Несмотря на то, что каналированное распространение электронных свистов реализуется, по-видимому, достаточно редко, оно является важным, поскольку только при квазипродольном распространении сигналы могут проходить из магнитосферы к нижней границе ионосферы. Все остальные волны испытывают полное отражение в ионосфере из-за резкого перепада в показателях преломления n внутри ионосферы и ниже ее границы. Таким образом, на земной поверхности могут приниматься только каналированные электронные свисты. Разумеется, они могут приниматься и на ИСЗ. Неканализованные электронные свисты наблюдаются только на ИСЗ и могут проявить самые различные формы динамических спектров, в том числе и растущие по частоте.

Благодаря дисперсии в магнитно-сопряженной точке наблюдаются сигналы с понижающейся во времени частотой f .

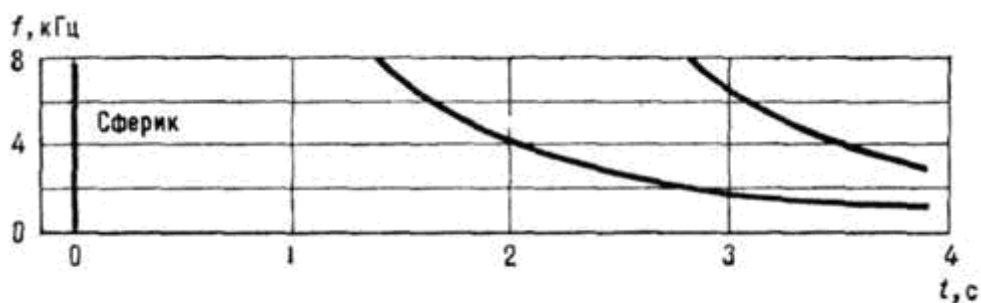


Рис. 4.15а

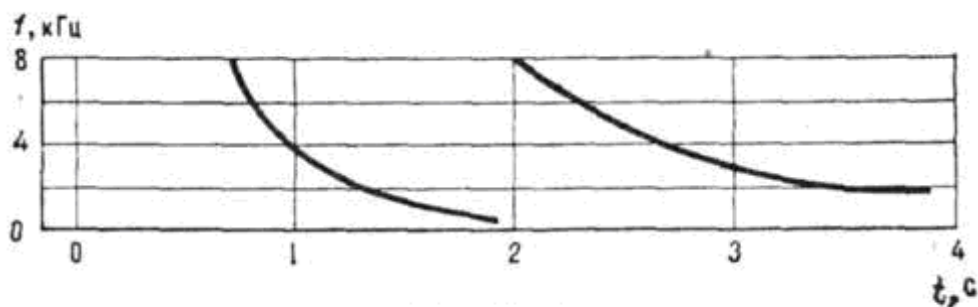


Рис. 4.15б

Типичные спектрограммы свистов (зависимости f от времени прихода t) в схематическом виде показаны на рис. 4.15. Пример реальной сонограммы приведен на рис. 4.16.

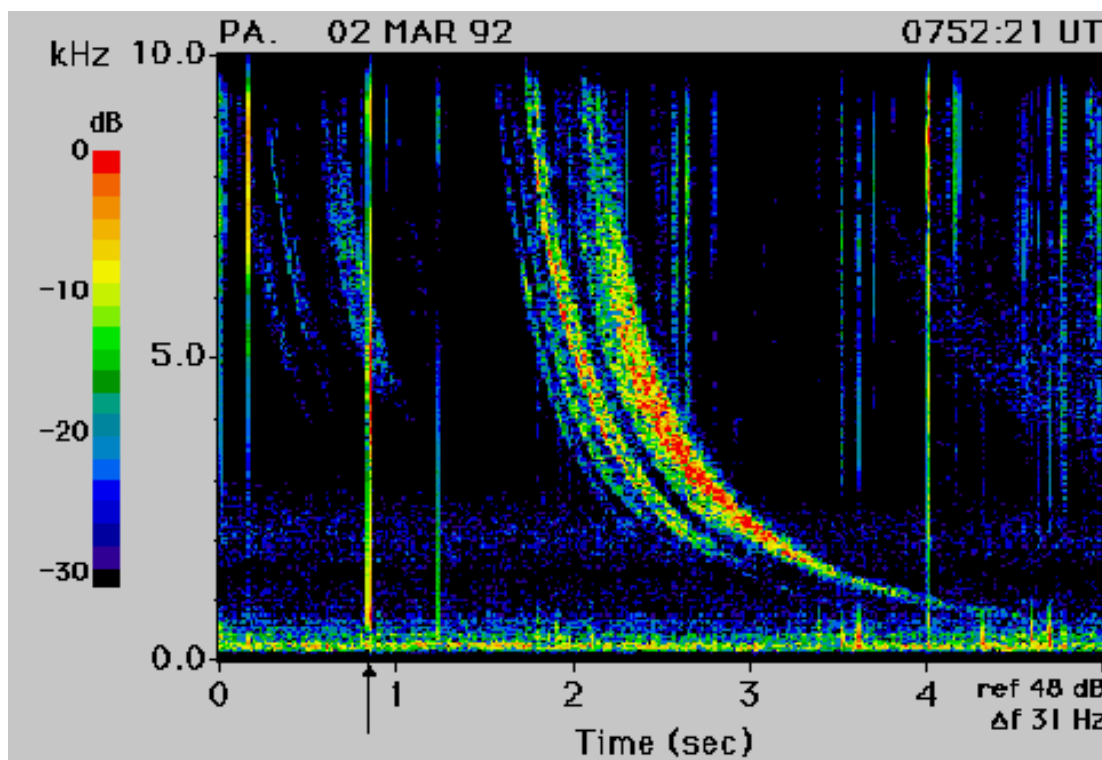


Рис. 4.16

Изменение частоты свистящих атмосфериков во времени в диапазоне частот $f \sim 1 - 6$ кГц хорошо описывается формулой $f = D^2 t^{-2}$, где D – коэффициент, называемый дисперсией. Величины D изменяются от 10 до 100 $c^{-1/2}$. Систематическая регистрация свистящих атмосфериков показывает, что, как правило, наблюдаются свисты двух типов, отличающиеся значениями D : длинные и короткие. Длинные свисты являются результатом прохождения сигнала от источника до магнитно-сопряженной точки и обратно (рис. 4.15 а). Они регистрируются в том же полушарии, где находится источник.

Короткие свисты возбуждаются в области, которая является магнитно-сопряжённой к зоне приёма. Дисперсия D длинных свистов вдвое больше дисперсии коротких свистов.

Иногда возможен приём свистов, которые испытали многократные отражения от магнитно-сопряжённых областей ионосферы. Тогда, помимо длинного (короткого) свиста, на спектрограммах имеются ветви, отвечающие эхо-сигналам. Для длинных свистов отношения дисперсий сигнала и последующих эхо образуют последовательность $1 : 2 : 3 \dots$, а для коротких (рис. 4.15 б) - последовательность $1:3:5:7:\dots$. На частотах $f \sim 7 - 10$ кГц зависимость $\sim t^{-1/2}$ становится несправедливой. Часто регистрируются свистящие атмосферерики, имеющие минимальное время прихода на определенной частоте. Такие частоты называются носовыми.

Вид динамического спектра каналированных свистов несет в себе информацию о свойствах среды внутри магнитосферы. На этом основан широко известный метод диагностики электронной концентрации вблизи экваториальной плоскости магнитосферы.

Основные свойства свистящих атмосферерикиков хорошо объясняются на основе теории распространения электромагнитных волн ОНЧ-диапазона в магнитоактивной плазме. При исследовании распространения в плазме низкочастотных волн в диапазоне, соответствующем спектру свистов ($f = \omega/2\pi = 0,5 - 20$ кГц), можно провести значительные упрощения в формулах для показателей преломления нормальных волн. Прежде всего, следует учесть, что практически на всем пути распространения атмосферерикиков выполняется следующее условие:

$$\nu \gg 1, \quad (4.2.1)$$

где $\nu = \omega_p^2 / \omega^2$. Действительно, $\omega_p^2 = 3,18 \cdot 10^9 N_e$. Даже при относительно низких электронных концентрациях $N \approx 10^2 \text{ см}^{-3}$, характерных по порядку величины для ионосферного D-слоя или межпланетного пространства, мы имеем $\omega_p = 5,65 \cdot 10^5$ рад/с, тогда как при $f = 15$ кГц круговая частота $\omega = 9,4 \cdot 10^4$ рад/с. Таким образом, даже в условиях, где значения параметра ν близки к минимальным, имеем оценку $\nu \sim 36$. При больших значениях электронной концентрации N_e или меньших частотах ω неравенство (4.2.1) выполняется значительно лучше.

Для определения другого параметра $u = \omega_B^2 / \omega^2$ необходимо найти значение гирочастоты с учетом изменений величины геомагнитного поля как по высоте, так и в широтном направлении. При дипольной аппроксимации поля справедливо следующее выражение для магнитной индукции:

$$B = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (4.2.2)$$

в котором r_0 – радиус Земли ($r_0 = 6370$ км), r – расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки, θ – геомагнитная широта этой точки, B_0 – значение индукции геомагнитного поля вблизи земной поверхности. Широтные изменения магнитного поля Земли (изменение θ) приводят к различию в значениях гирочастоты ω_B (при фиксированных r) максимум в два раза. В зависимости от r гирочастота убывает по закону $1/r^3$. На экваторе ($\theta = 0$) у поверхности Земли ($r = r_0$) $\omega_B = 5,02$ МГц. Оценки значений ω_B показывают, что, за исключением области D -слоя, всегда справедливо условие $\omega_p > \omega_B$. Вместе с тем, чаще всего имеет место неравенство $\omega_p \gg \omega_B$. Оно выполняется, например, в F -слое ионосферы или на больших высотах, когда $r > 2r_0$. Итак, мы можем считать выполненным неравенство $v > u$ (во многих случаях, как было указано, $v \gg u$).

В этих условиях справедливо квазипродольное приближение и выражение для показателя преломления свистовой моды определяется формулой [1]

$$n_2^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_B \cos \theta}. \quad (4.2.3)$$

В соответствии с теоремой Стори угол между направлениями групповой скорости и волнового вектора для свистов не может превышать значения $19^\circ 28'$ [1]. Следовательно, геомагнитное поле оказывает сильное направляющее действие на распространение свистов. Наличие сильно вытянутых вдоль линий индукции геомагнитного поля неоднородностей электронной концентрации (дактов) приводит к тому, что при каналированном распространении свисты следуют практически вдоль линий геомагнитного поля.

При продольном распространении выражение для квадрата показателя свистовой моды принимает наиболее простой вид

$$n_2^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_{Be}}. \quad (4.2.4)$$

Можно показать, что в этом случае групповая скорость сигнала определяется выражением

$$v_g = 2 \frac{c}{n}. \quad (4.2.5)$$

Предположим, что сигнал распространяется по траектории, совпадающей с линией индукции геомагнитного поля, уравнение которой при дипольной аппроксимации в сферической системе координат может быть записана в виде

$$r = r_0 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0}. \quad (4.2.6)$$

Элемент длины траектории запишем в виде

$$dl = r_0 \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta_0} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} d\theta. \quad (4.2.7)$$

Вычислим время распространения сигнала между магнито-сопряженными точками. Будем предполагать, что концентрация электронов, а, следовательно, и плазменная частота изменяется вдоль линии геомагнитного поля по закону

$$\omega_p(\theta) = \omega_{p0} f(\theta), \quad (4.2.8)$$

где ω_{p0} – значение плазменной частоты на геомагнитном экваторе, $f(\theta)$ – некоторая гладкая функция. Тогда

$$t = \int \frac{dl}{v_g} = \frac{r_0 \omega_{p0}}{c \sqrt{\omega \omega_{B0}} \sin^5 \theta_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} f(\theta) (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/4} \sin^4 \theta d\theta. \quad (4.2.9)$$

Введем переменную интегрирования $x = \cos \theta$. В результате из (4.2.9) получаем

$$t = \frac{r_0 \omega_{p0}}{c \sqrt{\omega \omega_{B0}} \sin^5 \theta_0} \int_0^{\cos \theta_0} f(x) (1 + 3x^2)^{1/4} (1 - x^2)^{3/2} dx. \quad (4.2.10)$$

Таким образом, для свистящих атмосфериков получается следующий закон дисперсии:

$$t = \frac{D}{\sqrt{\omega}}. \quad (4.2.11)$$

Здесь коэффициент D (дисперсия свиста) определяется выражением

$$D = \frac{r_0 \omega_{p0}}{c \sqrt{\omega_{B0}} \sin^5 \theta_0} \int_0^{\cos \theta_0} f(x) (1+3x^2)^{1/4} (1-x^2)^{3/2} dx. \quad (4.2.12)$$

Заметим, что интеграл в (4.2.12) есть просто некоторое число, зависящее от вида функции $f(\theta)$. Значения величин r_0 и θ_0 определяются положением источника свиста. Значение гирочастоты на экваторе вблизи земной поверхности ω_{B0} известно. Таким образом, по определенным при регистрации свистящих атмосфериков значениям дисперсии D можно определить значение ω_{p0} , следовательно, значение электронной концентрации в вершине траектории свиста.

4.3. Лучевое описание нормальных волн в рефракционных волноводах

В декаметровом диапазоне нередко наблюдается сверхдальнее распространение радиоволн, характеризующееся сравнительно малым затуханием сигнала. Малое затухание сигнала, в частности, связывают с распространением радиоволн в ионосферных волноводных каналах (ИВК) или, в общем случае, с их распространением без промежуточных отражений от Земли [10].

Известно, что расчет поля распространяющихся в волноводе электромагнитных волн обычно осуществляется двумя способами: либо представляя поле в виде суммы нормальных волн, либо рассматривая поле как суперпозицию квазиплоских неоднородных волн, последовательно отражающихся от стенок волновода. В диапазоне декаметровых радиоволн последнее представление переходит в лучевое приближение, поскольку реальные волноводы являются существенно многомодовыми.

До недавнего времени в лучевом приближении единственным разработанным механизмом дальнего распространения в канале Земля - ионосфера считался скачковый. Наряду со скачковым, сейчас общепризнанными являются и волноводные механизмы распространения. Основными их достоинствами являются: слабое затухание, стабильность времени группового запаздывания, а также возможность пропускания волн с частотами выше максимально применимых для слоя F. В пользу волноводного механизма распространения свидетельствуют результаты и большого числа прямых экспериментов. Так, например, наблюдались обратные сигналы на нескольких приемных станциях, расположенных вблизи плоскости большого круга. Оказалось, что сигналы не регистрировались в затемненной области, а были зафиксированы только в освещенной части трассы, что говорит о локализации излучения в оторванном от Земли ионосферном волноводе. Распространение внутри волноводного канала позволяет также объяснить слабое затухание сигналов искусственных спутников Земли.

Рассмотрим кратко известные естественные механизмы захвата радиоволн в ИВК. В настоящее время наиболее вероятными механизмами считают-

ся, в порядке эффективности, следующие: а) рефракция при наличии горизонтальных градиентов электронной концентрации; б) рефракция на локализованных крупномасштабных неоднородностях; в) рассеяние на мелкомасштабных неоднородностях; г) рассеяние (случайная рефракция) на крупномасштабных неоднородностях; д) неадиабатический захват и вывод лучей из канала (эффект раскачки ширины неоднородного волновода; е) просачивание энергии радиоволн через стенки волновода.

Если говорить о первых двух механизмах захвата, то можно сказать, что наличие значительных горизонтальных градиентов и отдельных крупномасштабных неоднородностей размерами в сотни и тысячи километров не является характерным для обычных условий спокойной ионосферы. Однако в совокупности с другими факторами, такими как многократное рассеяние, и меньшие градиенты могут создавать благоприятные условия для возбуждения ИВК.

Вопрос о влиянии рассеяния на мелкомасштабных неоднородностях на захват коротковолнового излучения в ИВК детально изучался. Исследования показали, что на частотах 20-30 МГц оптимальный захват происходит в том случае, когда неоднородности находятся вблизи оси волновода, а их характерные масштабы не превышают 50-100 м. Коэффициент захвата, при этом, не превышает 1%. Однако этот механизм наиболее перспективен при искусственной запитке ИВК. В последнее время развитие техники привело к появлению мощных нагревных передатчиков, что дало возможность проводить запитку ИВК с помощью рассеяния на искусственных, в основном мелкомасштабных, неоднородностях, возникающих под действием на ионосферную плазму мощного радиоизлучения с Земли.

Также известно, что при отражении мощных радиоволн в ионосфере ниже области отражения могут возникать квазипериодические возмущения ионосферной плазмы. Такие возмущения являются своеобразной дифракционной решеткой, способной резонансно отражать короткие волны. При рассеянии под брегговским углом даже слабое волнообразное возмущение может обеспечить довольно высокий коэффициент захвата излучения передатчика, расположенного на Земле.

Рассмотрим некоторые особенности распространения декаметровых радиоволн в ИВК. Любая волна в регулярном волноводе может быть представлена в виде суммы собственных (нормальных) волн. В частности, лучевое поле тоже может быть разложено по нормальным волнам волновода. Начнем рассмотрение с плоского волновода, заполненного однородной средой с показателем преломления n и ограниченного плоскостями $z = \pm a$ (рис. 4.17).

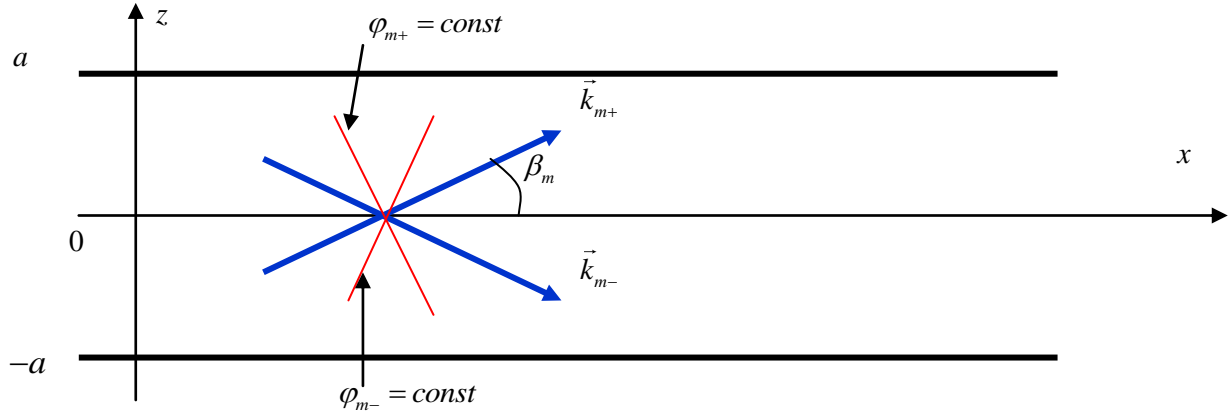


Рис. 4.17

Пусть волновое поле отдельной моды u_m на границах равно нулю

$$u_m(x, \pm a) = 0. \quad (4.3.1)$$

В этом случае собственные волны в волноводе описываются функциями

$$u_m(x, z) = \exp(ih_m x) \sin[\kappa_m(z + a)], \quad (4.3.2)$$

где

$\kappa_m = \frac{m\pi}{2a}$ – поперечное волновое число,

$h_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2}$ – продольное волновое число (постоянная распространения).

Поле каждой моды может быть представлено в виде суммы двух плоских волн, называемых *бриллюэновскими волнами* (волновые векторы \vec{k}_m этих волн показаны на рис. 4.17 стрелками синего цвета)

$$u_m(x, z) = \frac{1}{2i} \left\{ \exp[ih_m x + i\kappa_m(z + a)] - \exp[ih_m x - i\kappa_m(z + a)] \right\}. \quad (4.3.3)$$

Угол β между осью и волновыми векторами бриллюэновских волн в соответствии с граничными условиями (4.3.1) принимает дискретный набор значений

$$\sin \beta_m = \frac{\kappa_m}{k} = \frac{\pi m}{2ka}. \quad (4.3.4)$$

При отражении от стенки волновода одна бриллюэновская волна порождает другую.

Запишем аналогичное представление для нормальных волн в рефракционном волноводе с показателем преломления, зависящим от поперечной по отношению к оси волновода координаты $n = n(z)$ [3]

$$u(x, z) = U(z) \exp(ikh). \quad (4.3.5)$$

Предэкспоненциальный множитель в (4.3.5) удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$U''(z) + k_0^2 \left[n^2(z) - \frac{h^2}{k_0^2} \right] U(z) = 0. \quad (4.3.6)$$

Здесь штрихами обозначены производные по z .

Решение уравнения (4.3.6) в приближении геометрической оптики имеет вид

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(z)}} \left[C_1 \exp \left(ik_0 \int_{z_1}^z \gamma(z') dz' \right) + C_2 \exp \left(ik_0 \int_z^{z_2} \gamma(z') dz' \right) \right], \quad (4.3.7)$$

где

$$\gamma(z) = |p_z| = \sqrt{n^2(z) - p_{x0}^2}, \quad p_{x0} = h/k_0,$$

а точки поворота z_1 и z_2 определяются из условия $\gamma(z) = 0$.

Рассматривая волну, бегущую вниз, как результат отражения волны, бегущей вверх, получаем

$$C_2 = C_1 \exp \left(ik_0 \int_{z_1}^{z_2} \gamma dz - i \frac{\pi}{2} \right), \quad C_1 = C_2 \exp \left(ik_0 \int_{z_1}^{z_2} \gamma dz - i \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.3.8)$$

Нетривиальное решение системы уравнений (4.3.8) существует при условии

$$2k_0 \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z) dz - \pi = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3.9)$$

аналогичном правилу квантования Бора – Зоммерфельда. Условие (4.3.9) является по существу дисперсионным уравнением, позволяющим вычислить постоянные распространения h_m нормальных волн волновода и представить поле m -ой моды в виде

$$u_m(x, z) = C\gamma^{-1/2} \cos\left(k_0 \int_{z_1}^z \gamma dz - \frac{\pi}{4}\right) \exp(ih_m x). \quad (4.3.10)$$

Это поле можно также рассматривать как сумму бриллюэновских волн

$$u_m(x, z) = \frac{1}{2} C\gamma^{-1/2} \left[\exp\left(ih_m x + ik_0 \int_{z_1}^z \gamma dz\right) + \exp\left(ih_m x - ik_0 \int_{z_1}^z \gamma dz\right) \right]. \quad (4.3.10)$$

Заметим, что волны (4.3.10) не являются плоскими. На рис. 4.18 показаны фазовый фронт (кривая красного цвета) и траектории (кривые синего цвета) этих волн. На каустиках поле (4.3.10) обращается в бесконечность.

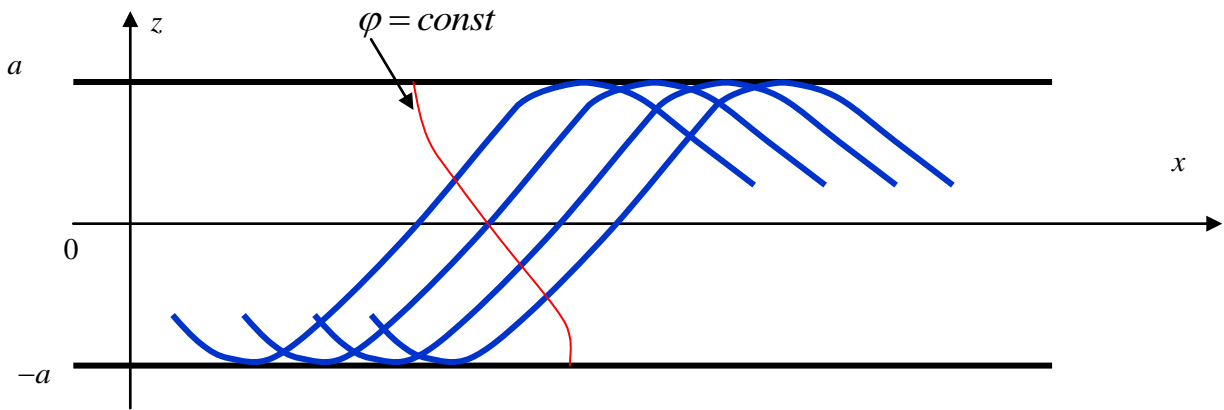


Рис. 4.18

Известно, что в случае двумерного симметричного волновода с плавно изменяющейся шириной (уравнения стенок $z = \pm a(x)$) структура поля в поперечном сечении сохраняется. Это приводит к сохранению адиабатического инварианта $I_m = 2a(x) \sin \beta_m(x)$

$$I_m = \frac{\pi m}{k_0} = \text{const}. \quad (4.3.10)$$

Из условия (4.3.10) можно найти зависящее от x продольное волновое число $h_m = k_0 \cos \beta_m(x)$. При этом получаются адиабатические моды плавно нерегулярного волновода

$$u_m(x, z) = A_m(x) \sin[\kappa_m(z + a)] \exp\left[i \int_{x_0}^x h_m(x) dx\right]. \quad (4.3.11)$$

Изменение амплитудного фактора можно определить из условия сохранения потока энергии через поперечное сечение волновода $x = const$

$$\frac{1}{ik_0} \int_{-a(x)}^{a(x)} \text{Im} \left(u_m^* \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) dz = \frac{h_m(x)}{k_0} A_m^2(x) \frac{a(x)}{2} = \text{const} = \frac{h_m(x^0)}{k_0} A_m^2(x^0) \frac{a(x^0)}{2}. \quad (4.3.12)$$

Здесь $h_m(x^0)$, $A_m(x^0)$ и $a(x^0)$ – начальные значения параметров в плоскости $x = x_0$. Из (4.3.12) следует, что

$$A_m(x) = A_m(x_0) \left(\frac{h_m(x_0)a(x_0)}{h_m(x)a(x)} \right)^{1/2}. \quad (4.3.13)$$

Плавная нерегулярность волновода подразумевает выполнение неравенства

$$\left| \frac{\partial n}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|. \quad (4.3.14)$$

Адиабатическим инвариантом в этом случае является величина

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{n^2(x, z) - n_2^2(x)} dz = \text{const} = \frac{m\pi}{2k_0}. \quad (4.3.15)$$

На основе выражения (4.3.15) можно оценить границы волнового канала и судить о возможности захвата или удержания той или иной моды в нерегулярном волноводе.

Заключение

Изложенные в учебном пособии основы теории распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме могут служить фундаментом для более глубокого изучения естественных и искусственных волновых процессов в неоднородных ионизованных средах. Здесь основное внимание уделено методу геометрической оптики, позволяющему сравнительно просто рассчитать структуру волновых полей, наглядно представить лучевую картину, как правило, хорошо согласующуюся с нашими интуитивными представлениями о распространении волн. Именно в силу своей наглядности лучевая теория остается наиболее употребительным приближенным методом теории волновых процессов.

Список рекомендуемой литературы

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. 684 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. – М.: Наука, 1984. 392 с.
5. Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П., Павельев А.Г. Распространение радиоволн. – М.: ЛЕНАРД, 2009. 496 с.
6. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. – М.: Мир, 1973. 504 с.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979. 384 с.
8. Железняков В.В. Электромагнитные волны в космической плазме. – М.: Наука, 1977. 432 с.
9. Альперт Я.Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. – М.: Наука, 1972. 563 с.
10. Гуревич А.В., Цедилина Е.Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. – М.: Наука, 1979. 250 с.
11. Альперт Я.Л. Волны и искусственные тела в приземной плазме. – М.: наука, 1974. 214 с.
12. Заславский Г.М., Мейтлис В.П., Филоненко Н.Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. М.: Наука, 1986. 177 с.
13. Гершман Б.Н., Гинзбург В.Л., Денисов Н.Г. Распространение электромагнитных волн в плазме (ионосфере). УФН. Том 61. Вып. 4. 1957. С. 561-612.
14. Гершман Б.Н., Угаров В.А. Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере. УФН. Том 72. Вып. 2. 1962. С. 235-271.
15. Ерохин Н.С. Вопросы теории линейной и нелинейной трансформации волн в неоднородных средах. УФН. Том 109. Вып. 2. 1973. С. 225-258.
16. Железняков В.В., Кочаровский Вл.В., Кочаровский В.В. Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах. УФН. 1983. Т. 141. Вып. 8. С. 257-310.
17. Кравцов Ю.А., Найда О.Н., Фуки А.А. Волны в слабоанизотропных трехмернеоднородных средах: квазиизотропное приближение геометрической оптики. УФН. 1996. Т. 166. Вып. 2. С. 141-167.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие для вузов. В 10 Т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М.: Наука, 1989. 768 с.
19. Справочник по специальным функциям. Под. ред М. Абрамовиц, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. 832 с.

20. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 830 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	3
1. Распространение волн в неоднородной изотропной плазме	6
1.1. Исходные уравнения	6
1.2. Распространение плоских волн в однородной среде	6
1.3. Отражение плоской волны от границы раздела двух сред	8
1.4. Метод возмущений (борновское приближение)	10
1.5. Метод геометрической оптики для одномерного случая	14
1.6. Более строгое получение уравнений геометрической оптики	16
1.7. Строгое решение уравнения Гельмгольца. Линейный слой	19
1.8. Наклонное падение электромагнитных волн на слоисто-неоднородную изотропную плазму	23
1.9. Наклонное падение ТМ-волны на слой плазмы	26
1.10. Распространение волн в трехмерно-неоднородной изотропной плазме	32
1.11. Методы решения уравнения эйконала	39
2. Распространение волн в неоднородной магнитоактивной плазме	43
2.1. Распространение волн в плоскостой магнитоактивной плазме	43
2.2. Наклонное распространение волн в плоскостой магнитоактивной плазме	48

2.3.	Распространение в трехмерно-неоднородной магнитоактивной плазме	52
2.4.	Численные методы решения уравнений геометрической оптики	59
3.	Линейная трансформация нормальных волн в неоднородной плазме.	62
3.1.	Квазиизотропное приближение геометрической оптики	62
3.2.	Метод фазовых интегралов	64
4.	Некоторые приложения метода геометрической оптики	69
4.1.	Зондирование ионосферы	69
4.2.	Распространение свистящих атмосфериков в околоземной плазме	85
4.3.	Лучевое описание нормальных волн в рефракционных волноводах	91
	Заключение	97
	Список рекомендованной литературы	98

Владимир Георгиевич **Гавриленко**
Владимир Александрович **Яшнов**

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ**

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.