Содержание

Предисловие

Данное учебно–методическое пособие является продолжением части I, одноимённого пособия [1], в котором рассматриваются задачи для функций с двумя независимыми переменными. Цель части II — научить студентов решать избранные многомерные задачи методом разделения переменных. Из всего многообразия задач математической физики в пособии выделены три типа задач: начально–краевые (смешанные) задачи для уравнения колебания мембраны и уравнения теплопроводности, а также краевые задачи для уравнения Пуассона, возникающие при нахождении стационарной температуры в однородном теле. Эти задачи рассматриваются в случаях, когда пространственные переменные изменяются в областях, ограниченных окружностями или круговыми цилиндрами. На одном из этапов решения таких задач методом разделения переменных возникает задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя, что приводит к использованию цилиндрических функций. Основные сведения о цилиндрических функциях и решения задач Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя даны в [2]. Поэтому в этом пособии приводятся лишь необходимые результаты решения, а именно, собственные числа и собственные функции соответствующих задач Штурма–Лиувилля, с указанием формул пособия [2]. Все рассматриваемые в пособии многомерные задачи обладают осевой симметрией и сводятся к одномерным. При подборе задач использовались книги [3]–[7].

1. Постановка смешанных и краевых задач

В пособии не приводится вывод уравнений и граничных условий. Соответствующий материал можно найти в [3]–[6].

- **Задача о распространении тепла.**

Уравнение, описывающее распространение тепла в изотропной однородной среде имеет вид

$$u_t - a^2 \Delta u = \frac{f(x,t)}{c\rho}, \tag{1.1}$$

где $u(x,t)$ — температура в точке $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, c — коэффициент теплоёмкости материала, ρ — плотность материала, $f(x,t)$ — плотность источников тепла, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k — коэффициент теплопроводности материала, $\Delta u \equiv u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для однозначного определения решения уравнения (1.1) в области $Q \subset R^3$ при $t > 0$ необходимо задать начальную температуру в области Q,

$$u|_{t=0} = u_0(x), \;\; x \in Q, \tag{1.2}$$

и условие на границе области Q:

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Bigg|_{\partial Q} = u_1(x, t), \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0, \tag{1.3}$$

где α и β — неотрицательные константы, одновременно не обращающиеся в нуль.

Начально–краевая (смешанная) задача для уравнения (1.1), заключается в нахождении функции $u(x, t)$, определяемой в области $x \in \bar{Q}$, $t \geq 0$, удовлетворяющей уравнению (1.1) в области $x \in Q$, $t > 0$, начальному условию (1.2) и граничному условию (1.3). Граница области Q, функции $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x, t)$, постоянные α, β, определяются физическими условиями задачи, и называются входными данными задачи.

Ниже перечислим частные случаи граничного условия (1.3), сформулировав происходящий физический процесс:

1) на границе области Q поддерживается заданная температура:

$$u|_{\partial Q} = u_1(x, t), \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0; \tag{1.4}$$

2) через границу области Q подаётся тепловой поток плотности q:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{\partial Q} = q(x, t), \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0; \tag{1.5}$$

3) граница области Q теплоизолирована, т.е. тепловой поток через границу равен нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{\partial Q} = 0, \;\; t > 0; \tag{1.6}$$

4) на границе ∂Q происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $u_1(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{\partial Q} + H[u - u_1]|_{\partial Q} = 0, \;\; t > 0, \tag{1.7}$$

где $H = \frac{k}{\alpha}$.

- **Задача о колебаниях мембраны.**

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область Q плоскости (x_1, x_2). Уравнение, описывающее поперечные колебания однородной мембраны имеет вид

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = \frac{f(x,t)}{\rho}, \tag{1.8}$$

где $u(x,t)$ — отклонение мембраны от положения равновесия в точке $x \equiv (x_1, x_2)$ в момент времени t, ρ — плотность материала мембраны, $f(x,t)$ — плотность внешней силы, распределённой по площади мембраны, $\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$ — двумерный оператор Лапласа, $a^2 = \frac{T}{\rho}$.

Для однозначного описания процесса колебаний мембраны нужно задать начальное отклонение и начальную скорость точек мембраны,

$$u|_{t=0} = u_0(x), \;\; u_t|_{t=0} = u_1(x), \;\; x \in Q, \tag{1.9}$$

а также условие на границе мембраны (граничное условие):

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\partial Q} = u_2(x,t), \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0, \tag{1.10}$$

где α и β — неотрицательные постоянные, одновременно не обращающиеся в нуль.

Сформулируем начально–краевую задачу: найти функцию, определённую в области $x \in \bar{Q}$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению (1.8) в области $x \in Q$, $t > 0$, начальным условиям (1.9) и граничному условию (1.10).

Входными данными задачи о колебаниях мембраны являются область $Q \subset R^2$, функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ и постоянные α, β.

Постоянные α и β определяются физическими условиями задачи. Приведём возможные варианты таких условий:

1) край мембраны жёстко закреплён, т.е. смещения точек края мембраны равны нулю:

$$u|_{x \in \partial Q} = 0, \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0; \tag{1.11}$$

2) к краю мембраны приложена сила с плотностью $f_1(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \frac{f_1(x,t)}{T}, \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0; \tag{1.12}$$

3) край мембраны свободен, т.е. может свободно перемещаться по вертикальной боковой поверхности цилиндра с основанием ∂Q:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0, \;\; t > 0; \tag{1.13}$$

4) край мембраны упруго закреплён:

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial n} + Hu\right]\right|_{\partial Q} = 0, \;\; x \in \partial Q, \;\; t > 0, \tag{1.14}$$

где $H = \frac{k}{T}$.

Если колебания мембраны происходят в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости, то уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$u_{tt} + 2\nu u_t - a^2 \Delta u = \frac{f(x,t)}{\rho}, \;\; x \in Q, \;\; t > 0. \tag{1.15}$$

- **Задача нахождения стационарной температуры.**

Стационарной называется температура, которая не зависит от времени, а является функцией лишь пространственных переменных. Вследствие этого уравнение (1.1) принимает вид уравнения Пуассона

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{c\rho a^2}. \tag{1.16}$$

Для уравнения (1.16) ставится краевая задача: найти решение уравнения (1.16) в области Q, удовлетворяющее на границе области Q условию

$$\left.\left[\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u\right]\right|_{\partial Q} = u_1(x), \;\; x \in \partial Q, \tag{1.17}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — неотрицательные функции, одновременно не обращающиеся в ноль.

Примеры граничных условий в задаче нахождения стационарной температуры те же, что и в нестационарном случае ((1.4)–(1.7)), но правые части граничных условий не зависят от t.

2. Метод разделения переменных для задач с однородными уравнениями и с однородными граничными условиями

Задача 2.1. *Круглая закреплённая по краю мембрана радиуса* r_0 *с центром в начале координат находится в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Коэффициент пропорциональности* $2\nu < \frac{2a\mu_1}{r_0}$, *где* μ_1 *— первый положительный ноль функции Бесселя* $J_0(\mu)$. *Изучить свободные колебания мембраны, если известно, что при* $t = 0$ *её форма имеет радиальный характер (является функцией расстояния от центра), а начальная скорость равна нулю.*

Решение. В задаче ничего не сказано о внешней силе, распределённой по поверхности мембраны. По условию задачи колебания мембраны вызваны только начальным отклонением от положения равновесия. Поэтому запишем однородное волновое уравнение в среде с сопротивлением

$$u_{tt} + 2\nu u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0. \tag{2.1}$$

В начальный момент времени известна форма мембраны

$$u|_{t=0} = u_0(r), \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2.2}$$

и начальная скорость

$$u_t|_{t=0} = 0. \tag{2.3}$$

Кроме начальных условий следует задать граничное условие. Так как край мембраны жёстко закреплён, отклонений точек мембраны на границе не происходит и граничное условие имеет вид

$$u|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0. \tag{2.4}$$

Сформулируем начально–краевую задачу. Найти функцию $u(x, y, t)$, определённую в области $x^2+y^2 \le r_0^2$, $t \ge 0$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в области $x^2 + y^2 < r_0^2$, $t > 0$, начальным условиям (2.2), (2.3) и граничному условию (2.4).

При решении задач методом Фурье переменные должны разделяться как в однородном уравнении, так и в однородных граничных условиях. В данной задаче переменные не разделяются в граничном условии (2.4). В этих случаях, как правило, используют другие независимые переменные, отражающие симметрию задачи. Граница области, в которой решается задача (окружность), является координатной линией полярной системы координат. Поэтому сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В результате получим начально–краевую задачу

$$u_{tt} + 2\nu u_t - a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] = 0, \tag{2.5}$$
$$u|_{t=0} = u_0(r), \;\; u_t|_{t=0} = 0,$$
$$u|_{r=r_0} = 0.$$

Входные данные в (2.5) (правые части уравнения, начальных и граничных условий) не зависят от φ. Поэтому решение задачи также не зависит от φ,

$$u = u(r,t), \;\; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

что приводит к упрощению уравнения:

$$u_{tt} + 2\nu u_t - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; t > 0, \tag{2.6}$$
$$u|_{t=0} = u_0(r), \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{2.7}$$
$$u_t|_{t=0} = 0, \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{2.8}$$
$$u|_{r=r_0} = 0, \;\; t \ge 0. \tag{2.9}$$

Так как точка $r = 0$ является особой точкой уравнения (2.6), следует потребовать ограниченности решения в этой точке в любой момент времени

$$\left|u|_{r=0}\right| < \infty, \;\; t \ge 0. \tag{2.10}$$

Для решения задачи (2.6)–(2.10) сначала рассмотрим вспомогательную задачу об отыскании частных решений уравнения (2.6), удовлетворяющих граничным условиям (2.9), (2.10), отличных от нуля и имеющих специальный вид

$$u(r,t) = R(r)T(t). \tag{2.11}$$

Здесь $R(r)$ — функция, зависящая только от переменной r, а $T(t)$ — функция, зависящая только от переменной t. Подставим (2.11) в уравнение (2.6):

$$T''(t)R(r) + 2\nu T'(t)R(r) = \frac{a^2}{r}T(t)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right).$$

Поделив на $a^2T(t)R(r)$, получим равенство

$$\frac{T''(t) + 2\nu T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right), \tag{2.12}$$

которое должно выполняться при всех $0 < r < r_0$, $t > 0$. Особенностью равенства (2.12) является то, что его левая часть не зависит от r, а правая не зависит от t. Такое возможно лишь в случае, когда выражения левой и правой частей не зависят от r и t и равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную $-\lambda$:

$$\frac{T''(t) + 2\nu T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\lambda.$$

Отсюда выводим

$$T''(t) + 2\nu T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda rR(r) = 0. \tag{2.14}$$

Таким образом, уравнение (2.6) распалось на два обыкновенных дифференциальных уравнения, или, как говорят, в уравнении (2.6) разделились переменные.

Подставляя произведение (2.11) в однородные граничные условия (2.9) и (2.10), будем иметь

$$|R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0. \tag{2.15}$$

Задача (2.14), (2.15) является примером задачи Штурма–Лиувилля. Те значения параметра λ, при которых задача имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями. Решить задачу Штурма–Лиувилля — значит найти все собственные значения и собственные функции. В данном пособии решение задач Штурма–Лиувилля не приводится, а указывается, где его можно найти. Выпишем собственные функции, их нормы и собственные числа задачи Штурма–Лиувилля (2.14), (2.15)([2, стр.31–33]):

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \ \ \|R_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_n), \tag{2.16}$$
$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \ \ n = 1, 2, \ldots;$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \ldots$ — положительные нули функции $J_0(\mu)$.

Подставим собственные значения λ_n в уравнение (2.13), а решения, соответствующие этим λ_n, обозначим $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + 2\nu T_n'(t) + \left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 T_n(t) = 0, \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Уравнения (2.17) являются линейными однородными с постоянными коэффициентами, соответствующие им характеристические уравнения имеют вид

$$p_n^2 + 2\nu p_n + \left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 = 0, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Поскольку корни характеристического уравнения — комплексно–сопряжённые числа $p_n = -\nu \pm i\omega_n$, где $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 - \nu^2}$, то общее решение дифференциального уравнения (2.17) имеет вид

$$T_n(t) = e^{-\nu t}[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)].$$

Согласно формуле (2.11) запишем частные решения уравнения (2.6)

$$u_n(r,t) = T_n(t) R_n(r) = e^{-\nu t}[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

В соответствии с принципом дискретной суперпозиции ряд, составленный из решений уравнения (2.6),

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,t) = \tag{2.18}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu t}[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$$

также удовлетворяет (2.6) при условии его равномерной сходимости и возможности почленного дифференцирования по r и t до второго порядка включительно. Поскольку каждое слагаемое ряда (2.18) удовлетворяет граничным условиям (2.9) и (2.10), то им же будет удовлетворять и сумма ряда, если ряд сходится равномерно по r и t в области $0 \leq r \leq r_0$, $t \geq 0$.

Подберём коэффициенты C_n и D_n так, чтобы функция, представляемая формальным рядом, удовлетворяла начальным условиям (2.7), (2.8). Продифференцируем ряд (2.18) по t:

$$u_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{-\nu e^{-\nu t}[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] + \tag{2.19}$$
$$+ e^{-\nu t}\omega_n[-C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)]\} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$$

Подставляя (2.18), (2.19) в начальные условия (2.7), (2.8), получим равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = u_0(r),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} [-\nu C_n + \omega_n D_n] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = 0,$$

которые представляют собой разложение заданных функций $u_0(r)$ и 0 в виде рядов по собственным функциям $J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. В соответствии с теоремой Стеклова [1, стр.7], заключаем, что

$$C_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^{r_0} \xi u_0(\xi) J_0\left(\frac{\mu_n \xi}{r_0}\right) d\xi \equiv \alpha_n, \tag{2.20}$$
$$-\nu C_n + \omega_n D_n = 0.$$

Определив из системы (2.20) коэффициенты C_n, D_n и подставив их в ряд (2.18), найдём решение задачи:

$$u(r,t) = e^{-\nu t} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\cos(\omega_n t) + \frac{\nu \sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Задача 2.2. *Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $u(r,0) = r^2$ в бесконечном цилиндре радиуса r_0, боковая поверхность которого теплоизолирована.*

Решение. Запишем однородное уравнение теплопроводности, так как внутри бесконечного цилиндра нет источников тепла:

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0. \tag{2.21}$$

Известно начальное распределение температуры

$$u|_{t=0} = r^2, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.22}$$

Кроме того, по условию задачи боковая поверхность цилиндра теплоизолирована. Это означает, что тепловой поток через боковую поверхность равен нулю, то есть

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=r_0} = 0, \tag{2.23}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности цилиндра.

Сформулируем начально–краевую задачу. Найти функцию $u(x, y, z, t)$, определённую в области $x^2 + y^2 \le r_0^2$, $-\infty < z < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяющую уравнению (2.21) в области $x^2 + y^2 < r_0^2$, $-\infty < z < \infty$, $t > 0$, начальному условию (2.22) и граничному условию (2.23).

Граница области, в которой решается задача, является координатной поверхностью цилиндрической системы координат. Поэтому используем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В результате замены переменных задача преобразуется к виду

$$u_t - a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0, \tag{2.24}$$
$$u|_{t=0} = r^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0.$$

Здесь учтено, что нормаль к поверхности цилиндра направлена по радиусу.

В задаче (2.24) входные данные (правые части уравнения, начального и граничного условий) не зависят от φ, z. Поэтому

$$u = u(r,t), \;\; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

и задача (2.24) упрощается:

$$u_t - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; t > 0, \tag{2.25}$$

$$u|_{t=0} = r^2, \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{2.26}$$

$$u_r|_{r=r_0} = 0, \;\; t \ge 0. \tag{2.27}$$

Точка $r = 0$ является особой точкой уравнения (2.25). Поэтому добавим условие ограниченности решения в этой точке в любой момент времени

$$|u|_{r=0}| < \infty, \;\; t \ge 0. \tag{2.28}$$

Чтобы решить начально–краевую задачу (2.25)–(2.28), сначала разделим переменные в уравнении (2.25) и граничных условиях (2.27), (2.28). С этой целью подставим произведение

$$u(r,t) = R(r)T(t) \tag{2.29}$$

в уравнение (2.25):

$$T'(t)R(r) = \frac{a^2}{r}T(t)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right).$$

Поделив на $a^2T(t)R(r)$, получим равенство

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right), \tag{2.30}$$

которое должно выполняться при всех $0 < r < r_0$, $t > 0$.

Из равенства (2.30) следует, что при фиксированном t правая часть при всех $0 < r < r_0$ сохраняет постоянное значение и при фиксированном r левая часть при всех t также сохраняет постоянное значение. Таким образом,

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\lambda.$$

Отсюда выводим

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r R(r) = 0. \tag{2.32}$$

Разделяя переменные в однородных граничных условиях (2.27) и (2.28), будем иметь

$$|R(0)| < \infty, \;\; R'(r_0) = 0. \tag{2.33}$$

Выпишем собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (2.32), (2.33)([2, стр.33–34]). Для этой задачи $\lambda_0 = 0$ является собственным значением, а $R_0(r) = 1$ — соответствующей собственной функцией, причём $\|R_0\|^2 = \frac{r_0^2}{2}$. Положительные собственные значения определяются положительными нулями функции Бесселя с индексом 1,

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \;\; J_1(\mu_n) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots, \tag{2.34}$$

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \ldots$$

Соответствующие собственные функции и их нормы имеют вид

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{2.35}$$

$$\|R_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2} J_0^2(\mu_n), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Подставим собственные значения λ_n в уравнение (2.31), а решения, соответствующие этим λ_n, обозначим $T_n(t)$:

$$T_0'(t) = 0, \;\; T_n'(t) + \left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 T_n(t) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$T_0(t) = A_0, \;\; T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Согласно формуле (2.29) запишем частные решения уравнения (2.25):

$$u_0(r,t) = T_0(t)R_0(r) = A_0,$$

$$u_n(r,t) = T_n(t)R_n(r) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Будем искать решение задачи (2.25)–(2.28) в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right). \qquad (2.36)$$

Функция (2.36) удовлетворяет уравнению (2.25) при условии равномерной сходимости ряда и возможности почленного дифференцирования по r и t до второго порядка включительно. Поскольку каждое слагаемое ряда (2.36) удовлетворяет граничным условиям (2.27) и (2.28), то им же будет удовлетворять и сумма ряда.

Чтобы определить коэффициенты A_n, воспользуемся начальным условием (2.26). Подставляя ряд (2.36) в начальное условие (2.26), получим равенство

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = r^2.$$

Применяя теорему Стеклова [1, стр.7], заключаем, что

$$A_0 = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{r_0^2}{2},$$

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^{r_0} r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \quad n = 1, 2, .$$

Вычислим A_n, сделав в интеграле замену $\xi = \frac{\mu_n r}{r_0}$ и воспользовавшись табличным интегралом ([2, стр.7, формула (3.11)]):

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{r_0^4}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} \xi^3 J_0(\xi) d\xi =$$
$$= \frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{r_0^2}{\mu_n^4} [2\xi^2 J_0(\xi) + (\xi^3 - 4\xi) J_1(\xi)]|_0^{\mu_n} =$$
$$= \frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{r_0^2}{\mu_n^4} \cdot 2\mu_n^2 J_0(\mu_n) = \frac{4r_0^2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}.$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд (2.36) и запишем решение задачи:

$$u(r,t) = \frac{r_0^2}{2} + 4r_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Задача 2.3. *Найти стационарную температуру $u(r,z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания r_0 и высотой h, если температура нижнего основания зависит только от r (расстояния от оси цилиндра), верхнее основание теплоизолировано, а боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры.*

Решение. Запишем однородное уравнение теплопроводности

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0.$$

Так как температура в каждой точке цилиндра установилась (не меняется с течением времени), то

$$u_t = 0$$

и уравнение принимает вид

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2.37}$$

Поскольку верхнее основание цилиндра теплоизолировано, то тепловой поток через верхнее основание равен нулю, то есть

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{z=h} = 0, \tag{2.38}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к верхнему основанию цилиндра.

На боковой поверхности цилиндра происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю. В соответствии с законом Ньютона граничное условие теплообмена с окружающей средой имеет вид (1.7). Так как температура внешней среды равна нулю, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + Hu\right)\bigg|_{r=r_0} = 0, \tag{2.39}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности цилиндра.

Температура нижнего основания зависит только от r (расстояния от оси цилиндра). Соответствующее граничное условие имеет вид

$$u|_{z=0} = u_0(r), \;\; r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.40}$$

Сформулируем краевую задачу. Найти функцию $u(x,y,z)$, определённую в области $x^2 + y^2 \le r_0^2$, $0 \le z \le h$, удовлетворяющую уравнению (2.37) и граничным условиям (2.38)–(2.40).

Область (цилиндр), в которой решается задача, ограничена координатными поверхностями $z = 0$, $z = h$, $r = r_0$ цилиндрической системы координат. В результате перехода к цилиндрическим координатам получим краевую задачу

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{2.41}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + Hu\right)\bigg|_{r=r_0} = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0, \;\; u|_{z=0} = u_0(r).$$

Здесь учтено, что нормаль к боковой поверхности цилиндра направлена по радиусу, а нормаль к верхнему основанию направлена вдоль оси z.

Так как правые части уравнения и граничных условий не зависят от φ, решение задачи не зависит от φ,

$$u = u(r, z), \;\; \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

Кроме того, в особой точке уравнения (2.42), запишем условие ограниченности решения. Таким образом, $u(r, z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; 0 < z < h, \tag{2.42}$$

и граничным условиям

$$u_z|_{z=h} = 0, \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{2.43}$$

$$u|_{z=0} = u_0(r), \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{2.44}$$

$$(u_r + Hu)|_{r=r_0} = 0, \;\; 0 \le z \le h, \tag{2.45}$$

$$|u|_{r=0}| < \infty, \;\; 0 \le z \le h. \tag{2.46}$$

Краевую задачу (2.42)–(2.46) требуется решить внутри прямоугольника, изображённого на рис. 2.1.

В задаче (2.42)–(2.46) нет начальных условий. В этом случае выбирается пара граничных условий на параллельных прямых за основные граничные условия. С другой парой граничных условий при решении методом разделения переменных поступают как с начальными условиями. В данной задаче условия на сторонах прямоугольника $r = 0$ и $r = r_0$ являются однородными. Поэтому за основные граничные условия возьмём именно их.

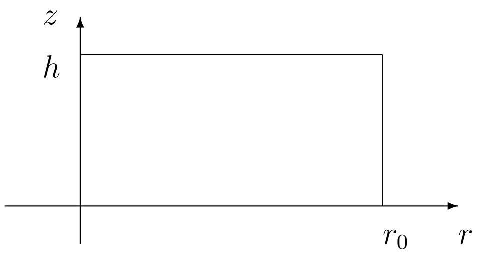

Рис. 2.1. Область интегрирования уравнения (2.42)

Разделим переменные в уравнении (2.42) и граничных условиях (2.45), (2.46). Для этого подставим произведение

$$u(r,z) = R(r)Z(z) \tag{2.47}$$

в уравнение (2.42) и граничные условия (2.45), (2.46).

В результате получим

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \tag{2.48}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r R(r) = 0; \tag{2.49}$$

$$|R(0)| < \infty, \;\; R'(r_0) + HR(r_0) = 0. \tag{2.50}$$

Выпишем собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (2.49), (2.50)([2, стр.34–36]). Собственные числа определяются соотношениями

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0'(\mu)\mu + Hr_0 J_0(\mu) = 0$. Соответствующие собственные функции и их нормы имеют вид

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{2.51}$$

$$\|R_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2}\left[1 + \frac{H^2 r_0^2}{\mu_n^2}\right] J_0^2(\mu_n), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Подставим собственные значения λ_n в уравнение (2.48), а решения, соответствующие этим λ_n, обозначим $Z_n(z)$:

$$Z_n''(z) - \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 Z_n(z) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

Общие решения этих уравнений запишем в виде

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right), \; n = 1, 2, \ldots$$

Здесь в качестве фундаментальной системы решений уравнения (2.52) использовались $\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right)$ и $\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right)$. Первая функция удовлетворяет условию

$$Z_n'(h) = 0, \tag{2.53}$$

а вторая — условию

$$Z_n(0) = 0. \tag{2.54}$$

Условия (2.53), (2.54) — это однородные условия, соответствующие граничным условиям (2.43), (2.44). При таком выборе фундаментальной системы решений не приходится в дальнейшем решать системы уравнений для коэффициентов A_n и B_n и упрощать решение.

Запишем частные решения задачи (2.42), (2.45), (2.46), имеющие вид (2.47):

$$\begin{gathered} u_n(r, z) = Z_n(z) R_n(r) = \\ = \left[A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right)\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \\ n = 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

В соответствии с принципом дискретной суперпозиции составим новые решения уравнения (2.42), удовлетворяющие условиям (2.45), (2.46):

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, z) = \tag{2.55}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right)\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Среди решений (2.55) выберем такое, которое удовлетворяют условиям (2.43), (2.44). Продифференцируем ряд (2.55) по z:

$$u_z(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{r_0}\left[A_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right) + \right. \tag{2.56}$$

$$\left. +B_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right)\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Подставляя (2.55) и (2.56) в граничные условия (2.43) и (2.44), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n h}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = u_0(r), \tag{2.57}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{r_0} B_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = 0. \tag{2.58}$$

Отсюда по формулам [1, (2.4)] найдём, что

$$A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n h}{r_0}\right) = \tag{2.59}$$

$$= \frac{2\mu_n^2}{r_0^2(\mu_n^2 + H^2 r_0^2) J_0^2(\mu_n)} \int\limits_0^{r_0} r u_0(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr \equiv \alpha_n,$$

$$\frac{\mu_n}{r_0} B_n = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Подставляя коэффициенты A_n и B_n в ряд (2.55), получим решение задачи:

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n(z-h)}{r_0}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n h}{r_0}\right)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

3. Метод Фурье для неоднородных уравнений с однородными граничными условиями

Задача 3.1. *Исследовать колебания закреплённой по краю круглой мембраны радиуса r_0 с центром в начале координат. Колебания вызваны внешней силой, равномерно распределённой с плотностью $q(t) = A \sin \omega t$*

по площади кольца $r_1 < r < r_2$ ($\omega \neq \frac{a\mu_n}{r_0}$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные нули функции Бесселя $J_0(\mu)$).

Решение. По условию задачи колебания мембраны вызваны внешней силой. Поэтому запишем неоднородное волновое уравнение

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = \frac{f(r,t)}{\rho}, \tag{3.1}$$

где ρ — поверхностная плотность мембраны, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$f(r,t) = \begin{cases} A\sin\omega t, \ r_1 < r < r_2; \\ 0, \ 0 < r < r_1 \text{ или } r_2 < r < r_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Поскольку о начальной скорости и начальном отклонении в задаче ничего не сказано, то предполагается, что они равны нулю, т.е.

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3.3}$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \tag{3.4}$$

и колебания мембраны вызваны только внешней силой.

Кроме начальных условий следует задать граничное условие. Это условие для жёстко закреплённого края мембраны имеет вид

$$u|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0. \tag{3.5}$$

Сформулируем начально–краевую задачу. Найти функцию $u(x,y,t)$, определённую в области $x^2+y^2 \leq r_0^2$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению (3.1) в области $x^2 + y^2 < r_0^2$, $t > 0$, начальным условиям (3.3), (3.4) и граничному условию (3.5).

Будем использовать полярную систему координат, так как мембрана круглая. Выпишем уравнение (3.1), начальные условия (3.3) и (3.4), и граничное условие (3.5) в полярной системе координат

$$u_{tt} - a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] = \frac{f(r,t)}{\rho}, \tag{3.6}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{r=r_0} = 0.$$

В силу того, что правая часть уравнения (3.6) не зависит от φ, решение задачи также не зависит от φ,

$$u = u(r,t), \ \ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

и задача (3.6) упрощается:

$$u_{tt} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{f(r,t)}{\rho},\;\; 0 < r < r_0,\;\; t > 0, \tag{3.7}$$

$$u|_{t=0} = 0,\;\; 0 \le r \le r_0, \tag{3.8}$$

$$u_t|_{t=0} = 0,\;\; 0 \le r \le r_0, \tag{3.9}$$

$$u|_{r=r_0} = 0,\;\; t \ge 0. \tag{3.10}$$

Для уравнения (3.7) с особой точкой $r = 0$ следует добавить условие ограниченности решения в этой точке в любой момент времени

$$|u|_{r=0}| < \infty,\;\; t \ge 0. \tag{3.11}$$

Решение задачи для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями ищется в виде ряда по подходящей системе собственных функций. Чтобы определить систему собственных функций, подходящую для решения задачи (3.7)–(3.11) рассмотрим вспомогательную краевую задачу о нахождении нетривиальных решений специального вида

$$v(r,t) = R(r)T(t), \tag{3.12}$$

однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.7),

$$v_{tt} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0,\;\; 0 < r < r_0,\;\; t > 0, \tag{3.13}$$

удовлетворяющих граничным условиям (3.10), (3.11),

$$v|_{r=r_0} = 0,\;\; t \ge 0, \tag{3.14}$$

$$|v|_{r=0}| < \infty,\;\; t \ge 0. \tag{3.15}$$

Подставляя (3.12) в (3.13)–(3.15), будем иметь

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r R(r) = 0, \tag{3.16}$$

$$|R(0)| < \infty,\;\; R(r_0) = 0. \tag{3.17}$$

Задача Штурма–Лиувилля (3.16), (3.17) уже использовалась при решении задачи 2.1. Её собственные функции, их нормы и собственные числа определяются формулами (2.16).

Полное решение вспомогательной задачи (3.13)–(3.15) не требуется для решения начально–краевой задачи (3.7)–(3.11). В дальнейшем используются только собственные функции (2.16). Поскольку собственные функции образуют полную ортогональную систему, решение $u(r,t)$ задачи (3.7)–(3.11) представим в виде ряда:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) R_n(r). \tag{3.18}$$

Ряд (3.18) удовлетворяет граничным условиям (3.10), (3.11). Подберём функции $C_n(t)$ так, чтобы ряд удовлетворял уравнению (3.7) и начальным условиям (3.8), (3.9).

Подставив ряд (3.18) в уравнение (3.7), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t) R_n(r) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(t)}{r} \frac{d}{dr}(r R_n'(r)) = \frac{f(r,t)}{\rho}. \tag{3.19}$$

Так как функция $R_n(r)$ является решением уравнения (3.16), в котором $\lambda = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2$, то имеет место тождество

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r R_n'(r)) = -\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 R_n(r). \tag{3.20}$$

Учитывая (3.20) и используя обозначение $\omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$, преобразуем (3.19) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n''(t) + \left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 C_n(t) \right] R_n(r) = \frac{f(r,t)}{\rho}.$$

Данное равенство можно рассматривать как разложение заданной функции $\frac{f(r,t)}{\rho}$ в ряд по собственным функциям (2.16). Коэффициенты разложения с одной стороны выражаются через функции $C_n(t)$, с другой определяются формулами [1, (2.4)]. Поэтому

$$C_n''(t) + \omega_n^2 C_n(t) = \frac{1}{\|R_n\|^2} \int_0^{r_0} \frac{f(r,t)}{\rho} r R_n(r) dr. \tag{3.21}$$

Используя явный вид функции $f(r,t)$ (формула (3.2)), а также собственных функций и их норм (формулы (2.16)), запишем

$$C_n''(t) + \omega_n^2 C_n(t) = \frac{2A \sin \omega t}{r_0^2 J_1^2(\mu_n) \rho} \int_{r_1}^{r_2} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr. \tag{3.22}$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части данного уравнения, сделав замену $z = \frac{\mu_n r}{r_0}$ и применив формулу [2, (3.9)]:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \frac{r_0^2}{\mu_n^2} \int\limits_{\frac{\mu_n r_1}{r_0}}^{\frac{\mu_n r_2}{r_0}} z J_0(z) dz =$$

$$= \frac{r_0}{\mu_n}\left[r_2 J_1\left(\frac{\mu_n r_2}{r_0}\right) - r_1 J_1\left(\frac{\mu_n r_1}{r_0}\right)\right].$$

Введём обозначение

$$M_n = \frac{2A}{J_1^2(\mu_n)\rho\mu_n r_0}\left[r_2 J_1\left(\frac{\mu_n r_2}{r_0}\right) - r_1 J_1\left(\frac{\mu_n r_1}{r_0}\right)\right] \tag{3.23}$$

и перепишем уравнение (3.22) в виде

$$\mathrm{C}_n''(t) + \omega_n^2 C_n(t) = M_n \sin\omega t. \tag{3.24}$$

Подставив ряд (3.18) в начальные условия (3.8), (3.9), получим, что

$$C_n(0) = 0, \tag{3.25}$$

$$C_n'(0) = 0. \tag{3.26}$$

Запишем общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.24):

$$C_n^{\text{оо}}(t) = B_n \cos\omega_n t + A_n \sin\omega_n t. \tag{3.27}$$

Частное решение $C_n^{\text{чн}}$ неоднородного уравнения (3.24) будем искать в виде

$$C_n^{\text{чн}}(t) = D_n \sin\omega t.$$

Подставив $C_n^{\text{чн}}$ в уравнение (3.24), получим, что

$$D_n[-\omega^2 + \omega_n^2]\sin\omega t = M_n \sin\omega t.$$

Отсюда

$$D_n = \frac{M_n}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

Таким образом,

$$C_n^{\text{чн}}(t) = \frac{M_n \sin\omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}. \tag{3.28}$$

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения (3.28):

$$C_n(t) = B_n \cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t + \frac{M_n \sin \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}. \qquad (3.29)$$

Коэффициенты A_n, B_n находим из начальных условий (3.25), (3.26). Подставляя функцию (3.29) в условия (3.25), (3.26), получим

$$B_n = 0, \qquad (3.30)$$

$$A_n = -\frac{M_n \omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}. \qquad (3.31)$$

Учитывая (3.30), (3.31), из (3.29) найдём решение задачи (3.24)–(3.26):

$$C_n(t) = \frac{M_n}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}[\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t].$$

В соответствии с (3.18), запишем теперь ответ задачи:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}[\omega_n \sin \omega t - \omega \sin \omega_n t] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right). \qquad (3.32)$$

Здесь коэффициенты M_n определяются формулами (3.23).

Заметим, что решение (3.32) можно представить в виде суммы двух рядов. Обе представленные рядами функции удовлетворяют однородным граничным условиям (3.10), (3.11), но различным уравнениям: первая — неоднородному уравнению (3.7), а вторая — соответствующему однородному уравнению. Так как первая функция имеет специальный вид

$$u_{\text{ч}}(r,t) = g(r) \sin \omega t, \qquad (3.33)$$

то сумму первого ряда, члены которого зависят только от r, можно найти в явном виде.

Подставив функцию (3.33) в уравнение (3.7) и в граничные условия (3.10), (3.11), получим, что $g(r)$ — решение краевой задачи

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg(r)}{dr}\right) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 g(r) = -\frac{A}{a^2\rho}\chi(r), \quad 0 < r < r_0; \qquad (3.34)$$

$$|g(0)| < \infty; \qquad (3.35)$$

$$g(r_0) = 0. \qquad (3.36)$$

Здесь через $\chi(r)$ обозначена характеристическая функция отрезка $[r_1, r_2]$, т.е. функция, равная единице на отрезке $[r_1, r_2]$, и равная нулю вне этого отрезка. Иными словами, правая часть уравнения (3.34) задаётся разными выражениями на разных участках интервала $(0, r_0)$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.34), можно записать в виде комбинации функций Бесселя и Неймана [2, (4.2)]. Решение неоднородного уравнения (3.34) будем искать методом вариации произвольных постоянных

$$g(r) = C_1(r) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2(r) N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right). \tag{3.37}$$

Найдём производную:

$$\begin{aligned} g'(r) = C_1'(r) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2'(r) N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) + \\ + \frac{\omega}{a}\left(C_1(r) J_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2(r) N_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Выберем функции $C_1(r)$ и $C_2(r)$ так, чтобы

$$C_1'(r) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2'(r) N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) = 0. \tag{3.39}$$

Тогда

$$g'(r) = \frac{\omega}{a}\left(C_1(r) J_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2(r) N_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right). \tag{3.40}$$

Вычислим вторую производную $g''(r)$ и подставим $g'(r)$ и $g''(r)$ в уравнение (3.34). Поскольку $J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)$ и $N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)$ удовлетворяют однородному уравнению, то

$$\frac{\omega}{a}(C_1'(r) J_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right) + C_2'(r) N_0'\left(\frac{\omega r}{a}\right)) = -\frac{A}{a^2\rho}\chi(r). \tag{3.41}$$

Функции $C_1'(r)$ и $C_2'(r)$ определяются из системы (3.39), (3.41). Определитель системы совпадает с определителем Вронского для функций Бесселя и Неймана [3, стр. 255],

$$\Delta = W\left(J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right), N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right) = \frac{2}{\pi r}.$$

Из системы уравнений (3.39), (3.41) по формулам Крамера найдём

$$C_1'(r) = \frac{\pi r A}{2a^2\rho}\chi(r) N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right), \tag{3.42}$$

$$C_2'(r) = -\frac{\pi r A}{2a^2\rho}\chi(r) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right). \tag{3.43}$$

Сформулируем краевые условия для функций$C_1(r)$ и $C_2(r)$. Из условия ограниченности (3.35) для функции (3.37) следует, что

$$C_2(0) = 0, \tag{3.44}$$

так как функция $N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)$ имеет в точке $r = 0$ логарифмическую особенность [2, (4.13)]. Подставляя (3.37) в граничное условие (3.36), получим

$$C_1(r_0) J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) + C_2(r_0) N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) = 0. \tag{3.45}$$

Отсюда

$$C_1(r_0) = -\frac{C_2(r_0) N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}. \tag{3.46}$$

Интегрируя (3.43) по промежутку $[0, r]$, с учётом (3.44) будем иметь

$$C_2(r) = -\frac{\pi A}{2a^2\rho}\int\limits_0^r \xi\chi(\xi) J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right) d\xi. \tag{3.47}$$

Подставляя в интеграл (3.47) характеристическую функцию $\chi(\xi)$ и пользуясь свойством аддитивности интеграла, получим

$$\int\limits_0^r \xi\chi(\xi) J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right) d\xi = \begin{cases} 0, \ 0 \le r < r_1; \\ \int_{r_1}^{r} \xi J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right) d\xi, \ r_1 \le r < r_2; \\ \int_{r_1}^{r_2} \xi J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right) d\xi, \ r_2 \le r \le r_0. \end{cases} \tag{3.48}$$

В интегралах (3.48) сделаем замену $z = \frac{\omega}{a}\xi$, применим формулу [2, (3.9)] и введём обозначение

$$\int_{r_1}^{r_2} \xi J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right) d\xi = \frac{a}{\omega}\left[r_2 J_1\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - r_1 J_1\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right] = \alpha\frac{a}{\omega}.$$

В результате получим

$$C_2(r) = \begin{cases} 0, \ 0 \le r < r_1; \\ -\frac{\pi A}{2a\omega\rho}\left[r J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right) - r_1 J_1\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right], \ r_1 \le r < r_2; \\ -\frac{\pi A}{2a\omega\rho}\alpha, \ r_2 \le r \le r_0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Из (3.49) следует, что

$$C_2(r_0) = -\frac{\pi A}{2a\omega\rho}\alpha. \tag{3.50}$$

Поэтому, в соответствии с (3.46),

$$C_1(r_0) = \frac{\pi A\alpha N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{2a\omega\rho J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}. \tag{3.51}$$

Учитывая (3.51), проинтегрируем (3.42) по промежутку $[r, r_0]$:

$$C_1(r) = -\frac{\pi A}{2a^2\rho}\int\limits_r^{r_0} \xi\chi(\xi)N_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right)d\xi + \frac{\pi A\alpha N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{2a\omega\rho J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}. \tag{3.52}$$

Интеграл в (3.52) вычисляется аналогично интегралу (3.48). В результате получим

$$\int\limits_r^{r_0} \xi\chi(\xi)N_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right)d\xi = \begin{cases} \int_{r_1}^{r_2}\xi J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right)d\xi, \ 0 \le r < r_1; \\ \int_{r}^{r_2}\xi J_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right)d\xi, \ r_1 \le r < r_2; \\ 0, \ r_2 \le r \le r_0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Формула [2, (3.9)] справедлива для любой цилиндрической функции. Обозначим

$$\int_{r_1}^{r_2} \xi N_0\left(\frac{\omega\xi}{a}\right)d\xi = \frac{a}{\omega}\left[r_2N_1\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - r_1N_1\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right] = \beta\frac{a}{\omega}.$$

Тогда после вычисления интегралов в (3.53) и подстановки их в (3.52) найдём

$$C_1(r) = \begin{cases} \frac{\pi A}{2a\omega\rho}\left(-\beta + \alpha\frac{N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\right), \ 0 \le r < r_1; \\ \frac{\pi A}{2a\omega\rho}\left(-r_2N_1\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) + rN_1\left(\frac{\omega r}{a}\right) + \alpha\frac{N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\right), \ r_1 \le r < r_2; \\ \frac{\pi A\alpha N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{2a\omega\rho J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}, \ r_2 \le r \le r_0. \end{cases} \tag{3.54}$$

Осталось подставить функции (3.49), (3.54) в (3.37). В результате получим

$$g(r) = \begin{cases} \frac{\pi A}{2a\omega\rho}\left(-\beta + \alpha\frac{N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\right)J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right), \ 0 \le r < r_1; \\ \frac{\pi A}{2a\omega\rho}\Bigg\{\left(-r_2N_1\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) + \alpha\frac{N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\right)J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) + \\ +r_1J_1\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)N_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) - \frac{2a}{\pi\omega}\Bigg\}, \ r_1 \le r < r_2; \\ \frac{\pi A\alpha}{2a\omega\rho}\left(\frac{N_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)} - N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right), \ r_2 \le r \le r_0. \end{cases} \tag{3.55}$$

При этом использовалась известная формула [8, стр. 983]

$$N_1(x)J_0(x) - J_1(x)N_0(x) = -\frac{2}{\pi x}.$$

Решение (3.32) перепишем в виде

$$u(r,t) = g(r)\sin\omega t - \omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Задача 3.2. *Рассмотрим задачу 3.1 в случае, когда частота ω внешней силы совпадает с одной из собственных частот колебаний. Для определённости, пусть $\omega = \omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$.*

Решение. Решение данной задачи может быть получено из формулы (3.32). Для этого (3.32) перепишем, изменив переменную суммирования на k и выделив слагаемое с индексом $k = n$:

$$u(r,t) = \frac{M_n}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}[\omega_n\sin\omega t - \omega\sin\omega_n t]J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) + \tag{3.56}$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{M_k}{\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)}[\omega_k\sin\omega t - \omega\sin\omega_k t]J_0\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right).$$

Решение задачи 3.2 находится из (3.56) предельным переходом при $\omega \to \omega_n$. Вычислим предел первого слагаемого при $\omega \to \omega_n$ по правилу Лопиталя. В результате получим

$$\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{M_n}{\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}[\omega_n\sin\omega t - \omega\sin\omega_n t]J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) =$$
$$= \frac{M_n}{\omega_n}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{t\omega_n\cos\omega t - \sin\omega_n t}{-2\omega} =$$
$$= \frac{M_n}{2\omega_n}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - t\cos\omega_n t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Второе слагаемое (3.56) является функцией, непрерывной при $\omega = \omega_n$, т.к. ряд сходится равномерно по ω при $|\omega - \omega_n| \leq \frac{\delta}{2}$, где $\delta = \min\{\omega_{n+1} - \omega_n, \omega_n - \omega_{n-1}\}$. Отсюда получаем, что решение задачи в случае резонанса имеет вид

$$u(r,t) = \frac{M_n}{2\omega_n}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - t\cos\omega_n t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) +$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{M_k}{\omega_k(\omega_k^2-\omega_n^2)}[\omega_k\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega_k t]J_0\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right).$$

Задача 3.3. *В цилиндре с радиусом основания r_0 и высотой h происходит тепловыделение с постоянной плотностью Q. Найти стационарную температуру $u(r,z)$, если на верхнем основании происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, нижнее основание поддерживается при постоянной температуре T_0, а боковая поверхность цилиндра не пропускает тепла.*

Решение. Запишем неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \frac{Q}{c\rho},$$

где c — коэффициент теплоёмкости материала цилиндра, а ρ — плотность материала цилиндра.

Так как температура в каждой точке цилиндра установилась (не меняется с течением времени), то

$$u_t = 0$$

и уравнение принимает вид

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{Q}{c\rho a^2}. \tag{3.57}$$

Пользуясь условиями задачи, запишем граничные условия: на верхнем основании

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + Hu\right)\bigg|_{z=h} = 0; \tag{3.58}$$

на нижнем основании

$$u|_{z=0} = T_0; \tag{3.59}$$

на боковой поверхности цилиндра

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=r_0} = 0; \tag{3.60}$$

где n — единичный вектор внешней нормали соответственно к верхнему основанию и к боковой поверхности цилиндра.

После перехода к цилиндрической системе координат получим уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{Q}{c\rho a^2}, \tag{3.61}$$

и краевые условия

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+Hu\right)\bigg|_{z=h}=0,\ \ u|_{z=0}=T_0,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=0.$$

Поскольку задача обладает осевой симметрией, решение не зависит от φ,

$$u=u(r,z),\ \ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=0.$$

Поэтому уравнение (3.61) упрощается, и краевая задача принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{Q}{c\rho a^2},\ \ 0<r<r_0,\ \ 0<z<h, \tag{3.62}$$

$$[u_z+Hu]|_{z=h}=0,\ \ 0\le r\le r_0, \tag{3.63}$$

$$u|_{z=0}=T_0,\ \ 0\le r\le r_0, \tag{3.64}$$

$$u_r|_{r=r_0}=0,\ \ 0\le z\le h, \tag{3.65}$$

$$|u|_{r=0}|<\infty,\ \ 0\le z\le h. \tag{3.66}$$

Здесь учтено, что точка $r=0$ является особой точкой уравнения (3.62).

Краевую задачу (3.62)–(3.66) требуется решить внутри прямоугольника, изображённого на рис. 2.1. В задаче есть пара однородных граничных условий на параллельных сторонах прямоугольника $r=0$ и $r=r_0$. Эти граничные условия будем рассматривать как основные.

Найдём систему собственных функций, которую будем использовать при решении краевой задачи (3.62)–(3.66). С этой целью разделим переменные в соответствующем однородном уравнении

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,\ \ 0<r<r_0,\ \ 0<z<h, \tag{3.67}$$

и однородных граничных условиях

$$v_r|_{r=r_0}=0,\ \ 0\le z\le h, \tag{3.68}$$

$$|v|_{r=0}|<\infty,\ \ 0\le z\le h. \tag{3.69}$$

Подставляя

$$v(r,z)=R(r)Z(z) \tag{3.70}$$

в уравнение (3.67) и в условия (3.68), (3.69), получим

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \tag{3.71}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r R(r) = 0; \tag{3.72}$$

$$|R(0)| < \infty, \;\; R'(r_0) = 0. \tag{3.73}$$

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (3.72), (3.73) выписаны на стр.15 (формулы (2.34), (2.35)).

Будем искать решение $u(r,z)$ краевой задачи (3.62)–(3.66) в виде

$$u(r,z) = C_0(z)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z)R_n(r). \tag{3.74}$$

Подставим данный ряд в уравнение (3.62):

$$C_0''(z)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_n(z)}{r}\frac{d}{dr}(rR_n'(r)) + C_n''(z)R_n(r)\right] = -\frac{Q}{c\rho a^2}. \tag{3.75}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rR_n'(r)) \equiv -\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 R_n(r)$$

для собственной функции $R_n(r)$, равенство (3.75) преобразуем к виду

$$C_0''(z)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n''(z) - \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 C_n(z)\right] R_n(r) = -\frac{Q}{c\rho a^2}.$$

Отсюда, применив теорему Стеклова, получим, что

$$C_0''(z) = -\frac{Q}{c\rho a^2}\frac{1}{\|R_0\|^2}\int_0^{r_0} rR_0(r)dr,$$

$$C_n''(z) - \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 C_n(z) = -\frac{Q}{c\rho a^2}\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_0^{r_0} rR_n(r)dr, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Вычислим интегралы, стоящие в правых частях полученных уравнений. Прежде всего,

$$-\frac{Q}{c\rho a^2}\frac{1}{\|R_0\|^2}\int_0^{r_0} rR_0(r)dr = -\frac{Q}{c\rho a^2}\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} rdr = -\frac{Q}{c\rho a^2}.$$

Второй интеграл перепишем в виде

$$\int\limits_0^{r_0} rR_n(r)dr = \int\limits_0^{r_0} rR_n(r)R_0(r)dr,$$

что возможно, поскольку $R_0(r) \equiv 1$. Воспользовавшись свойством ортогональности различных собственных функций, заключаем, что

$$\int\limits_0^{r_0} rR_n(r)dr = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, уравнения на функции $C_0(z)$, $C_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, принимают вид

$$C_0''(z) = -\frac{Q}{c\rho a^2},$$

$$C_n''(z) - \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 C_n(z) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Запишем общие решения этих уравнений:

$$C_0(z) = -\frac{Q}{2c\rho a^2}z^2 + A_0 + B_0 z, \tag{3.76}$$

$$C_n(z) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{r_0}\right), \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{3.77}$$

Подставив ряд (3.74) в граничные условия (3.63) и (3.64), получим, что

$$C_0(0)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)R_n(r) = T_0,$$

$$(C_0'(h) + HC_0(h))R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n'(h) + HC_n(h))R_n(r) = 0.$$

Отсюда

$$C_0(0) = T_0, \;\; C_0'(h) + HC_0(h) = 0; \tag{3.78}$$

$$C_n(0) = 0, \;\; C_n'(h) + HC_n(h) = 0. \tag{3.79}$$

Из граничных условий (3.78) и (3.79) найдём коэффициенты функций (3.76) и (3.77):

$$A_0 = T_0, \;\; B_0 = \frac{\frac{Qh(2+Hh)}{2c\rho a^2} - HT_0}{1 + Hh}, \;\; A_n = 0, \;\; B_n = 0.$$

С учётом этих коэффициентов,

$$C_0(z) = -\frac{Q}{2c\rho a^2}z^2 + \frac{\frac{Qh(2+Hh)}{2c\rho a^2} - HT_0}{1+Hh}z + T_0, \;\; C_n(z) = 0. \tag{3.80}$$

После подстановки (3.80) в ряд (3.74), получим решение задачи

$$u(r,z) = C_0(z) = -\frac{Q}{2c\rho a^2}z^2 + \frac{\frac{Qh(2+Hh)}{2c\rho a^2} - HT_0}{1+Hh}z + T_0.$$

4. Неоднородные граничные условия

Задача 4.1. *Решить задачу о колебаниях круглой мембраны радиуса r_0 с центром в начале координат, к краю которой приложена внешняя сила, вызывающая смещение края по закону $A\sin\omega t$, $\omega \neq \frac{a\mu_n}{r_0}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \ldots$ — положительные нули функции $J_0(\mu)$. Начальное отклонение и начальная скорость мембраны равны нулю.*

Решение. Сформулируем начально–краевую задачу. Найти функцию $u(x,y,t)$, определённую в области $x^2+y^2 \leq r_0^2$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{4.1}$$

в области $x^2+y^2 < r_0^2$, $t > 0$, начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \tag{4.2}$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \tag{4.3}$$

и граничному условию

$$u|_{x^2+y^2=r_0^2} = A\sin\omega t. \tag{4.4}$$

Перейдя в задаче к полярным координатам и учтя осевую симметрию задачи, получим начально–краевую задачу

$$u_{tt} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; t > 0, \tag{4.5}$$

$$u|_{t=0} = 0, \;\; 0 \leq r \leq r_0, \tag{4.6}$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \;\; 0 \leq r \leq r_0, \tag{4.7}$$

$$u|_{r=r_0} = A\sin\omega t, \;\; t \geq 0, \tag{4.8}$$

$$\left|u|_{r=0}\right| < \infty, \;\; t \geq 0. \tag{4.9}$$

Здесь добавлено условие (4.9), так как точка $r = 0$ является особой точкой уравнения (4.5).

Сведём задачу (4.5)–(4.9) с неоднородным граничным условием (4.8) к задаче с однородными граничными условиями. Для этого представим решение в виде

$$u(r,t) = v(r,t) + w(r,t),$$

где функция $v(r,t)$ удовлетворяет граничным условиям (4.8), (4.9), а $w(r,t)$ — новая неизвестная функция. Так как существует бесчисленное множество функций, удовлетворяющих граничным условиям (4.8), (4.9), то можно получить различные представления единственного решения задачи (4.5)–(4.9). В данной задаче удобно функцию v выбрать удовлетворяющей не только граничным условиям (4.8), (4.9), но и уравнению (4.5):

$$v_{tt} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0, \tag{4.10}$$

$$v|_{r=r_0} = A\sin\omega t, \tag{4.11}$$

$$|v|_{r=0}| < \infty. \tag{4.12}$$

Среди решений (4.10)–(4.12) выделим функцию специального вида

$$v(r,t) = f(r)\sin\omega t. \tag{4.13}$$

После подстановки (4.13) в (4.10), (4.11) получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf'(r)) + \frac{\omega^2}{a^2}f(r) = 0, \tag{4.14}$$

$$f(r_0) = A, \tag{4.15}$$

$$|f(0)| < \infty. \tag{4.16}$$

Общее решение уравнения (4.14) запишем как линейную комбинацию функций Бесселя и Неймана

$$f(r) = C_1 J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right) + C_2 N_0\left(\frac{\omega}{a}r\right).$$

Так как функция Неймана неограничена в точке $r = 0$, то условие (4.16) выполняется только в случае $C_2 = 0$. Подставляя функцию

$$f(r) = C_1 J_0\left(\frac{\omega}{a}r\right)$$

в граничное условие (4.15), найдём, что

$$C_1 = \frac{A}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)}.$$

Таким образом,

$$f(r) = \frac{AJ_0\left(\frac{\omega}{a} r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)},$$

а

$$v(r,t) = \frac{AJ_0\left(\frac{\omega}{a} r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)} \sin \omega t. \tag{4.17}$$

Сформулируем начально–краевую задачу для функции $w(r,t)$. Поскольку функции $u(r,t)$ и $v(r,t)$ удовлетворяют однородному уравнению (4.5) и одним и тем же граничным условиям (4.8), (4.9), то

$$w(r,t) \equiv u(r,t) - v(r,t)$$

также удовлетворяет тому же уравнению,

$$w_{tt} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; t > 0, \tag{4.18}$$

но однородным граничным условиям

$$w|_{r=r_0} = 0, \tag{4.19}$$

$$|w|_{r=0}| < \infty. \tag{4.20}$$

Учитывая (4.6), (4.7) и явный вид (4.17) функции $v(r,t)$, заключаем, что

$$w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 0, \tag{4.21}$$

$$w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = \frac{-A\omega}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)} J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right). \tag{4.22}$$

Таким образом, решение задачи (4.5)–(4.22) свелось к решению задачи (4.18)–(4.20) с однородными граничными условиями. В результате разделения переменных в уравнении (4.18) и граничных условиях (4.19), (4.20) найдём семейство решений (см. стр.23),

$$w_n(r,t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right), \;\; n = 1, 2, \ldots, \tag{4.23}$$

где $\omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$.

В соответствии с принципом дискретной суперпозиции из решений уравнения (4.18) составим новое решение

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right). \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в начальные условия (4.21), (4.22), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) = -\frac{A\omega}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)} J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right).$$

Отсюда

$$A_n = 0, \quad (4.25)$$

$$B_n = -\frac{2A\omega \int\limits_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr}{\omega_n J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right) r_0^2 J_1^2(\mu_n)}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой [2, (3.12)]:

$$\int\limits_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr = \left.\frac{\frac{\mu_n}{r_0} r J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_0'\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) - \frac{\omega}{a} r J_0'\left(\frac{\omega}{a} r\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right)}{\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\mu_n^2}{r_0^2}}\right|_0^{r_0} =$$

$$= \frac{a\omega_n r_0 J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right) J_1(\mu_n)}{\omega^2 - \omega_n^2}.$$

Таким образом,

$$B_n = -\frac{2Aa\omega}{r_0(\omega^2 - \omega_n^2) J_1(\mu_n)}. \quad (4.26)$$

С учётом (4.25), (4.26) запишем ряд (4.24)

$$w(r,t) = -\frac{2Aa\omega}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) \sin\omega_n t}{(\omega^2 - \omega_n^2) J_1(\mu_n)}$$

и решение задачи (4.5)–(4.9)

$$u(r,t) = \frac{A J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} r_0\right)} \sin\omega t - \frac{2Aa\omega}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) \sin\omega_n t}{(\omega^2 - \omega_n^2) J_1(\mu_n)}.$$

Задача 4.2. *Определите температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0, если его начальная температура равна нулю, а через боковую поверхность подаётся тепловой поток постоянной плотности q.*

Решение. Учитывая осевую симметрию задачи, сформулируем её в цилиндрической системе координат:

$$u_t - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0,\ \ 0 < r < r_0,\ \ t > 0, \tag{4.27}$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \ 0 \le r \le r_0, \tag{4.28}$$

$$u_r|_{r=r_0} = \frac{q}{k},\ \ t \ge 0, \tag{4.29}$$

$$\left|u|_{r=0}\right| < \infty,\ \ t \ge 0. \tag{4.30}$$

Чтобы свести задачу (4.27)–(4.30) к задаче с однородными граничными условиями, представим функцию $u(r,t)$ в виде

$$u(r,t) = v(r,t) + w(r,t), \tag{4.31}$$

где функция $v(r,t)$ удовлетворяет граничным условиям (4.29), (4.30), а $w(r,t)$ — новая неизвестная функция. Простейшие функции, удовлетворяющие граничным условиям (4.29), (4.30), имеют вид

$$v(r,t) = \frac{q}{k}r, \tag{4.32}$$

$$v(r,t) = \frac{q}{2kr_0}r^2. \tag{4.33}$$

Чтобы сформулировать начально–краевую задачу для $w(r,t)$, следует подставить (4.31) в уравнение (4.27), начальное условие (4.28) и граничные условия (4.29), (4.30). Выбор функции $v(r,t)$ в виде (4.32) приведёт к уравнению с особенностью в правой части, поэтому отдадим предпочтение функции (4.33).

Таким образом,

$$u(r,t) = \frac{qr^2}{2kr_0} + w(r,t). \tag{4.34}$$

Подставляя (4.34) в уравнение (4.27), начальное условие (4.28) и граничные условия (4.29), (4.30), будем иметь

$$w_t - \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \frac{2qa^2}{kr_0},\ \ 0 < r < r_0,\ \ t > 0, \tag{4.35}$$

$$w|_{t=0} = -\frac{q}{2kr_0}r^2,\ \ 0 \le r \le r_0, \tag{4.36}$$

$$w_r|_{r=r_0} = 0,\ \ t \ge 0, \tag{4.37}$$

$$|w|_{r=0}| < \infty,\ \ t \ge 0. \tag{4.38}$$

Решение задачи (4.35)–(4.38) осуществляется по схеме, предложенной в §3.. Чтобы найти подходящую для решения начально–краевой задачи (4.35)–(4.38) систему собственных функций, следует разделить переменные в соответствующем однородном уравнении и граничных условиях (4.37), (4.38). Такое разделение переменных проведено на стр.14–15. Соответствующие собственные значения и собственные функции определяются формулами (2.34), (2.35).

Решение $w(r,t)$ начально–краевой задачи (4.35)–(4.38) будем искать в виде ряда по системе собственных функций (2.35):

$$w(r,t) = C_0(t)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)R_n(r). \tag{4.39}$$

Подставив этот ряд в уравнение (4.35), получим

$$C_0'(t)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(t)R_n(r) - \tag{4.40}$$

$$-a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n(t)}{r}\frac{d}{dr}(rR_n'(r)) = \frac{2qa^2}{kr_0}.$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rR_n'(r)) = -\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 R_n(r) \tag{4.41}$$

и используя обозначение $\omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$, будем иметь

$$C_0'(t)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}[C_n'(t) + \omega_n^2 C_n(t)]R_n(r) = \frac{2qa^2}{kr_0}. \tag{4.42}$$

Так как правую часть равенства (4.42) можно записать в виде $\frac{2qa^2}{kr_0} = \frac{2qa^2}{kr_0}R_0(r)$, то приравнивая в (4.42) коэффициенты при одинаковых собственных функциях, заключаем, что

$$C_0'(t) = \frac{2qa^2}{kr_0}, \;\; C_n'(t) + \omega_n^2 C_n(t) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$C_0(t) = \frac{2qa^2}{kr_0}t + A_0, \;\; C_n(t) = A_n e^{-\omega_n^2 t}, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{4.43}$$

Подставив ряд (4.39) в начальное условие (4.36) получим, что

$$C_0(0)R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)R_n(r) = -\frac{qr^2}{2kr_0}.$$

Отсюда, в силу формул [1, (2.4)], следует, что

$$C_0(0) = -\frac{2}{r_0^2}\frac{q}{2kr_0}\int_0^{r_0} r^2 r\,dr = -\frac{qr_0}{4k}; \tag{4.44}$$

$$C_n(0) = -\frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_n)}\frac{q}{2kr_0}\int_0^{r_0} r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Интеграл, стоящий в правой части, был вычислен на стр.16. Таким образом,

$$C_n(0) = -\frac{2qr_0}{\mu_n^2 k J_0(\mu_n)}, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{4.45}$$

Из условий (4.44), (4.45) находим коэффициенты функций (4.43):

$$A_0 = -\frac{qr_0}{4k}, \;\; A_n = -\frac{2qr_0}{\mu_n^2 k J_0(\mu_n)}, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Как следствие,

$$C_0(t) = \frac{2qa^2}{kr_0}t - \frac{qr_0}{4k}, \;\; C_n(t) = -\frac{2qr_0}{\mu_n^2 k J_0(\mu_n)}e^{-\omega_n^2 t}, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

В соответствии с формулами (4.34), (4.39), ответ задачи запишется так:

$$u(r,t) = \frac{2qa^2}{kr_0}t + \frac{q(2r^2 - r_0^2)}{4kr_0} - \frac{2qr_0}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n^2 t}}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

Задача 4.3. *Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания r_0 и высотой h, если верхнее основание теплоизолированно, через нижнее основание подаётся постоянный тепловой поток плотности q, а боковая поверхность цилиндра обменивается теплом по закону Ньютона с внешней средой постоянной температуры T_0.*

Решение. Стационарная температура удовлетворяет уравнению.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{4.46}$$

Запишем граничные условия на верхнем основании

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{z=h} = 0; \tag{4.47}$$

на нижнем основании

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{z=0} = q; \tag{4.48}$$

на боковой поверхности цилиндра

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + H[u - T_0]\right]\bigg|_{r=r_0} = 0; \tag{4.49}$$

где n — единичный вектор внешней нормали соответственно к верхнему основанию, к нижнему основанию, и к боковой поверхности цилиндра.

После перехода к цилиндрической системе координат с учётом осевой симметрии получим краевую задачу

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \;\; 0 < r < r_0, \;\; 0 < z < h, \tag{4.50}$$

$$u_z|_{z=h} = 0, \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{4.51}$$

$$u_z|_{z=0} = -\frac{q}{k}, \;\; 0 \le r \le r_0, \tag{4.52}$$

$$[u_r + Hu]|_{r=r_0} = HT_0, \;\; 0 \le z \le h, \tag{4.53}$$

$$|u|_{r=0}| < \infty, \;\; 0 \le z \le h. \tag{4.54}$$

Здесь учтено, что нормаль к боковой поверхности цилиндра направлена по радиусу, а нормаль к верхнему и нижнему основаниям направлена параллельно оси z.

Уравнение (4.50) требуется решить внутри прямоугольника, изображённого на рис.2.1. Среди граничных условий (4.51)–(4.54) нет пары однородных условий на параллельных прямых. Сведём задачу (4.50)–(4.54) к задаче с однородными граничными условиями при $r = r_0$ и $r = 0$.

С этой целью решение краевой задачи (4.50)–(4.54) будем искать в виде

$$u(r,z) = v(r,z) + w(r,z), \tag{4.55}$$

где функция $v(r,z)$ удовлетворяет граничным условиям (4.53), (4.54). В качестве такой функции возьмём $v(r,z) = T_0$. После подстановки (4.55) в (4.50)–(4.54) получим краевую задачу на новую неизвестную функцию $w(r,z)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,\ \ 0 < r < r_0,\ \ 0 < z < h, \tag{4.56}$$

$$w_z\big|_{z=h} = 0,\ \ 0 \le r \le r_0, \tag{4.57}$$

$$w_z\big|_{z=0} = -\frac{q}{k},\ \ 0 \le r \le r_0, \tag{4.58}$$

$$[w_r + Hw]\big|_{r=r_0} = 0,\ \ 0 \le z \le h, \tag{4.59}$$

$$\left|w|_{r=0}\right| < \infty,\ \ 0 \le z \le h. \tag{4.60}$$

При решении краевой задачи (4.56)–(4.60) в качестве основных граничных условий возьмём однородные условия на сторонах прямоугольника $r = 0$ и $r = r_0$.

Разделение переменных в уравнении (4.56) и граничных условиях (4.59), (4.60) проведено на стр.18 при решении аналогичной задачи 2.3. Однако в данной задаче граничные условия при $z = 0$ и $z = h$ имеют другой тип. Поэтому в соответствии с приведёнными на стр.20 рекомендациями относительно выбора фундаментальной системы решений, общее решение уравнения (2.52) запишем в виде

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{ch}\frac{\mu_n(z-h)}{r_0} + B_n \operatorname{ch}\frac{\mu_n z}{r_0}$$

Используя частные решения уравнения (4.56), удовлетворяющие граничным условиям (4.59), (4.60),

$$w_n(r,z) = Z_n(z) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

составим новое решение

$$w(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{\mu_n(z-h)}{r_0} + B_n \operatorname{ch}\frac{\mu_n z}{r_0}\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right). \tag{4.61}$$

Коэффициенты A_n и B_n найдём из граничных условий (4.57), (4.58). После подстановки ряда (4.61) в условия (4.57), (4.58) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\mu_n}{r_0} \operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = 0,$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\mu_n}{r_0} \operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) = \frac{q}{k}.$$

Отсюда, по теореме Стеклова [1, (2.4)]

$$B_n = 0, \quad A_n \frac{\mu_n}{r_0} \operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{r_0} = \frac{-\frac{q}{k} \int\limits_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{\int\limits_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}.$$

Учитывая нормы собственных функций (формулы (2.51)) и значение интеграла $\int\limits_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \frac{r_0^2}{\mu_n} J_1(\mu_n)$, вычисленное на стр.25, окончательно получим

$$A_n = -\frac{2 q r_0 J_1(\mu_n)}{k[\mu_n^2 + H^2 r_0^2] J_0^2(\mu_n) \operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{r_0}}.$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (4.61), запишем ответ задачи

$$u(r,z) = T_0 - \frac{2 q r_0}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n) \operatorname{ch} \frac{\mu_n (z-h)}{r_0}}{\left[\mu_n^2 + H^2 r_0^2\right] J_0^2(\mu_n) \operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{r_0}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

5. Задачи для самостоятельной работы

Задача 5.1. *Найти поперечные колебания круглой мембраны радиуса r_0, упруго закреплённой по краю, если известно, что в начальный момент времени её форма имеет радиальный характер, а начальная скорость равна нулю.*

Задача 5.2. *Определить температуру в бесконечном круглом цилиндре радиуса r_0, боковая поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура внутри цилиндра равна $u(r,0) = A\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$.*

Задача 5.3. *Найти стационарную температуру в однородном цилиндре с радиусом основания r_0 и высотой h, если температуры нижнего и* *верхнего оснований равны соответственно T_0 и $T_0\left(1-\frac{r}{r_0}\right)$, а боковая поверхность цилиндра теплоизолированна.*

Задача 5.4. *Круглая закреплённая по краю мембрана радиуса r_0 находится в среде, оказывающей сопротивление колебаниям, пропорциональное смещению. Коэффициент пропорциональности $\alpha < \left(\frac{a\mu_1}{r_0}\right)^2$, где μ_1 — первый положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$. Рассмотреть колебания мембраны, вызванные постоянной силой с плотностью f_0.*

Задача 5.5. *Определить температуру бесконечного стержня круглого сечения радиуса r_0, внутри которого имеются равномерно распределённые тепловые источники постоянной мощности Q. На боковой поверхности цилиндра происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры. Начальная температура стержня равна нулю.*

Задача 5.6. *Найти стационарную температуру внутри круглого цилиндра радиуса r_0 и высоты h, если в цилиндре происходит тепловыделение с постоянной плотностью Q, на боковой поверхности поддерживается нулевая температура, а верхнее и нижнее основания не пропускают тепла.*

Задача 5.7. *К краю круглой мембраны радиуса r_0 приложена поперечная сила, пропорциональная $\sin\omega t$, $\omega \neq \frac{a\mu_n}{r_0}$, где μ_n — положительные нули функции $J_1(\mu)$. Найти колебания мембраны, если в начальный момент времени отклонения и скорости всех точек мебраны равны нулю.*

Задача 5.8. *Определить температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0, если его начальная температура равна нулю, а на боковой поверхности поддерживается постоянная температура T_0.*

Задача 5.9. *Найти стационарную температуру $u(r,z)$ внутренних точек цилиндра с радиусом основания r_0 и высотой h, если через боковую поверхность цилиндра подаётся тепловой поток постоянной плотности q, на верхнем основании поддерживается постоянная температура T_0, а нижнее основание теплоизолировано.*

Ответы к задачам для самостоятельной работы

5.1. $u(r,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega_n t J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, где $A_n = \frac{2\mu_n^2 \int\limits_0^{r_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{r_0^2(\mu_n^2 + H^2 r_0^2) J_0^2(\mu_n)}$, а $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0'(\mu)\mu + H r_0 J_0(\mu) = 0$.

5.2. $u(r,t) = 8A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

5.3. $u(r,z) = T_0\left(1 - \frac{2z}{3h} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{r_0}}{\mu_n J_0(\mu_n)\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{r_0}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right)$, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

5.4. $u(r,t) = \frac{f_0}{\rho\alpha}\left(\frac{J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha}r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha}r_0}{a}\right)} - 1\right) - \frac{2f_0}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\omega^2-\alpha}t}{\mu_n J_1(\mu_n)(\omega^2-\alpha)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, где $\omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$, а $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

5.5. $u(r,t) = \frac{Q}{4c\rho a^2}(2r_0 + Hr_0^2 - r^2) + \frac{2Q}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_1(\mu_n) e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)t}}{J_0^2(\mu_n)(\mu_n^2 + H^2 r_0^2)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные корни уравнения $J_0'(\mu)\mu + Hr_0 J_0(\mu) = 0$.

5.6. $u(r,t) = \frac{Q}{4c\rho a^2}(r_0^2 - r^2)$.

5.7. $u(r,t) = \frac{2Aa^2}{r_0 k\omega}t - \frac{AaJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\sin\omega t}{k\omega J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)} + \frac{2A\omega}{r_0 k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n J_0(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$, где $\omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$, а $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные нули функции $J_1(\mu)$.

5.8. $u(r,t) = T_0 - 2T_0\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a\mu_n}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)$.

5.9. $u(r,t) = \frac{q}{r_0 k}(h^2 - z^2) + \frac{q}{4r_0 k}(2r^2 - r_0^2) - \frac{2r_0 q}{k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\frac{\mu_n z}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2 \operatorname{ch}\frac{\mu_n h}{r_0} J_0(\mu_n)}$, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Список литературы

[1] Денисова Н.А. Метод разделения переменных в задачах математической физики: Учебно–методическое пособие. — Н.Новгород: Изд–во ННГУ, 2008. — 47с.

[2] Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В. Цилиндрические функции: Учебно–методическое пособие. — Н.Новгород: Изд–во ННГУ, 2008. — 42с.

[3] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. М.: Наука, 1984. — 383с.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник для физико–математических специальностей. М.: изд–во Моск. ун–та; Наука, 2004. — 798с.

[5] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для студентов университетов. М.: Наука, 1972. — 687с.

[6] Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимирова В.С. М.: Наука, 1982. — 254с.

[7] Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. — 420с.

[8] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: гос. изд–во физико–математической литературы, 1963. — 1097с.