Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс

«Модели, методы и программные средства»

Основная образовательная программа
010400.62 «Прикладная математика и информатика», общий профиль,
квалификация (степень) бакалавр
Учебно-методический комплекс по дисциплинам
«Вероятностные модели», «Теория вероятностей и математическая статистика»

Основная образовательная программа
010400.68 «Прикладная математика и информатика», профиль «Теория вероятностей и математическая статистика»,
квалификация (степень) – магистр.
Учебно-методический комплекс по дисциплине
«Современные проблемы прикладной теории вероятностей» вариативной части профессионального цикла рабочего учебного плана.

Федоткин М.А.

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород
2012

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ. Федоткин М.А. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 72 с

В учебно-методической разработке изложены фундаментальные и прикладные основы современной теории вероятностного моделирования реальных процессов и явлений. Основное внимание уделено: проблеме математического задания и классификации реальных экспериментов, интуитивным понятиям и формализации допустимых, элементарных и наблюдаемых исходов, построению теоретико-множественной и вероятностной модели. Учебно-методическая разработка содержит только необходимые сведения из теории вероятностей, которые обеспечивают доступность и математическую строгость изложения всего материала. Характерной особенностью учебно-методической разработки является наличие большого числа конкретных задач с подробными решениями и замечаниями с целью развития интуиции вероятностно-статистического мировоззрения на мир и навыков моделирования.

Построение вероятностных моделей и их анализ доставляют математикам значительные трудности. Возрастающий интерес за последнее десятилетие к построению вероятностных моделей, так называемых, статистически устойчивых экспериментов объясняется, прежде всего, развитием современных средств компьютерных технологий. Появилась возможность хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах. Основными задачами учебно-методического пособия являются: 1) знакомство с методами построения и анализа адекватных вероятностных моделей реальных процессов и явлений простейшего типа; 2) критическое знакомство с решениями конкретных задач на вероятностное моделирование с целью усвоения основных понятий, положений и идей прикладной теории вероятностей; 3) изложение современной теории построения адекватных вероятностных моделей;

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010500.62 «Прикладная математика и информатика», изучающих курсы «Вероятностные модели», «Теория вероятностей и математическая статистика» и для широкого круга преподавателей, научных работников, инженеров, аспирантов и магистров, использующих вероятностно-статистические методы в прикладных и теоретических исследованиях реальных случайных экспериментов с применением компьютерных технологий.

Глава 1. Построение теоретико-множественной модели статистически устойчивых случайных экспериментов

1. 1. Задание опытов на содержательном уровне

Рассмотрим примеры реальных экспериментов и условия их проведения. При этом вместо термина эксперимент будем довольно часто использовать слова-синонимы: опыт, испытание, система, наблюдение и т. п.

Пример 1.1. На кончике указательного пальца левой руки находится достаточно маленький по размеру стальной шарик. В некоторый начальный момент времени $t = 0$ с помощью щелчка правой руки шарику сообщаем заданную скорость и наблюдаем при $t > 0$ его дальнейшее движение над поверхностью Земли под действием лишь силы тяжести. Если известно начальное положение кончика указательного пальца левой руки и этот шарик с достаточной степенью точности можно принять за материальную точку, то траектория его полёта однозначно определяется соответствующим дифференциальным уравнением. Отсюда следует, что для этого опыта с помощью решения такого рода уравнений однозначно вычисляется положение шарика в любой фиксированный момент времени t.

Пример 1.2. В чайнике нагревается один литр воды при естественных условиях до ста градусов по шкале Цельсия и наблюдается состояние воды. Однозначный исход при сохранении основных условий такого испытания состоит в том, что вода закипит.

Пример 1.3. Ещё до Галилея многие исследователи проводили эксперимент с бросанием тел в поле тяжести Земли. Галилей с Пизанской башни наблюдал за свободным падением тел, одинаковых по форме, размеру и различных по массе (чугунные, деревянные и т. д.). Он нашёл адекватную математическую модель, которая связывает высоту падения H и время падения t формулой $H(t) = gt^2/2$, где g — ускорение свободного падения.

Пример 1.4. Пусть в данном резервуаре поддерживается постоянный объём некоторого количества идеального газа. По определению идеальный газ удовлетворяет следующим двум условиям: 1) объём, приходящийся на молекулы газа, много меньше объёма резервуара, и 2) радиус взаимодействия двух молекул значительно меньше среднего расстояния между ними. Тогда формула

$$U = a + bP \qquad (1.1)$$

даёт адекватную математическую модель, которая позволяет легко вычислить температуру U по заданному значению давления P, где a и b некоторые постоянные, зависящие от вида газа.

Пример 1.5. Пусть в момент времени $t = 0$ замыкается ключ электрической цепи, изображённой на рис. 1.1, где C — ёмкость конденсатора, R — сопротивление резистора, $Q(t)$ — разряд электрической цепи в некоторый фиксированный момент времени t.

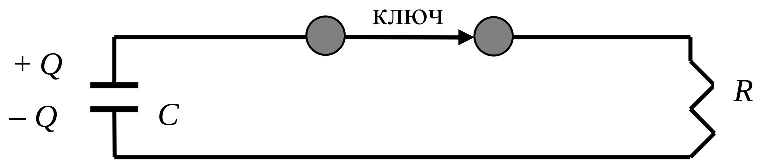


Рис. 1.1

Тогда процесс изменения $Q(t)$ с течением времени определяется функциональным соотношением $Q(t) = Q_0\exp\{-\lambda t\}$, где $\lambda = 1/(RC)$, $Q(0) = Q_0$.

Пример 1.6. На рис. 1.2 изображена некоторая пружина в нерастянутом и растянутом состояниях.

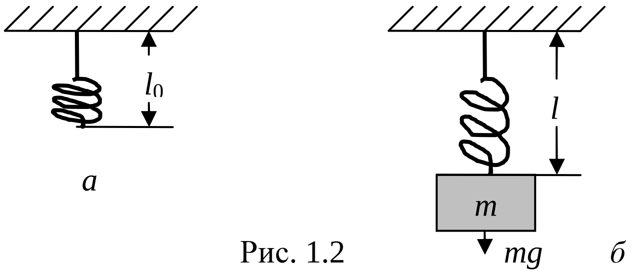


Рис. 1.2

Длина l пружины, растянутой грузом массы m (см. рис. 1.2, *б*), определяется равенством $l = l_0 + gm/k$. В этом равенстве l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии (см. рис. 1.2, *а*), g — ускорение свободного падения и k — коэффициент упругости пружины. При этом согласно закону Гука растянутая пружина создаёт гармоническую силу $F = (l - l_0)k$, если растяжение не слишком велико.

Пример 1.7. Температура $U(x, y, z, t)$ в точке (x, y, z) твёрдого тела (см. рис. 1.3) в момент $t > 0$ удовлетворяет однородному дифференциальному

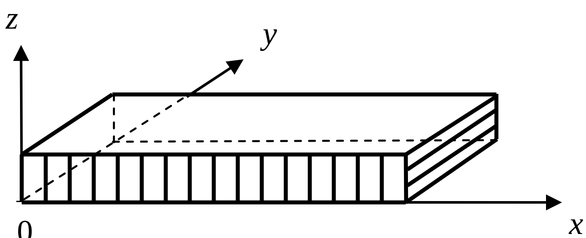


Рис. 1.3

уравнению в частных производных параболического вида

$$\lambda^2\{\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial z^2}\}-\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial t^2}=0,$$

где $U(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ — известная функция, определяющая температуру такой системы в момент $t = 0$, и λ — коэффициент теплопроводности твёрдого тела.

Пример 1.8. Пусть симметричная монета бросается три раза с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Результатами этого опыта могут быть: три раза выпадает герб (орёл), три раза выпадает решётка (цифра), один раз выпадает орёл и два раза выпадает решётка, первый и третий раз выпадает решётка, второй раз выпадает орёл и т. д.

Пример 1.9. Проводится денежно-вещевая лотерея, в которой имеются сто билетов. На билет с номером 50 выпадает выигрыш автомобиль, на билет с номером 60 выпадает денежный выигрыш в сумме 10 тысяч рублей, а на все остальные билеты выигрыша нет. Билет вытаскивается только один раз. Результатом этого эксперимента может быть вещевой выигрыш, денежный выигрыш или отсутствие выигрыша.

Пример 1.10. На поверхность стола с помощью некоторого механизма один раз подбрасываются две симметричные игральные кости, изготовленные из одного и того же материала, например, из слоновой кости. Грани каждой из костей занумерованы цифрами от 1 до 6. В этом опыте определяются числа выпавших очков на каждой из костей.

Пример 1.11. На отрезке [0, 1] выбирается произвольно точка $K = \{x\}$ и определяется принадлежность её абсциссы x некоторому подмножеству G множества $\{x\colon 0 \le x \le 1\} = [0, 1]$. Здесь подмножество G имеет длину.

Пример 1.12. Имеется три разных шара, и они произвольно распределяются по трём разным урнам. Наблюдается размещение шаров в урнах.

Пример 1.13. Пусть непреднамеренно выбирается группа людей из пятидесяти человек, которые проживают в Нижнем Новгороде. При этом интересуются только числом курящих людей.

1.2. Эксперимент и его интуитивное представление

Приведённые примеры говорят о большом разнообразии реальных экспериментов. Так, некоторые эксперименты проводятся непосредственно человеком, другие протекают без его участия, а человек выступает только в качестве наблюдателя и фиксатора происходящего. Это многообразие не позволяет дать точное или строго формализованное определение эксперимента. С другой стороны, в любой науке имеется ряд основных интуитивных понятий. Эти понятия не только не имеют точного определения, но и для каждого человека видоизменяются и усовершенствуются в течение всей его жизни. Так, например, в геометрии основными неопределяемыми (интуитивными) понятиями являются точка, прямая. В механике — сила, масса, путь и др. Основными неопределяемыми понятиями в теории вероятностей являются эксперимент, его результат (исход), статистически устойчивый эксперимент, элементарный результат, равновозможный (равновероятный) элементарный исход и др.

В дальнейшем будем считать, что любой реальный эксперимент E задаётся или вызывается некоторым множеством $\Sigma = \{u_1, u_2, ...\}$ условий $u_1, u_2, ...$ его проведения и множеством $\Im = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ всех его возможных исходов. Другими словами, любой эксперимент происходит только при выполнении соответствующих условий $u_1, u_2, \ldots$ Указанные исходы будем называть допустимыми и всегда обозначать латинскими прописными буквами без индексов и с индексами, например, A, B, C, A_1, A_2 и т. п. При этом среди допустимых исходов могут существовать такие, которые не наступают ни при каком проведении эксперимента E. Множества Σ и $\Im$ могут содержать конечное, счётное (бесконечное), несчётное число элементов. Как правило, последнее определяется содержанием реального эксперимента и целей его исследования. Приведённая запись $\{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ множества $\Im$ является не вполне корректной. Дело в том, что множество $\Im$ может быть несчётным. В этом случае в записи вида $\{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$, ради простоты, указаны лишь элементы некоторого счётного подмножества множества $\Im$. Аналогичное замечание будем иметь в виду и при записи в дальнейшем некоторых несчётных множеств, например, для записи множества Σ. Множество Σ будем называть комплексом условий проведения эксперимента E. Ясно, что при проведении или наблюдении эксперимента часто невозможно определить и перечислить все его условия. Поэтому приходится выбирать и указывать конкретно наиболее важные из этих условий, и тем самым реальный комплекс условий Σ на самом деле заменять его приближением. Этот факт будем отображать следующим образом: $\Sigma = \{u_1, u_2, ..., u_s, ...\}$, т. е. здесь указано s основных условий, а остальные условия (случайные факторы), помеченные многоточием после символа u_s, нам точно неизвестны.

В приведённом примере 10 с подбрасыванием игральных костей имеем: u_1 — две симметричные игральные кости, u_2 — заданный механизм подбрасывания (например, с помощью щелчка пальцев правой руки), u_3 — количество бросков равно единице, u_4 — поверхность стола, u_5 — условие фиксации выпавших очков на каждой из костей (например, достаточная освещённость поверхности стола), $s = 5$. Если мы выполним эти пять основных условий, то произойдет известный эксперимент с непреднамеренным однократным подбрасыванием двух игральных костей. В этом эксперименте к случайным факторам можно отнести, например, температуру, давление, колебание воздуха и т. п.

Очень часто некоторый эксперимент E мы будем представлять как совокупность других экспериментов E_t, $t \in T$ (см. примеры 1, 3, 5, 7, 8). Здесь T – некоторое упорядоченное множество, содержащее конечное, счётное (бесконечное) или несчётное число элементов t. Будем индекс (метку) t интерпретировать как время, а T — как промежуток времени, например, конечный, бесконечный дискретный или бесконечный непрерывный. Следует заметить, что каждый эксперимент E_t определяется комплексом условий Σ_t и множеством $\Im_t$ его допустимых исходов. Эксперимент E будем называть эволюционным, или, другими словами, будем говорить, что он функционирует (протекает) во времени $t \in T$. При этом все допустимые исходы эксперимента E некоторым образом определяются допустимыми исходами каждого из составляющих его экспериментов E_t, $t \in T$. Итак, чтобы провести эксперимент E нужно провести последовательно эксперименты E_t, $t \in T$. Этот факт формально мы будем обозначать следующим образом: $E = \{E_t;\ t \in T\}$, $\Sigma = \{\Sigma_t;\ t \in T\}$, $\Im = \coprod_{t \in T} \Im_t$. Здесь возможен и более простой случай, когда множество T состоит из одного элемента (см. примеры 2, 4, 6, 9 — 13). В этом случае эксперимент будем называть статическим. Более того, при изучении некоторых свойств эволюционного эксперимента E, когда определены множество условий его проведения и множество его допустимых исходов, факт его проведения во времени с помощью составляющих экспериментов E_t, $t \in T$, уже может не играть существенной роли. В этом случае эволюционный эксперимент удобно представлять как единый эксперимент и считать его статическим. Можно сказать, что интуитивное понятие о статическом или эволюционном эксперименте является относительным. Другими словами, эксперимент E объявляется эволюционным по отношению к способу его задания с помощью однопараметрического семейства статических экспериментов E_t, $t \in T$. Приведём реальный пример такого эксперимента E.

Пример 1.14. Рассматривается работа простейшего автомата светофора по регулированию движения транспорта и пешеходов с 6-ти часов утра до 23-х часов вечера на пересечении улиц Родионова и Донецкой в Нижнем Новгороде. Предполагается, что в ночное время суток в силу незначительных интенсивностей поступления машин и пешеходов перекрёсток становится нерегулируемым. Светофор-автомат с помощью зелёного, жёлтого и красного сигналов в некоторые последовательные промежутки времени разрешает (запрещает) проезд через этот перекрёсток машинам и одновременно запрещает (разрешает) переход пешеходам. Таким способом обеспечивается безопасность движения машин и пешеходов, которые непредсказуемым образом прибывают на этот перекрёсток. Заметим, что для простейшего светофора-автомата длительности зелёного, жёлтого и красного сигналов являются постоянными величинами и периодически повторяются во времени. Эксперимент E_t для этой реальной задачи состоит в том, что инженером транспортником или некоторым автоматическим устройством регистрируются все автомобили и пешеходы, которые остановились на перекрёстке в некоторый фиксированный момент времени $t \in T = [6, 23]$. Для определения длительностей зелёного, жёлтого и красного сигналов светофора с целью уменьшения задержек транспорта и пешеходов на этом перекрёстке естественно рассматривать эксперимент $E = \{E_t;\ t \in T\}$. Результатом такого эксперимента E будет регистрация уже всех остановившихся машин и пешеходов за полный рабочий промежуток $T = [6, 23]$.

1.3. Классификация экспериментов

Перейдём теперь к классификации множества реальных экспериментов. Все реальные эксперименты условно можно классифицировать или делить на группы по признаку однозначности наблюдения его результатов A, B, C, A_1, A_2, … и их предсказания. В связи с этим исследователи, как правило, выделяют следующие три группы различных экспериментов.

К первой группе будем относить эволюционный эксперимент (процесс) E, называемый детерминированным, когда по любому $t_0 \in T$ и Σ_{t_0} однозначно определяется исход эксперимента E_t как при $t \geq t_0$, так и при $t < t_0$. Для такого эксперимента можно точно предсказать его исход, или имеется полная устойчивость исхода при выполнении комплекса условий Σ. Мы будем каждый раз повторять условия Σ такого эксперимента и, тем самым, можем наблюдать и фиксировать заранее известный его результат. Иначе, весь будущий ход, включая и настоящее, детерминированного эволюционного эксперимента и всё его прошлое однозначно определяются комплексом условий Σ_{t_0} эксперимента E_{t_0} в настоящее время $t = t_0$. П. Лаплас, отец этой концепции, говорил: «Всеобъемлющий ум, который охватил бы все начальные условия, предсказал бы всё будущее». Еще раз напомним, что классическая механика рассматривает движение материальных точек в пространстве, будущее и прошлое которых однозначно определяется начальными положениями и начальными скоростями всех точек. Подобная ситуация описана в примерах 1—6, при этом в примерах 2, 4, 6 промежуток T состоит из одной точки.

Ко второй группе будем относить так называемый полудетерминированный эволюционный эксперимент (процесс) E, если по любому $t_0 \in T$ и Σ_{t_0} однозначно определяется исход эксперимента E_t только при $t \geq t_0$. Иначе говоря, весь будущий ход полудетерминированного эволюционного эксперимента E полностью определяется его исходом или результатом в настоящее время $t = t_0$, а его прошлое не определяется. Распределение тепла в нагретом стержне (см. пример 7) является полудетерминированным процессом. Такого рода процессы протекают во времени и изучаются в электродинамике Максвелла, в теории колебаний, в квантовой механике и т. д. Математическое описание процессов из первых двух групп использует аппарат непрерывной и дискретной математики, например, аппарат дифференциальных уравнений.

Наконец, к третьей группе будем относить эволюционный эксперимент (процесс) E, если при его повторении практически в одних и тех же условиях он может давать различные, но вполне определённые результаты из множества $\Im$. Такой эксперимент будем называть случайным или стохастическим. Можно утверждать, что множества Σ_t, $t \in T$, и $\Im_t$, $t \in T$, исход эксперимента E определяют неоднозначно. Поэтому результат случайного эксперимента предсказать невозможно (см. примеры 8—13). Причина такого поведения случайного эксперимента, по-видимому, объясняется следующими обстоятельствами.

Во-первых, множество $\Sigma = \{u_1, u_2, ..., u_s, ...\}$ условий проведения случайного эксперимента (статического или эволюционного) содержит очень большое число разнообразных второстепенных условий (факторов), помеченных многоточием после символа u_s. Каждый из таких не основных факторов в отдельности очень мало влияет на исход эксперимента и может меняться неизвестным образом от опыта к опыту. Однако результат суммарного действия второстепенных факторов приводит к возможности появления заранее непредсказуемых исходов такого эксперимента.

Во-вторых, слишком малые и непреднамеренные изменения основных условий $u_1, u_2, ..., u_s$ не могут быть зафиксированы современными средствами (приборами). Поэтому очень трудно утверждать, что повторное проведение эксперимента осуществлялось совершенно точно в одних и тех же условиях. Вместе с тем появление того или иного исхода случайного эксперимента очень чувствительно к малым изменениям хотя бы одного из условий $u_1, u_2, ..., u_s$.

В-третьих, в природе действует известный принцип неопределённости, согласно которому невозможно абсолютно точное измерение некоторых физических величин. Например, в силу принципа неопределённости в квантовой механике нельзя точно и одновременно знать импульс частицы и её место нахождения. Или ещё пример: не существует способа, который определяет момент времени распада данного ядра урана.

Итак, первые два обстоятельства говорят о том, что при повторном проведении эксперимента E условия $u_1, u_2, ..., u_s, ...$, к нашему сожалению, можно сохранить только с определённой и доступной нам на сегодняшний момент степенью точности. Обстоятельство неопределённости отражает принципиальную суть вещей, а не только невозможность абсолютно точного измерения некоторых физических величин. Это приводит в случайных экспериментах к непредсказуемости его различных исходов. Например, нельзя заранее предсказать размножение популяции волков в лесах Нижегородской области, т. е. предвидеть в любой момент времени количество волков и в каком месте каждый волк будет находиться. Однако если результаты некоторого эксперимента мы не можем точно предсказать, то отсюда ещё не следует, что эксперимент является случайным. Это может быть из-за отсутствия пока у нас некоторых знаний об эксперименте. Например, в настоящее время научная общественность не может утвердительно ответить на вопрос о том, существует или нет органическая жизнь в космосе, исключая естественно планету Земля.

1.4. Статистическая устойчивость

Среди всех случайных экспериментов рассмотрим класс экспериментов, которые обладают удивительным свойством статистической устойчивости.

Статистически устойчивые эксперименты выделим с помощью следующих ограничений.

$*$ Статистически устойчивый случайный эксперимент E можно проводить или наблюдать любое конечное число раз при одних и тех же Σ и $\Im$.

$*$ Пусть $\mu(A, N)$ есть число наступлений результата $A \in \Im$ за N испытаний эксперимента E. Относительная частота $\mu(A, N)/N$ наблюдения исхода $A \in \Im$ за N испытаний эксперимента E обладает так называемой статистической устойчивостью. На содержательном уровне это означает, что относительная частота колеблется (группируется) около некоторого постоянного числа $\mathbf{P}(A)$ при неограниченном увеличении N и как угодно мало отличается от $\mathbf{P}(A)$. Как правило, число $\mathbf{P}(A)$, которое позднее будем называть вероятностью исхода A, исследователю не известно. Свойство статистической устойчивости должно выполняться для любого $A \in \Im$.

Однако последний факт, а именно близость относительной частоты $\mu(A, N)/N$ к $\mathbf{P}(A)$, не может быть гарантирован всегда, начиная с некоторого достаточно большого числа N. Строгое формальное определение статистической устойчивости частоты $\mu(A, N)/N$ наблюдения исхода A за N испытаний эксперимента E будет дано позднее в курсе теории вероятностей и математической статистики. Заметим, что для некоторых результатов $B \in \Im$ статистическая устойчивость может означать существование предела вида

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mu(B, N)}{N} = \mathbf{P}(B). \qquad (1.2)$$

Статистически устойчивый эксперимент в теории вероятностей также является основным интуитивным и первоначальным понятием. Рассмотрим это понятие на следующем классическом примере.

Пусть эксперимент заключается в бросании симметричной монеты определённого достоинства с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Так, французский естествоиспытатель Ж. Бюффон бросал монету $N = 4040$ раз. Герб (исход A) появился 2048 раз. Тогда отношение $\mu(A, N)/N = 2048/4040 \approx 0{,}507$. Английский математик К. Пирсон бросал монету $N = 24000$ раз, и при этом герб выпал 12012 раз. В этом случае отношение $\mu(A, N)/N = 0{,}5005$. В данном примере исход A означает выпадение герба, и мы имеем малое колебание около числа $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$. При единичном проведении эксперимента невозможно предсказать его результат, например появление герба, и обнаружить какие-либо закономерности. Однако если рассмотреть последовательность большого числа проведения такого эксперимента, то можно обнаружить некоторую регулярность (статистическую устойчивость) в поведении относительной частоты $\mu(A, N)/N$ выпадения герба.

На рис. 1.4 по оси абсцисс отложено число N проведённых экспериментов, связанных с непреднамеренным подбрасыванием симметричной монеты достоинством в три копейки 1955 года выпуска, а по оси ординат отношение $\mu(A, N)/N$.

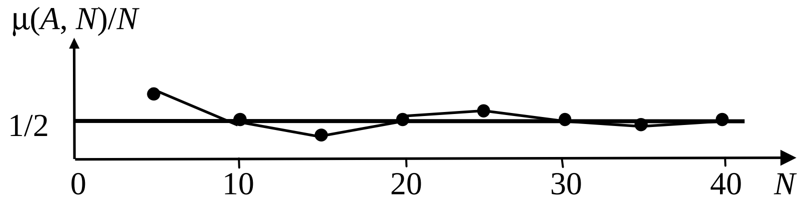


Рис. 1.4

График построен для наблюдаемой последовательности исходов следующего вида: *B*, *A*, *A*, *A*, *A*, *B*, *B*, *A*, *B*, *B*, *A*, *B*, *A*, *B*, *B*, *A*, *B*, *A*, *B*, *A*, *B*, *A*, *A*, *B*, *A*, *B*, *B*, *A*, *A*, *B*, *B*, *A*, *A*, *B*, *B*, *A*, *A*, *B*, *B*, *A*, ... Здесь исход A означает выпадение герба, а исход B — решётки. Из этого рисунка видно, что соединяющая чёрные точки ломаная линия все ближе и ближе прижимается к прямой $\mu(A, N)/N = 1/2$. Для одноразового подбрасывания этой симметричной монеты обозначим через C исход, который заключается в появлении герба или решётки. Тогда для результата C очевидно имеем выполнение равенства (1.2), ибо в этом случае величина $\mu(C, N) = N$ для всех $N = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $\mathbf{P}(C) = 1$.

Приведём теперь несколько искусственный пример статистически неустойчивого эксперимента. Пусть в некотором непрозрачном пакете достаточно большого объёма находится достаточно большое число монет неодинакового достоинства, асимметричных, разной чеканки. Произвольно выбирается монета и подбрасывается с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Затем определяют выпавшую сторону этой монеты, наносят ей механическое повреждение и, наконец, возвращают в пакет. На этом считаем, что эксперимент закончился. Если рассмотреть последовательность проведения большого числа такого эксперимента, то, возможно, мы и не обнаружим регулярности в поведении относительной частоты появления герба или относительной частоты появления решётки. Последний факт существенно зависит от закона механического повреждения выбранной монеты.

1.5. Проблемы построения вероятностных моделей

Изложенная простейшая классификация реальных экспериментов позволяет точно выразить предмет построения вероятностных моделей. Известно, что основополагающие знания об экспериментах могут быть получены следующими подходами.

• Путём проведения значительного числа опытов над реальными статистически устойчивыми экспериментами и обработки результатов наблюдений. Это, как правило, требует значительных денежных и временных затрат.

• Путём небольшого числа опытов над реальными экспериментами, составления адекватных математических моделей, получения фундаментальных знаний об этих моделях и, наконец, путём сопоставления этих знаний с реальными экспериментами.

Поясним более подробно второй подход с помощью рис. 1.5. Строится математическая модель реального процесса (эксперимента, объекта исследования). Затем средствами математики исследуется модель, и результаты исследования интерпретируются применительно к исходному явлению. Этот путь позволяет открыть закономерности реального мира, если математическая модель достаточно адекватна. На рис. 1.5 изображена наиболее полная связь между реальным объектом исследования и его математической моделью.

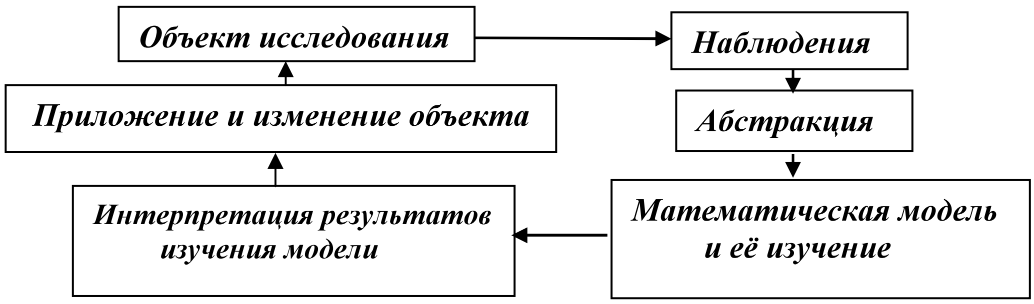


Рис. 1.5

Большая часть математических представлений о мире носит детерминированный и полудетерминированный характер, хотя природа в большей степени является стохастической. Так, в четвертом примере функциональная зависимость (1.1) температуры U идеального газа от давления P есть суммарный результат соударений всех частиц о стенки резервуара. При этом число таких частиц и их скорости, очевидно, носят стохастический характер. Это приводит к очень малым отклонениям функциональной зависимости (1.1). Эти отклонения пока не регистрируются современными приборами, которыми измеряют давление и температуру.

Детерминированные модели полезны, однако стохастические или вероятностные модели более адекватны. Интересно отметить, что детерминированные модели всегда будут слишком грубым приближением сложной действительности и, в то же время, они являются частным макроскопическим случаем вероятностных моделей. Однако составление вероятностных моделей и их анализ математическими средствами очень сложен и затруднителен. Широкий и всевозрастающий интерес за последнее десятилетие к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики объясняется следующими двумя основными причинами.

1. Увеличением чувствительности современных измерительных, приёмных и управляющих устройств. Вследствие чего случайные отклонения количественных характеристик таких устройств от их средних значений играют всё более существенную роль. Отказ от изучения роли стохастических отклонений и случайных механизмов часто приводит к авариям атомных реакторов, разрушению мостов, плотин, промышленных сооружений и гражданских зданий, поломкам самолётов и кораблей, транспортным катастрофам, выпуску некачественной и ненадёжной продукции, экономическим и природным катаклизмам и т. п.

2. Развитием современных средств микропроцессорной техники, когда появилась реальная возможность хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах. Используя мощные компьютеры и новые информационные технологии, теория вероятностей даёт более широкую концепцию причинных связей между реальными процессами, позволяют найти закономерности природы там, где детерминированный подход оказывается бессильным. Например, в теории ошибок разного рода измерений, в молекулярной и статистической физике, в биологии, в рыночной экономике, в телефонии и процессах обслуживания, в процессах адаптивного управления и принятия решений, в управлении конфликтными транспортными потоками на магистралях крупных городов и т. д.

На основании изложенного материала в предыдущих разделах мы убедительно можем сформулировать основные этапы построения вероятностных моделей. Во-первых, разработка методов построения адекватных моделей реальных статистически устойчивых экспериментов. Во-вторых, изучение этих моделей средствами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов и, тем самым, открытие новых фундаментальных закономерностей реальных статистически устойчивых экспериментов.

1.6. Аксиомы выбора элементарных исходов и описание результатов статистически устойчивого эксперимента

Итак, в дальнейшем полагаем, что всякий эксперимент E определяется заданием комплекса $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots\}$ условий его проведения и некоторым множеством $\mathfrak{I} = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ допустимых исходов. В результате проведения эксперимента E мы можем фиксировать, наблюдать или регистрировать некоторые или все его допустимые исходы (результаты). Более того, иногда целесообразно считать, что множеству $\mathfrak{I}$ принадлежат исходы, которые никогда не наступают при проведении эксперимента E. Будем теперь рассматривать статистически устойчивые эксперименты E.

Среди всех допустимых исходов эксперимента E выделим некоторые $A'_1 \in \mathfrak{I}$, $A'_2 \in \mathfrak{I}$, …, которые будем называть элементарными (атомарными, неразложимыми, помеченными). Множество (пространство) элементарных исходов эксперимента E обозначим через $\Im' = \{A'_1, A'_2, \ldots\} \subset \Im$. Предполагается, что $\Im'$ не содержит одинаковых элементов. Заметим, что множество $\Im'$ может быть конечным, счётным (бесконечным) или несчётным. Это обстоятельство зависит от эксперимента E. Для каждого элементарного исхода A'_i из множества $\Im'$ выберем его описание с помощью некоторого языка. Такими языками могут быть русский, английский, немецкий, французский, итальянский, математический и т. п. Это описание (имя) будем обозначать через ω_i. Часто описание произвольного элементарного исхода из множества $\Im'$ будем обозначать просто греческой буквой ω без индекса. Таким образом, каждому элементарному исходу A' из класса $\Im'$ ставим во взаимно однозначное соответствие его описание ω и будем в дальнейшем писать равенство $A' = \{\omega\} \in \Im'$. Теперь одноточечное множество $A' = \{\omega\}$ является математическим объектом, и этот объект будем называть элементарным событием. Совокупность описаний всех отобранных элементарных исходов будем называть пространством описаний элементарных исходов и обозначать через символ Ω.

При формальном построении модели реальных статистически устойчивых процессов E мы должны априори учитывать, что комплекс условий Σ может и не определять однозначно того, что называется элементарным исходом эксперимента. Поэтому при повторениях эксперимента с точным соблюдением комплекса условий Σ конкретное элементарное событие вида $A' = \{\omega\}$ может произойти, а может и не произойти. Такое элементарное событие естественно называть случайным. Заметим, что среди элементарных исходов иногда могут существовать такие, которые никогда не наступают при каждом проведении эксперимента E. Итак, элементарное событие A' есть элементарный исход, представленный в виде одноточечного множества $\{\omega\}$ после выбора соответствующего описания. Следует заметить, что элементарное событие есть математический объект и его следует отличать от реального элементарного исхода эксперимента E. Выделение элементарных результатов среди допустимых исходов, как правило, является неоднозначным, и оно вызывает значительные трудности. Более того, не существует общего метода для решения этой проблемы. Каждый раз при решении этой проблемы исследователь чаще всего полагается на интуицию и опыт. Однако при выборе элементарных результатов (исходов) всегда будем накладывать следующие три аксиомы выбора:

- при проведении эксперимента E обязательно наступает один из элементарных исходов;
- если происходит некоторый элементарный исход, то все остальные элементарные исходы наступать в этом испытании не могут;
- по элементарному исходу, который происходит при проведении эксперимента E, можно определить наступление или ненаступление любого допустимого исхода A; в этом случае каждый допустимый исход A эксперимента E должен представляться через описания элементарных исходов.

Поясним эти ограничения более подробно. Прежде всего, рассмотрим широко распространенный на практике случай, когда любой из элементарных исходов когда-нибудь наступает при проведении эксперимента E. Соответствующее этому случаю каждое из множеств (пространств) $\Im'$ и Ω будем называть регулярным. Далее, для любого допустимого исхода A из множества $\Im$ с помощью многократного проведения эксперимента E согласно аксиомам выбора можно выделить все элементарные исходы $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots$, которые происходили одновременно с результатом A. Элементарные исходы вида $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots$, имеют описание на выбранном языке в виде соответствующих символов $\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots$ Тогда этот исход $A \in \Im$ естественно представлять в виде множества $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2} \ldots\}$, которое в зависимости от A и эксперимента E может быть конечным, счётным и бесконечным, или несчётным. В дальнейшем по соглашению будем писать $A = \{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ и называть A после этого допустимым случайным событием эксперимента E. Если описание $\omega \in A$, например, $\omega = \omega_{a_1}$ и происходит элементарный исход $A'_{a_1} = \{\omega_{a_1}\}$, то также происходит и исход A. В силу этого будем говорить, что события $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots$, благоприятствуют появлению данного события A. Теперь можно сказать, что случайное событие A есть представленный в виде множества $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ допустимый результат эксперимента E.

Если нет элементарных исходов, которые благоприятствуют появлению данного исхода A, то этот исход никогда не происходит при проведении эксперимента E и, значит, не содержит ни одного описания $\omega \in \Omega$. Такой исход будем называть невозможным, и представлять его в виде пустого множества $\varnothing$.

Напротив, если каждый элементарный исход благоприятствует появлению данного исхода A, то этот исход наступает каждый раз при проведении эксперимента E. Такой исход будем называть достоверным событием, и представлять его в виде множества Ω всех описаний. Заметим, что как случайное элементарное событие, так и случайное событие есть математический объект.

В общем случае, когда множество элементарных исходов не является регулярным, каждому допустимому исходу A из $\Im$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие некоторое подмножество множества Ω следующим способом.

Выберем произвольное непустое подмножество $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ множества Ω такое, что при многократном проведении эксперимента E когда-нибудь наступает один из элементарных исходов $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots$ Тогда поставим во взаимно однозначное соответствие подмножеству вида $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ некоторый допустимый исход A, который наступает тогда и только тогда, когда происходит один из элементарных исходов вида $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots$При этом будем говорить, что подмножество вида $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ представляет допустимый результат A эксперимента E. Ради простоты, будем обозначать подмножество $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ тем же символом A и называть его случайным событием. Если оказалось, что такого допустимого исхода A из совокупности $\Im$ нет, то подмножество $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ не является случайным событием и вместо подмножества $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ выбираем с аналогичными свойствами другое подмножество $\{\omega_{b_1},\ \omega_{b_2}, \ldots\}$.

Наконец, подмножеству $\{\omega_{c_1},\ \omega_{c_2},\ \ldots\}$, для которого каждый из элементарных исходов $A'_{c_1}, A'_{c_2}, \ldots$ никогда не происходит, ставим во взаимно однозначное соответствие некоторый исход $C \in \Im$, если он никогда не наступает. При этом математический объект $C = \{\omega_{c_1},\ \omega_{c_2},\ \ldots\}$ называется так же случайным событием. Если такого допустимого исхода нет, то множество $\{\omega_{c_1},\ \omega_{c_2},$ $\ldots\}$ не объявляем случайным событием. Описанную процедуру продолжаем до тех пор, пока не переберём все допустимые исходы из $\Im$. Невозможный исход $\varnothing$ никогда не наступает (необходимое условие) при проведении эксперимента E и обязательно не содержит ни одного описания $\omega \in \Omega$. Напротив, достоверный исход происходит каждый раз (необходимое условие) при проведении эксперимента E и отождествляется с пространством Ω.

Таким образом, все допустимые результаты из множества $\Im$ для эксперимента E должны представляться с помощью некоторой непустой совокупности подмножеств множества Ω. При этом различным подмножествам $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\} = A$ и $\{\omega_{b_1},\ \omega_{b_2}, \ldots\} = B$ множества Ω всегда соответствуют различные допустимые исходы A и B, хотя иногда исход A происходит тогда и только тогда, когда происходит исход B. В последнем случае каждый из подмножеств $\{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ и $\{\omega_{b_1},\ \omega_{b_2}, \ldots\}$ включает одну и ту же совокупность описаний таких элементарных исходов, которые благоприятствуют появлению каждого из событий A и B. Теперь мы можем коротко зафиксировать предыдущие рассуждения.

Определение 1. Некоторую совокупность $A = \{\omega_{a_1},\ \omega_{a_2}, \ldots\}$ из описаний элементарных исходов будем называть случайным событием, если $A \in \Im$.

Случайные события, как соответствующие допустимым исходам эксперимента E, естественно обозначать латинскими прописными буквами без индексов или с индексами, например, A, B, C, A_1, A_2, ... О некотором случайном событии A имеет смысл говорить лишь в том случае, если при осуществлении комплекса условий Σ известно, что соответствующий ему допустимый исход произошёл или не произошёл. Так как множество Ω содержит описания всех элементарных исходов эксперимента E, то случайное событие A есть некоторое подмножество множества Ω и теперь можно писать $A \subset \Omega$ для всех $A \in \mathfrak{I}$. Известно, что $\Omega \subset \Omega$ и пустое множество $\varnothing \subset \Omega$. На содержательном уровне достоверный исход Ω в результате осуществления комплекса условий эксперимента неизбежно происходит и определяется множеством $\mathfrak{I}'$. Пустое множество $\varnothing$ не содержит никакой элемент $\omega \in \Omega$. Поэтому соответствующий невозможному событию $\varnothing$ некоторый исход эксперимента E заведомо не может произойти (необходимое условие) при осуществлении комплекса условий Σ и очевидно не может быть элементарным. Такой исход будем называть невозможным, и обозначать символом $\varnothing$. Более того, невозможное событие может соответствовать всем таким исходам других экспериментов, которые никак не связаны с экспериментом E и никогда не наступают при его проведении. Целесообразность введения невозможного события будет ясна в дальнейшем при определении и изучении свойств теоретико-множественных операций над случайными событиями для любого статистически устойчивого эксперимента E. Ясно, что невозможное событие и достоверное событие можно рассматривать как частные случаи событий. Итак, для любого статистически устойчивого эксперимента E мы выделили элементарные события, случайные события, достоверное событие, невозможное событие.

В заключение этого раздела отметим важность соблюдения трёх ограничений при выборе элементарных событий. На содержательном уровне три ограничения на выбор элементарных исходов означают, что множество $\mathfrak{I}'$ содержит почти всю информацию об эксперименте E. Например, при наступлении некоторого элементарного исхода мы в точности знаем, какие исходы из $\mathfrak{I}$ произошли, а какие — нет. С другой стороны, из этих ограничений следует, что для некоторых экспериментов E могут существовать элементарные исходы, которые никогда не наступают при его проведении. Такого рода элементарные исходы необходимо отличать от невозможного исхода эксперимента E. Такая ситуация будет подробно описана в следующей главе при построении математических моделей так называемых условных экспериментов.

1.7. Примеры выбора описаний исходов статистически устойчивого эксперимента Е.

Прежде всего, рассмотрим подробно простые примеры различных способов выбора элементарных исходов и их описаний. При этом следует учитывать тот замечательный факт, что в примерах 15, 17–21 множество $\mathfrak{I}$ всех допустимых исходов включает регулярное множество $\mathfrak{I}'$ из элементарных исходов. Поэтому методически иногда удобно сначала выбрать все элементарные исходы, а затем, используя этот выбор, определить множество всех допустимых исходов.

Пример 1.15. Пусть эксперимент E заключается в непреднамеренном подбрасывании с помощью некоторого механизма на поверхность стола двух монет. Каждая из монет имеет две стороны. На одной стороне изображён герб, а на другой — решётка. Эти стороны целесообразно обозначать в виде знака Г (или цифры 0) и знака Р (или цифры 1). На этом опыте проиллюстрируем некоторое представление о возможностях того или иного способа выбора случайных элементарных исходов. Всего будет предложено два из семи способов. При этом различные способы выбора будем помечать верхними цифровыми индексами в круглых скобках.

Первый способ. В опыте с подбрасыванием двух монет можно выбрать следующие элементарные исходы:

∗ результат $A_1^{(1)}$ $\{\omega_1^{(1)} = (Г, Г)\}$ выпадения на первой монете герба и на второй монете герба с описанием в виде вектора $\omega_1^{(1)} = (Г, Г) = (0, 0)$;

∗ результат $A_2^{(1)} = \{\omega_2^{(1)} = (Г, Р)\}$ выпадения на первой монете герба и на второй монете решётки с описанием в виде $\omega_2^{(1)} = (Г, Р) = (0, 1)$;

∗ результат $A_3^{(1)} = \{\omega_3^{(1)} = (Р, Г)\}$ выпадения на первой монете решётки и на второй монете герба с описанием в виде $\omega_3^{(1)} = (Р, Г) = (1, 0)$;

∗ результат $A_4^{(1)} = \{\omega_4^{(1)} = (Р, Р)\}$ выпадения на первой монете решётки и на второй монете решётки с описанием в виде $\omega_4^{(1)} = (Р, Р) = (1, 1)$.

Ниже, ради определённости, для описания исходов не будем использовать цифры 0, 1. Первый способ выбора элементарных событий позволяет найти пространство $\Omega^{(1)} = \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}$ из описаний элементарных исходов и легко выписать все допустимые исходы этого эксперимента в виде множества $\Im^{(1)} = \{A\colon A \subset \Omega^{(1)}\} = \{\{\omega_1^{(1)}\}, \{\omega_2^{(1)}\}, \{\omega_3^{(1)}\}, \{\omega_4^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_3^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \{\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}\}, \{\omega_2^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \{\omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \{\omega_1^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \{\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}, \Omega^{(1)}, \varnothing\}$. Например, исход $\{\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\} = \{(Г, Р), (Р, Г), (Р, Р)\}$ состоит в том, что выпадает, по крайней мере, одна решётка. При таком способе выбора элементарных исходов монеты естественно считать различимыми, например, изготовленными из меди и серебра.

Второй способ. В задаче о подбрасывании двух монет выберем теперь элементарные исходы несколько по-другому:

- результат $A_1^{(2)} = \{\omega_1^{(2)} = \{Г, Г\}\}$ с описанием $\omega_1^{(2)}$ в виде множества $\{Г, Г\}$ означает, что обе монеты выпали гербами вверх;
- результат $A_2^{(2)} = \{\omega_2^{(2)} = \{Г, Р\}\}$ с описанием $\omega_2^{(2)}$ в виде множества $\{Г, Р\}$ означает, что монеты выпали разными сторонами;
- результат $A_3^{(2)} = \{\omega_3^{(2)} = \{Р, Р\}\}$ с описанием $\omega_3^{(2)}$ в виде множества $\{Р, Р\}$ означает, что обе монеты выпали решётками вверх.

Если при первом способе выбора элементарных исходов монеты считали различимыми, например, разного достоинства, то при втором способе монеты являются физически неразличимыми. В случае физически неразличимых монет пространство $\Omega^{(2)} = \{\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}\}$, а множество допустимых исходов равно $\Im^{(2)} = \{\{\omega_1^{(2)}\}, \{\omega_2^{(2)}\}, \{\omega_3^{(2)}\}, \{\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}\}, \{\omega_1^{(2)}, \omega_3^{(2)}\}, \{\omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}\}, \Omega^{(2)}, \varnothing\}$. Тогда результат $\{\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}\} = \{\{Г, Г\}, \{Г, Р\}\}$ состоит в том, что выпадает, по крайней мере, один герб, а событие $\{\omega_1^{(2)}, \omega_3^{(2)}\} = \{\{Г, Г\}, \{Р, Р\}\}$ заключается в том, что монеты выпали одинаковыми сторонами.

Заметим, что результат выпадения на первой монете герба и одновременно на второй монете решётки является случайным событием при первом способе, т. е. $A_2^{(1)} = \{\omega_2^{(1)} = (Г, Р)\}$, $A_2^{(1)} \in \Im^{(1)}$, и нельзя будет называть случайным событием при втором способе, т. е. $A_2^{(1)} \notin \Im^{(2)}$. Действительно, если произошло случайное элементарное событие $A_2^{(2)} = \{\omega_2^{(2)} = = \{Г, Р\}\}$, то при неразличимых монетах невозможно дать ни утвердительного, ни отрицательного ответа о выпадении на первой монете герба и на второй монете решётки. Аналогичное замечание можно сделать относительно следующих случайных событий вида: $\{\omega_3^{(1)}\}$, $\{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}\}$, $\{\omega_1^{(1)}, \omega_3^{(1)}\}$, $\{\omega_2^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}$, $\{\omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}$, $\{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}$, $\{\omega_1^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\}$ из $\Im^{(1)}$. Напротив, при появлении любого элементарного исхода, выбранного первым способом, мы в точности знаем, какие исходы из $\Im^{(2)}$ произошли, а какие — нет. Однако при этом следует помнить, что исходы из $\Im^{(2)}$ имеют несколько иное представление, чем исходы из $\Im^{(1)}$. Например, один и тот же исход, состоящий в том, что выпадает, по крайней мере, одна решётка, имеет следующие представления. В форме $\{\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \omega_4^{(1)}\} = \{(Г, Р), (Р, Г), (Р, Р)\}$ — при первом способе выбора элементарных исходов и в виде $\{\omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}\} = \{\{Г, Р\}, \{Р, Р\}\}$ — при втором способе выбора элементарных исходов.

Подробно рассмотренный простой пример с подбрасыванием двух монет показывает, что не следует слишком полагаться на интуицию. При выборе элементарных исходов эксперимента E необходимо быть очень осторожным. Каждый такой выбор должен основываться на глубоком знании основных условий проведения эксперимента E и его допустимых исходов. Так, в примере с подбрасыванием двух монет мы должны существенным образом учитывать условия о том, что монеты физически различаются или не различаются, можно фиксировать стороны монет или нет.

Пример 1.16. Подбрасывается монета до первого выпадения герба (орла) с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Выпадение только решёток или появление герба здесь является достоверным событием Ω с описанием $\Omega = \{(Р, Р, \ldots), Г, (Р, Г), (Р, Р, Г), \ldots\}$; выпадение герба при втором броске будет случайным элементарным событием вида (Р, Г); наблюдение герба дважды — невозможное событие $\varnothing$; появление решётки (цифры) не более трёх раз является случайным событием $A = \{ Г, (Р, Г), (Р, Р, Г), (Р, Р, Р, Г)\}$. Заметим, что для этого эксперимента E выпадение только решёток является выбранным элементарным исходом вида $\{(Р, Р, \ldots)\}$. Однако элементарный исход $\{(Р, Р, \ldots)\}$ никогда не наступает при его проведении, является одноточечным множеством и поэтому он не может быть объявлен невозможным событием. Поэтому множество Ω не является регулярным.

Пример 1.17. Колода в 52 игральные карты сдаётся четырём игрокам и определяется состав тринадцати карт, полученных первым игроком. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, где $n = C_{52}^{13} = 635013559600$. При каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ символ $\omega_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$ есть описание такого элементарного исхода, когда первый игрок имеет множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$ из конкретных 13 карт разного достоинства. Очевидно, что это множество является конкретным сочетанием из 52 карты по 13 карт разного достоинства.

Пример 1.18. Имеется три разных шара с пометками a, b, c, и они произвольно распределяются по трём разным ящикам с пометками $Я_1$, $Я_2$, $Я_3$. Определяется размещение шаров. В этой задаче имеем:

$$\Omega = \{(|\, a, b, c \,|\, - \,|\, - \,|), (|\, - \,|\, a, b, c \,|\, - \,|), (|\, - \,|\, - \,|\, a, b, c \,|), (|a, b \,|\, c \,|\, - \,|),$$

$$(|a, c \,|\, b \,|\, - \,|), (|\, b, c \,|\, a \,|\, - \,|), (|\, a, b \,|\, - \,|\, c \,|), (|\, a, c \,|\, - \,|\, b \,|), (|\, b, c \,|\, - \,|\, a \,|),$$

$$(|\, a \,|\, b, c \,|\, - \,|), (|\, b \,|\, a, c \,|\, - \,|), (|\, c \,|\, a, b \,|\, - \,|), (|\, a \,|\, - \,|\, b, c \,|), (|\, b \,|\, - \,|\, a, c \,|),$$

$$(|\, c \,|\, - \,|\, a, b \,|), (|\, - \,|\, a, b \,|\, c \,|), (|\, - \,|\, a, c \,|\, b \,|), (|\, - \,|\, b, c \,|\, a \,|), (|\, - \,|\, a \,|\, b, c \,|),$$

$$(|\, - \,|\, b \,|\, a, c \,|), (- \,|\, c \,|\, a, b \,|), (|\, a \,|\, b \,|\, c \,|), (|\, a \,|\, c \,|\, b \,|), (|\, b \,|\, a \,|\, c \,|), (|\, b \,|\, c \,|\, a \,|),$$

$$(|\, c \,|\, a \,|\, b \,|), (|\, c \,|\, b \,|\, a \,|)\}.$$

Здесь описание $\omega_1 = (|\, a, b, c \,|\, - \,|\, - \,|)$ соответствует такому размещению, когда в ящик $Я_1$ попали все три шара. Аналогичный смысл имеют и другие описания. Например, описание $\omega_{27} = (|\, c \,|\, b \,|\, a \,|)$ означает, что после опыта в ящиках $Я_1$, $Я_2$ и $Я_3$ соответственно оказались шары с пометками c, b и a. Следовательно, получаем 27 описаний элементарных исходов в этом эксперименте.

Пример 1.19. Имеется три одинаковых шара и они распределяются по трём разным ящикам $Я_1$, $Я_2$, $Я_3$. Для этого опыта легко получаем, что

$$\Omega = \{(|\, a, a, a \,|\, - \,|\, - \,|), (|\, - \,|\, a, a, a \,|\, - \,|), (|\, - \,|\, - \,|\, a, a, a \,|), (|\, a, a \,|\, a \,|\, - \,|),$$

$$(|\, a, a \,|\, - \,|\, a \,|), (|\, a \,|\, a, a \,|\, - \,|), (|\, - \,|\, a, a \,|\, a \,|), (|\, a \,|\, - \,|\, a, a \,|),$$

$$(|\, - \,|\, a \,|\, a, a \,|), (|\, a \,|\, a \,|\, a \,|)\}.$$

Итак, имеем десять описаний элементарных исходов в этом опыте.

Пример 1.20. Имеется три одинаковых шара и они распределяются по трём одинаковым ящикам $Я_1$, $Я_2$, $Я_3$. В этом испытании получаем три описания элементарных исходов и $\Omega = \{\{|\, a, a, a \,|\, - \,|\, - \,|\}, \{|\, a, a \,|\, a \,|\, - \,|\}, \{|\, a \,|\, a \,|\, a \,|\}\}$. Например, описание $\omega_1 = \{| a, a, a | - | - |\}$ состоит в том, что три шара попали в один ящик.

Пример 1.21. На отрезке [0, 1] оси $0x$ выбирается произвольно точка. В качестве описания ω произвольно поставленной точки на этом отрезке можно взять её абсциссу.

Тогда множество $\Omega = \{\omega = x\colon 0 \le x \le 1\}$. При этом произвольный элементарный исход представляется в виде одноточечного множества $\{x\}$. В отличие от примера 21, для которого достоверное случайное событие является несчётным множеством, в каждом из примеров 15–20 достоверное событие содержит счётное или конечное количество элементов. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 2. Пространство $\Im'$ из элементарных событий с конечным или счётным множеством элементарных событий $\{\omega\}$ называется дискретным. Пространство другого типа будем называть не дискретным.

1.8. Соотношения между случайными событиями.

Пусть в результате проведения эксперимента наступило или не наступило некоторое случайное событие A. Совокупность $\Im$ всех случайных событий, связанных с данным экспериментом E, играет основную роль в нашем дальнейшем рассмотрении основ этого курса. Понятие случайного события уже имеет абстрактный характер, так как конкретная природа события не имеет значения. Существенно лишь то, что случайный исход A эксперимента E представляется в виде некоторой совокупности из описаний ω тех элементарных событий, которые могут одновременно наступать (не наступать) с исходом A, и что случайное событие $A \subset \Omega$ происходит или нет при осуществлении комплекса условий Σ. Поэтому между событиями множества $\Im$ если и могут существовать соотношения, то только, в первую очередь, логического и теоретико-множественного характера. Если выбранное описание ω некоторого элементарного события $\{\omega\}$ принадлежит случайному событию A, то будем писать $\omega \in A$. Запись $A \in \Im$ означает, что случайное событие A принадлежит совокупности $\Im$. Противоположные утверждения, состоящие в том, что описание ω элементарного события $\{\omega\}$ не принадлежит случайному событию A и подмножество A не принадлежит семейству $\Im$, записываются в следующем виде: $\omega \notin A$ и $A \notin \Im$. Примем следующие определения.

Определение 3. Если A является случайным событием и каждое описание $\omega \in A$ принадлежит случайному событию B, то этот факт записывается символической записью $A \subset B$ или $B \supset A$. В этом случае будем говорить, что случайное событие A есть часть B или B включает A.

Из определения отношения включения вида $A \subset B$ непосредственно следует, что при каждом осуществлении комплекса условий Σ вместе с событием A обязательно наступает и событие B, т. е. событие A влечет за собой событие B

или B следует за A. Однако обратное утверждение может и не иметь место, например, когда существуют элементарные исходы, которые никогда не наступают при проведении эксперимента E, и их описания являются элементами A и не являются элементами B. Можно сказать, что условие $A \subset B$ является более жёстким, так как все элементы множества A входят во множество B. Однако если $\Im'$ является регулярным и при каждом осуществлении комплекса условий Σ вместе с событием A появляется и событие B, то $A \subset B$.

Определение 4. Если $A \subset B$ и $A \supset B$, то мы будем говорить, что события A и B равносильны, и обозначать это через $A = B$.

Из определений 5 и 6 следует, что при $A = B$ случайные события A, B состоят из одних и тех же элементов (описаний элементарных исходов). Следовательно, если $A = B$, то при каждом проведении эксперимента E событие A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A, т. е. события A и B оба наступают или оба не наступают. Обратное утверждение справедливо не всегда. Проиллюстрируем определения 5 и 6 на следующих простых примерах.

Пример 1.22. Производится бросание игральной кости. Событие A — появление цифры 2, событие B — появление чётной цифры. Легко видеть, что для этого опыта появление события A влечет за собой появление события B, т. е. $A \subset B$.

Пример 1.23. Производится шесть выстрелов по мишени. Событие A — попадание тремя пулями в мишень. Событие B — три промаха при шести выстрелах. При каждом проведении эксперимента E событие A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A. Здесь $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$, следовательно, $A = B$.

Определение 5. Два события A и B называются несовместными (попарно несовместными), если они не содержат общих описаний элементарных исходов. В противном случае события A и B называются совместными, т. е. они содержат хотя бы одно общее описание $\omega \in \Omega$.

Если A и B являются несовместными (несовместимыми), то появление одного из них исключает появление другого (необходимое условие). Обратное утверждение может не выполняться. Можно сказать, что событие, состоящее в одновременном наступлении двух несовместных событий A и B, является невозможным. Разным элементарным исходам соответствует различные описания. Поэтому любые два элементарных события $\{\omega_i\}$ и $\{\omega_k\}$ являются несовместными при $i \neq k$. Значит, появление одного из элементарных исходов исключает появление другого. Этот факт естественно согласуется со второй аксиомой выбора элементарных исходов.

Определение 6. Событие B, которое содержит все такие описания элементарных исходов из Ω, которые не принадлежат некоторому событию A, называется противоположным по отношению к событию A и обозначается через символ $\overline{A}$.

Например, при одноразовом и случайном подбрасывании симметричной игральной кости исход с выпадением чётного числа очков противоположен результату выпадения нечётного числа очков. Если события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие $\overline{A}$. Можно это утверждение сказать по-другому. Если события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то наступление одного из них исключает наступление другого и одно из них обязательно наступает при проведении эксперимента E. Обратное утверждение, как и, естественно, любое из обратных утверждений не всегда имеет место.

1.9. Теоретико-множественные операции над событиями.

Пусть дано произвольное множество $\{A, B, ...\}$ событий из $\Im$. Каждое такое случайное событие из $\Im$ есть некоторое множество из описаний вида ω. Тогда над случайными событиями A, B, ... можно ввести известные теоретико-множественные операции, например, объединение ($\cup$), пересечение ($\cap$), разность ($\backslash$), симметрическая разность (Δ) и т. д.

Определение 7. Объединением случайных событий A и B, обозначаемым через $A\bigcup B$, называется такое случайное событие $C = A\cup B$, которое содержит все описания события A и все те описания события B, которые не входят в A. Если событие $A_i \in \Im$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$, то их объединение есть такое случайное событие $C = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, каждое описание которого принадлежит хотя бы одному из событий $A_1, A_2, \ldots$

Следовательно, если $C = A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots$, то случайное событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит, по крайней мере, одно из случайных событий $A_1, A_2, \ldots$ Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным.

Определение операции объединения в терминах случайных событий (исходов эксперимента E) можно проинтерпретировать в терминах теории множеств. Например, описание $\omega \in A\bigcup B$ означает или $\omega \in A$, или $\omega \in B$, другими словами, объединение $A\bigcup B$ реализуется известным логическим высказыванием «или». Приведём теперь примеры, в которых используется операция объединения случайных событий.

Пример 1.24. В Нижнем Новгороде имеется четыре транспортных моста через реку Ока. Рассматривается ежедневная возможность переезда наземного транспорта через реку. Обозначим через A_1 событие, которое заключается в исправности первого моста; через A_2 — событие, которое заключается в исправности второго моста; через A_3 — событие, которое заключается в исправности третьего моста; и, наконец, через A_4 — событие исправности четвертого моста. Если A есть событие, означающее возможность переезда через реку, то $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_4 = \bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$.

Определение 8. Пересечением двух случайных событий A и B, обозначаемым через $A \bigcap B$, называется такое случайное событие $D = A \bigcap B$, которое содержит только те описания, которые принадлежат как A, так и B. Если событие $A_i \in \Im$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$, то их пересечение есть такое случайное событие $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, каждое описание которого принадлежит одновременно всем случайным событиям $A_1, A_2, \ldots$

Пусть случайное событие $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Отсюда следует, что событие D происходит тогда и только тогда, когда происходят все случайные события A_1, A_2, … одновременно. Обратное утверждение имеет место, если множество элементарных исходов является регулярным.

Определение операции пересечения в терминах случайных событий (исходов эксперимента E) можно проинтерпретировать на языке теории множеств. Например, описание $\omega \in A \bigcap B$ означает $\omega \in A$ и $\omega \in B$, другими словами, пересечение $A \bigcap B$ реализуется логическим высказыванием «и».

Так как событие, состоящее в одновременном наступлении несовместных событий A и B, является невозможным, то $A \bigcap B = \varnothing$. Для различных элементарных событий $\{\omega_i\}$ и $\{\omega_k\}$ имеем равенство $\{\omega_i\} \bigcap \{\omega_k\} = \varnothing$. Наоборот, совместность событий A и B означает, что пересечение этих событий не является невозможным, т. е. $A \bigcap B \neq \varnothing$. Приведём примеры, в которых используется операция пересечения случайных событий.

Пример 1.25. Узел ЭВМ состоит из трех последовательных элементов. Производится его испытание (рис. 1.6). Пусть A_1 — исправен первый элемент, A_2 — исправен второй элемент, A_3 — исправен третий элемент, A — исправен узел ЭВМ. Для этого опыта $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 = \bigcap\limits_{i=1}^{3} A_i$.

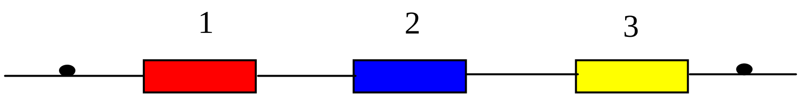


Рис. 1.6

Пример 1.26. Производится три выстрела по мишени. Пусть A_1 — попадание в мишень при первом выстреле, A_2 — попадание в мишень при втором выстреле, A_3 — попадание в мишень при третьем выстреле, A — ровно три попадания. В этом случае событие $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \bigcap\limits_{i=1}^{3} A_i$. События A_1 и A_2 совместны, так как попадание в мишень при первом выстреле не исключает попадания в мишень при втором выстреле, т. е. $A_1 \bigcap A_2 \neq \varnothing$. Если B означает промах по мишени при трёх выстрелах, то A и B являются несовместными событиями, следовательно, $A \bigcap B = \varnothing$.

С помощью операций объединения и пересечения можно формализовать определение 6 для противоположных событий. В самом деле, если случайное событие $\overline{A}$ есть совокупность всех тех описаний из Ω, которые не входят в совокупность A, то $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$. Имеет место и обратное утверждение, т. е. если $A \bigcup B = \Omega$ и $A \bigcap B = \varnothing$, то события A и B будут противоположными.

Определение 9. Разностью случайных событий A и B называется такое случайное событие C, которое содержит описания из A и не содержит описания из B. Разность событий A и B обозначается символом $A \setminus B$.

Определение операции разности $A \setminus B$ событий A и B в терминах случайных событий (исходов эксперимента E) можно проинтерпретировать в терминах теории множеств. Например, описание $\omega \in A \setminus B$ означает $\omega \in A$ и $\omega \notin B$. Так как разность двух множеств A и B содержит только те описания из A, которые не принадлежат B, то выполняются соотношения вида $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$. Если $C = A \setminus B$, то случайное событие C состоит в том, что A произошло, а B нет. Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным. Пусть в примере 23 событие A_1 означает попадание при первом выстреле. Тогда в этом примере разность событий A и A_1 представляет собой событие $A \setminus A_1$, которое заключается в попадании тремя пулями в мишень при шести выстрелах и промахе при первом выстреле.

Определение 10 Симметрической разностью случайных событий A и B, которая обозначается символом $A \Delta B$, называется случайное событие $A \Delta B = A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Если $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то происходит только одно из событий A, B. Обратное утверждение имеет место, если множество $\Im'$ элементарных исходов является регулярным. Заметим, что с помощью основных операций объединения, пересечения и разности по аналогии с определением 10 можно определять новые теоретико-множественные операции над случайными событиями. Например, из определения разности случайных событий получаем, что случайное событие $\Omega \setminus A$ содержит описания из Ω и не содержит описания из A. Вспоминая определение противоположных или дополнительных событий, получаем равенство $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Определение 11. События A_1, A_2, ... образуют полную группу несовместимых событий, если их объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ равно достоверному событию Ω, и они попарно являются несовместными.

Например, множество случайных элементарных событий образуют полную группу несовместимых событий. Противоположные события A и $\overline{A}$ образуют также полную группу несовместных событий. Если случайные события

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу ($\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$), то в результате осуществления комплекса условий Σ обязательно произойдёт хотя бы одно из них. Обратное утверждение не всегда имеет место.

Рассмотренные теоретико-множественные операции над случайными событиями из $\Im$ удовлетворяют следующим основным законам:

• переместительный (коммутативный) закон для объединения и пересечения, т. е. $A\bigcup B = B\bigcup A$, $A\bigcap B = B\bigcap A$, где $A \in \Im$, $B \in \Im$;

• сочетательный (ассоциативный) закон для объединения и пересечения вида: $A\bigcup B\bigcup C = (A\bigcup B) \bigcup C = A\bigcup (B\bigcup C)$, $A\bigcap B\bigcap C = (A\bigcap B) \bigcap C = A\bigcap (B\bigcap C)$, где $A \in \Im$, $B \in \Im$, $C \in \Im$;

• законы Де Моргана: $A\bigcup B = \overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}}$, $A\bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$, где $A, B \in \Im$;

• распределительный (дистрибутивный) закон для объединения и пересечения случайных событий $A \in \Im$, $B \in \Im$, $C \in \Im$ в двух формах: $(A\bigcup B)\cap C =$ $= (A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$, $(A\bigcap B)\bigcup C = (A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$.

Кроме того, из определения объединения и пересечения событий непосредственно вытекает, что $A\bigcup A = A$, $A\bigcup\Omega = \Omega$, $A\bigcup\varnothing = A$, $A\bigcap A = A$, $A\bigcap\varnothing = \varnothing$, $A\bigcap\Omega = A$. Из определения противоположного события получаем, что $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Все эти равенства доказываются одним и тем же способом. Докажем для примера равенство $A\bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$. При этом будет предложен метод, которым доказывается равенство двух произвольных случайных событий. Итак, пусть $\omega \in A\bigcap B$. Тогда последовательно имеем: $\omega \in A$ и $\omega \in B$. Отсюда следует, что $\omega \notin \overline{A}$ и $\omega \notin \overline{B}$. Значит, $\omega \notin \overline{A} \bigcup \overline{B}$. В итоге, описание $\omega \in \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$ и, следовательно, $A\bigcap B \subset \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\omega \in \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$. Тогда $\omega \notin \overline{A} \bigcup \overline{B}$. Отсюда получаем, что $\omega \notin \overline{A}$ и $\omega \notin \overline{B}$. Теперь находим $\omega \in A$ и $\omega \in B$ и, значит, $\omega \in A\bigcap B$ или $\overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}} \subset A\bigcap B$. И окончательно получаем, что $A\bigcap B = = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$. Точно так же можно показать справедливость ранее приведенного равенства $A \setminus B = A\bigcap \overline{B}$ и основных законов в случае, когда теоретико-множественных операций над событиями берутся в счётном числе. Например, имеем равенства $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \bigcap B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \bigcap B)$, $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.

Легко видеть, что закон Де Моргана и соотношение $A \setminus B = A\bigcap \overline{B}$ позволяют получить все теоретико-множественные операции над случайными событиями с помощью только действий объединения и дополнения. Проиллюстрируем теперь введенные теоретико-множественные операции над случайными событиями на следующем простом эксперименте.

Пример 1.27. На прямоугольный участок земли за некоторый фиксированный промежуток времени из космоса падает частица. В этом опыте будем интересоваться исходами, которые заключаются в попадании частицы в некоторые области прямоугольника. Ради простоты естественно предположить, что эти области имеют площадь (см. рис. 1.7).

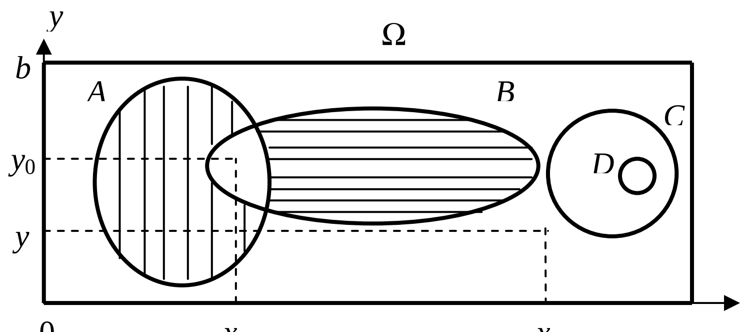


Рис. 1.7

Итак, в этом эксперименте достоверное событие, которое означает попадание частицы в прямоугольник, можно представить в виде множества $\Omega = \{\omega = (x, y)\colon 0 \le x \le a\,,\ 0 \le y \le b\}$. Например, элементарное событие $\{\omega = (x, y)\}$ означает прохождение частицы через точку с абсциссой x и ординатой y, а случайное элементарное событие $\{\omega_0 = (x_0, y_0)\}$ – прохождение частицы через точку с абсциссой x_0 и ординатой y_0 и т. д. Событие A – попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена вертикально. Событие B – попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена горизонтально. Событие C –попадание частицы в круг с большим диаметром. Событие D – попадание частицы в круг с маленьким диаметром. Тогда событие $A \bigcup B$ соответствует попаданию частицы в область прямоугольника, которая получается наложением двух эллипсов без их перемещения. Событие $A \bigcap B$ соответствует попаданию частицы в светлую область любого из эллипсов. Событие $A \setminus B$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована вертикальными линиями. Случайное событие $B \setminus A$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными линиями. Случайное событие $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными или вертикальными линиями. Случайное событие $\overline{C}$ соответствует попаданию частицы в прямоугольник и обязательно её непопаданию в большой круг. Заметим, что при наблюдении элементарного события $\{\omega_0 = (x_0, y_0)\}$, например, произойдут события A, B, $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ и не произойдут события $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \,\Delta\, B$. Наконец случайные события A и B являются совместными ($A \bigcap B \ne \varnothing$), события A и C – несовместными ($A \bigcap C = \varnothing$) и случайное событие $D \subset C$.

1.10. Наблюдаемые события реального эксперимента и его теоретико-множественная модель

Некоторые события из множества $\Im$, которые когда-нибудь наступают при проведении эксперимента E, по различным причинам могут быть не доступны или не наблюдаемы для экспериментатора. Поэтому целесообразно выделить класс всех наблюдаемых исходов (событий) статистически устойчивого эксперимента.

Определение 12. Любое непустое подмножество $\mathcal{F}$ множества $\Im$ всех случайных допустимых событий, которые связаны с некоторым статистически устойчивым экспериментом E, будем называть σ-алгеброй, если справедливы следующие ограничения:

* введены теоретико-множественные операции над элементами из $\mathcal{F}$;
* из $A \in \mathcal{F}$ следует $\overline{A} \in \mathcal{F}$;
* из $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \ldots$ следует $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Если последнее ограничение имеет место для конечного числа случайных событий, то $\mathcal{F}$ называется алгеброй. Так как множество $\mathcal{F}$ не является пустым, то существует $A \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Теперь ясно, что $A \bigcup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{F}$ и $\varnothing = \Omega \setminus \Omega = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$. Случайные события из $\mathcal{F}$ называются наблюдаемыми. Поэтому $\mathcal{F}$ будем называть множеством наблюдаемых исходов, хотя оно может содержать исходы, которые никогда не происходят при проведении эксперимента E. Более того, оно всегда содержит невозможный исход $\varnothing$. Теперь стало окончательно ясно, насколько важно было введение с самого начала в рассмотрение невозможного исхода $\varnothing$. Легко показать, что σ-алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно остальных теоретико-множественных операций. Прежде всего покажем, что $A \bigcap B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$, $A \,\Delta\, B \in \mathcal{F}$ при $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. Действительно, все эти соотношения сразу следуют из представлений вида $A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$, $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ и последних двух ограничений на $\mathcal{F}$. Аналогичным способом доказывается, что σ-алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно теоретико-множественных операций, взятых в счетном числе над случайными событиями.

Переход к множеству $\mathcal{F} \subset \Im$ вызван тем, что не над всеми допустимыми исходами могут быть введены теоретико-множественные операций и, более того, не все допустимые исходы эксперимента E могут происходить. Далее, могут существовать события из $\Im$, которые когда-нибудь наступают при проведении эксперимента E и не доступны наблюдению для исследователя. Поэтому очень часто такого рода события не включают в $\mathcal{F}$. Наконец, так как множество $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов статистически устойчивого эксперимента E является σ-алгеброй, то в результате теоретико-множественных операций над наблюдаемыми исходами мы получаем снова наблюдаемые исходы. Другими словами, мы будем иметь дело только с известными нам наблюдаемыми исходами (объектами).

Таким образом, каждому статистически устойчивому эксперименту E мы можем поставить в соответствие некоторую упорядоченную пару $(\Omega, \mathcal{F})$, которая называется его теоретико-множественной моделью. Приведенная ниже табл. 1.1 позволяет зафиксировать основные понятия и элементы теоретико-множественной модели эксперимента E.

Таблица 1.1

Множество $\Im$ допустимых событий эксперимента E	Классификация случайных событий
Элементарное событие $\{\omega\}$	
Случайное событие A	
Достоверное событие Ω	
Невозможное событие $\varnothing$	
Из события A следует событие B: $A \subset B$	Соотношения между случайными событиями
Событие A равно событию B: $A = B \Leftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$	
Совместность и несовместность событий A и B	
Противоположное к A событие $\overline{A}$	
Объединение событий A и B: $A \bigcup B$	Теоретико-множественные операции над случайными событиями
Пересечение событий A и B: $A \bigcap B$	
Разность событий A и B: $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$	
Симметрическая разность событий A и B: $A \Delta B =$ $= (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$	
A и $\overline{A} = \Omega \setminus A$ противоположны $\Leftrightarrow A \bigcup \overline{A} = \Omega$, $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$	
σ-алгебра $\mathcal{F}$ наблюдаемых событий	
$(\Omega, \mathcal{F})$ – теоретико-множественная модель	

Такого рода теоретико-множественные модели позволяют ответить на следующие очень важные вопросы: 1) указать все допустимые исходы эксперимента E; 2) указать все элементарные исходы эксперимента E и определить пространство Ω описаний каждого элементарного исхода в некотором выбранном языке; 3) представить каждый допустимый исход A эксперимента E в виде множества из описаний $\omega \in \Omega$ только тех элементарных исходов, один из которых обязательно происходит одновременно с этим исходом, и тем самым A называть случайным событием; 4) определять равные события, соотношения между событиями и находить им интерпретацию через известные исходы эксперимента E; 5) выполнять теоретико-множественные операции над случайными событиями из множества $\Im$, порождать новые события и выяснять, как одни исходы с помощью теоретико-множественные операции выражаются через другие; 6) выделить множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов эксперимента E.

В заключение этого раздела приведём простейшие примеры σ-алгебр событий произвольного статистически устойчивого эксперимента E.

• $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$ — так называемая тривиальная σ-алгебра, состоящая из достоверного исхода Ω и невозможного события $\varnothing$. В этом простейшем случае в результате проведения эксперимента E можно фиксировать или наблюдать только достоверное событие. С практической точки зрения система $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$

оказывается бесполезной (самой «бедной»), ибо нельзя наблюдать другие исходы реального эксперимента E кроме достоверного результата Ω.

• $\mathcal{F} = \{ A, \overline{A}, \Omega, \varnothing \}$ – σ-алгебра, порождённая только исходом A. Для статистически устойчивого эксперимента E множество $\mathcal{F} = \{ A, \overline{A}, \Omega, \varnothing \}$ содержит исходы A, $\overline{A}$, достоверный исход Ω и невозможное событие $\varnothing$. По отношению к эксперименту E система событий $\mathcal{F} = \{ A, \overline{A}, \Omega, \varnothing \}$ является более информативной, чем $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$. В качестве простого примера такого эксперимента можно рассмотреть работу персонального компьютера за некоторое фиксированное время T, если пользователю интересна или наблюдаема только следующая информация: произошёл отказ компьютера (случайное событие A) или нет (случайное событие $\overline{A}$).

• $\mathcal{F} = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ – совокупность всех (включая и пустое множество) подмножеств достоверного исхода Ω – множества описаний (имен) всех выбранных элементарных исходов. Если множество $\Im'$ всех выбранных элементарных исходов счётно (конечно или бесконечно), то множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ – самая информативная («богатая») σ-алгебра и вполне обозримая, именно поэтому её и рассматривают в качестве множества $\Im$ всех допустимых исходов статистически устойчивого эксперимента E. В связи с этим заметим, что незначительное увеличение числа выбранных элементарных исходов или, что то же самое, числа элементов множества Ω связано с существенным увеличением числа всех возможных исходов статистически устойчивого эксперимента E. Например, если достоверное событие Ω состоит из n точек (описаний) ω_1, ω_2, ..., ω_n, то $\mathcal{F} = \Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\} = \{A_1, A_2, ..., A_q\}$ уже включает $q = 2^n$ всех допустимых исходов эксперимента E. Доказательство этого факта проведём методом индукции по n. Если $\Omega = \{\omega_1\}$, то $\Im = \{\{\omega_1\}, \varnothing\}$, $q = 2 = 2^1$ и, значит, равенство $q = 2^n$ установлено при $n = 1$. Предположим, что это равенство справедливо для некоторого числа n, и покажем, что оно выполняется для $n + 1$. Пусть теперь множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n+1}\}$. Тогда получим, что $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\} = \{A\colon A \subseteq \Omega,\ \omega_{n+1} \in A\} \cup \{A\colon A \subseteq \Omega \setminus \{\omega_{n+1}\}\}$, где $\{A\colon A \subseteq \Omega,\ \omega_{n+1} \in A\}$ – множество всех подмножеств множества Ω, которые содержат ω_{n+1}, и $\{A\colon A \subseteq \Omega \setminus \{\omega_{n+1}\}\}$ – множество всех подмножеств множества Ω, которые уже не содержат элемент ω_{n+1}. Так как множество $\{A\colon A \subseteq \Omega,\ \omega_{n+1} \in A\} = \{A \cup \{\omega_{n+1}\}\colon A \subseteq \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}\}$, то это множество состоит по предположению из 2^n элементов. Ясно, что множество $\{A\colon A \subseteq \Omega \setminus \{\omega_{n+1}\}\} = \{A\colon A \subseteq \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}\}$ содержит 2^n элементов. Множества $\{A\colon A \subseteq \Omega,\ \omega_{n+1} \in A\}$, $\{A\colon A \subseteq \Omega \setminus \{\omega_{n+1}\}\}$ не содержат одинаковых элементов. Поэтому множество $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ включает $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ элементов. Этим заканчивается доказательство этого утверждения.

Итак, появляется возможность представить большое число 2^n всех исходов статистически устойчивого эксперимента E через относительно малое число n всех выбранных элементарных исходов. Например, при $n = 23$ непосредственно находим $q = 2^n = 8388608$. Однако, в случае несчётного множества Ω

объект $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ оказывается слишком широким и необозримым. Поэтому в случае несчётного множества Ω в качестве множества всех наблюдаемых исходов статистически устойчивого эксперимента E, как правило, выбирают σ-алгебру $\mathcal{F}$ существенно более «узкую», чем σ-алгебра $\{A\colon A \subseteq \Omega\}$. Приведём пример такой ситуации.

Пусть опыт E заключается в непреднамеренном выборе точки на отрезке $[0,\ 1]$ действительной оси. Результат такого эксперимента может состоять в том, что точка взята из некоторого подмножества отрезка $[0, 1]$. Простыми и хорошо известными являются стандартные подмножества отрезка $[0,\ 1]$ типа: $[a, b] = \{\omega = x\colon a \le x \le b\}$ – отрезок, $[a, b) = \{\omega = x\colon a \le x < b\}$ – замкнутый слева и открытый справа промежуток, $(a,\ b] = \{\omega = x\colon a < x \le b\}$ – открытый слева и замкнутый справа промежуток, $(a,\ b) = \{\omega = x\colon a < x < b\}$ – интервал, $[a,\ a] =$ $= \{x\colon a \le x \le a\} = \{a\}$ – одноточечное подмножество. В рассматриваемом эксперименте символ $\omega = x$ есть абсцисса (описание, имя) выбранной точки (элементарного исхода) вида $\{x\}$, а достоверный исход $\Omega = [0,\ 1] = \{\omega = x\colon 0 \le x \le 1\}$ – несчётное множество. В большинстве случаев совокупность $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов этого эксперимента совпадает с самой «узкой» σ-алгеброй, содержащей все указанные выше тестовые подмножества отрезка $[0, 1]$. Как известно, такая σ-алгебра называется борелевской, является достаточно широким классом исходов эксперимента E с точки зрения практических целей. О целесообразности использования борелевской σ-алгебры и её точном определении будет ещё сказано в следующих главах. Наряду с борелевской σ-алгеброй в качестве множества $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов эксперимента с выбором точки рассматривают также более «широкую» σ-алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, для которых определено понятие длины. Последнюю σ-алгебру называют системой лебеговских подмножеств отрезка $[0, 1]$.

Этот несколько иллюстративный пример показывает, что одному и тому же множеству $\Im'$ всех элементарных исходов некоторого статистически устойчивого эксперимента E могут отвечать разные множества его наблюдаемых исходов. Поэтому задание статистически устойчивого эксперимента E определяется, в конечном счёте, множеством $\Im$ всех его допустимых исходов. Это необходимо всегда принимать во внимание при построении адекватной вероятностной модели эксперимента E.

Итак, множество $\Im$ всех допустимых исходов и множество $\Im'$ элементарных исходов в общем случае следует выбирать относительно «большими», а множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов не обязательно должно быть наиболее «широким». Множество $\mathcal{F}$ существенно зависит от различных целей изучения эксперимента E и оно, как правило, содержит только те допустимые события, которые исследователь может наблюдать. Значит, если множества $\Im$ и Ω для эксперимента E определены заранее некоторым образом, то допускается рассмотрение различных σ-алгебр $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов. Например, конкретная σ-алгебра $\mathcal{F}$ может не содержать некоторые или все элементарные исходы. В простейших случаях, когда совокупность $\Im'$ всех элементарных исходов эксперимента E является счётным, например, конечным, множество Ω однозначно определяет наиболее широкое множество $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ всех допустимых исходов, и $\mathcal{F} \subset \Im$. В общем случае если $\Im$ есть σ-алгебра и является обозримым математическим объектом, то упорядоченную пару вида $(\Omega, \Im)$ часто выбирают в качестве теоретико-множественной модели опыта E.

1.11. Теоретико-множественная модель эволюционных статистически устойчивых экспериментов

В разделе 1.2 на содержательном уровне было введено понятие эволюционного эксперимента $E = \{E_t;\ t \in T\}$. Рассмотрим теперь ради простоты эволюционный эксперимент E, для которого $T = \{1, 2, \ldots, m\}$. Таким образом, чтобы провести эксперимент E нужно провести последовательно эксперименты E_1, E_2, ..., E_m. При этом отмечалось, что исходы эксперимента $E = \{E_t;\ t \in T\}$ некоторым образом определяются исходами экспериментов E_1, E_2, ..., E_m. Другими словами, поведение всех m экспериментов E_1, E_2, ..., E_m должно быть некоторым образом описано как единый эксперимент E. Рассмотрим один из наиболее часто встречающихся способов такого описания.

Пусть при каждом фиксированном $t = 1, 2, \ldots, m$ эксперимент E_t с комплексом условий Σ_t имеет теоретико-множественную модель наблюдаемых исходов следующего вида $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$. При этом символ $\omega_t \in \Omega_t$ даёт полное описание в некотором языке произвольного элементарного результата эксперимента E_t с допустимыми исходами из множества $\Im_t$. Такое описание позволяет произвольный элементарный исход эксперимента E_t представить в виде одноточечного множества $\{\omega_t\}$, а любой другой его результат $A_t \in \Im_\mathrm{t}$ — в виде некоторого подмножества множества Ω_t, т. е. $A_t \subset \Omega_t$. Если мы последовательно наблюдали бы элементарные исходы $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, …, $\{\omega_m\}$ экспериментов E_1, E_2, ..., E_m, то естественно считать, что для единого эксперимента E осуществился элементарный исход $\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)\}$ с описанием $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$. В этом случае достоверное событие Ω единого эксперимента E представляет собой декартово произведение $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_m = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)\colon \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_m \in \Omega_m\}$ достоверных исходов Ω_1, Ω_2, …, Ω_m экспериментов E_1, E_2, ..., E_m. Большой интерес с точки зрения практики представляют исходы эксперимента E вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)\colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_m \in A_m\}$, где $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$, …, $A_m \in \mathcal{F}_m$. Исход эксперимента E вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ называют прямоугольником и такой исход заключается в том, что осуществились одновременно исходы A_1, A_2, …, A_m экспериментов E_1, E_2, ..., E_m. В дальнейшем произвольный исход эволюционного эксперимента E целесообразно обозначать полужирным латинским символом и курсивом, например, исход

$\boldsymbol{A} = A_1 \times \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Множество K прямоугольников $\boldsymbol{A} = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ позволяет простым способом построить некоторую σ-алгебру подмножеств пространства $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_m$.

Определение 13. Наименьшей σ-алгеброй $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_m = \sigma(\mathrm{K})$, которая порождается множеством K всех прямоугольников $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, называется такая σ-алгебра, для которой имеет место:

1) $\mathrm{K} \subset \sigma(\mathrm{K})$;
2) при любой σ-алгебре $\mathcal{R} \supset \mathrm{K}$ выполняется соотношение $\sigma(\mathrm{K}) \subset \mathcal{R}$.

Наименьшая σ-алгебра σ(K), содержащая множество K всех прямоугольников вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, существует. Пространство $(\Omega, \sigma(\mathrm{K})) = (\Omega, \mathcal{F})$ называется прямым произведением пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t = 1, 2, \ldots, m$ и объявляется теоретико-множественной моделью наблюдаемых исходов простейшего эволюционного эксперимента $E = \{E_t;\ t = 1, 2, \ldots, m\}$.

Итак, в настоящем разделе предложен способ построения теоретико-множественной модели $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_m, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_m)$ статистически устойчивого эволюционного эксперимента $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ простейшего вида. Аналогичным способом поступают в случае, когда T произвольное упорядоченное множество, например, T есть некоторое несчётное подмножество числовой прямой. Если при каждом фиксированном $t \in T$ эксперимент E_t с комплексом условий Σ_t имеет теоретико-множественную модель $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ наблюдаемых исходов, то для эволюционного эксперимента $E = \{E_t;\ t \in T\}$ построенную таким способом его теоретико-множественную модель обозначают через $(\coprod_{t\in T}\Omega_t, \coprod_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ и называют прямым произведением теоретико-множественных моделей или пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$. Здесь достоверный исход $\coprod_{t\in T}\Omega_t$ эволюционного эксперимента E представляет собой множество всех функций $\omega = \omega(t)$: $T \to \Omega_t$, каждая из которых при фиксированном $t \in T$ принимает значение $\omega_t \in \Omega_t$. Множество $\coprod_{t\in T}\mathcal{F}_t$ наблюдаемых исходов эволюционного эксперимента E совпадает с наименьшей σ-алгеброй, которая содержит все так называемые цилиндрические множества $\{\omega = \omega(t)\colon \omega(t_1) = \omega_{t_1} \in A_{t_1}, \omega(t_2) = \omega_{t_2} \in A_{t_2}, \ldots, \omega(t_n) = \omega_{t_n} \in A_{t_n}\}$, где $t_1 \in T, t_2 \in T, \ldots, t_n \in T$, $A_{t_1} \in \mathcal{F}_{t_1}$, $A_{t_2} \in \mathcal{F}_{t_2}$, …, $A_{t_n} \in \mathcal{F}_{t_n\ t_n}$ и $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим теперь частный случай такого рода построений. Пусть $T = \{1, 2, \ldots\}$ и при любом фиксированном $t = 1, 2, \ldots$ эксперимент E_t совпадает с некоторым заданным экспериментом E_0. Если эксперимент E_0 имеет теоретико-множественную модель $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$, то для эволюционного эксперимента $E = \{E_1 = E_0, E_2 = E_0, \ldots\}$ теоретико-множественную модель естественно обозначить через $(\Omega_0^\infty, \mathcal{F}_0^\infty)$. Заметим, что достоверный исход Ω_0^∞ эволюционного эксперимента E совпадает с пространством упорядоченных последовательностей вида $\omega =$

$= (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, где $\omega_t \in \Omega_0$ для всех $t = 1, 2, \ldots$ Множество $\mathcal{F}_0^{\infty}$ наблюдаемых исходов такого эволюционного эксперимента E равно наименьшей σ-алгебре, которая содержит все цилиндрические множества вида $\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)\colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n\}$, где $A_1 \in \mathcal{F}_0, A_2 \in \mathcal{F}_0, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_0$ и $n = 1, 2, \ldots$

1.12. Контрольные вопросы и упражнения

1. Привести примеры статистически устойчивых экспериментов, на которых проиллюстрировать различные способы выбора элементарных исходов.

2. Доказать основные законы, которым удовлетворяют теоретико-множественные операции над случайными событиями.

3. Используя законы для операций над событиями, доказать справедливость следующего равенства: $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$.

4. Опыт состоит в бросании трёх монет. Пусть монеты занумерованы и события C_1, C_2 и C_3 означают выпадение герба на первой, второй и третьей монетах соответственно. Пусть событие A означает выпадение одного герба и двух цифр, а событие B есть выпадение не более одного герба. Выразить через C_1, C_2, C_3 события A и B.

5. Доказать, что события A, $\overline{A} \bigcap B$, $\overline{A \bigcup B}$ образуют полную группу попарно несовместных событий.

6. Пусть эксперимент E заключается в непреднамеренном подбрасывании с помощью некоторого механизма на поверхность стола трёх монет. На одной стороне каждой монеты изображён герб, а на другой — решётка. Предположим, что невозможно зафиксировать сторону первой монеты, если на второй монете выпадает решётка. Построить теоретико-множественную модель для этого эксперимента $(\Omega, \mathcal{F})$.

7. Пусть эксперимент E заключается в непреднамеренном подбрасывании с помощью некоторого механизма на поверхность стола трёх монет. На одной стороне каждой монеты изображён герб, а на другой — решётка. В этом эксперименте нет возможности фиксирования герба и решётки, если на первой и второй монетах выпали одинаковые изображения. Построить теоретико-множественную модель $(\Omega, \mathcal{F})$ для такого эксперимента.

8. Каждое из четырех изделий может быть либо бракованным, либо годным. Введём события: A — хотя бы одно изделие бракованное, B — бракованных не менее двух изделий. Что означают следующие события: $\overline{A}, \overline{B}, A \bigcup B, A \bigcap B, A \bigcup \overline{B}, A \bigcap \overline{B}, A \setminus B$?

9. На трассе нефтепровода между городами Γ_1 и Γ_2 в течение некоторого времени произошла авария. Расстояние между городами равно 25 км. Измеряется расстояние от Γ_1 до места аварии. Построить теоретико-множественную модель для этого эксперимента.

ГЛАВА 2. Построение вероятностных моделей статистически устойчивых случайных экспериментов

2.1. Субъективный способ измерения шанса наступления случайных событий

Рассмотрим теперь понятие вероятности на интуитивном уровне. В гл. 1 статистически устойчивому эксперименту E с комплексом априори фиксированных условий $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ поставили в соответствие теоретико-множественную модель $(\Omega, \mathcal{F})$. Эта модель изучает свойства эксперимента E с качественной точки зрения, так как она, прежде всего, позволяет:

– указать допустимые, элементарные и наблюдаемые исходы для E;

– определить пространство Ω описаний всех элементарных исходов;

– проводить теоретико-множественные операции над исходами;

– выразить одни исходы эксперимента E через другие.

В повседневной деятельности человек издавна имеет дело с реальными всевозможными экспериментами. Прежде всего, люди проводят или наблюдают самые различные эксперименты. В этом случае первый и самый трудный вопрос состоит в том, чтобы измерить некоторое наше представление о конкретном результате эксперимента, или как такому представлению поставить в соответствие число. Например, человек с давних пор проходил путь из одного пункта в другой и при этом чувствовал усталость. У людей разного возраста, преодолевших одно и то же расстояние, возникает неодинаковое ощущение усталости. Более того, одно и то же расстояние человек часто проходит как поднимаясь в гору, так и спускаясь с горы, и поэтому может устать больше или меньше. Первоначально расстояние для человека ассоциировалось с тем чувством усталости, которое он приобретет при его прохождении. Интуитивное понятие физической усталости обогащается с течением всей жизни у каждого человека и становится более определенным. Затем, чтобы сделать это ощущение усталости понятием более ясным, люди стали приближённо измерять расстояние в некоторых единицах, например, в шагах, локтях и т. д. Прошло большое время, пока человечество не научилось объективно измерять чувство усталости от преодоления расстояния, и это расстояние стали измерять в метрах. И тогда появилась возможность обратного сравнения: зная расстояние между пунктами, каждый человек для себя определяет, насколько он устанет, пройдя его.

Аналогичная ситуация возникала, когда человек приподнимал некоторый груз, например, ведро с водой из колодца. Человек чувствовал усталость от поднятия тяжести. Это побудило человека количественно измерять способность тяжести причинять ему усталость в некоторых единицах, например, в пудах, в фунтах, в граммах и т. д. Теперь человек, зная меру тяжести в некоторых единицах, может оценить свою усталость от поднятия этой тяжести. В настоящее время люди с некоторой степенью точности научились измерять расстояние между населенными пунктами, вес тела, его массу, температуру и т. д. При этом основной и доступный метод приближённого измерения заключается в следующем. Выбирают некоторый так называемый эталонный результат эксперимента и значение его измерения. Далее, тем или иным способом сравнивают представление об эталоне с представлением о некотором другом результате и, тем самым, получают приближенное измерение последнего. Перейдём теперь к аналогичной и в то же время необычной ситуации.

Человек давно многократно наблюдал различные явления природы: выпадение осадков, изменение температуры воздуха, пожары, землетрясения, смену дня и ночи, времён года, падения метеоритов и т. д. Он мог точно предсказать некоторые из перечисленных явлений, например, смену дня и ночи, времён года. Какие-то он мог предвидеть с той или иной степенью уверенности (выпадение осадков, изменение температуры воздуха) и, наконец, явления типа пожаров, землетрясений, падения метеоритов он бессилен предугадать. Последние два типа явлений получили название случайных. Однако при неоднократном наблюдении за такими явлениями у человека возникает некоторое чувство уверенности в возможности или невозможности их предсказания. Поэтому есть желание количественно измерить это чувство о возможном наступлении некоторого случайного явления. Это измерение должно выражаться некоторым числом $\mathbf{P}_с(A)$. Число $\mathbf{P}_с(A)$ называется субъективной вероятностью или мерой (степенью) доверия субъекта случайному событию A. На содержательном уровне число $\mathbf{P}_с(A)$ позволяет субъекту предсказать результат A эксперимента E до его проведения или наблюдения. Другими словами, если эксперимент E проводится N раз в одних и тех же априори заданных условиях $\Sigma = \{u_1, u_2, ..., u_s, ...\}$, и число N достаточно большое, то субъект может на основе своей интуиции об эксперименте E сказать, что событие A наверно наступает около $N\mathbf{P}_с(A)$ раз. При таком рассуждении $0 \le \mathbf{P}_с(A) \le 1$. Если при этом $\mathbf{P}_с(A)$ близко к единице, то субъект может сказать, что событие A по-видимому наступит при единичном проведении эксперимента E. Напротив, при $\mathbf{P}_с(A)$ близком к нулю событие A скорее всего не наступит при единичном проведении эксперимента E. И, наконец, если $\mathbf{P}_с(A)$ близко к 1/2, то факт наступления результата A вызывает у субъекта слишком неопределённые и даже непонятные чувства.

К сожалению, у разных людей чувства о шансе наступления некоторого случайного явления неодинаковы и количественному измерению поддаются с большим трудом и грубым приближением. Более того, в повседневной жизни слово «вероятность» часто употребляется в качестве степени уверенности в отношении наступления тех или иных единичных фактов (событий). Эта степень уверенности в большой мере также связана с нашими субъективными и психологическими пожеланиями. Таковы, например, утверждения следующего содержания: «вероятно, что теорема Ферма справедлива», «вероятно, что каждое натуральное чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел (например, 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3 и т. д.)», «маловероятно, что 1 мая 2020 г. в Нижнем Новгороде выпадет снег».

Некоторые последователи интуитивно-субъективной концепции определяют субъективную вероятность как количественную меру степени психологической уверенности суждений каждого субъекта и для сугубо единичных явлений, и для исходов статистически устойчивых экспериментов. Из этого следует, что теория вероятностей оказывается чем-то вроде раздела психологии, а её выводы носят чисто субъективный характер. Между тем, все «микроскопические» свойства газов были выведены с использованием результатов классической теории вероятностей. Это обстоятельство и другие факты применения результатов теории вероятностей говорят о том, что субъективная вероятность должна определяться не для единичных событий, а для массовых событий, которые порождаются любым статистически устойчивым экспериментом E при его многократном проведении. Поэтому такой подход является универсальным, хотя число $\mathbf{P}_c(A)$ различными субъектами может определяться неоднозначно. Заметим, что также неоднозначно различными субъектами на основании только своей интуиции и опыта получаются результаты измерений расстояния между некоторыми пунктами, массы тела, температуры воздуха и т. п.

Рассмотрим теперь метод назначения субъективной вероятности или измерения шанса (чувства) возможного наступления наблюдаемого исхода A эксперимента E. Пусть для эксперимента E с комплексом Σ условий его проведения построена теоретико-множественная модель $(\Omega, \mathcal{F})$. Выберем некоторые события $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$.

Каждый субъект, хорошо представляя эксперимент E, сначала только на основе своей интуиции сравнивает события A_1 и A_2, или устанавливает между ними отношение вида $A_1 \prec A_2$. Для субъекта это означат, что событие A_2 не менее правдоподобно при наступлении, или не реже наступает, чем A_1. Можно предложить следующую игру субъекта (некоторого человека) с экспериментом E. Если субъект считает $A_1 \prec A_2$, то он получает ставку в a денежных единиц при наступлении только события A_2 и теряет a денежных единиц при наступлении только события A_1. Во всех остальных случаях считается ничья, т. е. он не получает и не теряет ставки. Если субъект желает получить достойный выигрыш, то он должен на интуитивном уровне правильно установить отношение правдоподобия $\prec$ между исходами случайного эксперимента. Далее, как правило, субъект назначает приближенные числа $\mathbf{P}_c(A_1) \le \mathbf{P}_c(A_2)$ для наблюдаемых исходов A_1 и A_2, если только $A_1 \prec A_2$. Каждый субъект по-разному может установить отношение правдоподобия. Однако желательно, чтобы числа $\mathbf{P}_c(A_1)$ и $\mathbf{P}_c(A_2)$, определяемые приближённо разными субъектами, несильно отличались друг от друга. С этой целью от любого отношения правдоподобия $\prec$ событий из $\mathcal{F}$ будем требовать выполнение следующих естественных ограничений:

– любая пара A и B из $\mathcal{F}$ сравнима, т. е. либо $A \prec B$, либо $B \prec A$. Если для некоторых событий C и D из $\mathcal{F}$ оказывается одновременно $C \prec D$ и $D \prec C$, то считают эти события C и D эквивалентными с точки зрения шансов их наступления. В этом случае факт эквивалентности обозначают через символ $C \cong D$;

– пусть $A_1 \bigcap A_2 = B_1 \bigcap B_2 = \varnothing$ и $A_1 \succ B_1, A_2 \succ B_2$, тогда событие $A_1 \bigcup A_2 \succ B_1 \bigcup B_2$. Если при этом события A_1 и B_1 не являются эквивалентными и (или) события A_2 и B_2 не являются эквивалентными, то события $A_1 \bigcup A_2$ и $B_1 \bigcup B_2$ также не должны быть эквивалентными;

– считаем, что $\varnothing \prec A$ для любого $A \in \mathcal{F}$ и что невозможное событие $\varnothing$ и достоверное событие Ω не являются эквивалентными, т. е. у эксперимента есть хотя бы один наблюдаемый исход;

– пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A_n \succ B$ при $n = 1, 2, \ldots$ Тогда можно записать, что событие $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \succ B$, где $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, $B \in \mathcal{F}$. Отсюда следует, что событие A, которое наступает одновременно с наступлениями сразу всех событий A_1, A_2, …, не менее правдоподобно, чем B.

– существует отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to [0,1]$, что $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ при всех $x \in \mathrm{R} = \{x: -\infty < x < +\infty\}$, и такое, что $\{\omega: \xi(\omega) \in J_1\} \prec \{\omega: \xi(\omega) \in J_2\}$ равносильно $| J_1 | \leq | J_2 |$ для любых промежутков $J_1, J_2 \subset [0, 1]$ соответственно с длинами $| J_1 |$, $| J_2 |$.

В этом случае в теории вероятностей доказывается (Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: МГУ. 1983), что отношение правдоподобия $\prec$ в $\mathcal{F}$ единственным образом определяет $\mathbf{P}_c(A)$, при этом если $A_1 \prec A_2$, то $\mathbf{P}_c(A_1) \leq \mathbf{P}_c(A_2)$. Пятое ограничение наиболее трудное для субъективного восприятия и не является доступным и естественным для большинства исследователей. Поэтому это ограничение нельзя рекомендовать к применению при назначении субъективной вероятности, и, как правило, от него отказываются. Это естественно приводит к неоднозначности в определении числа $\mathbf{P}_c(A)$ различными субъектами. Следовательно, мы не можем точно определить шанс наступления некоторого результата эксперимента, но каждому исходу A можно приписать субъективную вероятность $\mathbf{P}_c(A)$. Если $A_1 \prec A_2$ и $\mathbf{P}_c(A_2) \geq \mathbf{P}_c(A_1)$, то это означает, что шанс наступления события A_2 больше, чем шанс наступления события A_1. Эталонное событие здесь совпадает с достоверным исходом Ω. Любой другой результат A эксперимента будем сравнивать с результатом Ω. Ради удобства принимают $\mathbf{P}_c(\Omega) = 1$ и естественно полагают, что $\mathbf{P}_c(\varnothing) = 0$. Поэтому субъективная вероятность $0 \leq \mathbf{P}_c(A) \leq 1$ для всех $A \in \mathcal{F}$, так как достоверное событие Ω всегда наступает и имеет место соотношение $\varnothing \prec A \prec \Omega$.

Итак, основная проблема – назначение субъективной вероятности $\mathbf{P}_c(A)$ для любого $A \in \mathcal{F}$, используя отношение правдоподобия. На содержательном уровне число $1/\mathbf{P}_c(A)$, которое соответствует субъективной вероятности события A, показывает, во сколько раз событие A наступает реже, чем Ω. Следует сказать, что субъективное назначение вероятности для случайных событий является её первыми и наиболее грубым приближённым вычислением. Однако субъективный подход к измерению шансов (чувства) наступления исхода A имеет большое значение для понимания природы и сути статистически устойчивого эксперимента E. Другими словами, субъективный подход развивает у исследователей навыки и интуицию вероятностно-статистического мировоззрения на мир. Для иллюстрации рассмотрим примеры назначения субъективных вероятностей.

Пример 2.1. Из хорошо перемешанной колоды игральных карт, состоящей из дамы, короля и туза, наудачу (непреднамеренно, случайным образом) вынимается одна карта. Назначить субъективные вероятности исходов опыта.

Решение. Обозначим через ω_1 (ω_2, ω_3) описание элементарного исхода данного эксперимента, который заключается в том, что появится дама (король, туз). В этом случае достоверный исход $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Im = \mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$ и, следовательно, построена теоретико-множественная модель $(\Omega, \mathcal{F})$ этого опыта. На интуитивном уровне легко определить между случайными событиями из $\mathcal{F}$ следующее отношение правдоподобия. Например, $\{\omega_1\} \cong \{\omega_2\} \cong \{\omega_3\}$, $\{\omega_1, \omega_2\} \cong \{\omega_1, \omega_3\} \cong \{\omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_1\} \prec \{\omega_1, \omega_2\} \prec \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \Omega$ и т. д. Субъекту, исходя из интуитивного представления этого эксперимента, нетрудно представить, что карта с изображением дамы — событие $\{\omega_1\}$ выпадает, скорее всего, в три раза реже, чем появляется любая из трёх карт — достоверное событие Ω. Поэтому при $\mathbf{P}_c(\Omega) = 1$ можно принять, что субъективная вероятность $\mathbf{P}_c(\{\omega_1\}) \approx 1/3$. Следовательно, в силу эквивалентности событий вида $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$ имеет место соотношение $\mathbf{P}_c(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_3\}) \approx 1/3$. Далее ясно, что туз выпадает в два раза реже, чем дама или король – событие $\{\omega_1, \omega_2\}$. В силу этого и эквивалентности событий $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_1, \omega_3\}$, $\{\omega_2, \omega_3\}$ можно с большой уверенностью положить, что субъективная вероятность $\mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2, \omega_3\}) \approx 2/3$. Назначение субъективных вероятностей $\mathbf{P}_c(A)$, $A \in \mathcal{F}$, и следовательно упорядоченной тройки $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_c(A))$ для этого простого эксперимента определено.

Пример 2.2. Тетраэдр *dabc*, грани Δdab, Δdac, Δdcb, Δabc которого окрашены соответственно в белый, синий, красный и зеленый цвет, подбрасывается случайным образом (непреднамеренно) на поверхность стола с помощью некоторого механизма (см. рис. 2.1).

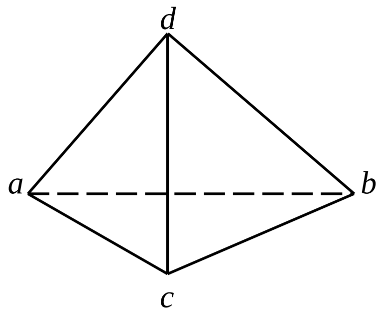


Рис. 2.1

При этом предполагается, что тетраэдр изготовлен из однородного материала. Фиксируется цвет грани, на которую падает тетраэдр, соприкасаясь с поверхностью стола. Обозначим через ω_1 (ω_2, ω_3, ω_4) описание в некотором языке элементарного исхода данного эксперимента, который заключается в том, что тетраэдр падает на грань Δdab (Δdac, Δdcb, Δabc). В этом случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$ и, значит, построена теоретико-множественная модель $(\Omega, \mathcal{F})$ этого эксперимента. Рассмотрим задачу о назначении субъективных вероятностей исходов данного опыта. На интуитивном уровне, почти с очевидностью, можно предложить между случайными событиями из $\mathcal{F}$ следующее отношение правдоподобия: $\{\omega_1\} \cong \{\omega_2\} \cong \{\omega_3\} \cong \{\omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2\} \cong \{\omega_1, \omega_3\} \cong \{\omega_1, \omega_4\} \cong \{\omega_2, \omega_3\} \cong$ $\cong \{\omega_2, \omega_4\} \cong \{\omega_3, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \cong \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\} \cong \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\} \cong \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\{\omega_1\} \prec \{\omega_1, \omega_2\} \prec \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \prec \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и т. д. Исследователю, исходя из симметрии этого эксперимента, нетрудно допустить, что грань Δdab с белым цветом – событие $\{\omega_1\}$ выпадает в четыре раза реже, чем появляется любая из четырёх граней – достоверное событие Ω. Поэтому при $\mathbf{P}_c(\Omega) = 1$ можно принять $\mathbf{P}_c(\{\omega_1\}) = 1/4$. В силу эквивалентности событий $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_4\}$ имеем $\mathbf{P}_c(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_4\}) = 1/4$. На содержательном уровне очевидно, что белый цвет наступает в два раза реже, чем синий или красный – событие $\{\omega_2, \omega_3\}$. В силу этого и эквивалентности событий вида $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_1, \omega_3\}$, $\{\omega_1, \omega_4\}$, $\{\omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_2, \omega_4\}$, $\{\omega_3, \omega_4\}$ можно с большой уверенностью положить, что субъективная вероятность $\mathbf{P}_c(\{\omega_2, \omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2, \omega_4\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_3, \omega_4\}) =$ $= \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_4\}) = 1/2$. Аналогичным образом получим: $\mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) =$ $= 3/4$. На этом заканчиваем рассмотрение субъективной вероятности и построение вероятностной модели экспериментов на интуитивном уровне.

2.2. Определение вероятности для опытов с конечным множеством равновозможных исходов

Субъективный подход, как уже отмечалось выше, даёт различные числа $\mathbf{P}_c(A)$ при его использовании исследователями для измерения шанса наступления случайного события A. Поэтому естественно желание людей предложить другие методы и подходы, которые измеряли бы шанс наступления случайного события A в виде одного и того же числа $\mathbf{P}(A)$ и независимо от субъекта. Эти подходы в теории вероятностей выдвигают на первый план какую-либо одну сторону общей проблемы и, тем самым, позволяют предложить конкретные способы точного нахождения вероятностей. В силу этого такого рода способы сводят общие понятия в теории вероятностей к более простым и доступным для приложений понятиям и поэтому применяют не во всех случаях. Как правило, для этого рассматривают некоторые классы экспериментов, которые выделяются среди множества всех реальных статистически устойчивых экспериментов с помощью тех или иных ограничений. Первым таким множеством является так называемая совокупность классических экспериментов, для которых имеет место:

– конечное число элементарных исходов рассматриваемого эксперимента E, каждый из которых можно наблюдать;

– симметрия эксперимента E, которая позволяет на интуитивном уровне определенно утверждать о равных (равновозможных, равновероятных) шансах наступления каждого из элементарных исходов.

Примеры таких опытов приведены в первой главе под номерами 1.8–1.10, 1.12, 1.13. Для такого рода экспериментов люди давно умели объективно измерять вероятности (шансы наступления) различных событий, производить вычисления с этими вероятностями, а также использовать результаты произведенных вычислений в практической деятельности и научных исследованиях. Это умение определять вероятности случайных событий, идущее от Ферма, Паскаля, Лапласа, Пуассона, Бернулли и Байеса, непосредственно связано с нашими интуитивными понятиями равновозможности, равновероятности и симметрии, а последние не подлежат формальному анализу. Приведём примеры, иллюстрирующие понятие равновозможности и симметрии элементарных исходов эксперимента.

Пример 2.3. Пусть мы имеем опыт по извлечению белого или чёрного шара из урны, содержащей несколько одинаковых по размеру, весу и другим осязаемым признакам шаров, тщательно перемешанных перед извлечением. Если число белых шаров не равно числу чёрных, то можно присвоить каждому шару его единственный номер (имя, метка). Этим приёмом добиваемся симметрии эксперимента. В данной ситуации говорят о равновозможности (равновероятности) появления любого имени шара или о том, что каждый шар имеет одинаковый шанс появления.

Пример 2.4. Появление герба при бросании симметричной монеты считается равновозможным с выпадением цифры.

Пример 2.5. Извлечение заранее указанной карты из хорошо перемешанной игральной колоды предполагается равновозможным по отношению к появлению любой другой карты.

Пусть теперь каждому классическому эксперименту E поставлена в соответствие теоретико-множественная модель $(\Omega,\mathcal{F})$. Тогда, согласно ограничениям для классического статистически устойчивого эксперимента E, будем иметь $\Im' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\}$ и $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Значит, при классическом построении основ теории вероятностей рассматривают множество $\Im'$, состоящее из конечного числа n попарно несовместимых равновозможных элементарных событий $\{\omega_k\}$, $k = 1, 2, ..., n$. Элементарные события образуют полную группу несовместимых событий. Составим теперь множество $\mathcal{F}$ событий, включающее невозможное событие $\varnothing$, все элементарные события и всевозможные события A, удовлетворяющие условию $A \subset \Omega$. В частности, достоверное событие Ω включается в $\mathcal{F}$.

Итак, множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\} = \{A_1, A_2, ..., A_q\}$, $q = 2^n$. Другими словами, множество $\mathcal{F}$ является множеством всех подмножеств множества Ω. Легко установить, что множество $\mathcal{F}$ образует σ-алгебру событий. Пусть при $m \le n$ случайное событие $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, ..., \omega_{a_m}\}$. В этом случае будем говорить, что элементарные события $\{\omega_{a_1}\}$, $\{\omega_{a_2}\}$, …, $\{\omega_{a_m}\}$, благоприятствуют появлению события A.

Определение 2. 1. Если $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, ..., \omega_{a_m}\}$, где $m \le n$, и все элементарные события равновозможны, то $\mathbf{P}(A) = m/n$.

Другими словами, вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих появлению данного события, к числу всех возможных элементарных событий. Отсюда следует, что вероятность $\mathbf{P}(A) = m/n = \mathbf{P}(\{\omega_{a_1}\}) + \mathbf{P}(\{\omega_{a_2}\}) + ... + \mathbf{P}(\{\omega_{a_m}\})$. Значит, вероятность события A определяется суммированием вероятностей тех элементарных исходов, которые могут наступать одновременно с исходом A. Итак, классическое определение вероятностей основывается на так называемом принципе равных возможностей Лапласа, Бернулли, Байеса. Рассмотрим ряд примеров на классическое определение вероятностей.

Пример 2.6. В урне имеется шесть чёрных и три белых шара. Определить вероятность появления белого шара.

Решение. Так как урна содержит разное число белых и чёрных шаров, то данный эксперимент не является симметричным. Поэтому сначала пронумеруем все шары цифрами от единицы до девяти. Предположим, что все белые шары помечены цифрами от единицы до трёх, а все чёрные шары помечены цифрами от четырёх до девяти. После этого эксперимент стал симметричным, так как все шары перенумерованы, и каждый из них имеет только один номер. Пусть теперь ω_1, ω_2 и ω_3 суть описания таких элементарных исходов, когда появляются шары белого цвета с номерами 1, 2 и 3 соответственно. Аналогично, ω_4, ω_5, …, ω_9 суть описания таких элементарных исходов, когда появляются шары чёрного цвета с номерами 4, 5, …, 9 соответственно. Итак, для этой задачи событие A, которое заключается в появлении белого шара, равно $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, …, \omega_9\}$. Тогда $n = 9$, $m = 3$ и $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

Пример 7. Задача Даламбера. Пусть симметричная монета бросается два раза с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Найти вероятность того, что хотя бы раз появится герб (ожидаемое событие A).

По одной из легенд Даламбер и его последователи решали эту задачу и рассуждали следующим образом. Герб появится либо при первом бросании и в этом случай второе бросание не нужно, либо только при втором, либо герб совсем не выпадает. Всех элементарных случаев три. Из них благоприятствуют ожидаемому событию A только два. Следовательно, искомая вероятность равна

2/3. Но практика показывала другой результат. А именно, из 100 проведённых опытов приблизительно в 75 случаях появлялось событие A. Только в более позднее время стали подозревать, что такое решение является неверным.

Приведём правильное решение задачи Даламбера. Для этого построим теоретико-множественную модель $(\Omega,\mathcal{F})$ этого эксперимента. Пусть $\Sigma = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ...\}$, где u_1 – выбрана симметричная монета определённого достоинства, $u_2 =$ выбран механизм бросания монеты, $u_3 =$ монета бросается два раза, u_4 – выбрана поверхность стола, u_5 – выбрана достаточная освещенность для определения выпавшей стороны монеты и т. д. Итак, перечислены основные условия u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 проведения данного эксперимента.

Выберем теперь элементарные исходы и математический язык для их описания. Пусть $\omega_1 = (0, 0)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает герб при первом и втором бросках; $\omega_2 = (0, 1)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает герб при первом броске и решётка при втором; $\omega_3 = (1, 0)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает решётка при первом броске и герб при втором; $\omega_4 = (1, 1)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает решётка при первом и втором бросках. Тогда достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 , \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \{A_1, A_2 , ..., A_{16}\}$, например, $A_i = \{\omega_i\}$ – элементарное случайное событие при $i = 1, 2, 3, 4$ и $A_{11} = \{\omega_1, \omega_2 , \omega_3\}$ – случайное событие (ожидаемое по Даламберу событие), которое заключается в том, что хотя бы раз появится герб. В этом случае $\mathbf{P}(A_{11}) = 3/4$ согласно классическому определению вероятности случайного события. Заметим, что при первом решении этой задачи были допущены следующие ошибки:

- Нарушено в действительности не только условие проведения эксперимента, но и условие симметрии его проведения, так как, если герб появился при первом броске, то отказывались от проведения второго броска.
- Выбранные по Даламберу исходы не равновозможны, т. е. имеют разные шансы наступления и, следовательно, классическое определение вероятности применять нельзя. Действительно, если случайное событие $A_5 = \{\omega_1, \omega_2\}$ – выпадение герба при первом бросании, случайное событие $A_3 = \{\omega_3\}$ – выпадение герба только при втором бросании и случайное событие $A_4 = \{\omega_4\}$ герб совсем не появится, то вероятность $\mathbf{P}(A_5) = 1/2$ и $\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = 1/4$.

Рассмотрим теперь ряд тестовых и поучительных примеров на непосредственный подсчёт вероятностей в классической – симметричной схеме и на объяснение возникающих при этом парадоксов. Решение большого числа конкретных и частных задач позволяет без особого труда строить дискретные вероятностные модели в общем случае.

- *Задача Галилео Галилея–Де Мере*. С помощью некоторого механизма на некоторую поверхность стола подбрасывается симметричная игральная кость три раза и определяется сумма выпавших очков при этих бросках. Можно рассмотреть несколько другой вариант этого эксперимента. С помощью некоторого механизма на поверхность стола один раз подбрасываются три симметричные игральные кости, изготовленные из одного и того же материала, например, из слоновой кости, и определяется сумма выпавших очков на этих костях.

По одной из легенд, в семнадцатом веке при дворе Людовика XIV была распространена следующая игра для двух лиц. Мы приводим здесь более простой её вариант. Крупье подбрасывает одну игральную кость три раза или три игральные кости один раз случайным образом с помощью некоторого механизма. У каждого из игроков заранее имеется возможность сделать одинаковые денежные ставки на сумму выпавших очков, например, равную одиннадцати или двенадцати. Предположим, что игрок номер один выбирает сумму очков, равную одиннадцати, а второй игрок выбирает сумму очков, равную двенадцати. Выигрывает поставленные ставки игрок номер один, если сумма выпавших очков равна одиннадцати, и выигрывает эти же ставки второй игрок, если сумма выпавших очков равна двенадцати. В противном случае объявляется ничья, и ставки сохраняются, если игра повторяется, либо игра прекращается, и сделанные соответствующие ставки возвращаются игрокам.

Как правило, игроки не придавали значения выбору суммы очков, равной одиннадцати или двенадцати, так как считали одинаковыми шансы их выпадения на следующем основании. Сумму очков одиннадцать можно получить следующими шестью различными способами: 1) на некоторой кости выпадает шесть очков, на другой кости – четыре и на оставшейся выпадает одно очко; 2) на некоторой кости выпадает шесть очков, на другой кости – три, а на оставшейся выпадает два очка; 3) на некоторой кости выпадает пять очков, на другой – пять и на оставшейся кости выпадает одно очко; 4) на одной кости выпадает пять очков, на другой – четыре, а на оставшейся кости выпадает два очка; 5) на одной кости выпадает пять очков, на другой – три, а на оставшейся кости выпадает три очка; 6) на некоторой кости выпадает четыре очка, на другой – четыре и на оставшейся кости выпадает три очка.

Сумма очков двенадцать может быть получена также шестью различными способами: 1) на одной кости выпадает шесть очков, на другой – пять, а на оставшейся кости выпадает одно очко; 2) на некоторой кости выпадает шесть очков, на другой – четыре, а на оставшейся кости выпадает два очка; 3) на одной кости выпадает шесть, на другой – три и на оставшейся кости – три очка; 4) на некоторой кости выпадает пять очков, на другой – пять, а на оставшейся кости– два очка; 5) на одной кости выпадает пять очков, на другой – четыре и на оставшейся кости – три очка; 6) на некоторой кости выпадает четыре очка, на другой – четыре и, наконец, на оставшейся кости выпадает четыре очка.

В более сжатом виде это можно отобразить следующим образом. Одиннадцать очков можно представить в виде суммы трёх чисел шестью способами: $6 + 4 + 1$, $6 + 3 + 2$, $5 + 5 + 1$, $5 + 4 + 2$, $5 + 3 + 3$, $4 + 4 + 3$. Двенадцать очков можно получить в виде суммы трех чисел тоже шестью способами: $6 + 5 + 1$, $6 + 4 + 2$, $6 + 3 + 3$, $5 + 5 + 2$, $5 + 4 + 3$, $4 + 4 + 4$. Равенство числа указанных способов, при которых выпадает сумма очков одиннадцать или сумма очков двенадцать, для многих игроков на интуитивном уровне означает, что шансы выигрыша игроков одинаковы. Однако в семнадцатом веке среди игроков была распространена легенда о том, что придворный французского королевского двора – шевалье Де Мере парадоксально часто выигрывал. Это средневековое предание можно объяснить следующим образом.

Попарно несовместимые исходы данной игры, взаимно однозначно соответствующие перечисленным способам получения суммы очков одиннадцать и суммы очков двенадцать, не являются равновозможными. Более того, сумму очков двенадцать можно получить, когда на каждой из трёх костей выпадает одно и тоже число очков. Такая ситуация заведомо не может быть при получении суммы очков одиннадцать, т. е. мы имеем явную асимметрию при выборе игроками суммы очков одиннадцать или суммы очков двенадцать.

Приведём правильное решение этой задачи. Для этой игры или эксперимента комплекс априори заданных условий Σ содержит следующие основные элементы: 1) условие u_1 означает выбор симметричной игральной кости; 2) условие u_2 означает, что игральная кость подбрасывается три раза; 3) условие u_3 отвечает за непреднамеренный механизм подбрасывания игральной кости, например, с помощью крупье; 4) условие u_4 обеспечивает гладкую поверхность стола, на которую падает игральная кость; 5) условие u_5 определяет освещённость поверхности стола, которая позволяет зафиксировать число выпавших очков на игральной кости.

Обозначим через вектор (x, y, z) описание элементарного исхода этой игры в том случае, когда при первом броске выпадает x очков, при втором броске – y, и при третьем – z. Каждая из компонент x, y, z может принимать целое значение от единицы до шести. Поэтому множество $\Omega = \{\omega = (x, y, z)$: $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. По основному правилу умножения комбинаторики достоверное случайное событие Ω содержит $n = 216$ описаний всех элементарных исходов. Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех подмножеств множества Ω, т. е. $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2^{216}}\}$. Обозначим через $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$ события, которые заключаются в том, что сумма выпавших очков равна одиннадцати и, соответственно, двенадцати. Пусть произошло событие B и оно реализовалось суммой $x + y + z$, в которой числа x, y, z различны, например, $x = 6$, $y = 5$, $z = 1$. Тогда существуют шесть описаний (6, 5, 1), (6, 1, 5), (5, 6, 1), (5, 1, 6), (1, 6, 5), (1, 5, 6) различных элементарных исходов этой игры, благоприятствующих появлению события B. Если существует всего два одинаковых числа в сумме $x + y + z$, например, $x = 6$, $y = z = 3$, тогда имеем три описания (6, 3, 3), (3, 6, 3), (3 , 3, 6) различных элементарных исходов, каждый из которых одновременно наступает с исходом B. Наконец, при $x = y = z$, будет одно описание (4, 4, 4) элементарного исхода, одновременно наступающего с исходом B.

Таким образом, находим двадцать пять элементарных исходов, благоприятствующих появлению события B. Рассуждая аналогичным образом, получаем двадцать семь элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. Выбор произвольного элементарного исхода и его описание в виде вектора (x, y, z) дают полное ощущение симметрии данного эксперимента, и, значит, шанс наступления каждого из элементарных исходов представляется различным субъектам одинаковым. По классическому определению вероятности событий получаем $\mathbf{P}(A) = 27/216 > \mathbf{P}(B) = 25/216$. Значит, на самом деле, более часто выпадает сумма в 11 очков, нежели сумма в 12 очков.

Отсюда возможно следующее разумное поведение в этой упрощённой игре, например, первого игрока. Если противник – второй игрок делает ставку на исход A, то первый игрок требует ограничение на время игры и на денежные ставки, делая их минимально возможными, или отказывается от игры. В этом случае он, возможно, проигрывает незначительную сумму. В противном случае, когда второй игрок делает ставку на исход B, первый игрок, поставив на результат A, может играть достаточно долго с максимально возможными ставками и иметь большой шанс на значительный выигрыш.

В результате большого опыта игры в кости француз Де Мере (1607–1648) подметил, что при одновременном бросании трёх игральных костей более часто выпадает комбинация, дающая в сумме 11 очков, чем комбинация, дающая в сумме 12 очков. Хотя с точки зрения интуиции его современников считалось, что эти комбинации имеют одинаковую вероятность. Такую ошибку интуиции игроков в XVII веке можно простить, так как $\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) = 2/216 \approx 0{,}01$. Возможно, игрок Де Мере – философ и литератор во времена правления Людовика XIV, используя свой опыт, и придерживался разумной стратегии в этой игре.

• *Задача на размещение частиц в системе Максвелла–Больцмана*. Имеются k различных частиц и m различных ячеек, при этом $m \geq k$. В этой системе нет запрета Паули, т. е. в ячейке может не оказаться частиц, или быть одна частица, или – две, ..., и, наконец, все k частиц могут находиться в некоторой ячейке. Частицы могут быть, например, протоны, электроны. Ячейками могут быть энергетические уровни, объёмы фазового пространства и т. д. Системе Максвелла–Больцмана, например, подчиняется обычный газ. Определить вероятность того, что: 1) в k определённых (зафиксированных) ячейках окажется по одной частице (случайное событие A); 2) в каких-то k ячейках окажется по одной частице (случайное событие B).

При решении этой задачи, которая играет важную роль в современной статистической физике, необходимо учитывать, что любые мыслимые здесь размещения частиц по ячейкам отличаются числом частиц в каждой из ячеек, индивидуальностью частиц и индивидуальностью ячеек. В силу этого присвоим частицам номера 1, 2, ..., k и ячейкам — номера 1, 2, ..., m. После этого произвольный элементарный исход данного эксперимента целесообразно описывать вектором $\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)$, в котором i-ая компонента x_i определяет номер ячейки, куда попала i-ая частица. Итак, $x_i \in \{1, 2, ..., m\}$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, а число n всех элементарных исходов очевидно равно m^k. Достоверное событие Ω для этого эксперимента имеет следующую структуру: $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)$:

$x_i = 1, 2, ..., m$ для $i = 1, 2, ..., k\} = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. При этом множество $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых случайных событий можно представить в виде $\mathcal{F} = \{C\colon C \subset \Omega\}$. Из определения события $A \in \mathcal{F}$ и события $B \in \mathcal{F}$ легко понять, что $A = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \neq x_j,\ i \neq j;\ x_i, x_j \in \{c_1, c_2, ..., c_k\} \subset \{1, 2, ..., m\}\}$, где $c_1, c_2, ..., c_k$ суть номера заранее зафиксированных ячеек, и событие $B = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \neq x_j,\ i \neq j;\ x_i, x_j \in \{1, 2, ..., m\}\}$. Отсюда можно записать $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, ..., \omega_{a_r}\} \subset \subset \Omega$, $B = \{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, ..., \omega_{b_s}\} \subset \Omega$, где $r = k!$ и $s = C_m^k k!$, и, значит, непосредственно имеем $\mathbf{P}(A) = k!/m^k$, $\mathbf{P}(B) = C_m^k k!/m^k$. Здесь интересно заметить, что вероятность $\mathbf{P}(A) = = \mathbf{P}(B)$ при $k = m$ и событие $A = B = \varnothing$ при $k > m$.

• *Задача на размещение частиц в системе Бозе—Эйнштейна*. Имеются k принципиально неразличимых частиц и m различных ячеек, при этом $m \geq k$. В этой системе также нет запрета Паули, т. е. в ячейке может оказаться любое число частиц от нуля до k. Частицы могут быть фотоны, пи-мезоны и т. д. Известно, например, что системе Бозе–Эйнштейна подчиняется фотонный газ. Определить вероятность того, что: 1) в k определённых (зафиксированных) ячейках окажется по одной частице (событие A); 2) в каких-то k ячейках окажется по одной частице (событие B). В системе Бозе–Эйнштейна любые мыслимые здесь размещения частиц по ячейкам отличаются числом частиц в каждой из ячеек и индивидуальностью ячеек, но не индивидуальностью попавших частиц. Для наглядного представления этого эксперимента выстроим все ячейки с номерами от 1 до m в ряд вплотную друг к другу по некоторой прямой ab (см. рис. 2.2).

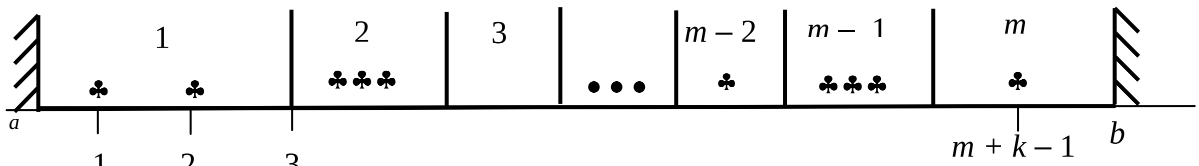


Рис. 2.2

Границы ячеек определим перегородками, среди которых две крайние жёстко закреплены, а остальные $m - 1$ внутренние и могут перемещаться. Расположим все частицы на этой прямой ab, перпендикулярной к указанным перегородкам. Частицы отмечены на рис. 2.2 символом «♣». Таким образом, на прямой ab имеются места с номерами $1, 2, ..., m + k - 1$ для всех k частиц и для всех $m - 1$ внутренних перегородок. Если теперь при некотором данном размещении частиц по ячейкам поменять между собой местами любые две или более частиц, то в силу неразличимости частиц получим то же самое размещение. Точно так же перестановка между собой местами внутренних перегородок не даёт нового размещения. Напротив, при перестановке местами частицы и перегородки получаем новое размещение. Более того, данное размещение частиц по ячейкам в системе Бозе–Эйнштейна однозначно определяет места на прямой ab для внутренних перегородок и, наоборот, выбранные места на прямой ab для внутренних перегородок однозначно задают размещение частиц по ячейкам. После этого произвольный элементарный исход данного эксперимента целесообразно описывать неупорядоченным множеством вида $\omega = \{y_1, y_2, ..., y_{m-1}\}$, в котором все его элементы различны и определяют номера мест на прямой ab для внутренних перегородок. Таков первый способ описания элементарных исходов данного эксперимента. Достоверное событие Ω при этом имеет структуру: $\Omega = \{\omega\colon \omega = \{y_1, y_2, ..., y_{m-1}\}, y_i \neq y_j, i \neq j; y_i = 1, 2, ..., m + k - 1$ для всех $i = 1, 2, ..., m - 1\}$. Число n всех элементарных исходов в рассматриваемом эксперименте очевидно равно числу всех $(m - 1)$-элементных подмножеств множества из $(m + k - 1)$ элементов, т. е. $n = C_{m+k-1}^{m-1}$. В качестве множества $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых случайных событий для данного эксперимента, как это обычно делается в дискретных вероятностных моделях, выберем совокупность всех подмножеств множества Ω. Из определения события $A \in \mathcal{F}$ получаем, что $A = \{\omega_a = \{1, 2, ... , m + k - 1\}\backslash\{a_1, a_2 + 1, ..., a_k + k - 1\}\}$. Здесь $a_1 < a_2 < ... < a_k$ суть номера заранее зафиксированных ячеек и множество $\{a_1, a_2 + 1, ..., a_k + k - 1\}$ задает места на прямой ab для всех k частиц. Немного труднее находим, что $B = \{\omega = \{1, 2, ... , m + k - 1\}\backslash\{b_1, b_2 + 1, ..., b_k + k - 1\}\colon b_i \neq b_j$ при $i \neq j$ и $i, j = 1, 2, ..., k$; $b_i = 1, 2, ..., m\} \in \mathcal{F}$. Отсюда, появлению события A благоприятствует только один элементарный исход, а наступлению события B благоприятствуют C_m^k элементарных исходов. Поэтому $\mathbf{P}(A) = 1/C_{m+k-1}^{m-1}$ и $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = C_m^k/C_{m+k-1}^{m-1}$. Как и в предыдущем примере, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$ при $k = m$ и $A = B = \varnothing$ при $k > m$.

В заключение отметим, что часто в качестве описания ω произвольного элементарного исхода данного эксперимента выбирают вектор $(z_1, z_2, ..., z_m)$, компонента z_i которого определяет число частиц в i-ой ячейке. В этом случае ясно, что $z_i \in \{0, 1, 2, ..., k\}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ и $z_1 + z_2 + ... + z_m = k$. Достоверное событие Ω при таком выборе описания произвольного элементарного исхода имеет следующую структуру: $\Omega = \{\omega = (z_1, z_2, ..., z_m)\colon z_i = 0, 1, 2, ..., k$ для всех $i = 1, 2, ..., m$; $z_1 + z_2 + ... + z_m = k\}$. Если теперь некоторый элементарный исход имеет описание в виде вектора $(z_1, z_2, ..., z_m)$, то нетрудно отсюда найти единственное описание этого элементарного исхода в виде множества $\{z_1 + 1, z_1 + z_2 + 2, ... , z_1 + z_2 + ... + z_{m-1} + m - 1\} = \{y_1, y_2, ..., y_{m-1}\}$. При этом любым двум различным векторам $(z_1, z_2, ..., z_m)$ и $(z_1', z_2', ..., z_m')$ соответствуют различные множества $\{z_1 + 1, z_1 + z_2 + 2, ... , z_1 + z_2 + ... + z_{m-1} + m - 1\}$ и $\{z_1' + 1, z_1' + z_2' + 2, ... , z_1' + z_2' + ... + z_{m-1}' + m - 1\}$. Действительно, если это не имеет место, то $\{z_1 + 1, z_1 + z_2 + 2, ... , z_1 + z_2 + ... + z_{m-1} + m - 1\} = \{z_1' + 1, z_1' + z_2' + 2, ... , z_1' + z_2' + ... + z_{m-1}' + m - 1\}$. Значит, верны соотношения вида: $z_1 + 1 = z_1' + 1$, $z_1 + z_2 + 2 = z_1' + z_2' + 2$, ..., $z_1 + z_2 + ... + z_{m-1} + m - 1 = z_1' + z_2' + ... + z_{m-1}' + m - 1$. Отсюда и из равенств вида: $z_1 + z_2 + ... + z_m = k$, $z_1' + z_2' + ... + z_m' = k$ находим $z_1 = z_1'$, $z_2 = z_2'$, ... , $z_m = z_m'$, а это противоречит неравенству $(z_1, z_2, ..., z_m) \neq (z_1', z_2', ..., z_m')$.

Наоборот, имея описание элементарного исхода в виде неупорядоченного множества $\{y_1, y_2, ..., y_{m-1}\}$, где ради простоты считаем $y_1 < y_2 < ... < y_{m-1}$, легко получим единственное описание этого элементарного исхода в виде вектора $(y_1 - y_0 - 1, y_2 - y_1 - 1, ... , y_m - y_{m-1} - 1) = (z_1, z_2, ..., z_m)$, где $y_0 = 0$ и $y_m = m + k$. Также показывается, что разным множествам $\{y_1, y_2, ..., y_{m-1}\}$ и $\{y_1', y_2', ..., y_{m-1}'\}$ соответствуют разные вектора $(y_1 - y_0 - 1,\ y_2 - y_1 - 1, ..., y_m - y_{m-1} - 1)$ и $(y_1' - y_0' - 1, y_2' - y_1' - 1, ..., y_m' - y_{m-1}' - 1)$, где $y_1 < y_2 < ... < y_{m-1}$, $y_1' < y_2' < < ... < y_{m-1}'$, $y_0 = y_0' = 0$ и, наконец, $y_m = y_m' = m + k$. Значит, между двумя различными описаниями элементарных исходов этого эксперимента установлено взаимно однозначное соответствие. Выбор того или иного способа описания элементарных исходов определяется кругом вопросов, на которые необходимо отвечать при рассмотрении данного эксперимента. Например, при подсчёте числа всех элементарных исходов данного эксперимента целесообразно использовать первый способ описания.

• *Задача на размещение частиц в системе Ферми–Дирака*. Имеются k принципиально неразличимых частиц и m различных ячеек, при этом $m \geq k$. В системе дополнительно действует принцип запрета Паули, т. е. в каждой ячейке может находиться не более одной частицы (см. рис. 2.3).

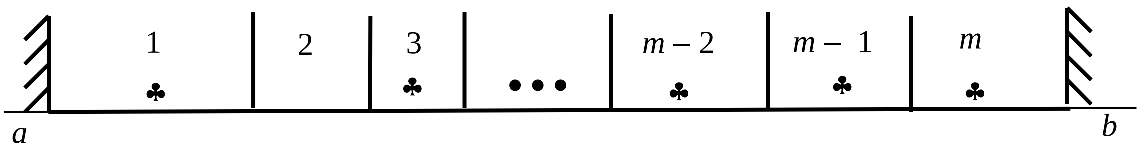


Рис. 2.3

Частицы могут быть электроны, протоны, нейтроны и т. д. Системе Ферми–Дирака подчиняется, например, электронный газ. Итак, имеем систему Бозе–Эйнштейна с ограничением Паули. Определить вероятность того, что: 1) в k определенных (зафиксированных) ячейках окажется по одной частице (событие A); 2) в каких-то k ячейках окажется по одной частице (событие B). Как и в системе Бозе–Эйнштейна перестановка между собой местами только частиц или только внутренних перегородок не дает нового размещения. Однако при перестановке местами частицы и перегородки иногда в некоторой ячейке может оказаться две частицы. Например, перестановка местами на рис. 2.3 первой внутренней перегородки и частицы из третьей ячейки приводит к размещению двух частиц в первой ячейке. Таким образом, для получения новых размещений в системе Ферми–Дирака требуется другой механизм.

Пусть мы имеем некоторое размещение частиц в системе Ферми–Дирака, то отсюда однозначно можно определить номера всех непустых ячеек. Обратно, если мы выберем любые k различных номеров ячеек из m и поместим в эти отобранные ячейки по одной частице, то в результате этого механизма однозначно получим некоторое размещение в системе Ферми–Дирака. Это размещение не зависит от порядка отобранных номеров ячеек. По этой причине произвольный элементарный исход данного эксперимента можно описать неупорядоченным множеством $\omega = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$, в котором все его элементы различны и определяют номера непустых k ячеек из m возможных. При этом достоверное событие $\Omega = \{\omega = \{u_1, u_2, ..., u_k\}: u_i \neq u_j,\ i \neq j;\ u_i = 1, 2, ..., m$ для всех $i =$ $= 1, 2, ..., k\}$. Число n всех элементарных исходов в рассматриваемом эксперименте очевидно равно числу всех k-элементных подмножеств множества из m элементов, т. е. $n = C_m^k$. Теперь нетрудно видеть, что событие $A = \{\{c_1, c_2, ..., c_k\}\}$ совпадает с некоторым элементарным исходом, $B = \Omega = \{\omega\colon \omega = \{u_1, u_2, ..., u_k\},\ u_i \neq u_j,\ i \neq j;\ u_i = 1,2,..., m$ для всех $i = 1, 2, ..., k\}$ и поэтому для этой задачи имеем $\mathbf{P}(A) = 1/C_m^k = k!(m-k)!/m!$, $\mathbf{P}(B) = 1$. Здесь множество из k номеров заранее зафиксированных ячеек, в каждой из которых окажется по одной частице, обозначено через $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$. Забавно отметить, что при $k = m$ система Ферми—Дирака становится детерминированной, т. е. $A = B = \Omega = \{\{1, 2, ..., m\}\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$.

Понятно, что в качестве описания ω произвольного элементарного исхода данного эксперимента можно выбрать вектор $(z_1, z_2, ..., z_m)$, компонента z_i которого определяет число частиц в i-ой ячейке. Тогда будем иметь соотношения $z_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $z_1 + z_2 + ... + z_m = k$ и $\Omega = \{\omega = (z_1, z_2, ..., z_m)\colon z_i = 0, 1$ для всех $i = 1, 2, ..., m;\ z_1 + z_2 + ... + z_m = k\}$. Рассуждая, как и в задаче на размещение частиц в рассмотренной системе Бозе–Эйнштейна, нетрудно установить взаимно однозначное соответствие между этими двумя различными описаниями элементарных исходов данного эксперимента.

• *Задача на размещение частиц в системе Линден–Белла*. Имеются k различимых частиц и m различных ячеек, при этом $m \geq k$. В этой системе действует принцип запрета Паули. Итак, имеем систему Максвелла–Больцмана с ограничением Паули или систему Ферми–Дирака с принципиально различимыми частицами. Определить вероятность того, что: 1) в k зафиксированных ячейках окажется по одной частице (событие A); 2) в каких-то k ячейках окажется по одной частице (событие B).

Предполагается, что ограничениям Линден–Белла удовлетворяют элементарные объёмы фазового пространства звездных систем. Так как мы имеем систему Максвелла–Больцмана с ограничением Паули, то произвольный элементарный исход эксперимента будем описывать вектором $\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)$, в котором i-я компонента x_i определяет номер ячейки, куда попала i-я частица. Однако достоверное событие Ω для системы Линден–Белла имеет другую структуру, а именно: $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \neq x_j,\ i \neq j;\ x_i = 1, 2,..., m$ для всех $i =$ $= 1, 2,..., k\}$. Из этого следует, что число n всех элементарных исходов для этого эксперимента равно числу размещений из m элементов по k, т. е. $n = A_m^k =$ $= k!\,C_m^k = m!/(m-k)! = m \times (m-1) \times ... \times (m-k+1)$. Из определения A и B для системы Линден–Белла легко видеть, что $A = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \ne x_j,\ i \ne j;\ x_i \in \in \{c_1, c_2, ..., c_k\} \subset \{1, 2,..., m\}\}$, где $c_1, c_2, ..., c_k$ суть номера заранее зафиксированных ячеек, и $B = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \ne x_j,\ i \ne j;\ x_i = 1, 2,..., m$ для всех $i = 1, 2,..., k\}$, т. е. $B = \Omega$. Следовательно, событию A благоприятствует появление $r = k!$ элементарных исходов данного эксперимента, а событию B благоприятствует появление $s = k!\,C_m^k$ элементарных исходов. Отсюда $\mathbf{P}(A) = 1\backslash C_m^k$, $\mathbf{P}(B) = 1$. Найденные вероятности совпадают с аналогичными вероятностями в системе Ферми–Дирака. Отметим, что в задаче Линден–Белла $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1$ при $k = = m$ и $A = B = \varnothing$ при $k > m$. Однако, в отличие от эксперимента Ферми—Дирака, система Линден–Белла при $k = m$ не является детерминированной.

• *Задача о днях рождения*. Пусть происходит случайный выбор k людей в Нижнем Новгороде для прослушивания популярной лекции по теории вероятностей. Найти вероятность того, что, по крайней мере, у двух слушателей дни рождения совпадают (событие A).

Прежде всего, уточним этот эксперимент. Годы не одинаковы по продолжительности, а рождаемость в течение года не остается постоянной. Однако в достаточно хорошем приближении можно полагать, что в году 365 дней, и день рождения каждого слушателя равновозможен в один из этих дней. На самом деле это означает, что случайный выбор k людей и случайный выбор k дней рождения приводят к одним и тем же результатам. Для каждого $i = 1, 2, ..., k$ обозначим через x_i день рождения i-го слушателя, где $x_i \in \{1, 2, ... , 365\}$. Тогда произвольному элементарному исходу данного эксперимента можно поставить в соответствие описание ω в виде вектора $(x_1, x_2, ... , x_k)$ и, следовательно, достоверное событие $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i = 1,2, ..., 365$ для всех $i = 1, 2, ..., k\}$ содержит $n = (365)^k$ элементов. Если $\overline{A} = \Omega \setminus A$ есть событие, которое заключается в том, что ни один день рождения не встречается более одного раза, т. е. все k дней рождения различны, то $\overline{A} = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \ne x_j,\ i \ne j;\ x_i = 1, 2, ..., 365$ для $i = 1, 2, ..., k\}$, $A = \Omega \setminus \overline{A}$, $\aleph(A) = (365)^k - 365 \times 364 \times ... \times (365 - k + 1)$ и $\mathbf{P}(\overline{A}) = 365 \times 364 \times ... \times (365 - k + 1)/(365)^k$, $\mathbf{P}(A) = ((365)^k - 365\times364 \times ... \times \times (365 - k + 1))/(365)^k = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$. Приведём теперь значения вероятности $\mathbf{P}(A)$ для некоторых k (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

k	4	10	16	20	22	23	30	40	50	60	64
$\mathbf{P}(A)$	0,016	0,117	0,284	0,411	0,476	0,507	0,706	0,891	0,970	0994	0,997

Из табл. 2.1 видно, что при числе слушателей больше тридцати вероятность совпадения дней рождения довольно близка к единице. Такой вывод на интуитивном уровне, как правило, не ожидается, так как группа из 30 слушателей существенно меньше 366 человек. Заметим, что для числа слушателей больше числа 365, по меньшей мере, у двоих совпадают дни рождения, и в этом случае $\mathbf{P}(A) = 1$.

• *Задача о выборе престижной квартиры*. Среди m квартир некоторого жилищно-строительного кооператива имеется k престижных квартир. В распределении всех квартир принимают участие $r < m$ членов жилищно-строительного кооператива. Оставшиеся $m - r$ квартир передаются в распоряжение городской администрации. Члены кооператива по очереди один за другим вытаскивают один билет, на котором указан номер его будущей квартиры. Вычислить вероятность того, что s-й из очереди член кооператива вытащит престижную квартиру.

Обозначим через x_1 номер квартиры, который вытащил первый из очереди член кооператива; через x_2 номер квартиры, который вытащил второй из очереди член кооператива; ... и, наконец, через x_r номер квартиры, который вытащил последний из очереди член кооператива. Тогда произвольный элементарный исход этого эксперимента будем описывать вектором $\omega = (x_1, x_2, ..., x_r)$, а достоверное событие Ω – множеством $\{\omega\colon \omega = (x_1, x_2, ..., x_r), x_i \neq x_j, i \neq j; x_i = 1, 2, ..., m\}$. Отсюда находим, что число n элементарных исходов для эксперимента равно числу размещений из m элементов по r, т. е. $n = A_m^r = m \times (m - 1) \times ... \times$ $\times (m - r + 1)$. Пусть для определенности престижные квартиры имеют номера 1, 2, ..., k. Если событие A заключается в том, что s-й из очереди член кооператива вытащит престижную квартиру, то $A = \{\omega = (x_1, x_2, ..., x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, ..., x_r)\colon x_i \neq$ $\neq x_j, i \neq j; x_i = 1, 2, ..., m; x_s = 1, 2, ..., k\}$. Событие A содержит $k(m - 1) \times (m - 2) \times$ $\times ... \times (m - 1 - (r - 1) + 1) = k(m - 1)(m - 2) \times ... \times (m - r + 1)$ описаний всех тех элементарных исходов, которые происходят с этим событием. Поэтому $\mathbf{P}(A) =$ $= [k(m - 1)(m - 2) \times ... \times (m - r + 1)] \times m^{-1} \times (m - 1)^{-1} \times ... \times (m - r + 1)^{-1} = k/m$. Итак, вероятность вытащить престижную квартиру не зависит от номера s очереди члена кооператива.

В заключение этого пункта важно заметить, что понятие равновероятности (равновозможности) элементарных исходов является первоначальным и интуитивным понятием. Это понятие основывается на симметрии опыта, не зная при этом численные значения вероятностей событий. Затем на основе этого предлагается простой способ вычисления вероятностей случайных событий. Аналогично, когда равенство отрезков на прямой выясняется путём их наложения, не прибегая при этом к их численному измерению длин. Поэтому здесь нет логической ошибки (порочного круга).

Итак, при классическом определении вероятности в случае конечного числа возможных элементарных исходов E априори предполагается симметричность эксперимента E по отношению к таким исходам. Поэтому всегда остается вопрос о симметричности, или однородности, или равновозможности. Наконец, возникает вопрос о существовании вероятностей в случае несимметричного эксперимента. Например, в опыте с броском игральной кости при заведомо её неоднородности.

2.3. Вычисление вероятности для испытаний с несчётным числом равновозможных исходов

Классическое определение вероятности основано на рассмотрении симметричного эксперимента *E*, в котором выделена полная группа конечного числа *n* равновозможных (равновероятных) несовместных элементарных событий. При этом для любого случайного события $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_m}\} = \{\omega_{a_1}\} \bigcup \{\omega_{a_2}\} \bigcup \ldots \bigcup \{\omega_{a_m}\} \in \mathcal{F}$, которому благоприятствуют $m \leq n$ элементарных событий, вероятность $\mathbf{P}(A) = m/n = \mathbf{P}(\{\omega_{a_1}\}) + \mathbf{P}(\{\omega_{a_2}\}) + \ldots + \mathbf{P}(\{\omega_{a_m}\})$. Однако имеется большое число экспериментов, в которых мыслимо бесконечное (несчётное, недискретное) множество элементарных исходов. В этом случае по-прежнему большую роль играет понятие симметрии эксперимента и понятие о равновозможности его выбранных элементарных исходов. Тем не менее, каждому элементарному исходу $\{\omega\}$ из $\mathfrak{I}'$ уже нельзя приписать одну и ту же положительную вероятность. Это можно объяснить следующими простыми рассуждениями. Произвольный случайный исход *A*, вообще говоря, может наблюдаться с бесконечным числом различных элементарных событий. Другими словами, случайное событие *A* может быть представлено в виде объединения бесконечного числа элементарных событий вида $\{\omega\}$. Поэтому вероятность $\mathbf{P}(A)$ такого случайного исхода нельзя вычислить суммированием вероятностей $\mathbf{P}(\{\omega\})$ тех элементарных исходов, которые могут наступать одновременно с исходом *A*. Для такого рода симметричных экспериментов положительная вероятность уже задается для некоторых случайных событий, которые не совпадают ни с одним из элементарных исходов. Переходим теперь непосредственно к понятию геометрической вероятности. Ради определенности и простоты рассмотрим последовательно следующие три случая.

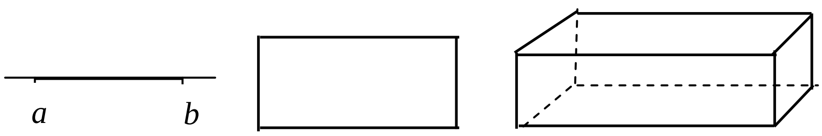
Сначала рассмотрим геометрическую вероятность на вещественной прямой. Пусть реальный эксперимент *E* таков, что каждый выбранный его элементарный исход можно описать абсциссой *x* некоторой точки из заданного промежутка *G* на действительной прямой R. При этом допускается, что длина промежутка *G*, обозначаемая через mes(*G*), существует и mes(*G*) ≠ 0. Наряду с экспериментом *E* будем рассматривать также ему адекватный модельный эксперимент E_m, связанный с непреднамеренным выбором точки из промежутка *G* действительной прямой R. Эта адекватность такова, что случайный выбор любого элементарного исхода эксперимента *E* с описанием $\omega = x$ взаимно однозначно соответствует непреднамеренному выбору точки из промежутка *G* с абсциссой *x*. Термин «непреднамеренный выбор» на содержательном уровне означает, что точка ставится случайным образом, причём ни одному положению внутри промежутка *G* не отдаётся предпочтение. Этим обеспечивается симметрия экспериментов *E* и E_m. Более того, наблюдаемый исход *A* эксперимента *E* и наблюдаемый исход A_m модельного эксперимента E_m взаимно однозначно соответствуют друг другу, если каждый из этих исходов представлен в виде одного и того же множества $g \subset G$. Другими словами, при наблюдении случайного события A мы наблюдаем случайное событие A_m и наоборот. Предполагается, что длина mes(g) промежутка g существует. В этом предположении по определению естественно принять, что для эксперимента E достоверный исход $\Omega = \{\omega = x\colon x \in G\} \subset \mathrm{R}$, случайное событие $A = \{\omega = x\colon x \in g\}$, □ $= \{g\colon g \subset G$, mes(g) существует$\}$ и вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathrm{mes}(g)/\mathrm{mes}(G)$. Например, $\mathbf{P}(\Omega) =$ $= \mathrm{mes}(G)/\mathrm{mes}(G) = 1$.

Перейдем теперь к построению вероятностной модели на плоскости. Очень часто элементарный исход реального эксперимента E удобно описать в виде упорядоченной пары (x, y), которая определяет некоторую точку из заданной области G на плоскости $x0y$. Предполагается, что область G имеет площадь, которая обозначается через mes(G), и mes(G) $\neq 0$. По аналогии с первым случаем, во втором случае вместо реального эксперимента E мы рассматриваем соответствующий ему модельный эксперимент E_m, который заключается в случайном выборе точки из заданной области G. Пусть R^2 – плоскость, $G \subset \mathrm{R}^2$, $g \subset G$ и площадь mes(g) области g существует. То по определению принимаем, что для эксперимента E достоверное событие $\Omega = \{\omega = (x, y)\colon (x, y) \in G\} \subset \mathrm{R}^2$, $\mathcal{F} = \{g\colon g \subset \mathrm{G}$, mes($g$) существует$\}$, событие $A = \{\omega = (x, y)\colon (x, y) \in g\}$ и $\mathbf{P}(A) =$ $= \mathrm{mes}(g)/\mathrm{mes}(G)$.

На третьем этапе изучим геометрическую вероятность в трёхмерном пространстве. Пусть теперь элементарный исход эксперимента E можно описать в виде упорядоченной тройки (x, y, z), определяющей некоторую точку из трёхмерной области G пространства R^3. Предполагается, что объём трёхмерной области G, обозначаемый через mes(G), существует и mes(G) $\neq 0$. По аналогии с первым и вторым случаем здесь вместо реального эксперимента E мы рассматриваем адекватный ему модельный эксперимент E_m, который заключается в произвольном выборе точки из трёхмерной области G пространства R^3. Пусть теперь $g \subset G$ и объём mes(g) трёхмерной области g существует. Не меняя рассуждения рассмотренных первых двух случаев, выводим, что для эксперимента E произвольный элементарный исход $A' = \{\omega = (x, y, z)\}$, достоверный исход $\Omega = \{\omega = (x, y, z)\colon (x, y, z) \in G\} \subset \mathrm{R}^3$, произвольное случайное событие $A = \{\omega =$ $= (x, y, z)\colon (x, y, z) \in g\}$, $\mathcal{F} = \{g\colon g \subset G$, mes($g$) существует$\}$ и вероятность $\mathbf{P}(A) =$ $= \mathrm{mes}(g)/\mathrm{mes}\ (G)$.

Совершенно таким же образом можно рассмотреть общий случай геометрического подхода при определении вероятности случайных событий, когда элементарный исход эксперимента E описывается в виде упорядоченной системы $\omega = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из n действительных чисел. Наподобие того, как мы пользовались понятием длины промежутка в R, площади плоской фигуры в R^2 и объёма пространственного тела в R^3, в основе общего случая определения геометрической вероятности лежит понятие объёма n-мерной области в евклидовом пространстве R^n. Следует заметить, что не существует методики, которая позволяла бы рационально использовать тот или иной случай геометрического подхода к вычислению вероятности случайных событий реальных экспериментов. Как правило, это определяется опытностью и научной зрелостью исследователя.

Итак, мы приходим к следующему определению геометрической вероятности. Пусть имеем некоторую область G описаний всех элементарных исходов, которая может быть представлена для каждого конкретного эксперимента E в виде: 1) некоторого промежутка на действительной оси, имеющего некоторую длину, например, отрезка $G = [a, b]$; 2) некоторой геометрической фигуры на плоскости, имеющей площадь, например, замкнутого прямоугольника $G = \{(x, y)\colon a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$; 3) некоторой трёхмерной фигуры в пространстве, имеющей объём, например, замкнутого прямоугольного параллелепипеда $G = \{(x, y, z)\colon a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ u \le z \le v\}$ и т. д. (см. рис. 2.4). Здесь a, b, c, d, u, v некоторые действительные числа. Вместо реального эксперимента E будем теперь рассматривать адекватный ему модельный эксперимент E_m. Эксперимент E_m заключается в том, что в область G наудачу бросается точка. Термин «наудачу» означает, что точка ставится случайным образом, причём ни одному положению внутри области G не отдаётся предпочтение.



а) *б*) *в*)

Рис. 2.4

Определение 2.2. Вероятность события A реального эксперимента E с несчётным числом равновозможных исходов по определению равна вероятности попадания случайной точки внутрь некоторой области $g \subset G$ для модельного опыта E_m. Эта вероятность равна отношению меры области g к размеру всей области G, т. е. вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathrm{mes}(g)/\mathrm{mes}(G)$.

Ещё раз отметим, что здесь A есть такой исход, множество описаний которого совпадает с областью g. Появление события A реального эксперимента E адекватно выбору точки в области g для модельного эксперимента E_m. Рассмотрим примеры на построение адекватных вероятностных моделей для реальных экспериментов. Если проведение некоторого числа испытаний над реальным статистически устойчивым экспериментом E требует значительных временных и денежных затрат, то для изучения такого рода экспериментов, как правило, необходимо последовательное составление несколько адекватных вероятностных моделей. Из этой последовательности построенных моделей выделяется наиболее простая, которая поддаётся исследованию методами теории вероятностей и математической статистики. Далее, результаты исследования такой модели интерпретируются и сопоставляются применительно к остальным моделям и, естественно, к исходному эксперименту E. Рассмотрим решение ряда такого сорта задач.

• *Задача о гончарном круге*. Рассматривается кустарное производство глиняной посуды мастером с использованием цилиндрического гончарного круга радиуса r. В результате работы на верхней поверхности гончарного круга наудачу (случайным образом) образуются трещины типа хорды. Если длина трещины не превосходит $\sqrt{3}\,r$, то мастер может её заделать и вновь использовать этот гончарный круг. При длине трещины больше $\sqrt{3}\,r$ мастер должен заменить этот гончарный круг новым (событие A). В противном случае он будет изготовлять посуду с браком. Чему равна вероятность того, что мастер воспользуется новым гончарным кругом? Так как верхняя поверхность гончарного круга представляет собой круг радиуса r, то вполне очевидно, что реальному эксперименту E можно поставить во взаимно однозначное соответствие первый модельный эксперимент $E_Б$ или хорошо известную задачу Бертрана. Наудачу выбирается хорда в круге радиуса r. Найти вероятность того, что её длина превосходит длину стороны вписанного в этот круг равностороннего треугольника abc (событие $A_Б$). Приведём несколько подходов решения задачи.

Первый подход. Предположим, что в плоскости данного круга выбрано некоторое направление $0y$, например, вертикальное (см. рис. 2.5). Точка b и точка O на рис. 2.5, *а*) называются полюсами закрепления при изготовлении гончарного круга. Пусть хорды круга наудачу проводятся перпендикулярно к фиксированному направлению $0y$. Тогда произвольным элементарным исходом в эксперименте $E_Б$ является положение наудачу выбранной хорды.

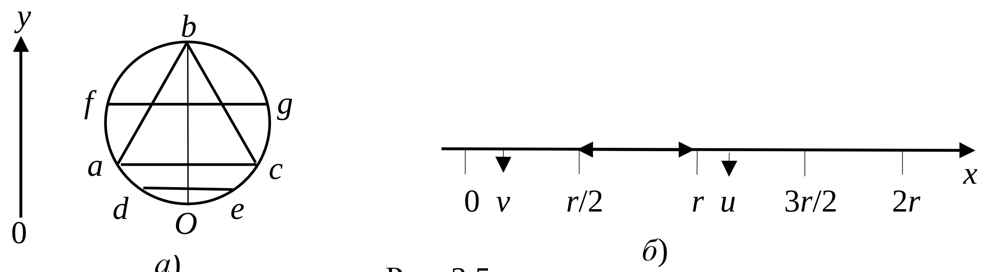
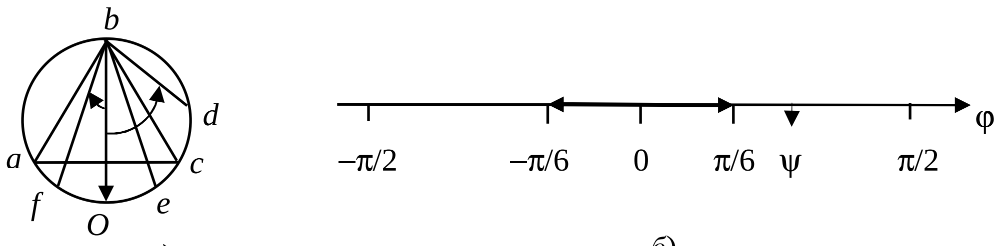


Рис. 2.5

Легко видеть, что положение хорды однозначно определяет её расстояние до точки O и наоборот. Поэтому в качестве описания ω элементарного исхода в эксперименте $E_Б$ естественно предложить расстояние x от точки O до выбранной хорды. Теперь вместо эксперимента $E_Б$ можно рассмотреть ему адекватный модельный эксперимент E_m, связанный с непреднамеренным выбором точки (см. рис. 2.5, *б*) из промежутка вида $G = \{x\colon 0 \le x \le 2r\}$ на оси $0x$. В этом случае для эксперимента $E_Б$ достоверное событие $\Omega_Б = \{\omega = x\colon 0 \le x \le 2r\}$, $\mathcal{F}_Б = \{g\colon g \subset [0, 2r],\ g$ имеет длину$\}$. Напомним, что длина стороны треугольника abc равна $\sqrt{3}\,r$. Например, хорда de с расстоянием v ($v < r/2$) до точки O имеет длину меньше, чем длина стороны треугольника abc. Напротив, хорда fg с расстоянием, равным u ($r < u < 3r/2$), имеет длину больше, чем длина стороны треугольника abc. Так как случайное событие $A_Б = \{\omega = x\colon r/2 < x < 3r/2\}$, то из определения геометрической вероятности на прямой легко получим, что $\mathbf{P}(A_Б)$ = = $\mathrm{mes}((r/2,\ 3r/2))/\mathrm{mes}([0,\ 2r\ ]) = 1/2$. При наступлении случайного события A наступает случайное событие $A_Б$ и наоборот. Поэтому для мастера вероятность замены гончарного круга новым равна 1/2. Заметим, что при технологии изготовлении гончарного круга, когда используются две закрепленные точки (см. рис. 2.5, *а*), направление возникшей трещины почти всегда перпендикулярно прямой Ob.

Второй подход. Закрепим один из концов хорды рис. 2.6, *а*), например, в точке b, а другой конец хорды непреднамеренно (наудачу) выбирается на окружности. Точка b называется полюсом гончарного круга. При этом в плоскости данного круга теперь удобнее выбрать направление, определяемое лучом bO. В этом случае в качестве описания ω положения наудачу выбранной хорды (элементарного исхода) в эксперименте $E_Б$ используем угол φ между лучом bO и хордой, измеряемый в радианах.



а) Рис. 2.6 *б*)

Угол φ будет положительным числом, если направление стрелки против часовой стрелки, и — отрицательным в противном случае. Например, положение хорды bd, длина которой меньше, чем длина стороны треугольника abc, определяет угол ψ ($\pi/6 < \psi < \pi/2$). Напротив, каждая из хорд be и bf имеет длину больше, чем длина стороны указанного треугольника. При этом отметим, что угол между лучом bO и хордой bf является отрицательным числом. Очевидно, что при втором подходе эксперименту $E_Б$ взаимно однозначно соответствует несколько другой по сравнению с первым случаем модельный эксперимент E_m. Теперь эксперимент E_m заключается в том, что непреднамеренно выбирается точка (см. рис. 2.6, *б*)) из промежутка $G = \{\omega = \varphi\colon -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\}$ действительной оси 0φ. Отсюда для эксперимента $E_Б$ легко получим, что достоверное событие $\Omega_Б = \{\omega = \varphi\colon -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\}$, $\mathcal{F}_Б = \{g\colon g \subset [-\pi/2,\ \pi/2],\ g$ имеет длину$\}$. Если описание $\omega = \varphi$ выбранной хорды удовлетворяет условию вида $-\pi/6 < \varphi < \pi/6$, то её длина больше величины $\sqrt{3}\,r$. Поэтому случайное событие $A_Б = \{\omega = \varphi\colon -\pi/6 < \varphi < \pi/6\}$ и по определению геометрической вероятности на действительной прямой уже имеем другое значение вероятности $\mathbf{P}(A_Б)$, а именно, $\mathbf{P}(A_Б) = \mathrm{mes}((-\ \pi/6,\ \pi/6))/\mathrm{mes}([-\pi/2,\ \pi/2]) = 1/3$. Значит, вероятность замены гончарного круга равна 1/3. При технологии изготовления гончарного круга, когда используются одна точка b закрепления, трещины, как правило, появляются, таким образом, как это показано на рис. 2.6, *а*).

Третий подход. Будем теперь наудачу проводить хорду, не закрепляя ни один из её концов и не обращая внимания на выбранные направления оси $0y$ или луча bO при первых двух подходах. При этом хорда не может проходить через центр круга. Примеры случайного выбора положения хорд de и fg показаны на рис. 2.7, *а*). Это соответствует той ситуации, когда центр круга является единственной точкой закрепления при изготовлении гончарного круга. В этих ограничениях центр наудачу поставленной хорды однозначно определяется её положением и наоборот. Поэтому в качестве описания ω положения наудачу выбранной хорды (элементарного исхода) в эксперименте $E_Б$ целесообразно использовать вектор (x, y). Здесь x и y являются абсциссой и, соответственно, ординатой центра хорды в прямоугольной системе координат с началом в центре круга радиуса r. При этом плоскости прямоугольной системы координат $x0y$ и круга совпадают.

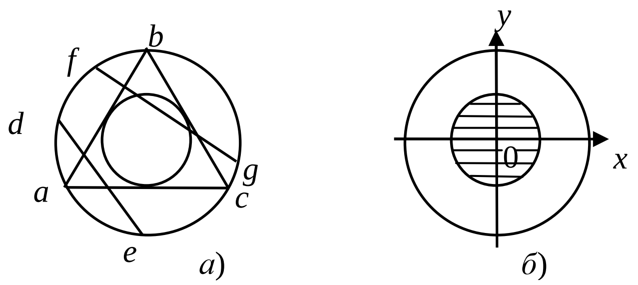


Рис. 2.7

Ради удобства прямоугольная система координат показана отдельно на рис. 2.7, *б*). В силу этого наряду с экспериментом $E_Б$ можно рассмотреть адекватный ему модельный эксперимент E_m, связанный с непреднамеренным выбором точки из области $G = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le r^2, (x, y) \ne (0, 0)\}$ на плоскости $x0y$. Если в эксперименте E_m точка выбрана внутри заштрихованного круга радиуса $r/2$, то соответствующая этому выбору хорда в эксперименте $E_Б$ будет иметь длину больше $\sqrt{3}r$. В противном случае хорда в эксперименте $E_Б$ будет иметь длину не больше $\sqrt{3}r$. Например, из рис. 2.7, *а* видно, что длина хорды de меньше $\sqrt{3}r$, а длина хорды fg больше $\sqrt{3}r$. Принимая это во внимание, получим, что для эксперимента $E_Б$ достоверное событие $\Omega_Б = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le r^2, (x, y) \ne (0, 0)\}$, σ-алгебра $\mathcal{F}_Б = \{g\colon g \subset G, g$ имеет площадь$\}$ и, наконец, случайное событие $A_Б = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < r^2/4, (x, y) \in G\}$. Так как площадь области вида $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 < r^2/4, (x, y) \ne (0, 0)\} = \pi r^2/4$ и площадь области $G = \pi r^2$, то, применяя определение геометрической вероятности на плоскости, получим, что вероятность $\mathbf{P}(A_Б) = 1/4$. При наступлении случайного события A наступает случайное событие $A_Б$ и наоборот. Поэтому для мастера вероятность замены гончарного круга новым в третьем случае равна 1/4.

В задаче Бертрана на самом деле рассматриваются три различных эксперимента $E_Б$, каждый из которых фиксируется с помощью расшифровки или более детального описания выбора наудачу хорды. Поэтому вероятности получились различными. В реальной задаче с гончарным кругом (экспериментом E) легко понять появление разного рода трещин первого, второго или третьего типа в зависимости от первой, второй или третьей технологии изготовления круга и от материала, из которого он сделан. Забавно отметить, что древнегреческие купцы назначали цены C_1, C_2, C_3 для разного типа гончарных кругов в пропорции $C_1:C_2:C_3 = 2:3:4 = (1/2)^{-1}:(1/3)^{-1}:(1/4)^{-1}$. Так решается известный парадокс Бертрана.

2.4. Эмпирический и аксиоматический подходы к определению вероятности случайных событий

Рассмотрим свойства относительных частот исходов эксперимента и статистическое определение вероятности. Одной из фундаментальных проблем теории вероятности является построение математических моделей таких реальных экспериментов, которые могут давать различные результаты при одних и тех же условиях их проведения, и, следовательно, эти результаты не могут быть точно предсказаны заранее. Поэтому при использовании той или иной теоретико-вероятностной модели всегда возникает вопрос о том, насколько эта модель адекватна реальному эксперименту или опыту. На последний вопрос можно ответь только путём проведения наблюдений над исходами реальных экспериментов. К тому же на практике часто встречается случай, когда невозможно применить ни субъективный, ни классический, ни геометрический способы определения вероятности. Так, например, при решении задачи нахождения вероятности попадания пули в «яблоко» мишени при стрельбе из пистолета мы имеем дело с несчётным множеством элементарных случайных событий. Однако попадание пули в некоторую область зависит и от площади этой области и от её положения в мишени. Этот факт становится особенно очевидным, когда стрельбу ведёт мастер.

В связи с этим многие естествоиспытатели определяют вероятность только эмпирическим путём или путём многократного проведения эксперимента, т. е. используют так называемый статистический подход в определении вероятности. В основу этой концепции положена стабильность относительной частоты события (отношения числа испытаний, в которых событие появилось, к числу всех проведенных испытаний) при достаточно большом числе опытов. Это, в свою очередь, является следствием понятия на содержательном уровне статистически устойчивого эксперимента. В дальнейшем относительную частоту события будем называть просто частотой события. Пусть произведена серия из N опытов эксперимента E в неизменных условиях Σ, в каждом из которых может появиться или не появиться случайное событие $A \in \mathcal{F}$. Обозначим через $\mu(A, N)$ число опытов, в которых наблюдалось событие A при общем числе N проведенных испытаний. Тогда по определению частотой события A или статистической вероятностью называется отношение $\mu(A, N)/N$ и обозначается через $\mathbf{P}^*(A, N)$ или ради сокращения записи через $\mathbf{P}^*(A)$, опуская ради простоты символ N, где это не вызывает путаницы.

При небольшом числе испытаний статистическая вероятность $\mathbf{P}^*(A)$ события A носит случайный нерегулярный характер и может заметно изменяться от опыта к опыту. Однако по мере увеличения числа испытаний частота события начинает терять случайный характер и стремится стабилизироваться около некоторого постоянного числа. Это число характеризует связь между комплексом условий Σ и наблюдаемым событием A. Из определения относительной частоты события легко показать простейшие её свойства. Например, получаем, что $0 \le \mathbf{P}^*(A) \le 1$. Частота достоверного события Ω есть $\mathbf{P}^*(\Omega) = N/N = 1$ и частота невозможного события $\varnothing$ есть $\mathbf{P}^*(\varnothing) = 0/N = 0$. Более того, $\mathbf{P}^*(A \bigcup B) = \mathbf{P}^*(A) +$ $+ \mathbf{P}^*(B)$, если только случайные события A и B являются несовместными.

Статистическое определение вероятности случайного события $A \in \mathcal{F}$ не есть формальное математическое определение его вероятности, а оно лишь постулирует при некоторых условиях её существования и указывает метод её приближенного вычисления. На содержательном уровне вероятность случайного события – это число $\mathbf{P}(A)$, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний. В этом и заключается основной тезис при эмпирическом подходе к вычислению вероятности случайного события A. Основоположниками этого подхода являются Ричард фон Мизес и Ганс Рейхенбах. В качестве примера приведём опыт с бросанием английским математиком К. Пирсоном симметричной монеты $N = 12000$ раз. При этом герб выпал 6019 раз. В этом случае отношение $\mu(A, N)/N = 0{,}5016$, где исход A означает выпадение герба. Значит, К. Пирсон получил эмпирическую или статистическую вероятность $\mathbf{P}^*(A) = 0{,}5016$. Заметим, что применение классического подхода к вычислению вероятности выпадение герба симметричной монеты дает число $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$. Итак, для этого примера имеем $\mathbf{P}^*(A) \approx \mathbf{P}(A)$.

Статистическое понятие вероятности послужило созданию универсального вычислительного метода в современной компьютерной математике. Этот метод называется методом статистических испытаний или методом Монте-Карло. В свою очередь метод Монте-Карло послужил в дальнейшем одним из первоисточников при создании более универсального метода изучения свойств реальных явлений – метода имитационного моделирования реальных процессов. Проиллюстрируем этот метод на задаче Бюффона [1]. Покажем, что опыт Бюффона позволяет приближённо вычислить значение числа π. Действительно, проведём этот опыт достаточное число раз. Это число обозначим через N. Пусть при N бросках иглы на разграфленную поверхность в $\mu(A, N)$ опытах она пересекала прямые или $\mu(A, N)$ раз наблюдали событие A. Эмпирически полученная статистическая вероятность события A будет равна $\mu(A, N)/N$. Из приближённого равенства [1] вида $\mu(A, N)/N \approx 2l/(\pi h)$ можно найти приближённое значение числа π, а именно, $\pi \approx 2lN/h\mu(A, N)$. В опытах, проведённых Вольфом в 1849 г., длина иглы составляла $2l = 36$ мм, а ширина полос была равна величине $2h = 45$ мм. При общем числе бросков $N = 5000$ игла пересекла полосы $\mu(A, N) = 2532$ раза, так что $\mathbf{P}(A) \approx 2532/5000 \approx 0{,}5064$. Отсюда значение $\pi = 2l/(h\mathbf{P}(A)) = 72/(45 \times 0{,}5064) \approx 3{,}159$. Отметим простоту и доступность такого способа определения числа π. Однако, для более точного вычисления π необходимо выполнить большое число испытаний. Такого рода испытаний можно проводить на современных компьютерах. Поэтому большое число испытаний, как правило, не является существенным ограничением. Большой вклад в развитие способа математических вычислений с помощью случайного эксперимента внесли Ричард фон Мизес и Ганс Рейхенбах.

Наконец, рассмотрим выбор адекватной вероятностной модели априорных экспериментов с помощью аксиоматики Колмогорова. В реальных экспериментах, например в военном деле, часто требуется определить вероятности таких исходов, для которых не применимы не только субъективный, классический и геометрический способы, но и статистический подход из-за чрезвычайной сложности и большой стоимости соответствующих экспериментов. В подобных случаях вероятности событий должны определяться исключительно из структуры самого априори заданного эксперимента E с помощью аксиом и теорем безотносительно к тому, проводится или не проводится так называемый априорный эксперимент. Таким образом, мы приходим к построению абстрактной теории вероятностей, которая должна быть адекватной моделью изучаемых реальных явлений случайного типа.

Итак, рассматривается статистически устойчивый случайный эксперимент E, который определяется комплексом условий $\Sigma = \{u_1, u_2, ..., u_s, ...\}$ и множеством $\Im$ его допустимых исходов. Пусть построена теоретико-множественная модель $(\Omega,\mathcal{F})$ эксперимента E, в которой Ω – множество описаний ω всех его элементарных исходов $\{\omega\}$ и $\mathcal{F}$ – множество наблюдаемых случайных событий $A \subset \Omega$. При этом $\mathcal{F} \neq \varnothing$ и является σ-алгеброй. Множество A содержит, по меньшей мере, все такие описания $\omega \in \Omega$ элементарных исходов эксперимента E, которые могут наблюдаться одновременно с A. Если множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых событий образует σ-алгебру, то справедливы следующие ограничения: 1) из $A \in \mathcal{F}$ следует $\overline{A} \in \mathcal{F}$; 2) из $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, ... следует $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. Тогда вероятность любого события $A \in \mathcal{F}$ вводится с помощью следующего определения.

Определение 2.3. Вероятностью любого события $A \in \mathcal{F}$ называется некоторое неотрицательное число $\mathbf{P}(A)$, которое для любой последовательности A_1, A_2, ... попарно непересекающихся случайных событий из $\mathcal{F}$ удовлетворяет аксиоме счётной аддитивности вида $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, а также аксиоме нормировки вида $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Таким образом, вероятность $\mathbf{P}(A)$ есть неотрицательная, счётно-аддитивная и нормированная функция событий A из множества $\mathcal{F}$. Легко видеть, что три замечательные аксиомы Колмогорова для вероятности $\mathbf{P}(A)$ с областью определения $\mathcal{F} \subset \Im$ повторяют свойства относительных частот исходов реального эксперимента.

Определение 2.4. Упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$, состоящая из множества Ω описаний всех выбранных элементарных исходов эксперимента E, из выделенной σ-алгебры □ случайных событий $A \subset \Omega$, и определенной на □ неотрицательной, нормированной и счётно-аддитивной функции $\mathbf{P}(\bullet)$, называется основным вероятностным пространством или вероятностной моделью априорного эксперимента E.

Следует заметить, что аксиомы Колмогорова и упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$ непротиворечивы и неполны. Эти аксиомы непротиворечивы, так как существуют реальные эксперименты, например классические эксперименты, удовлетворяющие всем этим аксиомам. Неполнота системы аксиом означает неоднозначность выбора теоретико-множественной модели $(\Omega,\mathcal{F})$ и вероятности $\mathbf{P}(\bullet)$ на множестве $\mathcal{F}$. Это вызвано тем, что для реальных экспериментов могут встретиться одинаковые теоретико-множественные модели $(\Omega,\mathcal{F})$ с различными вероятностными функциями $\mathbf{P}(\bullet)$, $A \in \mathcal{F}$.

Например, существуют игральные кости различной симметрии. Более того, для одного и того же эксперимента мы можем по-разному выбирать семейство элементарных исходов и их описания. То, что система аксиом не является полной, скорее есть положительный факт, чем отрицательный. В силу этого можно ставить вопрос о построении в некотором смысле оптимальной или более адекватной модели эксперимента E. В этом заключается принципиальная особенность и универсальность подхода Колмогорова.

Проиллюстрируем сказанное на задаче Даламбера. В этом опыте достоверный исход $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, множество всех результатов $\Im = \mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{16}\}$. Следовательно, в этом эксперименте можно наблюдать пятнадцать исходов. Напомним, что $\omega_1 = (0, 0)$ – описание исхода герба при первом и втором бросках, $\omega_2 = (0, 1)$ – описание выпадения герба при первом броске и решётки при втором, $\omega_3 = (1, 0)$ – описание выпадения решётки при первом броске и герба при втором, $\omega_4 = (1, 1)$ – описание исхода решётки при первом и втором бросках. При этом случайные события из множества $\mathcal{F}$ представляются в следующем виде: $A_1 = \{\omega_1\}$, $A_2 = \{\omega_2\}$, $A_3 = \{\omega_3\}$, $A_4 = \{\omega_4\}$, $A_5 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_6 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_7 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $A_8 = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A_9 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $A_{10} = \{\omega_3, \omega_4\}$, $A_{11} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A_{12} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $A_{13} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{14} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{15} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{16} = \varnothing$. В силу симметрии эксперимента Даламбера вероятность $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$

можно вычислить, используя классический подход, например, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = 1/4$, $\mathbf{P}(A_5) = 1/2$ и т. д. Таким образом, хотя бы для одной реальной задачи (задачи Даламбера) построили основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$, для которого справедливы все аксиомы множества $\mathcal{F}$ и все аксиомы вероятности $\mathbf{P}(\bullet)$. Эти утверждения легко проверяются, если воспользоваться конкретным видом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$.

Рассмотрим теперь другой способ выбора элементарных исходов, а именно пусть ω_1' означает описание исхода орла при первом броске, ω_2' означает описание выпадения орла только при втором броске и ω_3' означает описание не выпадения орла при двух бросаниях симметричной монеты. При таком выборе имеем $\Omega' = \{\omega_1', \omega_2', \omega_3'\}$, $\mathcal{F}' = \{B_1, B_2, \ldots, B_8\}$, $B_1 = \{\omega_1'\}$, $B_2 = \{\omega_2'\}$, $B_3 = \{\omega_3'\}$, $B_4 = \{\omega_1', \omega_2'\}$, $B_5 = \{\omega_1', \omega_3'\}$, $B_6 = \{\omega_2', \omega_3'\}$, $B_7 = \{\omega_1', \omega_2', \omega_3'\} = \Omega'$, $B_8 = \varnothing$, $\mathbf{P}'(B_1) = 1/2$, $\mathbf{P}'(B_2) = 1/4$, $\mathbf{P}'(B_3) = 1/4$, $\mathbf{P}'(B_4) = \mathbf{P}'(\{\omega_1'\}) + \mathbf{P}'(\{\omega_2'\}) = 3/4$ и т. д. В результате чего получаем новую вероятностную модель $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}'(\bullet))$ задачи Даламбера. В этой модели мы уже не можем наблюдать восемь исходов. Поэтому эта модель менее адекватна по сравнению с первой, в частности, мы не можем интересоваться вероятностью того, что орел выпадет два раза.

Наконец, выберем теперь несимметричную монету. Например, выберем монету, которая некоторое время была в употреблении в игре в орлянку. Тогда для первой построенной теоретико-множественной модели $(\Omega, \mathcal{F})$ может оказаться, что $\mathbf{P}''(A_1) = 1/9$, $\mathbf{P}''(A_2) = \mathbf{P}''(A_3) = 2/9$, $\mathbf{P}''(A_4) = 4/9$, $\mathbf{P}''(A_5) = \mathbf{P}''(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}''(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}''(A_1) + \mathbf{P}''(A_2) = 3/9 = 1/3$ и т. д. В этом несимметричном случае мы получаем третью вероятностную модель, которая отличается от первой только выбором другой вероятности $\mathbf{P}''(\bullet)$ для каждого события.

Заметим, что для любого классического эксперимента E, когда множество $\Im$ содержит конечное число случайных равновероятных элементарных событий $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$ имеет место аксиоматика Колмогорова для функции $\mathbf{P}(\bullet)$. Если, например, $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_m}\} \in \mathcal{F}$, то вероятность $\mathbf{P}(A) = m/n \geq 0$, и $\mathbf{P}(\Omega) = n/n = 1$. Итак, свойства неотрицательности и нормировки для функции $\mathbf{P}(\bullet)$ выполняются. Пусть дополнительно событие $B = \{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots, \omega_{b_k}\} \in \mathcal{F}$, а случайные события A и B несовместны. Поэтому случайное событие $A \cup B = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_m}, \omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots, \omega_{b_k}\}$ и вероятность $\mathbf{P}(A \cup B) = (m + k)/n = (m/n) + (k/n) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. Аналогичное равенство можно показать для любого конечного числа попарно непересекающихся событий, т. е. имеет место аксиома конечной аддитивности.

Построение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$ является основным этапом в создании математической модели того или иного статистически устойчивого случайного эксперимента E. Однако не меньшую роль играет выяснение основных свойств вероятности $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, которые непосредственно следуют из системы аксиом Колмогорова. Перейдём к формулировке и доказательству основных свойств вероятности $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$.

Теорема 2.1. Имеет место неравенство $1 \geq \mathbf{P}(A) \geq 0$ для всех $A \in \mathcal{F}$, т. е. область значений вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$ есть отрезок [0, 1].

Доказательство. Из определения противоположных событий A и $\overline{A}$ имеем равенства: $\overline{A} \bigcap A = \varnothing$, $\overline{A} \bigcup A = \Omega$. Отсюда, используя аксиомы нормировки и счётной аддитивности, сразу находим $\mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(A) = 1$, или $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, и на основании аксиомы неотрицательности будет $1 - \mathbf{P}(A) \geq 0$, или $1 \geq \mathbf{P}(A)$. Итак, окончательно имеем $1 \geq \mathbf{P}(A) \geq 0$. Теперь, если в качестве A взять достоверное событие Ω, как следствие этой теоремы получим $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$. Здесь также отметим важность полученной формулы $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, которая впервые встречалась в этой главе и была установлена в конкретной задаче о днях рождения. Эта формула будет использоваться на протяжении всего курса.

Теорема 2.2. Если $A \subset B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, то $\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A)$ (свойство монотонности вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$: $\mathcal{F} \to [0, 1]$).

Доказательство. При $A \subset B$ выполняется равенство в событиях вида: $B = A \bigcup (B \setminus A)$. Более того, имеем $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$. Равенство в событиях, как правило, доказывается по следующей схеме. Пусть $\omega \in B$, тогда либо $\omega \in A$ и, следовательно, $\omega \in A \cup (B \setminus A)$; либо $\omega \notin A$, и поэтому $\omega \in B \setminus A$. Отсюда непосредственно находим $\omega \in A \cup (B \setminus A)$ и, следовательно, событие $B \subset A \cup (B \setminus A)$. Наоборот, если $\omega \in A \cup (B \setminus A)$, то либо $\omega \in A$ и, так как $A \subset B$, имеем $\omega \in B$; либо $\omega \in B \setminus A$ и из определения разности событий имеем $\omega \in B$, т. е. $A \cup (B \setminus A) \subset B$. На основании определения равенства событий сразу получаем, что событие $B = A \bigcup (B \setminus A)$. То, что событие $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$, т. е. указанные события A и $B \setminus A$ не пересекаются, будем доказывать методом от противного. Если $A \bigcap (B \setminus A) \neq \varnothing$, то существует хотя бы одно такое $\omega_0 \in \Omega$, что $\omega_0 \in A$ и одновременно $\omega_0 \in B \setminus A$. Из определения разности событий B, A находим $\omega_0 \in B$ и $\omega_0 \notin A$. Итак, получаем противоречивые утверждения $\omega_0 \in A$ и $\omega_0 \notin A$.

Теперь из доказанного равенства $B = A \bigcup (B \setminus A)$ получаем на основании аксиомы счетной аддитивности $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A)$ и $\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A)$, поскольку $\mathbf{P}(B \setminus A) \geq 0$ на основании аксиомы неотрицательности. Здесь также получили важное равенство $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ при $A \subset B$.

Теорема 2.3. Если $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, то имеет место теорема сложения вероятностей вида: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Доказательство. Имеем равенства: $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A)$, $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$, $B = (A \bigcap B) \bigcup (B \setminus A)$, $(A \bigcap B) \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$. Для установления этих равенств можно воспользоваться либо методом, приведенным в доказательстве теоремы 2.2, либо основными законами теоретико-множественных операций над случайными событиями. Например, первые два из этих равенств установим с помощью тождественных преобразований: $A \bigcup (B \setminus A) = A \bigcup (B \bigcap \overline{A}) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \overline{A}) =$

$= (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$, $A \cap (B \setminus A) = A \cap (B \cap \bar{A}) = \varnothing$. Из установленных равенств в событиях, используя аксиому счётной аддитивности, находим равенства в вероятностях: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A)$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \setminus A)$. Вычитая эти равенства и перенося затем $\mathbf{P}(B)$ в правую часть, окончательно для любых двух случайных событий из $\mathcal{F}$ получим следующую теорему сложения вероятностей: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Используя теорему 2.3 и законы теоретико-множественных операций над событиями, легко показать теорему сложения для трёх событий A, B, C. Например, последовательно имеем: $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cup B) \cap C) =$ $= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) -$ $- \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$. Так как теорема сложения доказана для двух и трёх событий, то методом математической индукции легко получить формулу для любого конечного числа событий. Для любого конечного числа событий A_1, A_2, ..., A_m имеем: $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m}^{m} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$ $+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m}^{m} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{m-1} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$. В целях применения этого общего равенства решим следующую задачу.

• *Задача о туристах*. Туристам из m человек в гостинице выделили одноместные комнаты с номерами 1, 2, …, m. Любая комната открывается только одним ключом, номер которого совпадает с номером такой комнаты. Каждый из туристов случайным образом взял из ящика дежурного стола только один ключ. Найти вероятность того, что хотя бы один турист откроет комнату?

Решение. Пусть x_i — номер выбранного ключа туристом, которому выделили комнату с номером i. Случайное событие, которое состоит в том, что турист из первой комнаты отберёт ключ с номером x_1, турист из второй комнаты отберёт ключ с номером x_2, … , наконец, турист из m-й комнаты отберёт ключ с номером x_m , объявляем элементарным с описанием ω в виде следующего вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. В этом случае достоверное событие $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$: $x_1 \ne x_2 \ne \ldots \ne x_m, x_i = 1, 2, \ldots, m\}$, $\aleph(\Omega) = m!$ и $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Для каждого фиксированного $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначим через $A_i = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$: $x_1 \ne x_2 \ne \ldots$ $\ne x_m, x_i = i, x_j = 1, 2, \ldots, m, j \ne i\}$ случайное событие, которое заключается в том, что турист из i-й комнаты отобрал свой ключ. Множество A_i содержит все перестановки из $(m - 1)$ элементов. Следовательно, число $\aleph(A_i)$ равно $(m - 1)!$ и оно не зависит от i. Для любых различных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$ из $\{1, 2, \ldots, m\}$ рассмотрим событие $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$: $x_1 \ne x_2 \ne \ldots \ne x_m; x_{i_1} =$ $= i_1, x_{i_2} = i_2, \ldots, x_{i_r} = i_r; x_j = 1, 2, \ldots, m; j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}\}$, которое состоит в том, что туристы из комнат с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ отобрали свои ключи. Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ содержит все перестановки из $(m - r)$ элементов. Поэтому число $\aleph(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r})$ равно $(m - r)!$ и оно не зависит от набора чисел i_1, i_2, …, i_r. Используя классическое определение вероятности, сразу получим: $\mathbf{P}(A_i) = (m - 1)!/m!$, $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (m - 2)!(m!)^{-1}$, …, $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = (m - r)!(m!)^{-1}$. Если теперь событие A состоит в том, что хотя бы один турист откроет выделенную ему комнату, то $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, и по общей формуле легко находим: $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = C_m^1 \frac{(m-1)!}{m!} - C_m^2 \frac{(m-2)!}{m!} + C_m^3 \frac{(m-3)!}{m!} - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m \frac{1}{m!} = 1 - (1/2!) + (1/3!) - \ldots + (-1)^{m-1}(m!)^{-1}$. Заметим, что вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = (1/2!) - (1/3!) + (1/4!) - \ldots + (-1)^m (m!)^{-1}$. Здесь $\overline{A}$ – событие, состоящее в том, что ни один турист не выбрал нужный ему ключ. Так как $e^{-1} = (1/2!) - (1/3!) + (1/4!) - (1/5!) + \ldots$, то при больших значениях m вероятность $\mathbf{P}(A) \approx 1 - e^{-1}$ и вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) \approx e^{-1}$. Например, для $m = 6$ с использованием точных формул получим, что значение вероятности вида $\mathbf{P}(A) = 91/144 \approx 0{,}631944$ и значение вероятности $\mathbf{P}(\overline{A}) = 53/144 \approx 0{,}368055$. Простые вычисления по приближённым формулам приводят к достаточно близкому результату, а именно, вероятность $\mathbf{P}(A) \approx 0{,}632121$ и вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) \approx 0{,}367879$, так как $e^{-1} \approx 0{,}367879$.

Таковы первые предварительные свойства вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, которые постоянно применяются в прикладных задачах. Более того, свойства вероятностей и различные равенства в событиях позволяют находить вероятности одних событий через известные вероятности других событий. Например, если мы знаем вероятности событий A, B и $A \cap B$, то вероятность события $A \,\Delta\, B$ можно вычислить следующим способом: $\mathbf{P}(A \,\Delta\, B) = \mathbf{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$. Здесь использованы равенства: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

2.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. Найти субъективные вероятности исходов для каждого эксперимента, описание которых приведено в примерах 1.8, 1.10 и 1.20 из главы 1.

2. Из колоды, которая содержит 36 игральных карт, случайным образом отбираются сразу четыре карты. Определить вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна дама.

3. На складе имеется 15 холодильников. Четыре из них являются бракованными. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки качества сразу трёх холодильников ровно два будут бракованными.

4. Имеется две непрозрачные корзины. В первой корзине находятся два белых мячика и три чёрных, а во второй корзине — один белый и три чёрных мячика. Мячики отличаются только цветом. Наудачу без возвращения последо-

вательно извлекаются все мячики следующим образом: сначала из первой корзины, потом из второй корзины, затем снова из первой корзины и т. д. Построить вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$ для этого эксперимента. Найти вероятность того, что первый белый мячик будет извлечен из второй корзины.

5. На первом этаже девятиэтажного дома в лифт входят три человека. Каждый пассажир с одинаковой возможностью выбирает любой этаж со второго до девятого. Найти вероятность того, что они выйдут на разных этажах.

6. Слово «вероятность» разрезали на отдельные буквы и получили семь одинаковых по размеру карточек. Карточки с буквами тщательно перемешали и наудачу выложили в ряд. Найти вероятность того, что в результате будет сложено слово «вероятность».

7. Наудачу выбирается четырёхзначное число, применяя для этого цифры 0, 1, …, 9. При этом цифра ноль не может быть тысячей. Построить вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\bullet))$ для этого эксперимента. Какова вероятность того, что выбранное число состоит из двух пар одинаковых цифр?

8. Стержень длины l разломали в двух наудачу выбранных точках на три части. Какова вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник?

9. Два судна должны подойти к одному и тому же причалу. Их появления суть независимые случайные события, равновозможные в течение суток. Найти вероятность того, что одному из судов придётся ждать освобождения причала, если время стоянки первого судна равно одному часу, а второго равно двум.

10. Радиосигналы поступают от двух станций обнаружения объектов на видео экран в любой промежуток времени длительностью Θ. На видео экране появляется отметка о цели, если разность между моментами поступления радиосигналов будет меньше θ. Найти вероятность обнаружения объекта, если каждая из станций с равной возможностью пошлёт только по одному сигналу.

Заключение

Учебно-методическая разработка написана на основе многолетнего опыта применения вероятностно-статистических методов для решения реальных задач, а также опыта преподавания общих лекционных курсов по вероятностному моделированию, которые на протяжении более 40 лет автор читал студентам различных факультетов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. В зависимости от специальностей студентов (прикладная математика и информатика, прикладная информатика, информационные технологии, прикладная физика, экономика, социология) этот курс преподаётся в течение одного или двух семестров, сопровождается практикой и лабораторными работами. Курс по вероятностному моделированию в классических университетах страны рассматривается как вводный для основного курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Учебно-методическая разработка рассчитана на широкий круг преподавателей, научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, которым приходится пользоваться методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов в прикладных исследованиях. В силу этого учебно-методическая разработка содержит большое число прикладных задач с подробными решениями, с указаниями на типичные ошибки и возникающими в связи с этим парадоксы. Изложение материала является доступным. Задачами этой учебно-методической разработки являются: 1) знакомство с методами построения и анализа адекватных стохастических моделей реальных экспериментов, которые дают различные исходы при их проведении или наблюдении; 2) изучение фундаментальных основ современной прикладной теории вероятностного моделирования; 3) развитие у слушателей курса интуиции вероятностно-статистического мировоззрения на реальные статистически устойчивые эксперименты; 4) критическое знакомство читателей с решениями конкретных задач с целью освоения основных понятий и идей вероятностного моделирования в самых разнообразных областях науки, техники, производства, экономики, медицины и социологии.

На содержательном уровне можно выделить следующие особенности или свойства исходов (результатов) разного рода реальных процессов и опытов:

— свойство однозначности допустимых исходов эволюционного процесса, когда весь его будущий ход и всё его прошлое однозначно определяются исходом (состоянием) в некоторое фиксированное время. Так небесная механика рассматривает движение космических тел, будущее и прошлое которых однозначно определяются их начальными положениями и начальными скоростями;

— свойство частичной определённости допустимых исходов эволюционного процесса, когда весь его будущий ход однозначно определяется состоянием в настоящее время, а прошлое – нет. Таким свойством обладает распространение тепла в нагретом стержне.

— свойство полной неоднозначности допустимых исходов эволюционного процесса не только по отношению к будущему, но и к прошлому. В этом случае опыт даёт различные исходы при его повторении в идентичных условиях.

Рассматриваемые реальные процессы и явления в теории вероятностного моделирования очень сложны. Они находятся под воздействием множества разнообразных и случайных факторов. Поэтому протекание процесса во времени, за которым наблюдаем, приводит к неопределённости и к отклонениям от ожидаемой закономерности. Поэтому каждое индивидуальное проявление процесса, как правило, будет отличаться от любого другого наблюдения. Лишь в массовой совокупности объектов наблюдений за процессом проявляются общие статистически устойчивые закономерности. Например, характеризуя деятельность предприятия и принимая решения на дальнейший период, исходят из целого ряда средних характеристик. Характеристиками могут быть средняя выработка одного работающего, средний процент брака, средний расход сырья и материалов. Обычно оперируют средними показателями и руководствуются их устойчивостью, хотя в индивидуальном проявлении (в определенные дни или у одного рабочего) эти показатели будут колебаться в широких пределах. Основным методом познания такого рода массовых явлений является построение и изучение абстрактных математических моделей, которые называются вероятностными моделями.

Для понимания материала учебно-методической разработки необходимы: 1) знания математики в объеме университетской программы, в частности, начальные сведения по комбинаторному анализу, дискретной математике, функциональному анализу и теории множеств; 2) навыки математического моделирования, программирования и компьютерных технологий.

В гл. 1 были введены основные интуитивные понятия теории вероятностей такие как эксперимент, условия проведения эксперимента, допустимый исход эксперимента, статистически устойчивый эксперимент, элементарный исход. Определен предмет теории вероятностей. Приводятся аксиомы выбора элементарных исходов. Дано определение случайного события и проведена классификация случайных событий. Установлены логические и теоретико-множественные связи между исходами статистически устойчивого эксперимента. Формализовано понятие семейства наблюдаемых исходов статистически устойчивого эксперимента. Приводятся способы построения теоретико-множественных моделей как для статических, так и для эволюционных случайных экспериментов. Такого рода модели позволяют установить теоретико-множественные и логические отношения между различными исходами статистически устойчивого эксперимента.

В гл. 2, прежде всего, рассмотрен нетрадиционный подход приближённого вычисления вероятности исходов произвольного статистически устойчивого эксперимента. Такие вероятности называются субъективными. Субъективное назначение вероятности для случайных событий развивает у исследователей навыки и интуицию вероятностно-статистического мировоззрения на мир. Для случайных экспериментов с различными свойствами приводятся традиционные подходы (классический, геометрический, статистический и аксиоматический) к определению и вычислению вероятности случайных событий. Установлена связь между этими подходами и доказаны общие свойства вероятностной функции. Теоретические построения и результаты главы, как правило, иллюстрируются решениями большого числа задач, например, задачи Даламбера, задачи Галилея—Де Мере, задачи на размещение частиц в системе Максвелла—Больцмана, задачи на размещение частиц в системе Бозе—Эйнштейна, задачи на размещение частиц в системе Ферми—Дирака, задачи на размещение частиц в системе Линден—Белла, задачи о днях рождения, задачи о выборе престижной квартиры, задачи о гончарном круге, задачи о туристах и т. п. Основной результат главы состоит в изложении методики построения и предварительного изучения вероятностной модели статистически устойчивого эксперимента E, для которого комплекс заданных условий его проведения априори остаётся неизменным.

Литература

1. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. Учебник. – М.: Высшая школа. 2006. – 368 с.
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. Учебник. – М.: Наука–ФИЗМАТЛИТ. 2012. – 608 с.

Содержание

Михаил Андреевич **Федоткин**

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.