

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

В. А. Еськин

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ  
В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ  
ВОЛНОВОДАХ**

Учебное пособие

Нижний Новгород – 2012

УДК 533.951, 537.876

ББК 22.31

Е87

Е87 Еськин В.А. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 108 с. — Илл. — 48 , библ. — 52 назв.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент кафедры распространения радиоволн и радиоастрономии ННГУ Е. Ю. Петров

Цель пособия состоит в ознакомлении читателя с последними достижениями в области электродинамики открытых направляющих систем с гиротропным заполнением. Представлены теоретические основы распространения волн в замагниченных плазменных волноводах. Приведён анализ влияния потерь в гиротропной среде на свойства распространяющихся волн на примере распространения электромагнитных волн в замагниченных волноводах, заполненных столкновительной магнитоактивной плазмой. Описаны методы численного исследования волн в замагниченных плазменных волноводах, включая расчёт дисперсионных характеристик и структуры полей собственных мод волноводов.

Учебное пособие предназначено для преподавателей, аспирантов и студентов 1-2-х курсов магистратуры дневного отделения радиофизического факультета, специализирующихся в области электродинамики и физики плазмы, а также в смежных областях.

Пособие написано в рамках Конкурса учебно-методических разработок, подготовленных на основе внедрения в систему образования результатов научных исследований молодых кандидатов наук по приоритетному направлению развития ННГУ как национального исследовательского университета, а также при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (договор 11.G34.31.0048) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения 14.В37.21.0901, 14.В37.21.1292).

УДК 533.951, 537.876

ББК 22.31

© В.А. Еськин, 2012

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы . . . . .	7
1.2. Дисперсионные свойства волн в однородной магнитоактивной плазме . . . . .	12
1.3. Поверхности показателей преломления нормальных волн однородной магнитоактивной плазмы в различных диапазонах частот . . . . .	16
1.4. Общее представление полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода . . . . .	19
<b>Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЛАЗМЕННЫМ СТОЛБОМ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1. Постановка задачи . . . . .	23
2.2. Типы мод, направляемых плазменным столбом . . . . .	26
2.3. Объёмные моды однородного плазменного столба . . . . .	28
2.4. Поверхностные моды однородного плазменного столба . . . . .	39
2.5. Моды, направляемые однородным плазменным столбом в свободном пространстве при учёте теплового движения электронов . . . . .	41
2.6. Моды неоднородного плазменного столба . . . . .	43
2.7. Примеры численного исследования дисперсионных характеристик и структуры полей мод плазменного столба в свободном пространстве . . . . .	47
<b>Глава 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ДАКТАМИ ПЛОТНОСТИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1. Постановка задачи и основные соотношения . . . . .	55
3.2. Типы мод, направляемых дактом с повышенной плотностью плазмы . . . . .	58
3.3. Типы мод, направляемых дактом с пониженной плотностью плазмы . . . . .	61
3.4. Дисперсионные свойства мод . . . . .	64
3.4.1. Дисперсионные характеристики мод дакта с повышенной плотностью плазмы . . . . .	64
3.4.2. Дисперсионные характеристики мод дакта с пониженной плотностью плазмы . . . . .	76

3.5.	Структура полей мод . . . . .	82
3.5.1.	Структура полей мод дакта с повышенной плотностью плазмы . . . . .	82
3.5.2.	Влияние неоднородности дакта плотности в поперечном направлении на свойства мод . . . . .	84
3.5.3.	Структура полей мод дакта с пониженной плотностью плазмы . . . . .	88
3.6.	Программы расчёта дисперсионных характеристик и структур полей однородного и неоднородного дактов плотности . . . . .	92
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>101</b>
<b>Литература . . . . .</b>		<b>103</b>
<b>Приложение А. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕ- РАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ . . . . .</b>		<b>108</b>

# Введение

В последние десятилетия электродинамика открытых направляющих систем с магнитоактивным плазменным заполнением привлекает к себе повышенное внимание. Одним из важнейших направлений в этой области является исследование возбуждения и распространения волн свистового диапазона частот при наличии цилиндрических направляющих плазменных структур, расположенных в свободном пространстве [1–8] или фоновой магнитоактивной плазме параллельно внешнему магнитному полю [9–13] (в последнем случае такие структуры принято называть дактами плотности). Особое внимание при этом уделяется волнам, принадлежащим резонансной области свистового диапазона, поскольку они играют весьма важную роль во многих фундаментальных физических процессах в околоземном космическом пространстве [14–21], а также представляют значительный интерес для ряда приложений, связанных, в частности, с так называемыми геликонными высокочастотными (ВЧ) разрядами [1, 2]. Такие разряды, сопровождающиеся формированием плазменно-волноводных каналов в лабораторных условиях, считаются в настоящее время весьма эффективными источниками плотной низкотемпературной плазмы и могут поддерживаться при сравнительно малых внешних постоянных магнитных полях и удельных вкладах мощности [1, 2, 22]. Разряды подобного типа находят широкое применение в плазмохимических технологиях [23, 24], а также используются для создания активных сред газовых лазеров [22, 25, 26], генерации плазмы в магнитных ловушках [27], разработки новых методов ускорения частиц [28–31] и т. д.

Методы активного воздействия на ионосферу и магнитосферу Земли, получившие в последнее время широкое распространение, основанные на использовании плазменно-волноводных каналов в целях повышения эффективности возбуждения свистовых волн (вистлеров), открывают дополнительные возможности для волновой диагностики околоземного космического пространства [15, 32, 33], а также управления характеристиками электромагнитных излучателей в магнитоактивной плазме [9, 13, 34, 35]. В этой связи одним из весьма перспективных путей повышения эффективности возбуждения свистовых волн представляется применение так называемых плазменных антенн — самосогласованных плазменных излучающих структур квазицилиндрической формы, возникающих в плазме ионосферного типа вблизи источника и изменяющих условия возбуждения и распространения излучаемых волн. Результаты ряда лабораторных и ионосферных экспериментов свидетельствуют о принципиальной возможности реализации подобных систем [34, 36, 37] и их позитивном влиянии на характеристики излучения источников свистового диапазона частот в магнитоактивной плазме [9, 34, 38, 39].

В подавляющем большинстве теоретических работ, посвящённых распро-

странению свистовых волн в цилиндрических плазменных каналах, расположенных в свободном пространстве или фоновой магнитоактивной плазме, рассматривается случай, когда столкновительные потери в плазменной среде отсутствуют [40–43]. Случай сравнительно малых столкновительных потерь, не приводящих к значительным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей волн, обсуждался в [4, 44–46] в связи с некоторыми конкретными вопросами волноводного распространения вистлеров. Однако детальное изучение характеристик волн в таких каналах при наличии столкновительных потерь в этих работах не проводилось. К сказанному необходимо добавить, что в литературе, посвящённой теоретическому исследованию возбуждения свистовых волн в условиях геликонных разрядов [5, 7, 44, 47], практически отсутствует строгое рассмотрение соответствующих вопросов, требующее использования полной системы собственных волн открытого плазменного волновода [48, 49].

Целью настоящего учебного пособия является изложение современной теории распространения электромагнитных волн в открытых замагниченных плазменных волноводах, которая даёт основу для более глубокого понимания направляющих свойств таких структур, расположенных как в изотропных, так и в магнитоактивных средах, а также механизмов поглощения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Большая часть результатов второй и третьей глав получены при непосредственном участии автора и были представлены в работах [50, 51].

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В данной главе даются основы теории электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Обсуждаются дисперсионные свойства и поверхности показателей преломления нормальных волн в однородной магнитоактивной плазме. Приводятся общие выражения для полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода и вывод дисперсионного уравнения для них.

Отметим, что все выражения в данной главе и далее записаны в системе единиц СГС, за исключением особо оговоренных случаев.

### 1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы

Как известно, уравнения Максвелла, определяющие электромагнитное поле в среде, записываются в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^e, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\rho^m. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — векторы электрической индукции, магнитной индукции, напряжённости электрического поля и напряжённости магнитного поля соответственно. Источники поля в виде плотностей электрических и магнитных токов  $\mathbf{j}^{e,m}$  и плотностей электрических и магнитных зарядов  $\rho^{e,m}$  удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^e + \frac{\partial\rho^e}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^m + \frac{\partial\rho^m}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Напомним, что фиктивные магнитные заряды и токи, описываемые величинами  $\rho^m$  и  $\mathbf{j}^m$ , могут быть включены в уравнения Максвелла, поскольку использование таких источников в ряде случаев позволяет упростить решение некоторых конкретных задач.

Далее электромагнитные поля считаем гармоническими во времени  $t$ . Уравнения Максвелла (1.1)–(1.4) линейны. С учётом этого обстоятельства при линейном характере материальных уравнений удобно перейти к описанию электромагнитного поля в комплексной форме. При этом величинам  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  — векторам напряжённости электрического и магнитного полей в данной точке — приводятся в соответствие комплексные амплитуды,  $\mathbf{E}(\omega)$  и  $\mathbf{H}(\omega)$ . Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами даётся соотношениями

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}\}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}\}, \quad (1.8)$$

где  $\operatorname{Re}$  обозначает операцию взятия реальной части,  $\omega$  — круговая частота поля.

Запишем уравнения Максвелла (1.1)–(1.4) для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik_0\mathbf{B} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = ik_0\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^e, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\rho^m. \quad (1.12)$$

Здесь  $k_0 = \omega/c$  — волновое число в свободном пространстве. Уравнения непрерывности (1.5), (1.6) для комплексных амплитуд принимают вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^e + i\omega\rho^e = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^m + i\omega\rho^m = 0. \quad (1.14)$$

В рамках данного пособия мы часто будем записывать поля в цилиндрической системе координат. Однако, в некоторых случаях потребуется переходить к использованию декартовой системы координат (например, при построении двумерного распределения поля в поперечном сечении цилиндрического волновода). В связи с этим приведём выражения уравнений Максвелла (1.9)–(1.12) в декартовой и цилиндрической системах координат.

Рассмотрим правовинтовую декартову систему координат  $(x, y, z)$  с единичными векторами  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  сонаправленными с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Компоненты векторов будем обозначать соответствующими индексами  $x, y, z$ . Например, компоненты произвольного вектора  $\mathbf{A}$  записываются как  $A_x, A_y,$



$A_z$ . В декартовых координатах уравнения (1.9) и (1.10) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -ik_0 B_x - \frac{4\pi}{c} j_x^m, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= ik_0 D_x + \frac{4\pi}{c} j_x^e, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -ik_0 B_y - \frac{4\pi}{c} j_y^m, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= ik_0 D_y + \frac{4\pi}{c} j_y^e, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -ik_0 B_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= ik_0 D_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Уравнения (1.11), (1.12) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi\rho^e, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 4\pi\rho^m.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Выберем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  с единичными векторами  $(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \mathbf{z}_0)$ . Эти координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi & \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ y &= \rho \sin \varphi & \varphi &= \arctan(y/x), \\ z &= z & z &= z.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат обозначим через  $A_\rho, A_\varphi, A_z$ . Уравнения (1.15) в этой системе примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -ik_0 B_\rho - \frac{4\pi}{c} j_\rho^m, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= ik_0 D_\rho + \frac{4\pi}{c} j_\rho^e, \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} &= -ik_0 B_\varphi - \frac{4\pi}{c} j_\varphi^m, & \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= ik_0 D_\varphi + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^e, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} &= -ik_0 B_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} &= ik_0 D_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e.\end{aligned}\quad (1.18)$$

В свою очередь, уравнения (1.16) сводятся к виду

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi\rho^e, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 4\pi\rho^m.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Более подробное описание основных дифференциальных операций векторного анализа в криволинейных координатах приведено в Приложении.

Связь между поперечными компонентами вектора в цилиндрических и декартовых координатах даётся соотношениями

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, & A_x &= A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi, \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, & A_y &= A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Как известно, уравнения Максвелла (1.9)–(1.12) не образуют замкнутой системы. Для получения решения их необходимо дополнить материальными уравнениями, связывающими электрическую и магнитную индукции электромагнитного поля с напряжённостями этих полей. В случае магнитоактивной плазмы материальные уравнения записываются следующим образом [16]:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (1.22)$$

где  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы. Запись материальных уравнений в таком виде означает, что величина  $\mathbf{H}$  отождествляется с магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ . Ниже обозначение  $\mathbf{H}$  будет использоваться исключительно для переменных полей. Для постоянного магнитного поля будет применяться обозначение  $\mathbf{B}_0$ .

Рассмотрим холодную плазму, в которой внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено по оси  $z$  цилиндрической системы координат. В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы  $\hat{\varepsilon}$  может быть записан в виде

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Компоненты тензора (1.23) в случае двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, при отсутствии потерь даются формулами [16]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_H^2 - \omega^2}, \\ g &= -\frac{\omega_p^2 \omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)\omega} + \frac{\Omega_p^2 \Omega_H}{(\Omega_H^2 - \omega^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — гирочастота электронов и ионов соответственно,  $\omega_p$  и  $\Omega_p$  —

плазменная частота электронов и ионов. Эти величины можно записать в виде

$$\begin{aligned}\omega_p &= \left( \frac{4\pi N e^2}{m_e} \right)^{1/2}, & \Omega_p &= \left( \frac{4\pi N e^2}{M_i} \right)^{1/2}, \\ \omega_H &= \frac{|e\mathbf{B}_0|}{m_e c}, & \Omega_H &= \frac{|e\mathbf{B}_0|}{M_i c},\end{aligned}\tag{1.25}$$

где  $m_e$  и  $M_i$  — массы электрона и иона соответственно. Компонента  $\varepsilon$  тензора (1.23) может быть представлена как

$$\varepsilon = \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\text{H}}^2)(\omega^2 - \Omega_{\text{H}}^2)},\tag{1.26}$$

где  $\omega_{\text{LH}}$  — нижняя гибридная частота,  $\omega_{\text{UH}}$  — верхняя гибридная частота. Эти частоты даются формулами

$$\begin{aligned}\omega_{\text{LH}} &= \omega_H \left( \frac{\Omega_p^2 + \Omega_H^2}{\omega_p^2 + \omega_H^2} \right)^{1/2}, \\ \omega_{\text{UH}} &= (\omega_p^2 + \omega_H^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

В случае, когда  $\omega_p \gg \omega_H$ , выражение (1.27) принимает вид  $\omega_{\text{LH}} = (\omega_H \Omega_H)^{1/2}$ . В обратном случае ( $\omega_p \ll \omega_H$ ) имеем  $\omega_{\text{LH}} = (\Omega_p^2 + \Omega_H^2)^{1/2}$ . При  $\omega \gg \omega_H$  выражения (1.24) упрощаются к виду

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \\ g &= -\frac{\omega_p^2 \omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

При записи формул для тензора диэлектрической проницаемости не учитывались столкновительные потери плазмы. Ниже представлены выражения для компонент тензора при учёте электрон-нейтральных и ион-нейтральных столкновений в плазме с эффективными частотами соударений  $\nu_e$  и  $\nu_i$  соответственно и пренебрежении электрон-ионными соударениями (такая ситуация

часто реализуется как в ионосферной, так и лабораторной плазме):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu_e)}{\omega_H^2 - (\omega - i\nu_e)^2} + \frac{\Omega_p^2(\omega - i\nu_i)}{\Omega_H^2 - (\omega - i\nu_i)^2}, \\ g &= -\frac{\omega_p^2\omega_H}{(\omega_H^2 - (\omega - i\nu_e)^2)\omega} + \frac{\Omega_p^2\Omega_H}{(\Omega_H^2 - (\omega - i\nu_i)^2)\omega}, \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\nu_e)\omega} - \frac{\Omega_p^2}{(\omega - i\nu_i)\omega}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах (1.18) с учётом материальных уравнений (1.21) и (1.22) принимают вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -ik_0 H_\rho - \frac{4\pi}{c} j_\rho^m,\tag{1.30}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -ik_0 H_\varphi - \frac{4\pi}{c} j_\varphi^m,\tag{1.31}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = -ik_0 H_z - \frac{4\pi}{c} j_z^m,\tag{1.32}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = ik_0 (\varepsilon E_\rho - ig E_\varphi) + \frac{4\pi}{c} j_\rho^e,\tag{1.33}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = ik_0 (ig E_\rho + \varepsilon E_\varphi) + \frac{4\pi}{c} j_\varphi^e,\tag{1.34}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = ik_0 \eta E_z + \frac{4\pi}{c} j_z^e.\tag{1.35}$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом решений этих уравнений в области пространства без источников.

## 1.2. Дисперсионные свойства волн в однородной магнитоактивной плазме

Получим дисперсионное уравнение для плоской волны с угловой частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Для этого решение уравнений Максвелла без источников будем искать в виде бегущей плоской волны, компоненты поля которой изменяются в пространстве по закону  $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  ( $\mathbf{r}$  — радиус вектор точки наблюдения). В этом случае первые два уравнения Максвелла (1.9) и (1.10)

преобразуются к виду

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (1.36)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}] = -\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (1.37)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$  — вектор волновой нормали. Исключая  $\mathbf{H}$  приходим к уравнению

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n})\mathbf{E} - (\mathbf{n}, \mathbf{E})\mathbf{n} - \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0. \quad (1.38)$$

Это уравнение можно записать в матричной форме:

$$(n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij})E_j = 0, \quad (1.39)$$

где  $i, j = x, y, z$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора (1.23) в декартовой системе координат,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). В более подробном виде уравнение (1.39) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} n^2 - n_x^2 - \varepsilon & -n_x n_y + ig & -n_x n_z \\ -n_y n_x - ig & n^2 - n_y^2 - \varepsilon & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & n^2 - n_z^2 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.39) имеет нетривиальное решение для  $E_x, E_y, E_z$  в случае равенства нулю детерминанта

$$D = \det|n^2\delta_{ij} - n_in_j - \varepsilon_{ij}| = 0. \quad (1.41)$$

После громоздких, но несложных алгебраических преобразований формула (1.41) принимает вид

$$\begin{aligned} D &= -\eta n_z^4 - (\eta + \varepsilon)(n_x^2 + n_y^2)n_z^2 - \varepsilon(n_x^2 + n_y^2)^2 \\ &+ 2\varepsilon\eta n_z^2 + (\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - g^2)(n_x^2 + n_y^2) - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Данное соотношение есть дисперсионное уравнение для волн в однородной магнитоактивной плазме, решения которого дают показатели преломления  $n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$  нормальных волн.

Обсудим свойства показателей преломления. Для этого рассмотрим трёхмерное пространство, которое будем называть пространством показателя преломления, или, более кратко,  $\mathbf{n}$ -пространством. Величины  $n_x, n_y, n_z$  будем использовать как координаты и выберем направление осей  $n_x, n_y, n_z$  параллельно осям  $x, y, z$  соответственно «обычного» пространства. Компоненты вектора  $\mathbf{n}$  можно представить в сферических координатах в  $\mathbf{n}$ -пространстве таким

образом:

$$\begin{aligned}
n_x &= n \sin \theta \cos \phi, & n &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}, \\
n_y &= n \sin \theta \sin \phi, & \theta &= \arctan \frac{(n_x^2 + n_y^2)^{1/2}}{n_z}, \\
n_z &= n \cos \theta, & \phi &= \arctan (n_y/n_x).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Здесь  $n$  — длина вектора  $\mathbf{n}$ ,  $\theta$  и  $\phi$  — полярный и азимутальный углы вектора  $\mathbf{n}$ . В координатах  $n, \theta, \phi$  уравнение (1.42) преобразуется к виду

$$D = -(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta) n^4 + [2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta] n^2 - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0, \tag{1.44}$$

а его решениями являются функции

$$n_{1,2}^2(\theta) = \frac{2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta \pm [(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4g^2\eta^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}. \tag{1.45}$$

Отсюда ясно, что в холодной магнитоактивной плазме существует две нормальные волны с различными свойствами. Они отличаются показателями преломления  $n_{1,2}(\theta)$ , не зависящими от азимутального угла  $\phi$ . В отсутствие столкновений, т.е. при отсутствии поглощения энергии в холодной плазме, каждая из величин  $n_{1,2}$  оказывается либо чисто действительной, либо чисто мнимой. При чисто действительном показателе преломления волна является распространяющейся; при чисто мнимом показателе — нераспространяющейся.

Опираясь на выражение (1.45) можно показать, что при  $\varepsilon\eta < 0$ , один из показателей преломления  $n_{1,2}$  становится бесконечным при угле

$$\theta = \theta_r = \arctan \sqrt{-\eta/\varepsilon}. \tag{1.46}$$

Плазма без потерь, в которой имеет место такая бесконечность показателя преломления, называется резонансной. Нетрудно показать, что условие  $\varepsilon\eta < 0$  выполняется в трёх диапазонах частот:

$$\begin{aligned}
\omega &< \Omega_{\text{H}}, \\
\omega_{\text{LH}} &< \omega < \min\{\omega_{\text{H}}, \omega_{\text{p}}\}, \\
\max\{\omega_{\text{H}}, \omega_{\text{p}}\} &< \omega < \omega_{\text{UH}}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

В частных случаях, когда волновая нормаль параллельна ( $\theta = 0$ ) или перпендикулярна ( $\theta = \pi/2$ ) внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , формула (1.45)

даёт

$$n_{1,2}^2(0) = \varepsilon \pm g, \quad (1.48)$$

$$n_{1,2}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \eta, \\ (\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon. \end{cases} \quad (1.49)$$

Волну, показатель преломления которой при поперечном распространении не зависит от внешнего магнитного поля принято называть «обыкновенной» волной и обозначать символом «о». Другую волну, свойства которой зависят от внешнего магнитного поля при любом направлении распространения, называют «необыкновенной» и обозначают символом «е».

Примем, что реальная часть квадратного корня в (1.45) имеет положительное значение. Тогда в (1.45) «обыкновенной» волне отвечает положительный знак перед корнем, а «необыкновенной» — отрицательный знак. С учётом этого перепишем выражение (1.45) в виде:

$$n_\alpha^2(\theta) = \frac{2\varepsilon\eta + (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta - \chi_\alpha \left[ (\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4g^2\eta^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}, \quad (1.50)$$

где индекс  $\alpha = о$  соответствует «обыкновенной» волне, индекс  $\alpha = е$  — «необыкновенной» волне,  $\chi_o = -\chi_e = -1$ .

Во многих случаях удобнее представить детерминант (1.42) используя величины  $q$ ,  $\phi$ ,  $p$ , которые выражаются через  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  таким образом

$$\begin{aligned} n_x &= q \cos \phi, & q &= (n_x^2 + n_y^2)^{1/2}, \\ n_y &= q \sin \phi, & \phi &= \arctan(n_y/n_x), \\ n_z &= p, & p &= n_z. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Тогда уравнение (1.42) принимает вид

$$D = -\eta p^4 - \left[ (\eta + \varepsilon) q^2 - 2\varepsilon\eta \right] p^2 - \varepsilon q^4 + (\varepsilon\eta + \varepsilon^2 - g^2) q^2 - \eta(\varepsilon^2 - g^2) = 0. \quad (1.52)$$

Данное уравнение принято называть кватрикой Букера. Решения этого уравнения относительно  $p$  могут быть записаны таким образом:

$$\begin{aligned} p_\alpha(q) &= \left[ \varepsilon - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\eta} \right) q^2 + \chi_\alpha R_p(q) \right]^{1/2}, \\ R_p(q) &= \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 q^4 - \frac{g^2}{\eta} q^2 + g^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Здесь подразумевается следующий выбор ветвей многозначных функций  $p_\alpha(q)$  и  $R_p(q)$ :  $\text{Im } p_\alpha < 0$ ,  $\text{Re } R_p > 0$ .

### 1.3. Поверхности показателей преломления нормальных волн однородной магнитоактивной плазмы в различных диапазонах частот

Далее при конкретных рассмотренных основное внимание мы уделим свистовому диапазону частот, представляющему значительный интерес для ряда приложений:

$$\Omega_H \ll \omega \ll \omega_H \ll \omega_p. \quad (1.54)$$

Диапазон (1.54) включает в себя нерезонансную часть

$$\Omega_H \ll \omega < \omega_{LH} \quad (1.55)$$

и резонансную часть, которая, в свою очередь, может быть разбита на два интервала:

$$\omega_{LH} < \omega < \omega_H/2 \ll \omega_p, \quad (1.56)$$

и

$$\omega_H/2 < \omega < \omega_H \ll \omega_p. \quad (1.57)$$

Из двух нормальных волн холодной магнитоактивной плазмы на частотах (1.54) распространяющейся является только «необыкновенная» волна, дисперсионные свойства которой заметно различаются в частотных интервалах (1.55), (1.56), (1.57). Это ясно видно из структуры поверхностей показателей преломления «необыкновенной» волны, изображённых на рисунках 1.1, 1.2 и 1.3 для трёх указанных интервалов частот. Левые графики данных рисунков показывают зависимость  $p$  от  $q$ ; на правых показана поверхность показателя преломления в  $\mathbf{n}$ -пространстве. На рисунках 1.1 и 1.2 отмечены величины  $q = q_S$ , которые отвечают конусам Стори и находятся из условия  $p'_e = 0$  (штрих означает дифференцирование по аргументу), а также величины  $P = p_e(0) = (\varepsilon - g)^{1/2}$ . Кроме того, на рис. 1.1 указана величина  $q_{\max} = [(\varepsilon^2 - g^2)/\varepsilon]^{1/2}$ , а на рис. 1.2 — величина  $q = q_c$ , отвечающая конической рефракции. Данная величина находится из условия  $p'_e = 0$  при  $q \neq 0$ ; соответствующее ей продольное волновое число  $P_c = p_e(q_c)$ . В случае резонансной плазмы область достаточно больших значений  $q$ , где  $p_e \approx \text{sgn}(\varepsilon)(-\varepsilon/\eta)^{1/2}q$ , отвечает квазиэлектростатическим волнам (см. рис. 1.2 и 1.3).

Заметим, что для описания поверхностей показателя преломления для



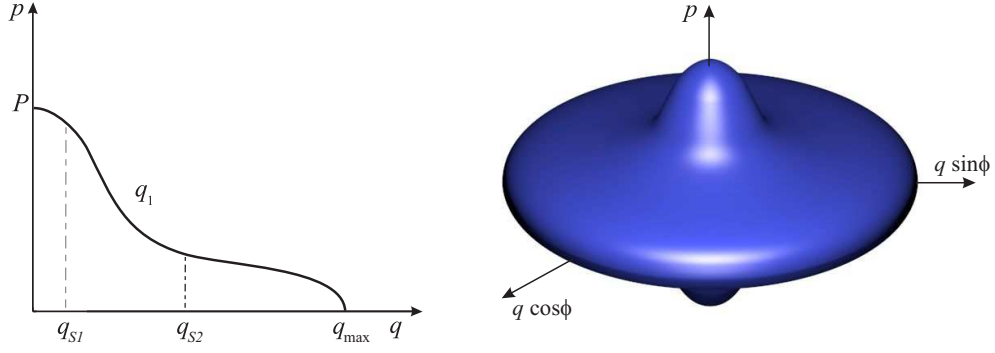


Рис. 1.1. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.55)

плазмы с плотностью  $N$  вместо (1.53) можно использовать функции

$$\begin{aligned}
 q_k(p, N) &= \left\{ \left[ \varepsilon^2 - g^2 + \eta\varepsilon - (\eta + \varepsilon)p^2 + (-1)^k R(p) \right] / 2\varepsilon \right\}^{1/2}, \\
 R(p, N) &= -(\eta - \varepsilon) \left[ (p^2 - P_b^2)(p^2 - P_c^2) \right]^{1/2}, \\
 P_{b,c}(N) &= \left\{ \varepsilon - (\eta + \varepsilon) \frac{g^2}{(\eta - \varepsilon)^2} + \frac{2\chi_{b,c}}{(\eta - \varepsilon)^2} [\varepsilon g^2 \eta (g^2 - (\eta - \varepsilon)^2)]^{1/2} \right\}^{1/2}, \\
 \chi_b &= -\chi_c = -1.
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

Очевидно, что в частотной области (1.56) справедливо соотношение  $q_{1,2}(P_c) = q_c$  (см. рис. 1.2). Нетрудно убедиться, что в интервале частот (1.55) поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны (см. рис. 1.1) описывается формулой  $q^2 = q_1^2(p, N)$ , в интервале частот (1.56) — формулами  $q^2 = q_1^2(p, N)$  и  $q^2 = q_2^2(p, N)$  при  $0 \leq q^2 \leq q_c^2$  и  $q^2 > q_c^2$  соответственно, а в интервале частот (1.57) — формулой  $q^2 = q_2^2(p, N)$ .

При наличии в плазме столкновительных потерь и условия

$$\omega_{\text{ЛН}} \ll |\omega - i\nu_e| \ll \omega_{\text{Н}} \tag{1.59}$$

компоненты тензора (1.29) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu_e)}{[(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_{\text{Н}}^2]\omega}, \\
 g &= \frac{\omega_p^2 \omega_{\text{Н}}}{[(\omega - i\nu_e)^2 - \omega_{\text{Н}}^2]\omega}, \\
 \eta &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu_e)}.
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

где  $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$  — суммарная эффективная частота электрон-ионных и электрон-нейтральных соударений. Примечательно, что при условиях (1.59)

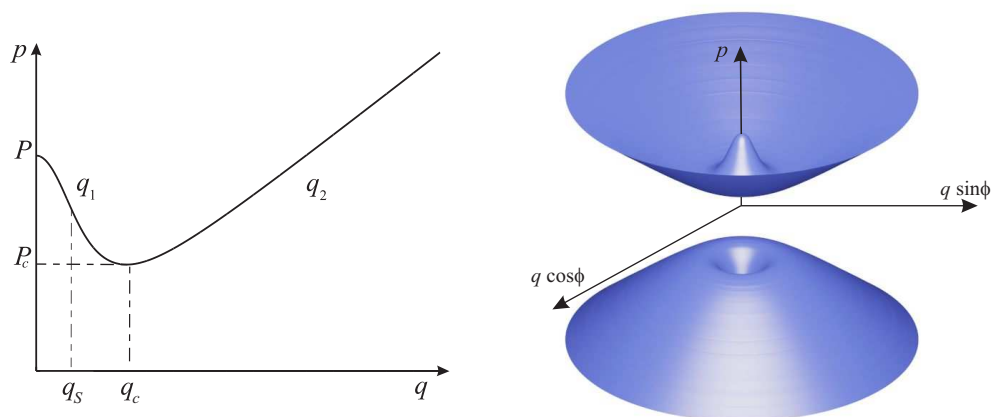


Рис. 1.2. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.56)

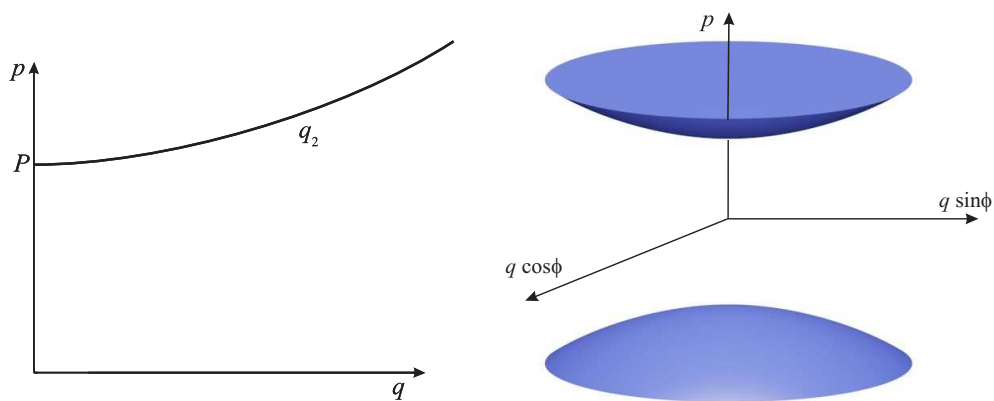


Рис. 1.3. Поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны в интервале частот (1.57)

формулы (1.60) оказываются справедливыми при преобладающем влиянии как электрон-нейтральных ( $\nu_e \approx \nu_{en} \gg \nu_{ei}$ ), так и электрон-ионных столкновений ( $\nu_e \approx \nu_{ei} \ll \nu_{en}$ ). Очевидно, при дополнительном условии  $\omega_p \gg \omega_H$  область частот, определяемая неравенствами (1.59), по-прежнему соответствует свистовому диапазону. Учёт столкновительных потерь приводит, естественно, к тому, что показатель преломления обеих нормальных волн становятся комплексными.

Отметим, что в выражениях (1.60) не учитывается бесстолкновительное затухание Ландау, роль которого будет рассмотрена отдельно.

#### 1.4. Общее представление полей собственных волн замагниченного цилиндрического плазменного волновода

Рассмотрим продольно-однородный цилиндрический плазменный столб радиуса  $a$ , окружённый свободным пространством или замагниченной плазмой. Предполагаем по-прежнему, что столб ориентирован вдоль внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Плотность плазмы такой системы записывается следующим образом:

$$N(\rho) = N_a + (\tilde{N}(\rho) - N_a)[1 - U(\rho - a)], \quad (1.61)$$

где  $a$  — радиус дукта,  $U$  — единичная функция Хевисайда,  $\tilde{N}$  и  $N_a$  — плотность плазмы внутри и вне плазменного волновода соответственно. В случае, если окружающая среда является свободным пространством полагаем  $N_a = 0$ .

Поля мод, поддерживаемых описанной системой, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{E}(\rho) \exp[-im\varphi - ik_0pz], \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z) &= \mathbf{H}(\rho) \exp[-im\varphi - ik_0pz]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Здесь  $m$  — азимутальный индекс ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $p$  — нормированная на  $k_0$  постоянная распространения. Подставив выражения для поля в виде (1.62) в уравнения Максвелла (1.30)–(1.35) при отсутствии источников, получим

следующую систему:

$$\frac{m}{k_0\rho} E_z - pE_\varphi = H_\rho, \quad (1.63)$$

$$pE_\rho - \frac{i}{k_0} \frac{dE_z}{d\rho} = H_\varphi, \quad (1.64)$$

$$\frac{i}{k_0\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho E_\varphi) - \frac{m}{k_0\rho} E_\rho = H_z, \quad (1.65)$$

$$-\frac{m}{k_0\rho} H_z + pH_\varphi = \varepsilon E_\rho - igE_\varphi, \quad (1.66)$$

$$-pH_\rho + \frac{i}{k_0} \frac{dH_z}{d\rho} = igE_\rho + \varepsilon E_\varphi, \quad (1.67)$$

$$-\frac{i}{k_0\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho H_\varphi) + \frac{m}{k_0\rho} H_\rho = \eta E_z. \quad (1.68)$$

Из уравнений (1.63)–(1.68) легко установить связь продольных компонент поля  $E_z(\rho)$ ,  $H_z(\rho)$  с поперечными компонентами  $E_\rho(\rho)$ ,  $E_\varphi(\rho)$ ,  $H_\rho(\rho)$ ,  $H_\varphi(\rho)$ :

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\ &\quad \times \left\{ ipg \frac{m}{\rho} E_z + ip(\varepsilon - p^2) \frac{dE_z}{d\rho} + (\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} H_z + g \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\ &\quad \times \left\{ p(\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} E_z + pg \frac{dE_z}{d\rho} - ig \frac{m}{\rho} H_z - i(\varepsilon - p^2) \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\ H_\rho &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\ &\quad \times \left\{ [g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p^2)] \frac{m}{\rho} E_z - p^2 g \frac{dE_z}{d\rho} + ipg \frac{m}{\rho} H_z + ip(\varepsilon - p^2) \frac{dH_z}{d\rho} \right\}, \\ H_\varphi &= \frac{1}{k_0 [g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2]} \times \\ &\quad \times \left\{ ip^2 g \frac{m}{\rho} E_z - i [g^2 - \varepsilon(\varepsilon - p^2)] \frac{dE_z}{d\rho} + p(\varepsilon - p^2) \frac{m}{\rho} H_z + pg \frac{dH_z}{d\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

При этом скалярные функции  $E_z(\rho)$ ,  $H_z(\rho)$  подчиняются уравнениям [9]

$$\begin{aligned}
& (p^2 - \varepsilon)\hat{L}_m H_z + k_0^2 \left[ g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2 \right] H_z = ipg\hat{L}_m E_z + \\
& + \left[ g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2 \right] \left\{ \left( ip \frac{dE_z}{d\rho} + \frac{m}{\rho} H_z \right) \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{g}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] - \right. \\
& \left. - \left( ip \frac{m}{\rho} E_z + \frac{dH_z}{d\rho} \right) \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{p^2 - \varepsilon}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \\
& \left[ g^2 + \varepsilon(p^2 - \varepsilon) \right] \hat{L}_m E_z + k_0^2 \eta \left[ g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2 \right] E_z = -ipg\hat{L}_m H_z - \\
& - \left[ g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2 \right] \left\{ ip \left( ip \frac{m}{\rho} E_z + \frac{dH_z}{d\rho} \right) \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{g}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] + \right. \\
& \left. + p \left( p \frac{dE_z}{d\rho} - i \frac{m}{\rho} H_z \right) \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{p^2 - \varepsilon}{g^2 - (p^2 - \varepsilon)^2} \right] \right\}, \tag{1.70}
\end{aligned}$$

где

$$\hat{L}_m = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}. \tag{1.71}$$

Выражая  $\hat{L}_m E_z$  и  $\hat{L}_m H_z$  из (1.70), окончательно имеем

$$\begin{aligned}
& \hat{L}_m E_z - k_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} (p^2 - \varepsilon) E_z = -ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} p H_z + \Psi_E, \\
& \hat{L}_m H_z - k_0^2 \left( p^2 + \frac{g^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) H_z = ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} \eta p E_z + \Psi_H, \tag{1.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_E &= \frac{pg}{\varepsilon \Delta} \left\{ \left[ p \frac{m}{\rho} E_z - p \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{dE_z}{d\rho} + i \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{m}{\rho} H_z - i \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \right. \\
& \left. + \left[ p \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{m}{\rho} E_z - p \frac{dE_z}{d\rho} + i \frac{m}{\rho} H_z - i \frac{p^2 - \varepsilon}{g} \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{dg}{d\rho} \right\}, \\
\Psi_H &= \frac{g}{\varepsilon \Delta} \left\{ \left[ ip \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{m}{\rho} E_z - ip(p^2 - 2\varepsilon) \frac{dE_z}{d\rho} - (p^2 - 2\varepsilon) \frac{m}{\rho} H_z + \right. \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \left[ ip(p^2 - 2\varepsilon) \frac{m}{\rho} E_z - ip \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{dE_z}{d\rho} - \right. \\
& \left. - \frac{\varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon p^2}{g} \frac{m}{\rho} H_z + (p^2 - 2\varepsilon) \frac{dH_z}{d\rho} \right] \frac{dg}{d\rho} \right\},
\end{aligned}$$

$$\Delta = (p^2 - \varepsilon + g)(p^2 - \varepsilon - g). \tag{1.73}$$

В случае радиально-неоднородного плазменного столба решение системы уравнений (1.70) может быть получено только численно. Решить эти уравнения аналитически удаётся лишь в случае однородного столба, когда  $\tilde{N} = N_0 = \text{const}$ ,  $\tilde{\nu}_e = \nu_e = \text{const}$ .

Дисперсионное уравнение для волн, направляемых замагниченным плазменным столбом получается из условия непрерывности тангенциальных компонент поля при  $\rho = a$ :

$$\begin{aligned}
 E_\varphi(a - 0) &= E_\varphi(a + 0), \\
 E_z(a - 0) &= E_z(a + 0), \\
 H_\varphi(a - 0) &= H_\varphi(a + 0), \\
 H_z(a - 0) &= H_z(a + 0).
 \end{aligned}
 \tag{1.74}$$

## Глава 2

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЛАЗМЕННЫМ СТОЛБОМ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим продольно-однородный цилиндрический плазменный столб радиуса  $a$ , окружённый свободным пространством и ориентированный вдоль внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ .

Плотность плазмы при наличии столба записывается следующим образом:

$$N(\rho) = \tilde{N}(\rho)[1 - U(\rho - a)]. \quad (2.1)$$

Напомним, что  $a$  — радиус столба,  $U$  — единичная функция Хевисайда,  $\tilde{N}(\rho)$  — функция, описывающая распределение плотности плазмы внутри столба. Что касается частоты соударений, то в зависимости от конкретных условий она может быть как постоянной величиной, так и функцией координат.

В случае однородного столба с плотностью  $\tilde{N} = N$  система уравнений (1.70) в области  $\rho < a$  принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_m E_z - k_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} (p^2 - \varepsilon) E_z &= -ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} p H_z, \\ \hat{L}_m H_z - k_0^2 \left( p^2 + \frac{g^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) H_z &= ik_0^2 \frac{g}{\varepsilon} \eta p E_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для получения системы уравнения для области  $\rho > a$  в (2.2) необходимо положить  $\varepsilon = \eta = 1, g = 0$ .

Решения системы (2.2) выражаются через цилиндрические функции  $Z_m(k_0 q \rho)$   $m$ -го порядка, которые являются собственными функциями оператора  $\hat{L}_m$ :  $\hat{L}_m Z_m(k_0 q \rho) = -(k_0 q)^2 Z_m(k_0 q \rho)$ , где  $q$  — нормированное поперечное волновое число. Очевидно, что внутри столба продольные компоненты поля, а также получаемые из них с помощью соотношений (1.69) поперечные компоненты выражаются через функции Бесселя  $J_m(k_0 q \rho)$ . Вне столба продольные компоненты поля можно представить через функцию Макдональда  $K_m(k_0 s \rho)$ , где  $s = \sqrt{p^2 - 1}$ . Выполнив соответствующие выкладки, приходим к следующим выражениям для компонент поля в случае однородного плазменного столба:

а) при  $\rho < a$

$$\begin{aligned}
E_\rho &= - \sum_{k=1}^2 B_k \left[ \frac{n_k p + g}{\varepsilon} J_{m+1}(k_0 q_k \rho) + \alpha_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
E_\varphi &= i \sum_{k=1}^2 B_k \left[ J_{m+1}(k_0 q_k \rho) + \alpha_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
E_z &= \frac{i}{\eta} \sum_{k=1}^2 B_k n_k q_k J_m(k_0 q_k \rho), \\
H_\rho &= -i \sum_{k=1}^2 B_k \left[ p J_{m+1}(k_0 q_k \rho) - n_k \beta_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
H_\varphi &= - \sum_{k=1}^2 B_k n_k \left[ J_{m+1}(k_0 q_k \rho) - \beta_k m \frac{J_m(k_0 q_k \rho)}{k_0 q_k \rho} \right], \\
H_z &= - \sum_{k=1}^2 B_k q_k J_m(k_0 q_k \rho); \tag{2.3}
\end{aligned}$$

б) при  $\rho > a$

$$\begin{aligned}
E_\rho &= C_1 m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} - C_2 p \left[ K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right], \\
E_\varphi &= i C_1 \left[ K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right] - i C_2 p m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho}, \\
E_z &= -i C_2 s K_m(k_0 s \rho), \\
H_\rho &= -i C_1 p \left[ K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right] + i C_2 m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \\
H_\varphi &= C_1 p m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} - C_2 \left[ K_{m+1}(k_0 s \rho) - m \frac{K_m(k_0 s \rho)}{k_0 s \rho} \right], \\
H_z &= C_1 s K_m(k_0 s \rho). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Здесь

$$n_k = n_k(p, N), \quad \alpha_k = \alpha_k(p, N), \quad \beta_k = \beta_k(p, N), \quad q_k^2 = q_k^2(p, N), \tag{2.5}$$

$B_k$  и  $C_k$  — некоторые константы. Функции, входящие в формулы (2.5) и зависящие от нормированной постоянной распространения  $p$  и плотности плазмы



$N$  в столбе, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_k(p, N) &= -\frac{\varepsilon}{pg} \left( p^2 + q_k^2(p, N) + \frac{g^2}{\varepsilon} - \varepsilon \right), \\ \alpha_k(p, N) &= -1 + \frac{p^2 + q_k^2(p, N) - \varepsilon}{g}, \\ \beta_k(p, N) &= 1 + \frac{p}{n_k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величины  $q_k = q_k(p, N)$  вычисляются по формулам (1.58). При этом в выражениях (1.58) и (2.6) компоненты тензора диэлектрической проницаемости берутся соответствующими плотности плазмы  $N$ .

Из условия непрерывности тангенциальных компонент поля (1.74) при  $\rho = a$  можно получить дисперсионное уравнение, позволяющее определить постоянные распространения мод  $p$  плазменного столба и соотношения между коэффициентами  $B_k$  и  $C_k$ . Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Delta \equiv \Delta_0 - \sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \delta_1 \left[ \eta J_m^{(1)} J_m^{(2)} + J_m^{(1)} \hat{K}_m + \eta J_m^{(2)} \hat{K}_m \right] + \hat{K}_m^2, \\ \Delta_1 &= \delta_2 \eta \hat{J}_m^{(1)} \hat{K}_m, \\ \Delta_2 &= \delta_2 \left[ \eta \hat{J}_m^{(1)} + \hat{K}_m \right] \hat{J}_m^{(2)}, \\ \Delta_3 &= \delta_2 \eta \frac{p}{n_1} \frac{m}{S^2} \left[ \hat{J}_m^{(1)} + J_m^{(1)} - J_m^{(2)} - \hat{J}_m^{(2)} \right] + p^2 \frac{m^2}{S^4}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} J_m^{(1)} &= \frac{J_{m+1}(Q_1)}{Q_1 J_m(Q_1)} + m \frac{\alpha_1}{Q_1^2}, & J_m^{(2)} &= \frac{J_{m+1}(Q_2)}{Q_2 J_m(Q_2)} - m \frac{\beta_2}{Q_2^2}, \\ \hat{K}_m &= \frac{K_{m+1}(S)}{S K_m(S)} - m \frac{1}{S^2}, & \hat{J}_m^{(k)} &= J_m^{(k)} + (-1)^k m \frac{\alpha_k + \beta_k}{Q_k^2}, \\ Q_k &= k_0 q_k a, \quad S = k_0 s a, \quad \delta_{1,2} = n_{2,1} (n_2 - n_1)^{-1}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В отсутствие потерь решения уравнения (2.7) для распространяющихся мод является действительным. При наличии столкновительных потерь в плазме решения дисперсионного уравнения (2.7) являются комплексными, т.е.  $p = p' - ip''$ , где  $p'$  и  $p''$  — постоянные распространения и постоянные затухания мод соответственно.

В случае неоднородного столба, когда решение уравнений для поля в области  $\rho < a$  приходится отыскивать с использованием численных методов, поле внутри цилиндра представляется в виде суммы линейно независимых решений соответствующих дифференциальных уравнений. Искомые решения должны быть регулярными на оси дакта и при  $\rho \rightarrow 0$  по-прежнему описываются цилиндрическими функциями вида (2.3) с аргументами  $k_0 q_1 \rho$  и  $k_0 q_2 \rho$ , где величины  $q_1$  и  $q_2$  отвечают однородной плазме с плотностью  $\tilde{N}(0)$  и эффективной частоте электронных соударений  $\nu_e(0)$ . Использование граничных условий при  $\rho = a$  позволяет далее получить дисперсионное соотношение для мод, направляемых неоднородным плазменным столбом.

## 2.2. Типы мод, направляемых плазменным столбом

Выясним вначале, моды каких типов могут поддерживаться плазменным столбом. Поскольку обсуждение возможных типов мод в различных диапазонах частот заняло бы много места, мы в качестве примера ограничимся случаем, когда круговая частота лежит в диапазоне (1.56). Прежде всего, обратим внимание на то, что в диапазоне частот (1.56) имеет место приближённая формула  $\varepsilon \eta \approx -g^2$  и выполняется неравенство  $|\varepsilon| \ll |\eta|$ . Используя эти результаты, нетрудно показать, что  $P_c \approx 2\varepsilon^{1/2}$  и  $|P_b| \ll |P_c|$ . Кроме того, в выбранном диапазоне выполняется неравенство  $|P_b| \ll 1$ . Заметим, что при отсутствии столкновительных потерь в плазме величины  $P_b, P_c$  и  $P$  в интервале частот (1.56) являются чисто действительными и удовлетворяют неравенствам

$$P_b \ll P_c < P, \quad (2.10)$$

позволяющим приближённо положить  $P_b \approx 0$ .

С учётом сделанных замечаний обсудим поверхности показателей преломления волн в плазме и в свободном пространстве. Для этого проанализируем вначале связь между продольным волновым числом  $p$  и поперечными волновыми числами  $q_{1,2}$  в однородной магнитоактивной плазме. Напомним, что в рассматриваемом диапазоне частот распространяющейся является только «необыкновенная» волна холодной магнитоактивной плазмы. Поверхность показателя преломления этой волны в однородной плазме для интервала частот (1.59) в случае отсутствия диссипативных потерь показана на рис.2.1 верхней кривой. Как уже отмечалось ранее, здесь имеются две ветви  $q = q_1(p)$  и  $q = q_2(p)$ , описывающие поверхности показателей преломления при  $0 < q < q_c$  и  $q_c < q < \infty$  соответственно; величина  $q_c = q_{1,2}(P_c)$  соответствует так называемым волнам конической рефракции. Ветвь  $q_1(p)$  описывает крупномасштабную составляющую поля (так называемые геликоны), а ветвь  $q_2(p)$  — мелкомасштабную квазиэлектростатическую составляющую [9].

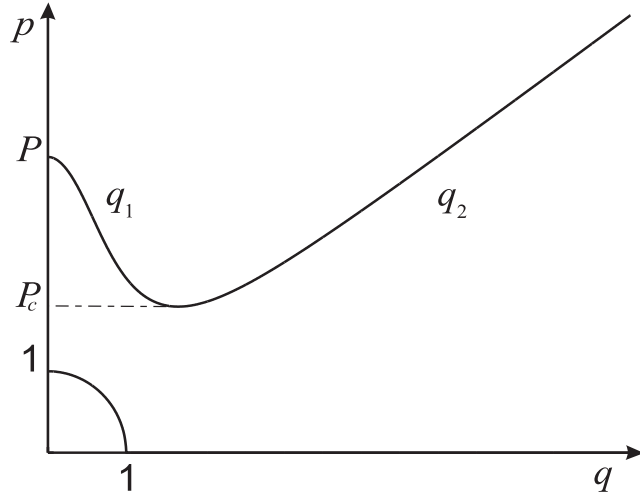


Рис. 2.1. Поверхности показателей преломления для электромагнитных волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме (верхняя кривая) и в свободном пространстве (нижняя кривая)

Поверхность показателя преломления электромагнитных волн в свободном пространстве определяется выражением  $p = (1 - q^2)^{1/2} = (1 + s^2)^{1/2}$  и представлена на рис. 2.1 нижней кривой. На рисунке учтено, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство  $P_c > 1$ .

Очевидно, что при определённых условиях плазменный столб может поддерживать собственные моды. При отсутствии потерь, когда, очевидно, имеют место соотношения  $p' = p$  и  $p'' = 0$ , постоянные распространения мод должны удовлетворять условию  $p > 1$ . В этом случае величина  $s$ , относящаяся окружающей среде ( $\rho > a$ ), является чисто действительной. Область  $p > 1$  можно разбить на три интервала (см. рис. 2.1):

$$p > P, \quad (2.11)$$

$$P_c < p < P, \quad (2.12)$$

$$1 < p < P_c. \quad (2.13)$$

В случае (2.11) величина  $q_1$  является мнимой, а величина  $q_2$  – действительной, так что поле каждой собственной моды с продольным волновым числом, лежащим в интервале (2.11), содержит поверхностную геликонную и объёмную квазиэлектростатическую составляющие. В области (2.12) оба волновых числа  $q_1$  и  $q_2$  действительны, так что геликонная и квазиэлектростатическая составляющие являются объёмными при  $\rho < a$ . В интервале (2.13) поперечные волновые числа  $q_1$  и  $q_2$  являются комплексно сопряжёнными ( $q_1 = q_2^*$ ), поэтому поле в этом случае, очевидно, локализовано вблизи границы канала. Соответственно, такие собственные волны можно назвать объёмно–поверхностными.

Как будет ясно из дальнейшего, представленная выше классификация, введенная для бесстолкновительного плазменного столба, оказывается пригодной и при наличии потерь в плазме. Следует лишь заменить величины  $p, P, P_c$  в (2.11)–(2.13) на  $p', P' = \text{Re}P, P'_c = \text{Re}P_c$  соответственно.

### 2.3. Объёмные моды однородного плазменного столба

Рассмотрим объёмные моды однородного плазменного столба. Хотя уравнение (2.7) является весьма громоздким для аналитического решения, его можно упростить в случае, когда поперечные волновые числа геликонной части поля (ветвь  $q_1$ ) и его квазиэлектростатической части (ветвь  $q_2$ ) существенно различны по абсолютному значению ( $|q_1| \ll |q_2|$ ). Для частотного диапазона (1.59) это имеет место в случае

$$|p|^2 \gg |P_c|^2. \quad (2.14)$$

При выполнении условия (2.14) выражения для величин  $q_{1,2}, s$  и  $n_{1,2}$  упрощаются к виду

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{P^2}{p^2} - p^2, & q_2^2 &= -\frac{\eta}{\varepsilon} \left( p^2 + \frac{g^2}{\eta} - \varepsilon \right), & s^2 &= p^2, \\ n_1 &= \frac{\eta}{p} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{p^2} \right), & n_2 &= -p \frac{\eta}{g} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя формулы (2.15) в строгое дисперсионное уравнение (2.7), и учитывая соотношение  $\varepsilon\eta = -g^2$ , справедливое в частотном интервале (1.59), можно получить приближённое представление дисперсионного уравнения, удобное для последующего анализа:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} + \frac{m\alpha_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{S} \left( \frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) \right] \times \\ & \times \left[ \frac{J_{m+1}(Q_2)}{J_m(Q_2)} - \frac{m}{k_0 a p} + \frac{Q_2}{\eta S} \left( \frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) \right] = \\ & = \kappa(p) \left( \frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} - \frac{m\beta_1}{Q_1} - \frac{mQ_1}{(k_0 a P)^2} \right) \left( \frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\kappa(p) \approx P^2/(ps) \approx P^2/p^2$ .

Проанализируем дисперсионное уравнение (2.16) для некоторых частных случаев. Вначале рассмотрим значения  $p$ , удовлетворяющие неравенству (2.11). При дополнительном условии  $|p| \gg |P|$  параметр  $\kappa$  в правой части уравнения (2.16) оказывается весьма малым. При малом значении этого параметра

дисперсионное уравнение в нулевом приближении теории возмущений ( $\kappa = 0$ ) распадается на два уравнения

$$\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} + \frac{m\alpha_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{S} \left( \frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{J_{m+1}(Q_2)}{J_m(Q_2)} - \frac{m}{k_0 a p} + \frac{1}{\eta} \frac{Q_2}{S} \left( \frac{K_{m+1}(S)}{K_m(S)} - \frac{m}{S} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Анализ уравнений (2.17) и (2.18) показывает, что в области (2.11) решения имеет лишь уравнение (2.18). Эти решения соответствуют собственным модам, в полях которых преобладает квазиэлектростатическая составляющая. В рассматриваемом случае уравнение (2.18) допускает дальнейшее упрощение с учётом приближённого соотношения  $|Q_2/(\eta s)| \approx |g^{-1}| \ll 1$ . Кроме того, при выполнении дополнительного неравенства  $k_0 a |p| \gg |m| + 1$ , которое, как правило, имеет место для исследуемых мод, уравнение (2.18) принимает вид

$$J_{m+1}(Q_2) = 0. \quad (2.19)$$

Если воспользоваться приближённым выражением  $Q_2 = k_0 a p \omega_{\text{H}} (\omega - i\nu_e)^{-1}$  ( $|Q_2| \gg 1$ ), то решения уравнения (2.19) даются сравнительно простой формулой

$$p_{mn} = \mu_n^{(m+1)} \frac{c}{\omega_{\text{H}} a} \left( 1 - i \frac{\nu_e}{\omega} \right), \quad (2.20)$$

где  $\mu_n^{(m)}$  —  $n$ -й нуль функции Бесселя  $J_m$ ,  $n$  — большое положительное целое число ( $n \gg 1$ ). Из формулы (2.20) следует соотношение  $p''_{mn}/p'_{mn} \approx \nu_e/\omega$  для мод, поля которых определяются преимущественно квазиэлектростатической составляющей.

При приближении постоянной распространения  $p$  к величине  $P$  параметр  $\kappa$  возрастает. В области (2.12) имеет место неравенство  $|\kappa| > 1$  и дисперсионное уравнение уже не распадается на два уравнения, в отличие от рассмотренного выше случая. Это означает, что собственные моды, постоянные распространения которых лежат в интервале (2.12), являются «гибридными» в том смысле, что их свойства определяются одновременно вкладом как геликонной, так и квазиэлектростатической составляющей. В этом случае решения дисперсионного уравнения не могут быть получены в аналитическом виде и находятся с помощью численных методов.

Поведение объёмных мод иллюстрируется результатами численного решения точного дисперсионного уравнения (2.7). Начнем обсуждение результатов со случая бесстолкновительного плазменного канала. На рис. 2.2 показаны зависимости постоянных распространения  $p_{mn} = p'_{mn}$  от частоты  $\omega$  для нескольких мод с азимутальным индексом  $m = 1$ . Данные зависимости были получены

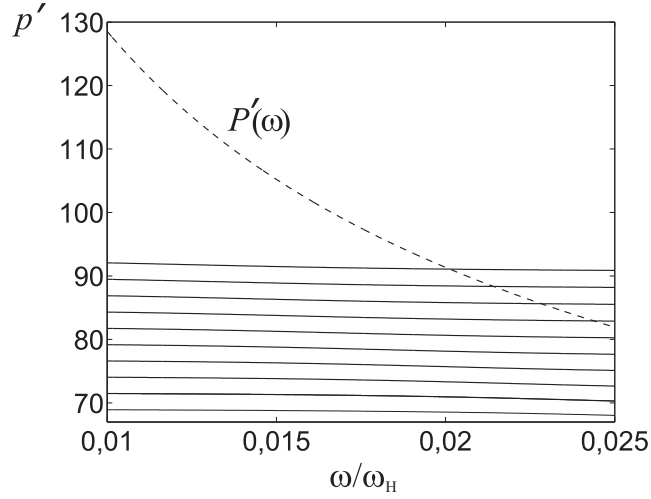


Рис. 2.2. Дисперсионные кривые мод с азимутальным индексом  $m = 1$  и радиальными индексами  $n = 20, \dots, 29$  (сплошные линии) и зависимость  $P'(\omega)$  (штриховая линия) при  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$  и отсутствии столкновительных потерь ( $\nu_e = 0$ )

численно при  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$  и  $\nu_e = 0$ . В силу отсутствия столкновительных потерь в данном случае  $p''_{mn} = 0$ . Штриховая линия на рис. 2.2 изображает зависимость  $P'(\omega)$ . Заметим, что значения безразмерных параметров, выбранные для численных расчётов, отвечают типичным условиям экспериментов с геликонными источниками плазмы и, в частности, выполняются, если плотность плазмы  $N = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , внешнее постоянное магнитное поле  $B_0 = 800 \text{ Гс}$ , радиус канала  $a = 2,5 \text{ см}$ . Кроме того, заметим, что соответствующий частотный интервал на рис. 2.2 включает частоту  $\omega/2\pi = 27,12 \text{ МГц}$ , обычно используемую в соответствующих экспериментах [1, 2]. Безразмерный параметр  $\omega/\omega_H$ , отвечающий этой частоте, равен  $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$ . Отметим, что решения  $p_{mn}$  пронумерованы в порядке возрастания значений  $p_{mn}$ , начиная с нижней границы  $p = P_c' = \text{Re } P_c$  области (2.12). Как видно из рис. 2.2, число мод в интервале (2.12) довольно велико. Например, для  $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$  общее число мод равно 36. На рис. 2.2 приведены дисперсионные кривые только для десяти мод с номерами  $n = 20, \dots, 29$ . Поскольку поля объёмных мод включают два поперечных волновых числа, постольку распределения полей содержат одновременно мелкомасштабные и крупномасштабные вариации по радиусу, отвечающие величинам  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Можно убедиться, что для мод с радиальными числами  $n$  и  $n + 1$ , выполняются соотношения  $k_0 a [q_2(p_{m,n+1}) - q_2(p_{m,n})] \simeq \pi$  и  $k_0 a [q_1(p_{m,n}) - q_1(p_{m,n+1})] \ll \pi$ . Отсюда следует, что моды, отвечающие ближайшим дисперсионным кривым, различаются числом мелкомасштабных вариаций по радиусу. При этом число таких вариаций возрастает с увеличением значения  $n$ .

На рис. 2.3 представлены дисперсионные кривые для мод с азимутальным индексом  $m = 1$  и радиальными индексами  $n = 20, \dots, 29$ , полученные из

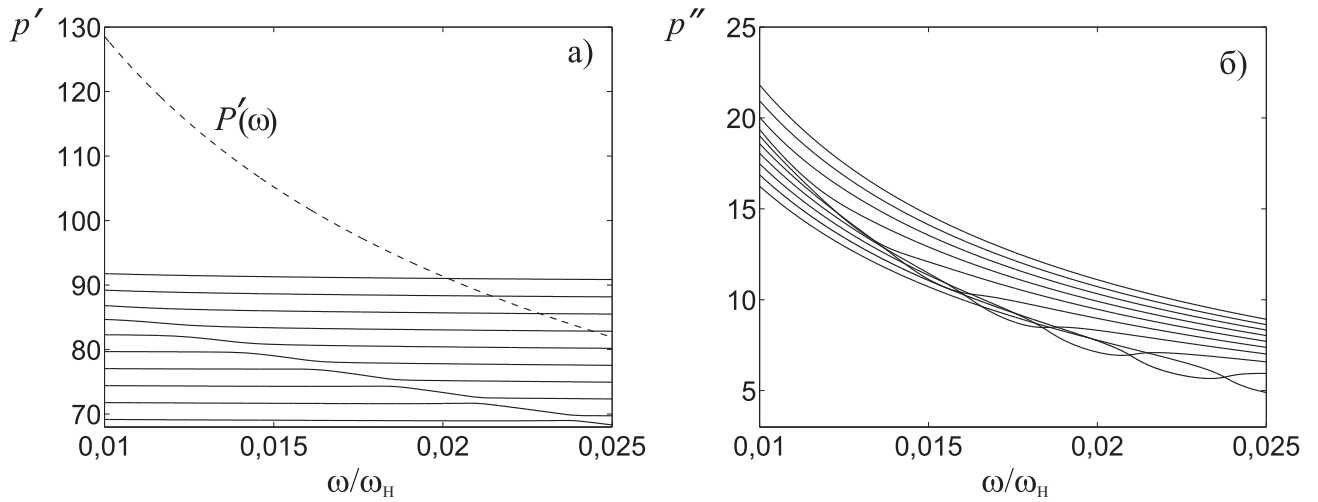


Рис. 2.3. Дисперсионные кривые мод с азимутальным индексом  $m = 1$  и радиальными индексами  $n = 20, \dots, 29$  (сплошные линии) и зависимость  $P'(\omega)$  (штриховая линия) при  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$  и наличии столкновительных потерь ( $\nu_e = 2,55 \cdot 10^{-3} \omega_H$ )

дисперсионного уравнения (2.7) при  $\nu_e/\omega = 2,55 \cdot 10^{-3}$  и тех же значениях параметров  $\omega_p/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ , что и для рис. 2.2. Нумерация мод на рис. 2.3 совпадает с нумерацией в случае бесстолкновительной плазмы (ср. с рис. 2.2). При этом действительные части  $p'_{mn}$  комплексных постоянных распространения и постоянные затухания  $p''_{mn}$  (для  $\omega/\omega_H = 0,025$ ) возрастают с увеличением индекса  $n$ . Как видно из рис. 2.3, при малых столкновительных потерях на кривых  $p'_{mn}(\omega)$  появляются ступенчатые участки. Одновременно на частотных зависимостях постоянных затухания  $p''_{mn}(\omega)$ , возникают локальные минимумы соответствующие частотам, для которых крутизна кривых  $p'_{mn}(\omega)$  является максимальной.

Из рис. 2.2, 2.3 следует, что решения приближённого уравнения (2.16) при условии (2.14) с большой степенью точности описывает поведение дисперсионных характеристик. В области (2.11) они хорошо согласуются с приближённой формулой (2.20). Другая важная особенность поведения дисперсионных характеристик  $p'_{mn}(\omega)$  состоит в их непрерывном переходе из области (2.11) в область (2.12) с уменьшением частоты.

С дальнейшим увеличением частоты электронных соударений  $\nu_e$  дисперсионные характеристики мод претерпевают существенные изменения (см. рис. 2.4). Из сравнения рис. 2.3 и 2.4 можно видеть, что начиная с определенных значений  $\nu_e$  ступенчатые участки кривых  $p'_{mn}(\omega)$  трансформируются в единую кривую, соответствующую моде с относительно малыми столкновительными потерями. Одновременно формируется и соответствующая кривая постоянной затухания такой моды. На рис. 2.4 частотные зависимости постоянных распространения и затухания данной моды показаны толстыми линиями. Оставшиеся кривые  $p'_{mn}(\omega)$  и  $p''_{mn}(\omega)$  соответствуют модам со сравнительно

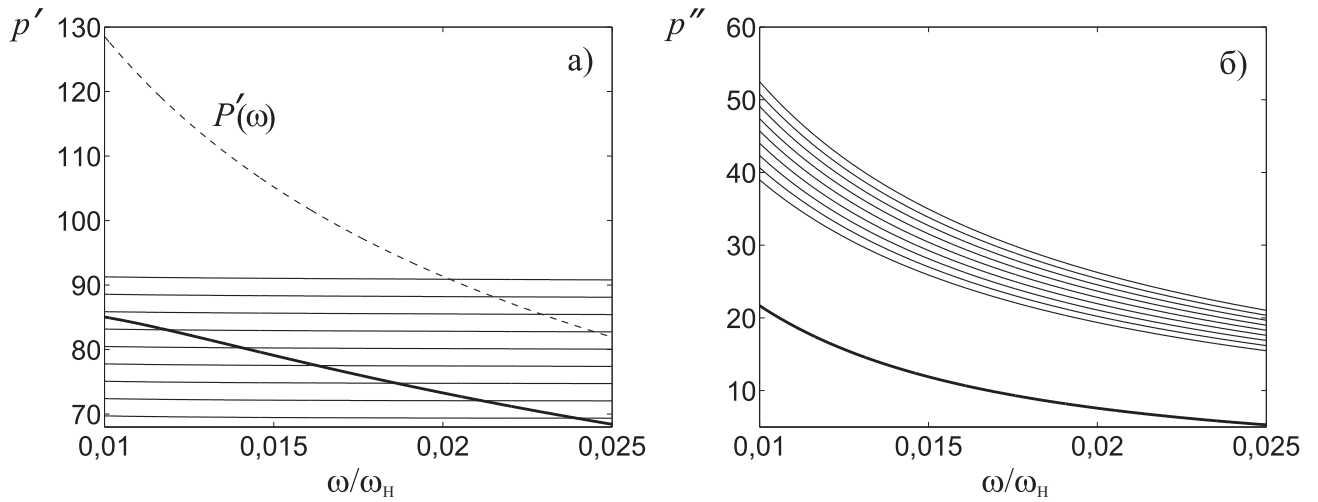


Рис. 2.4. Дисперсионные кривые одной слабозатухающей моды и девяти сильнозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$  (толстые и тонкие сплошные линии соответственно) и зависимость  $P'(\omega)$  при  $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ . Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.3

большими потерями. Дисперсионные характеристики таких сильнозатухающих мод показаны на рис. 2.4 тонкими линиями. Таким образом, с возрастанием частоты электронных соударений моды разделяются на слабозатухающие, для которых выполняется неравенство  $p''/p' \ll \nu_e/\omega$ , и сильнозатухающие, для которых справедливо соотношение  $p''/p' \approx \nu_e/\omega$ , характерное для квазиэлектростатических волн. Аналогичное поведение демонстрируют и моды с другими значениями азимутального индекса  $m$ . В качестве примера на рис. 2.5 приведены дисперсионные кривые нескольких азимутально-симметричных мод, для которых  $m = 0$ .

Отмеченные особенности дисперсионных характеристик мод при  $\nu_e \neq 0$  можно объяснить, анализируя поведение поперечных волновых чисел  $Q_1 = k_0 a q_1$  и  $Q_2 = k_0 a q_2$ . При учёте электронных столкновений в плазме мнимые части поперечных волновых чисел  $Q_2$  слабозатухающих мод быстро возрастают по абсолютному значению с увеличением  $\nu_e$ . Указанные мнимые части описываются выражением

$$\text{Im } Q_2 \approx k_0 a p' \frac{\omega_H}{\omega [1 + (\nu_e/\omega)^2]} \left( \frac{\nu_e}{\omega} - \frac{p''}{p'} \right), \quad (2.21)$$

из которого следует, что при условии  $k_0 a p'(\omega_H/\omega) \gg 1$ , имеющем место для исследуемых мод, и значениях отношения  $p''/p'$ , не слишком близких к  $\nu_e/\omega$ , может выполняться неравенство  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ . В этом случае для мелкомасштабной («квазиэлектростатической») составляющей поля моды имеет место явление, аналогичное скин-эффекту: мелкомасштабная часть поля сильно «прижимается» к границе дакта, так что поле моды определяется преиму-



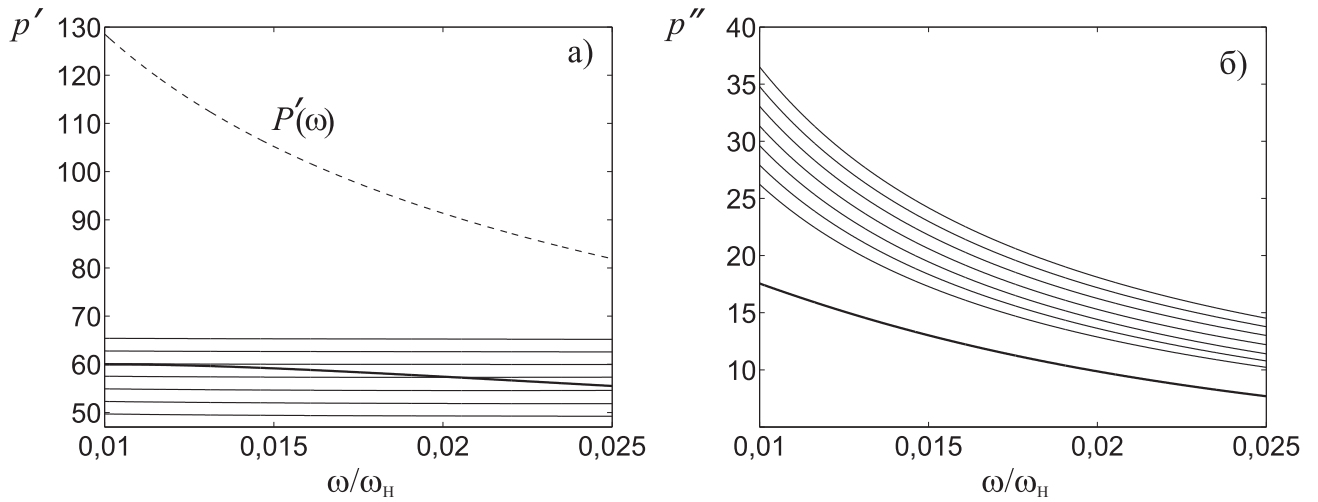


Рис. 2.5. Дисперсионные кривые, одной слабозатухающей моды и девяти сильнозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 0$  (толстая и тонкие сплошные линии соответственно) и зависимость  $P'(\omega)$  при  $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ . Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.4

щественно крупномасштабной составляющей. В результате затухание моды становится близким к затуханию крупномасштабных вистлеров (геликонов):  $p''/p' \sim \nu_e/\omega_H \ll \nu_e/\omega$ . Напротив, в других (сильнозатухающих) модах мнимая часть поперечного волнового числа  $Q_1$  возрастает по абсолютному значению быстрее, чем  $|\text{Im} Q_2|$ , так что в поле доминируют квазиэлектростатические волны. Таким образом, потери этих мод оказываются примерно такими же, как для квазиэлектростатических волн в однородной плазме, т. е.  $p''/p' \approx \nu_e/\omega$ . В результате, для сильнозатухающих мод выполняется неравенство  $|\text{Im} Q_2| \ll 1$ , а кривые  $p'(\omega)$  таких мод, несмотря на значительное столкновительное затухание, мало отличаются от дисперсионных кривых в отсутствие потерь.

Итак, слабозатухающие моды, потери которых значительно меньше, чем потери квазиэлектростатических волн, должны иметь волновые числа  $Q_2$  с большой мнимой частью:  $\text{Im} Q_2 \gg 1$ . В то же время сильнозатухающие моды, для которых отношение  $p''/p'$  близко к  $\nu_e/\omega$ , обладают весьма малой мнимой частью  $Q_2$ :  $|\text{Im} Q_2| \ll 1$ . Фактически, возможность одновременного существования двух видов мод с близкими постоянными распространения  $p'$  и существенно различными постоянными затухания  $p''$  следует непосредственно из формулы (2.21) для  $\text{Im} Q_2$ .

Следует отметить, что приближённое дисперсионное уравнение (2.16) можно существенно упростить при  $\text{Im} Q_2 \gg 1$ . В этом случае  $J_{m+1}(Q_2)/J_m(Q_2) \approx i$ . Используя данный результат и приближённые формулы

$$\alpha_1 = -1 - \frac{P^2}{p^2}, \quad \beta_1 = 1 + \frac{p^2}{P^2}, \quad (2.22)$$

которые выполняются при условии (2.14), уравнение (2.16) преобразуется к виду

$$\frac{J_{m+1}(Q_1)}{J_m(Q_1)} - \frac{m}{Q_1} \left(1 + \frac{P^2}{p^2}\right) + \frac{Q_1}{S} \frac{\tilde{K}}{1 + \tilde{\kappa}} = 0, \quad (2.23)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \kappa \left(\frac{m}{k_0 a p} - i\right)^{-1} \tilde{K}, \quad \tilde{K} = S \hat{K}. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.23) позволяет найти приближённо комплексные постоянные распространения  $p = p' - ip''$  мод с малыми постоянными затухания. Поскольку эти моды различаются числом крупномасштабных вариаций поля по радиусу, мы будем нумеровать их в порядке возрастания числа таких вариаций, используя обозначение  $\nu$  для радиального индекса ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Очевидно, что постоянные распространения  $p'_{m\nu}$  убывают с возрастанием  $\nu$ .

Представляет интерес сравнить результаты решения точного дисперсионного уравнения (2.7) и приближённого уравнения (2.23) для слабозатухающих мод. Проведём такое сравнение для мод с азимутальным индексом  $m = 1$ . Из точного дисперсионного уравнения можно найти, что при тех же значениях параметров, что и для рис. 2.4, в интервале (2.12) существуют три слабозатухающие моды с индексом  $m = 1$ . Зависимости  $p'_{m\nu}(\omega)$  и  $p''_{m\nu}(\omega)$  для этих мод показаны на рисунке 2.6 сплошными линиями. Кривая с  $\nu = 1$  на рис. 2.6 соответствует моде, выделенной жирной линией на рис. 2.4. Штрих-пунктирной линией на рис. 2.6 показана приближённая зависимость, найденная для этой моды из уравнения (2.23). Как видно из рисунка, решение приближённого уравнения (2.23) достаточно хорошо согласуется с решением, найденным на основе точного дисперсионного уравнения, даже когда величина  $|p/P_c|$  не слишком велика. В частности, линии на рис. 2.6а, отвечающие строгому и приближённому дисперсионным уравнениям, совпадают с графической точностью. Мы не приводим решения уравнения (2.23) для  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$ , поскольку их постоянные распространения  $p'_{m\nu}$  лежат весьма близко к  $P'_c$  и условие (2.14) не выполняется. Поэтому уравнение (2.23) не позволяет описать поведение дисперсионных зависимостей этих двух мод. С увеличением радиуса столба количество слабозатухающих мод возрастает и уравнение (2.23) даёт возможность получить приближённые решения  $p_{m\nu}$  для большего числа мод.

Процесс разделения мод на слабо- и сильнозатухающие можно проследить с помощью рис. 2.7, показывающего зависимости величин  $p'$  и  $p''$  от эффективной частоты электронных соударений. Как и выше, здесь тонкие сплошные линии соответствуют сильнозатухающим модам, для которых имеет место соотношение  $p''/p' \sim \nu_e/\omega$ . Толстая сплошная линия соответствует моде с  $\nu = 1$ . Для выбранного интервала эффективной частоты электронных соударений отношение  $p''/p'$  для моды с  $\nu = 1$  лежит между соответствующими

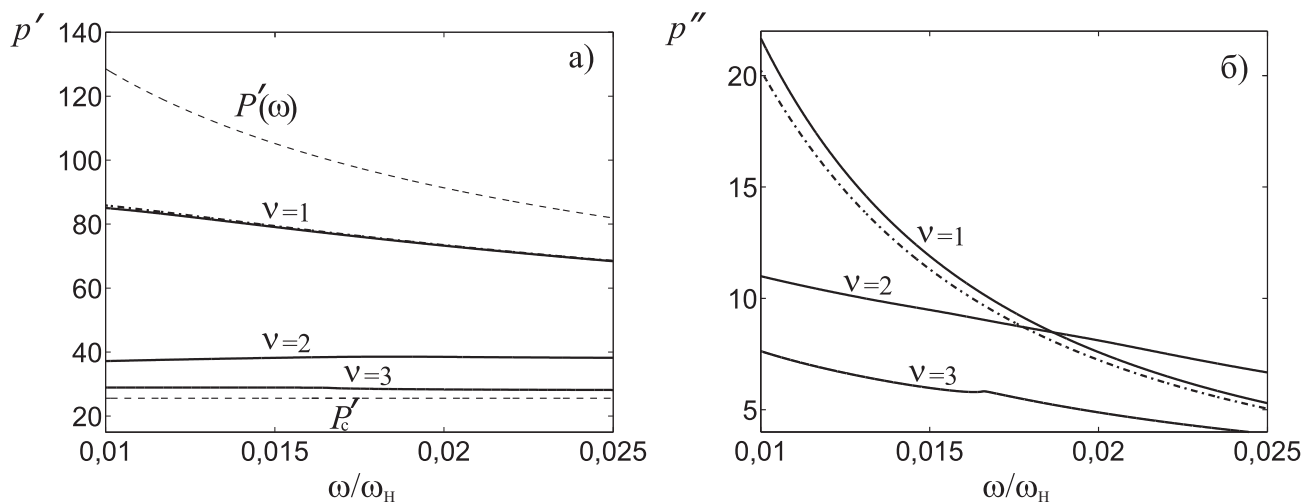


Рис. 2.6. Дисперсионные кривые слабозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$ , полученные из строгого дисперсионного уравнения (сплошные линии) и приближённого уравнения (штрих-пунктирные линии) при  $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ . Штриховые линии показывают зависимости  $P'(\omega)$  и  $P'_c(\omega)$ . Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.3

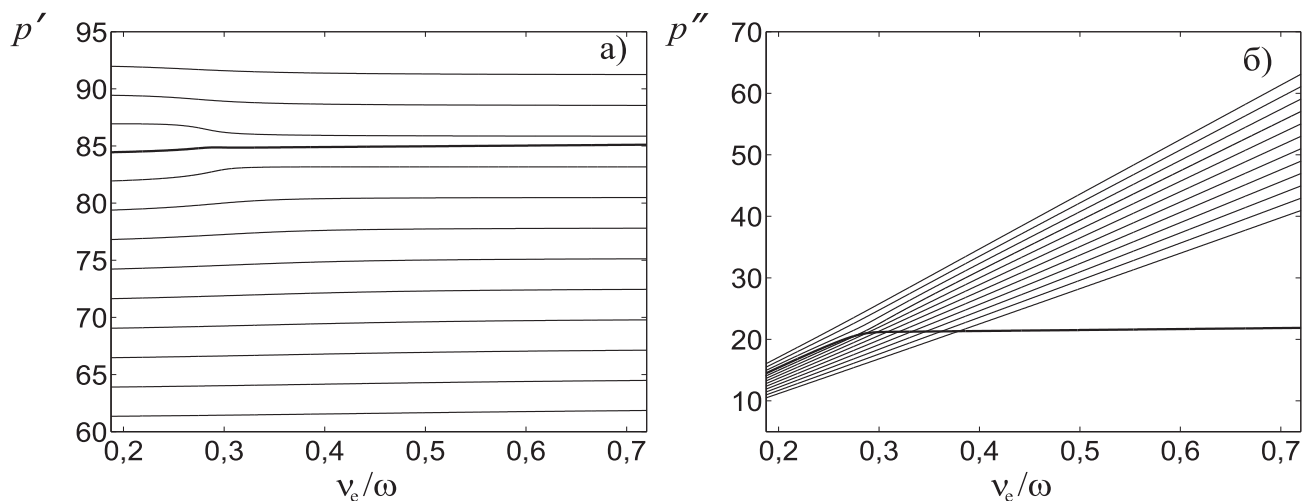


Рис. 2.7. Зависимости постоянных распространения (а) и постоянных затухания (б) слабозатухающей моды (сплошные толстые линии) и сильнозатухающих мод (тонкие линии) с азимутальным индексом  $m = 1$  от эффективной частоты электронных соударений  $\nu_e$  при  $\omega_p/\omega_H = 12,8, \omega_H a/c = 1,13, \omega/\omega_H = 0,01$

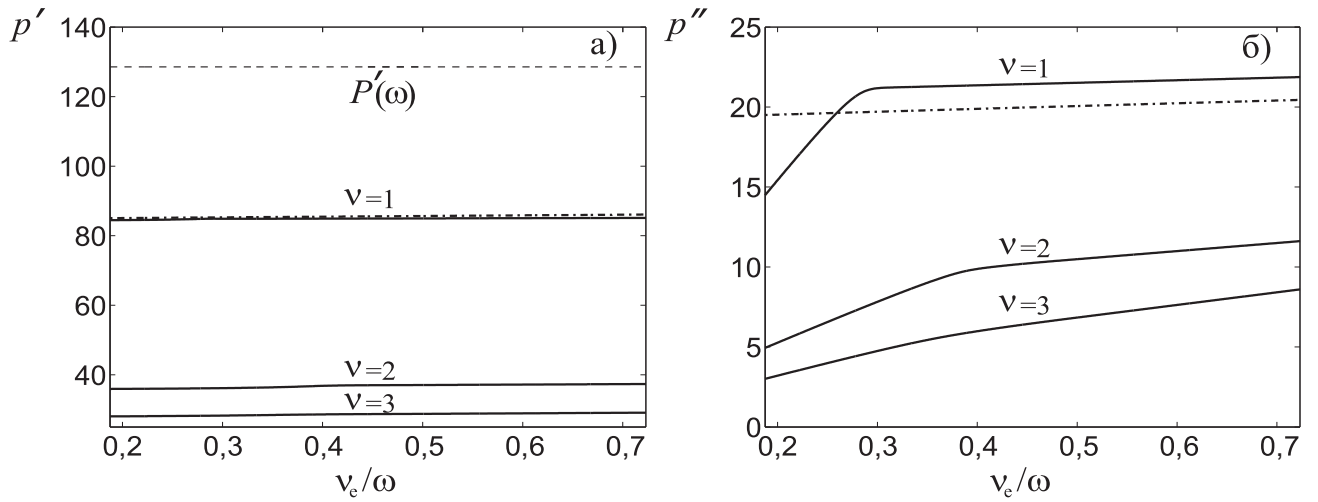


Рис. 2.8. Зависимости постоянных распространения (а) и постоянных затухания (б) слабозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$  от эффективной частоты электронных соударений. Сплошными и штрих-пунктирными линиями показаны результаты, полученные на основании решений точного и приближённого дисперсионных уравнений соответственно. Штриховая линия показывает зависимость  $P'(\omega)$ . Значение остальных параметров те же, что и для рис. 2.7

величинами  $p''/p'$  для квазиэлектростатических волн и крупномасштабных вистлеров (геликонов), распространяющихся в однородной плазме.

На рис. 2.8 показаны зависимости постоянных распространения  $p'$  и постоянных затухания  $p''$  от  $\nu_e$  для трёх слабозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$ , существующих в рассматриваемом случае. Из рис. 2.8 видно, что решение уравнения (2.23) удовлетворительно описывает зависимости  $p''$  и  $p'$  от частоты электронных соударений для моды с  $\nu = 1$  за исключением поведения  $p''$  в области  $\nu_e/\omega < 0,25$ . Это означает, что для умеренных значений  $\nu_e$  ( $\nu_e/\omega < 0,25$ ), условие  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ , использованное при выводе уравнения (2.23), не выполняется и данное уравнение не может быть использовано для анализа дисперсионных характеристик моды.

Примечательно, что постоянные затухания  $p''_{m\nu}$  весьма медленно меняются с увеличением  $\nu_e$  в выбранном интервале эффективной частот электронных соударений (см. рис. 2.8). Это связано с тем, что величина  $p''_{m\nu}$  в значительной степени определяется третьим слагаемым в левой части уравнения (2.23). При  $p''_{m\nu} \ll p'_{m\nu}$ , указанное слагаемое довольно слабо зависит от  $\nu_e$ , поэтому  $p''_{m\nu}$  в рассматриваемом интервале  $\nu_e$  изменяется незначительно.

Представляется интересным обсудить, возможна ли для слабозатухающих мод ситуация, когда отношение  $p''/p'$  оказывается близким к величине  $p''/p' \simeq \nu_e/(2\omega_H)$ , характеризующей затухание вистлеров при их распространении в однородной магнитоактивной плазме под малыми углами к направлению внешнего магнитного поля. Анализ уравнения (2.23) показывает, что это возможно

лишь в случае очень широкого плазменного столба для мод, действительные части комплексных постоянных распространения которых близки к  $P'$ , так что выполняется неравенство  $|Q_1| \ll |S_1|$ . В этом случае можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (2.23), в результате чего приходим к уравнению

$$J_{m-1}(Q_1) \approx 0. \quad (2.25)$$

Решение уравнения (2.25) удобно искать в форме  $p_{mn} = P - \Delta p_{mn}$ , предполагая, что  $|\Delta p_{mn}| \ll |P|$ . Учитывая приближённое соотношение  $Q_1(p_{mn}) \approx 2(k_0 a)(P \Delta p_{mn})^{1/2}$  и выражение

$$P = P' - iP'' \approx \frac{\omega_p}{(\omega \omega_H)^{1/2}} \left( 1 - i \frac{\nu_e}{2\omega_H} \right), \quad (2.26)$$

решение уравнения (2.25) находим в виде

$$p_{mv} = P' \left\{ 1 - \left( \frac{\mu_\nu^{(m-1)}}{2k_0 a P'} \right)^2 - i \frac{\nu_e}{2\omega_H} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_\nu^{(m-1)}}{2k_0 a P'} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.27)$$

где  $\mu_n^{(m)}$  —  $n$ -й нуль функции Бесселя  $J_m$ . Решение (2.27) справедливо при условии  $2k_0 a |P| \gg \mu_n^{(m-1)}$ . Отсюда следует, что соотношение  $p''_{mn}/p'_{mn} \simeq \nu_e/(2\omega_H)$  может иметь место лишь для мод плазменного столба, радиус которого значительно превышает характерную длину волны вистлера  $\lambda_w = 2\pi/(k_0 P')$ .

Рассмотрим структуру полей объёмных мод, направляемых цилиндрическим плазменным столбом. На рис. 2.9 показаны распределения по радиальной координате  $\rho$  компонент поля моды с азимутальным индексом  $m = 1$  и радиальным индексом  $n = 27$  в случае  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$ ,  $\omega/\omega_H = 1,25 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu_e = 0$ . Постоянная распространения этой моды  $p_{mn} = 86,88$ . Нетрудно убедиться, что постоянная распространения лежит в области (2.12). На рис. 2.9 б хорошо видны мелко- и крупномасштабные вариации, соответствующие геликонным и квазиэлектростатическим составляющим полного поля моды. Мелкомасштабные вариации лучше всего заметны в компонентах  $E_\rho$  и  $E_z$ . Мы не будем анализировать структуры полей других мод с продольными постоянными распространения, лежащими в интервале (2.12). В бесстолкновительном случае такие структуры во многом аналогичны распределениям, приведенным на рис. 2.9. Что же касается мод области (2.11), то они имеют крупномасштабную часть, локализованную вблизи границы столба  $\rho = a$ . Поэтому в полном поле каждой моды, принадлежащей области (2.11), при  $\rho < a$  доминирует объёмная квазиэлектростатическая составляющая.

При наличии столкновительных потерь постоянные распространения становятся комплексными и каждая компонента поля в этом случае имеет как

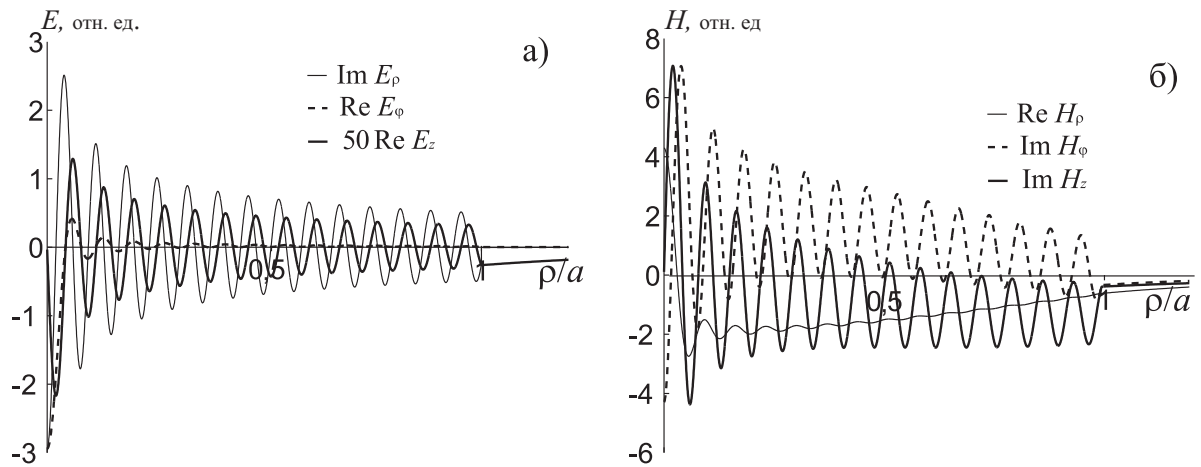


Рис. 2.9. Распределения компонент поля с азимутальным индексом  $m=1$  и радиальным индексом  $n = 27$  по поперечной координате  $\rho$  при отсутствии столкновительных потерь для  $\omega/\omega_H = 0,0125$ ,  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$

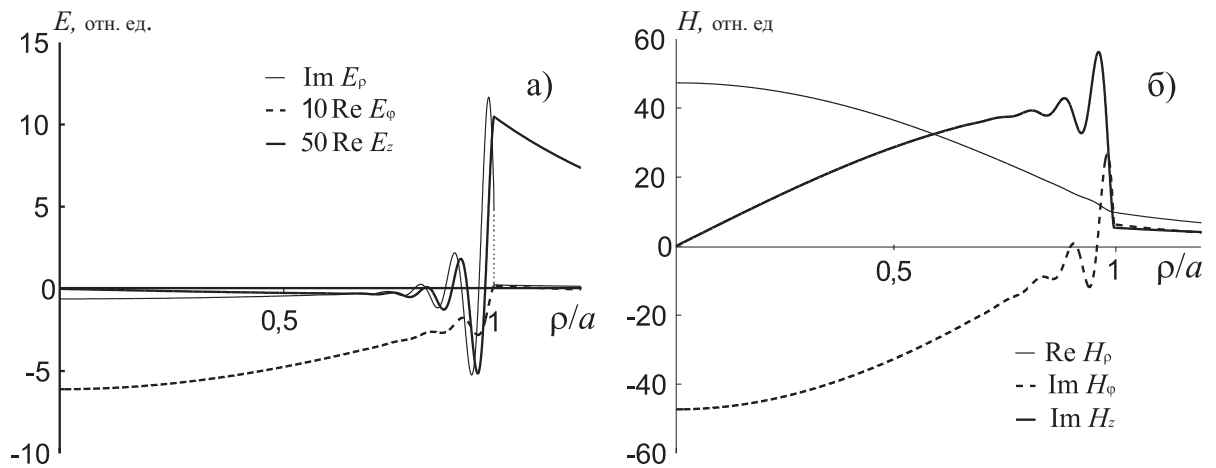


Рис. 2.10. Распределения компонент поля с азимутальным индексом  $m=1$  и радиальным индексом  $\nu = 1$  по поперечной координате  $\rho$  при  $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ . Значения остальных параметров те же, что и на рис. 2.9.

реальную, так и мнимую части. Оказывается, однако, что нет необходимости приводить пространственные распределения реальной и мнимой частей каждой компоненты поля. Напомним, что поле любой моды определяется с точностью до произвольного комплексного множителя. Анализ поведения компонент поля показывает, что в случае, когда  $p'' \ll p'$  этот множитель может быть выбран таким образом, чтобы величины  $\text{Im } E_\rho$ ,  $\text{Re } E_{\varphi,z}$ ,  $\text{Re } H_\rho$ ,  $\text{Im } H_{\varphi,z}$  значительно превосходили по абсолютному значению величины  $\text{Re } E_\rho$ ,  $\text{Im } E_{\varphi,z}$ ,  $\text{Im } H_\rho$ ,  $\text{Re } H_{\varphi,z}$  соответственно. В этом случае достаточно изобразить распределения по  $\rho$  лишь величин  $\text{Im } E_\rho$ ,  $\text{Re } E_{\varphi,z}$ ,  $\text{Re } H_\rho$ ,  $\text{Im } H_{\varphi,z}$ . Все последующие рисунки с распределениями полей приведены с учетом этой нормировки.

На рисунке 2.10 показаны компоненты поля моды с азимутальным индексом  $m = 1$  и радиальным индексом  $\nu = 1$  при  $\nu_e/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$  (значения остальных параметров те же, что и на рис. 2.9). Мода, поле которой изображено для рис. 2.10, имеет продольное волновое число  $p_{m\nu} = 82.2 - i15.61$  и соответствует кривой с номером  $\nu = 1$  на рис. 2.6. Как видно из рис. 2.10, при наличии столкновительных потерь происходит существенное изменение структуры поля. В этом случае квазиэлектростатическая часть поля оказывается локализованной вблизи границы столба  $\rho = a$ . В результате, основной вклад в поле вблизи оси столба даёт крупномасштабная геликонная составляющая. Мы не приводим распределения полей сильнозатухающих мод при наличии столкновительных потерь, поскольку они в значительной степени аналогичны структуре поля мод в случае бесстолкновительной плазмы (см. рис. 2.9).

## 2.4. Поверхностные моды однородного плазменного столба

Выше уже отмечалась возможность поддержания плазменным столбом мод с комплексно-сопряжёнными поперечными волновыми числами  $q_1$  и  $q_2$ , когда  $q_1^* = q_2$ . Поля таких мод «прижаты» к границе канала и поэтому имеют поверхностный характер. Постоянные распространения данных мод могут, как указывалось выше (см. пункт 1.2.2), лежать лишь в области (2.13).

Численное исследование дисперсионного уравнения (2.7) показало, что для фиксированного индекса  $m$  плазменный столб поддерживает не более одной поверхностной моды с продольным волновым числом в области (2.13). На рисунке 2.11 изображена дисперсионная зависимость для поверхностной моды с азимутальным индексом  $m = 0$  при следующих значениях безразмерных параметров:  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 10,4$ ,  $\nu_e = 0$ . В нижней части рассматриваемого частотного интервала имеется частота  $\omega = \omega_{cr}$ , при которой  $p = 1$ . Рассмотрим теперь распределения компонент поля этой моды, показанные на рис. 2.12. Как следует из приведённых графиков данная мода слабо локализо-

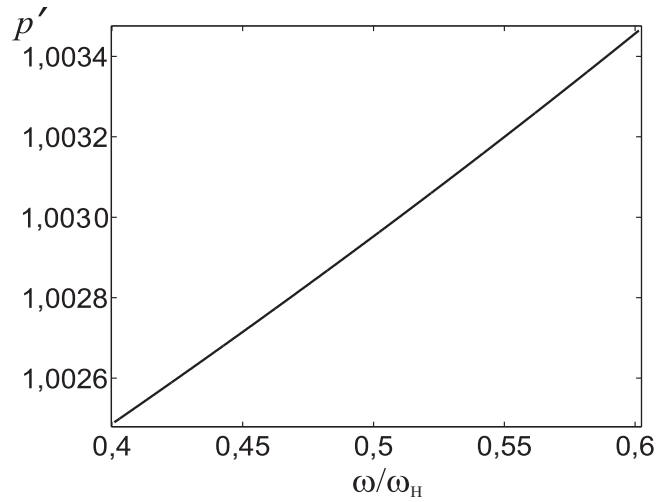


Рис. 2.11. Дисперсионная кривая поверхностной моды с азимутальным индексом  $m = 0$  при  $\omega_p/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 10,4$ ,  $\nu_e = 0$

вана снаружи плазменного столба. На рис. 2.12 также видно, что компоненты поля  $E_\rho$  и  $H_\varphi$  максимальны на границе столба, причём в области  $\rho > a$  поле моды имеет квази-ТЕМ поляризацию. Внутри столба ( $\rho < a$ ) компонента  $E_\rho$  настолько мала, что не может быть показана в используемом для рис. 2.12 масштабе. Заметим, что для большей наглядности при построении графиков на рис. 2.11 и 2.12 мы использовали значения  $\omega$  и  $a$ , которые существенно превышают значения параметров в предыдущем разделе.

Обратим внимание на то, что поле поверхностной моды сильно спадает внутрь канала, причём это поведение незначительно меняется при наличии потерь. В результате потери в плазме весьма слабо влияют на характеристики данной моды. Поэтому мы не приводим результатов численных расчётов дисперсионных характеристик и структуры поля поверхностной моды при наличии электронных соударений в плазме.

Очевидно, что отмеченные выше особенности распределения поля поверхностной моды по радиусу не позволяют возбуждать её эффективно сторонними источниками. Это обстоятельство, по-видимому, объясняет тот факт, что в литературе, насколько нам известно, отсутствуют какие-либо данные по экспериментальному наблюдению возбуждения и распространения мод данного типа.



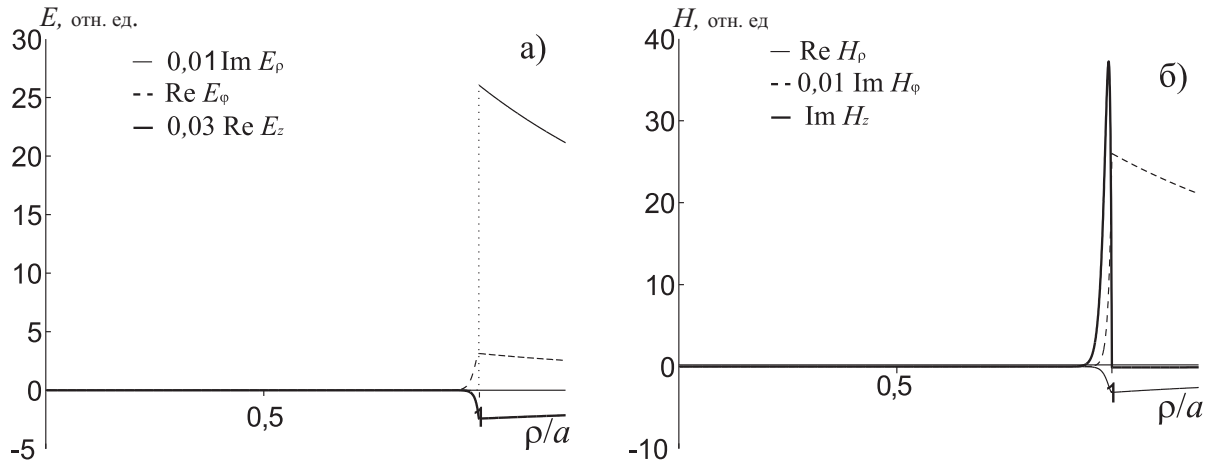


Рис. 2.12. Распределения компонент поля поверхностной моды с азимутальным индексом  $m=0$  по поперечной координате  $\rho$  для  $\omega/\omega_H = 0,4$ . Значения остальных параметров те же, что и для рис. 2.11

## 2.5. Моды, направляемые однородным плазменным столбом в свободном пространстве при учёте теплового движения электронов

При выполнении условий  $\nu_e \ll \omega$ ,  $|k_z|v_{Te} \ll \omega$  и  $p'' \ll p'$  необходимо учитывать бесстолкновительное затухание Ландау, связанное с тепловым движением электронов. В этом случае у компоненты  $\eta$  тензора диэлектрической проницаемости (1.23) появляется дополнительное слагаемое и данная компонента тензора принимает вид

$$\eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 + i \frac{\nu_e}{\omega} + i \gamma_{LD} \right), \quad (2.28)$$

где

$$\gamma_{LD} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{(k_z v_{Te})^3} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{(k_z v_{Te})^2} \right). \quad (2.29)$$

Здесь  $\gamma_{LD}$  — дополнительный член, отвечающий затуханию Ландау,  $k_z = k_0 p'$  — по-прежнему, действительная часть продольного волнового числа,  $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$  — тепловая скорость электронов ( $T_e$  и  $m_e$  — температура и масса электронов соответственно). В качестве иллюстрации влияния различных видов затухания на мнимую часть компоненты тензора  $\eta$  на рис. 2.13 представлены зависимости величин  $\nu_e/\omega$  и  $\gamma_{LD}$  от температуры электронов  $T_e$  для трёх значений величины  $p'$ . При построении рис. 2.13 в качестве рабочего газа был взят аргон при давлении 1 мТорр. Учитывались как электрон-ионные, так и электрон-нейтральные соударения ( $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$ ), частоты которых

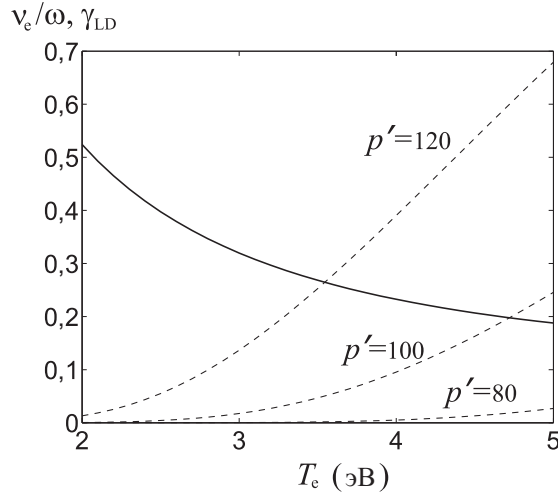


Рис. 2.13. Зависимости  $\nu_e/\omega$  (сплошные линии) и  $\gamma_{LD}$  (штриховые кривые) от температуры электронов в аргонной плазме при давлении 1 мТорр для трёх значений величины  $p'$

вычисляются по формулам

$$\nu_{ei} = 2,9 \cdot 10^{-6} N_0 T_e^{-3/2} \ln \Lambda, \quad (2.30)$$

$$\nu_{en} = 1,3 \cdot 10^9 p_{Ar} T_e. \quad (2.31)$$

Здесь  $T_e$  — температура электронов в эВ,  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм,  $p_{Ar}$  — давление аргона в Торр.

Как следует из рис. 2.13, в области  $p' < 100$  величина  $\gamma_{LD}$  мала по сравнению с величиной  $\nu_e/\omega$  на выбранном интервале значений температур электронов. С увеличением  $p'$  величина  $\gamma_{LD}$  становится сравнимой с величиной  $\nu_e/\omega$  или превышает её. Однако это выполняется для мод с постоянными распространения в интервале (2.11), которые не представляют для нас большого интереса вследствие их сравнительно больших постоянных затухания.

Сопоставим представленные выше результаты решения дисперсионного уравнения (2.7) при  $v_{Te} = 0$  с соответствующими результатами, полученными при учёте теплового движения ( $v_{Te} \neq 0$ ).

Результаты численного решения дисперсионного уравнения (2.7) при учёте теплового движения изображены на рис. 2.14 для тех же значений параметров  $\nu_e$ ,  $B_0$ ,  $\omega_p/\omega_H$ ,  $a$ ,  $\omega_{LH}/\omega_H$ , что и на рис. 2.4. Зависимости на рис. 2.14 показывают, что поведение кривых, описывающих действительные части нормированных постоянных распространения мод, в данном случае несколько отличается от их поведения при учёте лишь столкновительных потерь. Что же касается постоянных затухания, то их поведение остается примерно таким же, как и при наличии лишь столкновительных потерь. Здесь так же, как и при учёте лишь столкновительных потерь, происходит селекция мод по постоянным затухания, проявляющаяся в разделении мод на слабо- и сильнозатухающие. На рис. 2.15

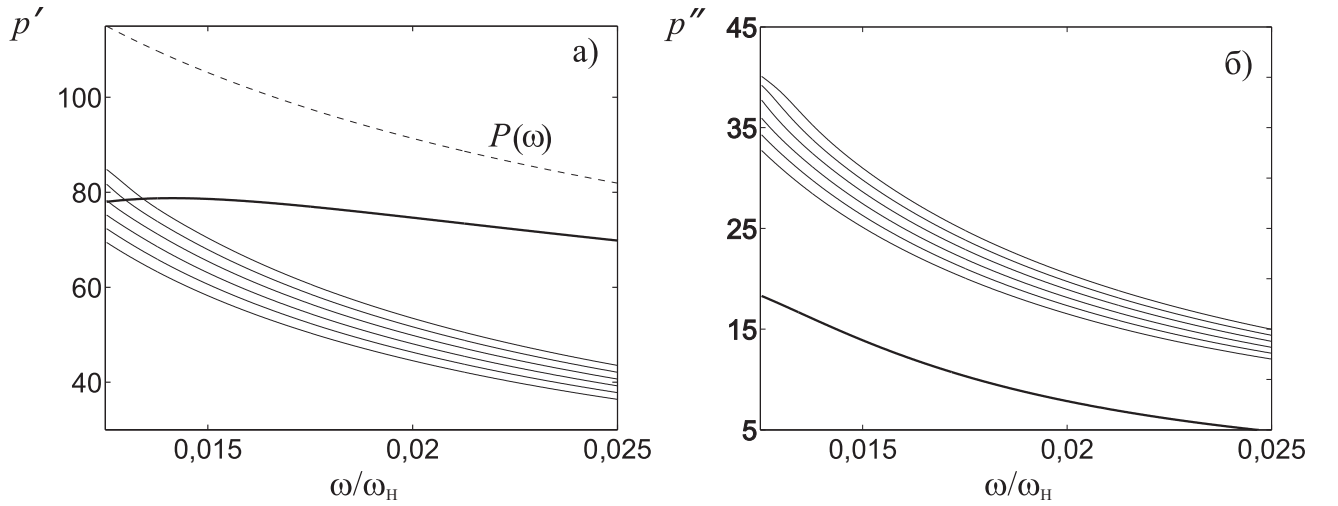


Рис. 2.14. Дисперсионные кривые мод области (2.12) с азимутальным индексом  $m=1$  при учете столкновений ( $\nu_e = 6 \cdot 10^{-3}\omega_H$ ) и теплового движения электронов для  $B_0 = 800$  Гс,  $\omega/\omega_H = 0,01$ ,  $\omega_p/\omega_H = 12,7886$ ,  $a = 2,5$  см,  $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$ ,  $p_{Ar} = 1$  мТорр,  $T_e = 2$  эВ

показаны зависимости величин  $p'$  и  $p''$  от эффективной частоты электронных соударений при учёте теплового движения. Из рисунка видно, что при малых частотах соударений ( $\nu_e = 2,55 \cdot 10^{-3}\omega_H$ ) решения вновь распадаются на два семейства, содержащих сильнозатухающие и слабозатухающие моды.

## 2.6. Моды неоднородного плазменного столба

Модель однородного плазменного столба, рассмотренная в предыдущих разделах, является приемлемой при условии, что характерный поперечный масштаб  $L_{\perp}$  спадающей плотности плазмы вблизи границы столба удовлетворяет неравенству  $L_{\perp} \ll 2\pi(k_0|q_2|)^{-1}$ . В противном случае необходимо рассмотрение свойств мод с учётом неоднородного распределения плотности плазмы по радиусу.

Зададим профиль плотности плазмы при  $\rho < a$  в виде (см. (2.1))

$$\tilde{N}(\rho) = N_0[1 - (\rho/a)^r]. \quad (2.32)$$

Для дальнейших расчётов положим  $r = 10$  в формуле (2.32). Профиль плотности плазмы для этого случая приведен на рисунке 2.16. Как видно из рисунка, плотность плазмы почти постоянна вблизи оси столба, что позволяет сравнить решения для однородного и неоднородного столбов. С другой стороны, отрезок, на котором плотность плазмы существенно спадает, шире, чем характерный поперечный пространственный масштаб квазиэлектростатических волн  $2\pi(k_0|q_2|)^{-1}$ . Поэтому выбранный профиль плотности позволяет изучить влияние неоднородности плазмы на поведение геликонных и квазиэлектростатических составляющих полей вблизи поверхности  $\rho = a$ . При

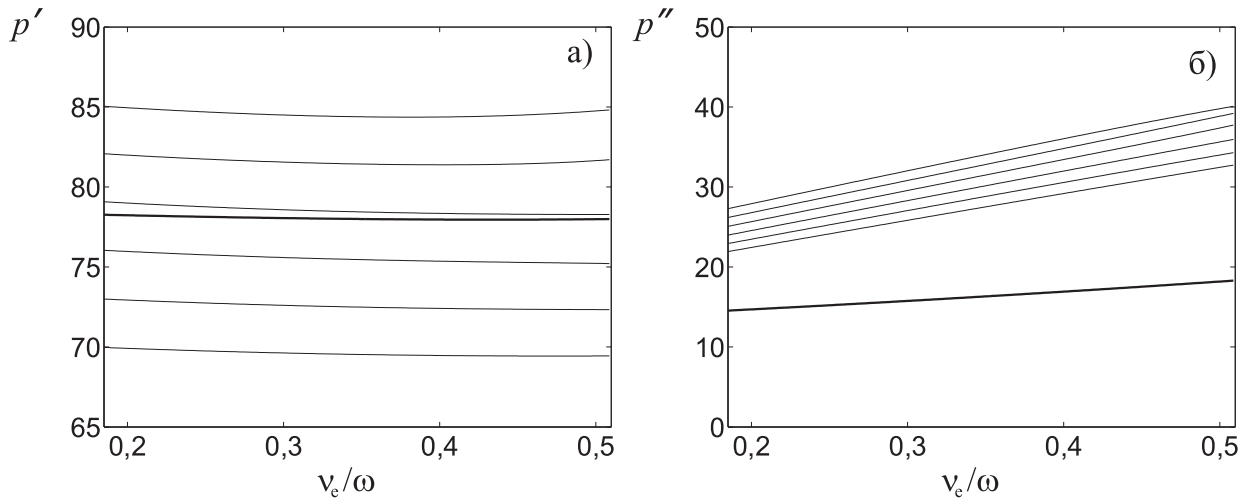


Рис. 2.15. Зависимости постоянных распространения  $p'$  и постоянных затухания  $p''$  мод области (28) от эффективной частоты электронных соударений при учете теплового движения электронов в случае  $B_0 = 800$  Гс,  $\omega/\omega_H = 0,01$ ,  $\omega_p/\omega_H = 12,7886$ ,  $a = 2,5$  см,  $\omega_{LH}/\omega_H = 3,8 \cdot 10^{-3}$ ,  $p_{Ag} = 1$  мТорр,  $T_e = 2$  эВ

проведении численных расчётов мы будем учитывать зависимость частоты  $\nu_{ei}$  электрон-ионных соударений от плотности плазмы  $N(\rho)$ , приводящую к зависимости  $\nu_{ei}$  от поперечной координаты  $\rho$ .

Выполненные расчёты не выявили существенных различий в дисперсионных характеристиках и структуре полей объёмных мод в случаях однородного и неоднородного каналов. В случае неоднородного канала поддерживаемые им объёмные свистовые моды имеют постоянные распространения, реальная часть  $p'$  которых лежит в интервале

$$\text{Re}P_{c0} < p' < \text{Re}P_0. \quad (2.33)$$

Здесь  $P_{c0} \approx 2\varepsilon_0^{1/2}$ ,  $P_0 = [\varepsilon(0) - g(0)]^{1/2}$ , где  $\varepsilon(0)$  и  $g(0)$  — значения компонент тензора диэлектрической проницаемости плазмы на оси столба. Численные расчёты для профиля (2.32) демонстрируют сходство результатов для азимутально-симметричных и несимметричных мод, что уже отмечалось ранее применительно к случаю однородного плазменного столба. Поэтому ниже мы остановимся лишь на результатах, полученных для азимутально-симметричных мод.

На рис. 2.17 показаны компоненты поля слабозатухающей азимутально-симметричной моды ( $m = 0$ ) с радиальным индексом  $\nu = 1$  при значениях параметров  $\omega_{p0}/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$ ,  $\omega/\omega_H = 10^{-2}$ ,  $\nu_{e0}/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$ , где  $\omega_{p0}$  и  $\nu_{e0}$  плазменная частота и эффективная частота соударений электронов на оси столба соответственно. Продольное волновое число этой моды составляет  $p_{m\nu} = 67,39 - i6,17$ . Здесь используется та же нумерация мод, что и для однородного канала. Как видно из рисунка, квазиэлектростатическая

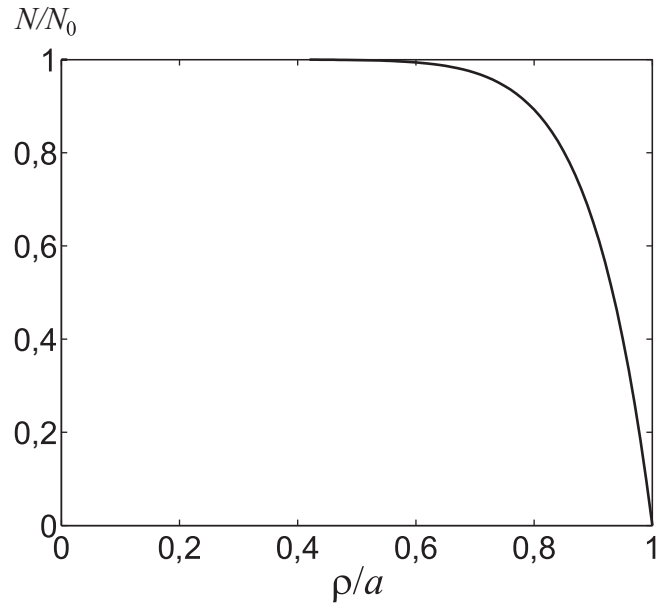


Рис. 2.16. Профиль плотности плазмы, описываемый выражением (2.32) для  $r = 10$ .

часть поля моды с радиальным индексом  $\nu = 1$  локализована вблизи границы канала. Примечательно, что постоянная затухания данной моды для неоднородного канала несколько уменьшилась по сравнению со случаем однородного канала. Это объясняется спаданием электронной частоты соударений с ростом  $\rho$  и локализацией квазиэлектростатической составляющей поля моды вблизи границы. На рис. 2.18 приведена структура поля сильнозатухающей моды с постоянной распространения  $p_{mn} = 67,63 - i38,89$ , действительная часть которой наиболее близка к соответствующей величине для слабозатухающей моды с  $\nu = 1$ . Как и для однородного канала, в поле сильнозатухающей моды по-прежнему доминирует квазиэлектростатическая составляющая объёмного типа. Таким образом, основные свойства направляемых однородным плазменным столбом волн при учёте столкновительных потерь сохраняются и в случае размытия профиля плотности плазмы.

Опираясь на представленные выше результаты, нетрудно получить необходимое условие одновременного существования сильно- и слабозатухающих мод при наличии столкновительных потерь. Воспользуемся формулой (2.21) и учтём то обстоятельство, что у слабозатухающих волн отношение  $p''/p'$  много меньше  $\nu_{e0}/\omega$ . Соответствующее условие в этом случае принимает вид

$$k_0 a_{\text{eff}} p' \omega_{\text{H}} \nu_{e0} [\omega^2 + \nu_{e0}^2]^{-1} \gg 1 \quad (2.34)$$

где  $a_{\text{eff}}$  — эффективная ширина распределения плотности плазмы при которой величина  $p'$  ещё находится в интервале (2.33). Для плавного профиля величина  $a_{\text{eff}}$  имеет тот же порядок, что и радиус канала ( $a_{\text{eff}} \sim a$ ). Если характерная ширина радиального распределения плазмы по радиусу не слишком мала,

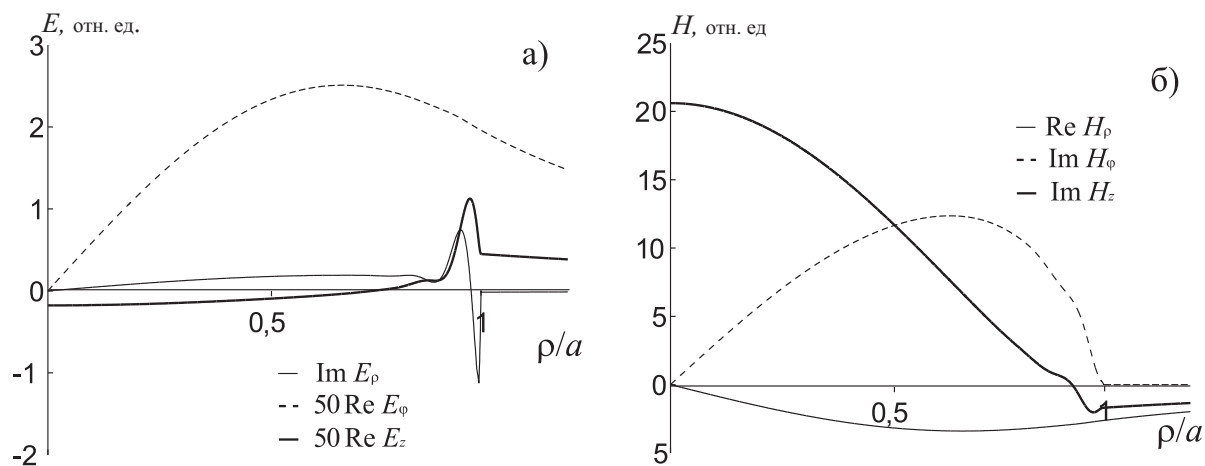


Рис. 2.17. Распределения компонент поля с азимутальным индексом  $m=0$  и радиальным индексом  $\nu = 1$  по поперечной координате  $\rho$  для неоднородного канала при  $\omega/\omega_H = 0,01$ ,  $\omega_{p0}/\omega_H = 12,8$ ,  $\omega_H a/c = 1,13$ ,  $\nu_{e0}/\omega_H = 6 \cdot 10^{-3}$

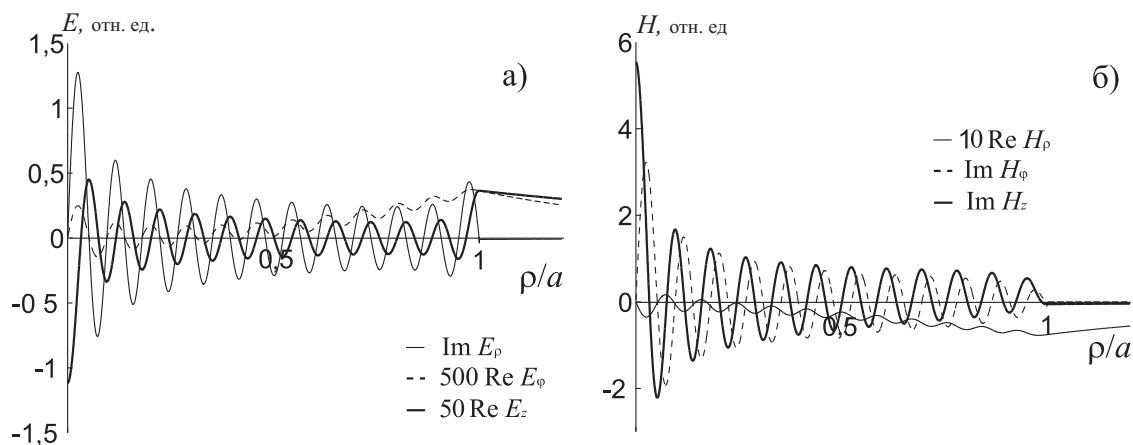


Рис. 2.18. Распределения компонент поля азимутально-симметричной сильнозатухающей моды, действительная постоянная распространения  $p'$  которой наиболее близка к соответствующей величине для азимутально-симметричной слаботухающей моды с радиальным индексом  $\nu = 1$ . Значения параметров те же, что и для рис. 2.17

неравенство (2.34) выполняется и для малых частот столкновения электронов. Таким образом, наличие столкновительных потерь может существенно сказываться на свойствах распространяющихся в канале мод даже в случае  $\nu_e \ll \omega$ .

## 2.7. Примеры численного исследования дисперсионных характеристик и структуры полей мод плазменного столба в свободном пространстве

В этом разделе приведены примеры программ для численного расчёта структур полей и дисперсионных характеристик электромагнитных волн однородного плазменного столба, расположенного в свободном пространстве. Программа написаны на языке программирования matlab и пригодны для использования как на коммерческой платформе Matlab, так и на её бесплатном аналоге Scilab.

Вначале задаём параметры рассматриваемого замагниченного плазменного столба.

```

global m R EE GG HH ee

n_e = 1e13; % плотность плазмы
w_0 = 2 * pi * 21.645e6 % частота распространяющейся волны
m = 0; % азимутальный индекс поля

m_e = 9.1e-28; % масса электрона
e_0 = 4.8e-10; % заряд электрона
M_Ar = 39.95 * 1.66e-24; % масса иона
w_H = 1.7e7*800; % гирочастота электрона
w_p = 5.5e4*(n_e)^(1/2); % плазменная частота электронов
O_H = w_H * m_e / M_Ar; % гирочастота ионов
O_p = sqrt(4 * pi * e_0^2 * n_e / M_Ar); % плазменная частота
% ионов

T = 2.1494; % температура плазмы в кельвинах
T_e = T*1.6e-12; % температура плазмы в эВ
r_D = (T_e/(4*pi*e_0^2*n_e))^(1/2); % радиус Дебая
Par = 1; % давление плазмы

a_0 = 5; % радиус столба

Nu_e = 4 * (2 * pi)^0.5 / 3 * e_0^4 * n_e * log(T_e * r_D / ...

```

```

                e_0^2) / m_e^(1/2) / T_e^(3/2) + 1.3e6 * Par * T;
                % частота соударений электронов
Nu_i = 0;          % частота соударений ионов

w_LH = w_H * sqrt((O_p^2 + O_H^2)/(w_p^2 + w_H^2));
                % нижняя гибридная частота
w_UH = sqrt(w_p.^2 + w_H.^2);
                % верхняя гибридная частота

R    = w_0 * a_0 / 3e10;

ee   = 1; % диэлектрическая проницаемость окружающего пространства

% компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы
EE = 1 + w_p.^2 * (w_0 - i*Nu_e) ./ ((w_H.^2 - (w_0 - i*Nu_e).^2) .* w_0) + ...
      O_p.^2 * (w_0 - i*Nu_i) ./ ((O_H.^2 - (w_0 - i*Nu_i).^2) .* w_0);

GG = -w_p.^2 * w_H ./ ((w_H.^2 - (w_0 - i*Nu_e).^2) .* w_0) + ...
      O_p.^2 * O_H ./ ((O_H.^2 - (w_0).^2) .* w_0);

HH = 1 - w_p.^2 ./ ((w_0 - i*Nu_e) .* w_0) - O_p.^2 ./ ((w_0) .* w_0);

```

Для вычисления поля внутри и вне плазменного столба используется следующая программа

```

global m R EE GG HH ee Q n alp
p=[109.964    -2.776]; % действительная и мнимая части
                % постоянной распространения

x0 = p;
p   = p(1) + i*p(2);

% вычисление поперечных волновых чисел для
% внутренней области плазменного столба
mainq = EE^2 - GG^2 + EE*HH - (HH + EE) * p^2;
radq  = sqrt((HH - EE)^2 * p^4 + 2 * (GG^2 * (HH + EE) - ...
      EE * (HH - EE)^2) * p^2 + (EE^2 - GG^2 - EE*HH)^2);
Q     = R * sqrt(0.5 * (mainq - [1 -1] * radq) / EE);

n     = - (EE / (p * GG)) * (p^2 + Q.^2 / R^2 + (GG^2 / (EE - EE)));
alp  = m * Q / R^2 .* (HH + p * n) / (HH * (p^2 - EE + GG));

```



```

bet    = -m * Q/R^2.* (p*n.^(-1) + (EE - GG)/HH)/(p^2 - EE + GG);

% поперечное волновое число вне плазменного столба
S      = R * sqrt(p^2 - ee);

JM     = besselj(m+1,Q);
Jm     = besselj(m,Q);
KM     = besserk(m+1,S);
Km     = besserk(m,S);

% матрица системы уравнений для коэффициентов В и С
aa(1,1:2) = i * (JM + alp.*Jm);
aa(1,3)   = -i * (KM-m*Km/S);
aa(1,4)   = i * p * m * Km / S;
aa(2,1:2) = i * Q.* n.* Jm / HH / R;
aa(2,3)   = 0;
aa(2,4)   = i * S * Km / R;
aa(3,1:2) = -Q.* Jm / R;
aa(3,3)   = -Km * S / R;
aa(3,4)   = 0;
aa(4,1:2) = -n.* (JM-bet.* Jm);
aa(4,3)   = -m * p * Km / S;
aa(4,4)   = (KM - m * Km / S);
det(aa);

% вычисление коэффициентов В и С
V(1) = -det(aa(1:3,[4 2 3]));
V(2) = -det(aa(1:3,[1 4 3]));
C(1) = -det(aa(1:3,[1 2 4]));
C(2) = det(aa(1:3,[1 2 3]));

% задание области расчёта
ri = [0.0002:0.0002:1]';
ro = [1:0.002:2]';
r  = [ri;ro];
JM = besselj(m+1,ri * Q);
Jm = besselj(m,ri * Q);
Jm1 = Jm./(ri*[1 1]);
clear KM
KM = besserk(m+1,ro * S);
Km = besserk(m,ro * S);

```

```

Km1 = m*Km./ ro / S;

% вычисление полей в области расчёта
Eri = -JM * (B.* (n.'* p + GG)) / EE - Jm1 * (alp.'.* B);
Ero = C(1) * Km1 - C(2) * p * (KM - Km1);
Er = [Eri;Ero];
Efi = i * (JM * B + Jm1 * (alp.'.*B));
Efo = i * C(1)* KM - i * (C(2) * p + C(1)) * Km1;
Ef = [Efi;Efo];
Ezi = i/(HH * R) * Jm * ((n.* Q).'.* B);
Ezo = -i * C(2) * S / R * Km;
Ez = [Ezi;Ezo];
Hri = -i * (p * JM * B - Jm1 * ((n.* bet).'.* B));
Hro = i * C(2) * Km1 - i * C(1) * p * (KM - Km1);
Hr = [Hri;Hro];
Hfi = -JM * (B.* n.') + Jm1 * ((n.* bet).'.*B);
Hfo = -C(2) * KM + (C(2) + C(1) * p) * Km1;
Hf = [Hfi;Hfo];
Hzi = -Jm * (B.* Q.') / R;
Hzo = C(1) * S * Km / R;
Hz = [Hzi;Hzo];

```

Анализ дисперсионных характеристик проводится на основе решений уравнения (2.7). Постоянные распространения  $p$ , являющиеся решениями этого уравнения, как отмечалось выше, могут быть получены только численно. Процедура нахождения  $p$  из уравнения (2.7) заключается в поиске локальных минимумов модуля функции  $\Delta(p' + ip'')$ , которая представляет собой левую часть уравнения. Аргументами  $(p', p'')$  этой функции являются действительная и мнимая части постоянной распространения волны.

В качестве примера приведём рисунок 2.19, показывающий зависимость  $|\Delta(p' + ip'')|$  от  $p'$  и  $p''$  в свистовом диапазоне частот при наличии столкновений в плазме. На рис. 2.19а локальные минимумы в «ложбине» отвечают сильно-затухающим модам, минимумы на «склоне» — слабозатухающим. Рис. 2.19б показывает увеличенную область вблизи одного из минимумов.

Ниже представлен код функции  $|\Delta(p' + ip'')|$ .

```

function z=dispeqh1_new(pp)

global m R EE GG HH ee
p = pp;

```

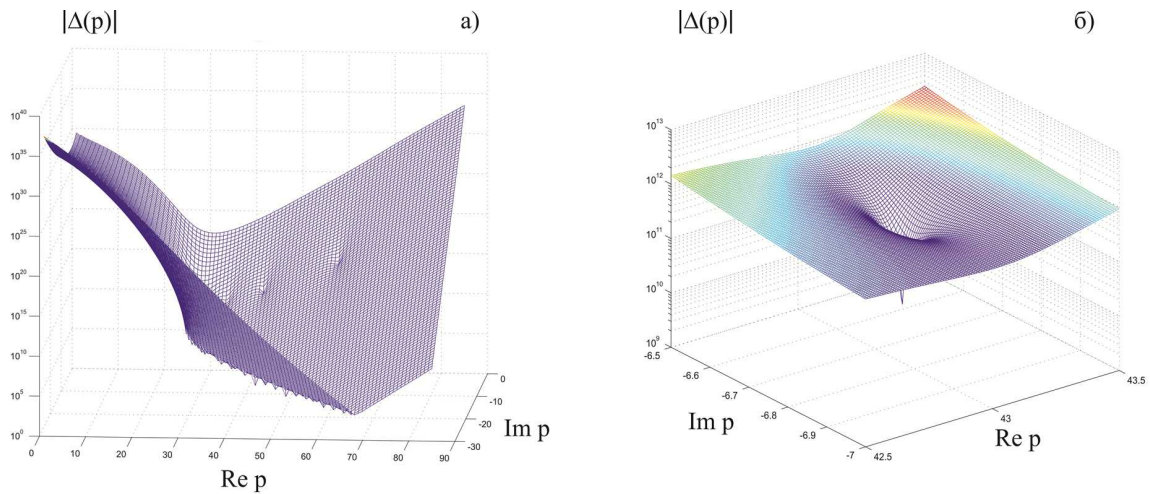


Рис. 2.19. Зависимость  $|\Delta(p)|$  от  $p'$  и  $p''$  в свистовом диапазоне частот при наличии столкновений в плазме

```

% вычисление поперечных волновых чисел и связанных
% с ними коэффициентов во внутренней области плазменного столба
mainq = EE^2 - GG^2 + EE * HH - (HH + EE) * p.^2;
radq = sqrt((HH - EE)^2 * p.^4 + 2 * (GG^2 * (HH + EE) - ...
    EE * (HH - EE)^2) * p.^2 + (EE^2 - GG^2 - EE * HH)^2);
    Q1 = R * sqrt(0.5 * (mainq - radq) / EE);
    Q2 = R * sqrt(0.5 * (mainq + radq) / EE);
n1 = -(EE * (p * GG).^(-1)) * (p.^2 + Q1.^2 / R^2 + (GG^2 / EE - EE));
n2 = -(EE * (p * GG).^(-1)) * (p.^2 + Q2.^2 / R^2 + (GG^2 / EE - EE));

alp1 = (m * Q1 / R^2) * (HH + p * n1) * (HH * (p.^2 - EE + GG)).^(-1);
alp2 = (m * Q2 / R^2) * (HH + p * n2) * (HH * (p.^2 - EE + GG)).^(-1);
bet1 = -m * Q1 / R^2 * (p * n1.^(-1) + (EE - GG) / HH) * (p.^2 - EE + GG).^(-1);
bet2 = -m * Q2 / R^2 * (p * n2.^(-1) + (EE - GG) / HH) * (p.^2 - EE + GG).^(-1);

clear mainq
clear radq

JM1 = besselj(m+1,Q1);
JM2 = besselj(m+1,Q2);
Jm1 = besselj(m,Q1);
Jm2 = besselj(m,Q2);

S = R * sqrt(p.^2 - ee);
KM = bessell(m+1,S);

```

```
Km = bessellk(m,S);
```

```
% формирование определителя
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%E_azimutal
```

```
aa11 = i * (JM1 + alp1.* Jm1);  
aa12 = i * (JM2 + alp2.* Jm2);  
aa13 = i * p.* (m * Km).* S.^(-1);  
aa14 = -i*(KM - m * Km.* S.^(-1));
```

```
%E_z
```

```
aa21 = i * Q1.* n1.* Jm1 / HH / R;  
aa22 = i * Q2.* n2.* Jm2 / HH / R;  
aa23 = i * S.* Km.* p.^(-1) / R;  
aa24 = Q1 - Q1;
```

```
%H_azimutal
```

```
aa31 = - n1.* (JM1 - bet1.* Jm1);  
aa32 = - n2.* (JM2 - bet2.* Jm2);  
aa33 = ee * (p.^(-1)).* (KM - m * Km.* S.^(-1));  
aa34 = - m * p.* Km.* S.^(-1);
```

```
%H_z
```

```
aa41 = - Q1.* Jm1 / R;  
aa42 = - Q2.* Jm2 / R;  
aa43 = Q1 - Q1;  
aa44 = - Km.* S / R;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% вычисление модуля определителя для каждой из постоянных
```

```
% распространения в области поиска
```

```
for I = 1 : size(Q1,2)
```

```
for J = 1 : size(Q1,1)
```

```
zz(J,I)=abs(det([aa11(J,I) aa12(J,I) aa13(J,I) aa14(J,I);...  
aa21(J,I) aa22(J,I) aa23(J,I) aa24(J,I);...  
aa31(J,I) aa32(J,I) aa33(J,I) aa34(J,I);...  
aa41(J,I) aa42(J,I) aa43(J,I) aa44(J,I)]));
```

```
end
```

```
end
```

```
z = zz;
```

Следующая функция используется, например, для поиска зависимости постоянной распространения моды  $p$  от частоты волны (в качестве результата работы этой программы см. рис.2.5):

```

parameters;      %%% здесь задаются параметры плазменного столба
I=0;

%% задаём постоянные распространения мод, найденные для начального
%% значения частоты.

x0=[ 84.8206  -11.6658
     82.0888  -11.1788
     62.9958  -8.5424
     60.2458  -8.1457];

clear Qpts p_ p__ Po Pi
%% задаём начальное и конечное значение частоты
Qmin = D_Q;
Qmax = 3*D_Q;
Qpts=[Qmin:0.5*(Qmax-Qmin):Qmax];
for Do=Qpts

%% здесь рассчитываются элементы тензора диэлектрической
%% проницаемости для новой частоты
u=1/(D_Q^2);
v=D_k^2*u;
U=D_g^2*u;
I_VW=1-i*V_wH/D_Q;
R=D_Q*D_R;
EE=1-I_VW*v*(I_VW^2-sqrt(u*U))/((I_VW^2-u)*(I_VW^2-U));
GG=I_VW^2*v*sqrt(u)/((I_VW^2-u)*(I_VW^2-U));
HH=1-v/I_VW;

I=I+1;
Qpts(I)=Do;
Pi(I)=real(sqrt(EE-GG));

%% ищем моды с помощью функции fminsearch
for J=1:size(x0,1)
    x0(J,:)=fminsearch(@dispeqh1_new,x0(J,:),...
                      optimset('TolX',1e-7));
    p_(J,I)=x0(J,1);
    p__(J,I)=x0(J,2);
end
end;

```

Описанная в виде предыдущей функции процедура может быть использована при организации поиска зависимостей постоянных распространения  $p$  от других параметров плазмы  $(\omega_n, \omega_p, \nu_e)$ .

## Глава 3

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ДАКТАМИ ПЛОТНОСТИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

### 3.1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим цилиндрический осесимметричный дакт, окружённый однородной фоновой плазмой с повышенной или пониженной плотностью. Предполагается, что дакт ориентирован вдоль внешнего однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленного по оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(\rho, \varphi, z)$ .

Пусть круговая частота поля  $\omega$  и эффективная частота электронных соударений  $\nu_e$  вне и внутри дакта удовлетворяют условиям (1.59). При выполнении этих неравенств компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы (1.29) даются формулами [18]

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right), \\ g &= -\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_H} \left(1 - i \frac{2\nu_e \omega}{\omega_H^2}\right) \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_H}, \\ \eta &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь, в отличие от (1.60), компоненты  $\varepsilon$  и  $\eta$  тензора (1.29), приведены в виде, отвечающем случаю  $\omega_H \ll \omega_p$  когда в  $\varepsilon$  и  $\eta$  можно пренебречь слагаемым, равным единице. Как и ранее (см. (1.60)), в случае (1.59) формулы (3.1) оказываются справедливыми при преобладающем влиянии как электрон-нейтральных ( $\nu_e \approx \nu_{en} \gg \nu_{ei}$ ), так и электрон-ионных столкновений ( $\nu_e \approx \nu_{ei} \ll \nu_{en}$ ).

При наличии дакта плотность плазмы записывается в виде (1.61), где введены следующие обозначения:  $a$  — радиус дакта,  $\tilde{N}$  и  $N_a$  — плотность плазмы внутри и вне дакта соответственно. Возможны два случая:  $\tilde{N} > N_a$  для дакта с повышенной плотностью плазмы, и  $\tilde{N} < N_a$  для дакта с пониженной плотностью плазмы. Что касается частоты соударений, то в зависимости от конкретных условий она может быть как постоянной величиной, так и функцией координат. Последнее обычно реализуется при формировании дактов плотности вследствие нагрева электронов плазмы полями электромагнитных источников. Так как зависимость  $\nu_e$  от температуры электронов  $T_e$  определяется типом соударений (как правило,  $d\nu_{en}/dT_e > 0, d\nu_{ei}/dT_e$  [52, 53]), значение частоты электронных соударений  $\tilde{\nu}_e$  внутри дакта может отличаться от её

значения  $\nu_{ea}$  в окружающем пространстве. Кроме того, следует иметь в виду, что пространственное распределение частоты электрон-ионных соударений зависит также от вида профиля плотности плазмы  $N(\rho)$ . При использовании модели регулярного (продольно однородного) дакта, когда распределение плотности плазмы описывается формулой (1.61), указанное поведение частоты соударений  $\nu_e$  может быть учтено путём задания её в виде

$$\nu_e(\rho) = \nu_{ea} + (\tilde{\nu}_e - \nu_{ea})[1 - U(\rho - a)], \quad (3.2)$$

аналогичном распределению (1.61). С учетом формул (1.61) и (3.2) компоненты тензора (1.60) внутри и вне дакта будем далее обозначать через  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{\eta}$  и  $\varepsilon_a$ ,  $g_a$ ,  $\eta_a$  соответственно. Аналогичным образом будем обозначать плазменную частоту электронов:  $\omega_p = \tilde{\omega}_p$  при  $\rho < a$ ,  $\omega_p = \omega_{pa}$  при  $\rho > a$ .

В частном случае однородного дакта ( $N = \text{const}$ ,  $\tilde{\nu}_e = \text{const}$ ) поля направляемых им мод допускают аналитическое представление [9, 12]. В этом случае можно воспользоваться общими выражениями для компонент поля, полученными в разделе 2.1 применительно к однородному дакту. Не вдаваясь в подробности, запишем выражения для азимутальных и продольных компонент поля, которые потребуются нам в дальнейшем. Вне дакта (при  $\rho > a$ ) соответствующие выражения имеют вид

$$\begin{aligned} E_\varphi &= i \sum_{k=1}^2 C_k \left[ K_{m+1}(k_0 s_k \rho) + \alpha_k m \frac{K_m(k_0 s_k \rho)}{k_0 s_k \rho} \right], \\ E_z &= -\frac{i}{\eta_a} \sum_{k=1}^2 C_k n_k s_k K_m(k_0 s_k \rho), \\ H_\varphi &= -\sum_{k=1}^2 C_k n_k \left[ K_{m+1}(k_0 s_k \rho) - \beta_k m \frac{K_m(k_0 s_k \rho)}{k_0 s_k \rho} \right], \\ H_z &= \sum_{k=1}^2 C_k s_k K_m(k_0 s_k \rho), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $C_k$  — некоторые константы. Величина  $s_k$  входящая в выражения (3.3), определяется формулой

$$s_k^2 = -q_k^2, \quad (3.4)$$

$q_k$  даётся выражением (1.58), а величины  $n_k$ ,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  находятся по формулам (2.6) в которые следует подставить компоненты тензора  $\varepsilon = \varepsilon_a$ ,  $g = g_a$ ,  $\eta = \eta_a$  и плотность  $N = N_a$ , отвечающие фоновой плазме.



Внутри однородного дакта (т. е. при  $\rho < a$ ) азимутальные и продольные компоненты поля записываются в виде, аналогичном (2.3):

$$\begin{aligned}
E_\varphi &= i \sum_{k=1}^2 B_k \left[ J_{m+1}(k_0 \tilde{q}_k \rho) + \tilde{\alpha}_k m \frac{J_m(k_0 \tilde{q}_k \rho)}{k_0 \tilde{q}_k \rho} \right], \\
E_z &= \frac{i}{\tilde{\eta}} \sum_{k=1}^2 B_k \tilde{n}_k \tilde{q}_k J_m(k_0 \tilde{q}_k \rho), \\
H_\varphi &= - \sum_{k=1}^2 B_k \tilde{n}_k \left[ J_{m+1}(k_0 \tilde{q}_k \rho) - \tilde{\beta}_k m \frac{J_m(k_0 \tilde{q}_k \rho)}{k_0 \tilde{q}_k \rho} \right], \\
H_z &= - \sum_{k=1}^2 B_k \tilde{q}_k J_m(k_0 \tilde{q}_k \rho).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Напомним, что здесь  $J_m$  — функция Бесселя порядка  $m$ ,  $B_k$  — константы, а величины  $\tilde{q}_k$ ,  $\tilde{n}_k$ ,  $\tilde{\alpha}_k$  и  $\tilde{\beta}_k$  могут быть получены из выражений (1.58), (2.6) для  $q_k$ ,  $n_k$ ,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  соответственно, если в них положить  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ ,  $g = \tilde{g}$  и  $\eta = \tilde{\eta}$  (при этом величины  $P_b$  и  $P_c$  заменяются на  $\tilde{P}_b$  и  $\tilde{P}_c$ ) и  $N = \tilde{N}$ .

Как и ранее из условия непрерывности компонент поля (3.3) и (3.5) при  $\rho = a$  следуют дисперсионное уравнение для мод, определяющее их постоянные распространения  $p$ , а также соотношения между коэффициентами  $B_k$  и  $C_k$ . Дисперсионное уравнение для направляемых дактом мод имеет вид [9, 13]:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 - \sum_{i=1}^4 \Delta_i &= 0. \\
\Delta_0 &= M_0 \left[ \frac{\tilde{\eta}}{\eta_a} \tilde{n}_2 (n_2 - n_1) J_m^{(1)} J_m^{(2)} - n_2 L_{12} J_m^{(1)} K_m^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. \tilde{n}_2 L_{21} J_m^{(2)} K_m^{(1)} + n_2 (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) K_m^{(1)} K_m^{(2)} \right], \\
\Delta_1 &= M_0 \left[ \frac{\tilde{\eta}}{\eta_a} \tilde{n}_1 (n_2 - n_1) \hat{J}_m^{(1)} \hat{J}_m^{(2)} - \tilde{n}_1 L_{12} \hat{J}_m^{(1)} \hat{K}_m^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. n_1 L_{21} \hat{J}_m^{(2)} \hat{K}_m^{(1)} + n_1 (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) \hat{K}_m^{(1)} \hat{K}_m^{(2)} \right], \\
\Delta_2 &= M_{11} L_{22} \hat{J}_m^{(1)} K_m^{(1)} + M_{22} L_{11} J_m^{(2)} \hat{K}_m^{(2)}, \\
\Delta_3 &= n_1 M_0 L_{22} \left( \hat{J}_m^{(1)} K_m^{(1)} - J_m^{(1)} \hat{K}_m^{(1)} \right), \\
\Delta_4 &= n_2 M_0 L_{11} \left( J_m^{(2)} \hat{K}_m^{(2)} - \hat{J}_m^{(2)} K_m^{(2)} \right),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
J_m^{(1)} &= \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{\tilde{Q}_1 J_m(\tilde{Q}_1)} + m \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{Q}_1^2}, & J_m^{(2)} &= \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_2)}{\tilde{Q}_2 J_m(\tilde{Q}_2)} - m \frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{Q}_2^2}, \\
K_m^{(1)} &= \frac{K_{m+1}(S_1)}{S_1 K_m(S_1)} + m \frac{\alpha_1}{S_1^2}, & K_m^{(2)} &= \frac{K_{m+1}(S_2)}{S_2 K_m(S_2)} - m \frac{\beta_2}{S_2^2}, \\
\hat{J}_m^{(k)} &= J_m^{(k)} + (-1)^k m \frac{\tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k}{\tilde{Q}_k^2}, & \hat{K}_m^{(k)} &= K_m^{(k)} + (-1)^k m \frac{\alpha_k + \beta_k}{S_k^2}; \\
M_{ij} &= M_0 (\tilde{n}_i - n_j), & L_{ij} &= \frac{\tilde{\eta}}{\eta_a} n_i - \tilde{n}_j, & M_0 &= (n_1 - n_2)^{-1} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2)^{-1}, \\
k &= 1, 2; & i &= 1, 2; & j &= 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для неоднородного дакта решение уравнений для поля в области  $\rho < a$  приходится отыскивать с использованием численных методов. Однако и в этом случае поле внутри дакта представляется в виде суммы двух линейно независимых решений дифференциальных уравнений (1.70). Искомые решения должны быть регулярными на оси дакта и при  $\rho \rightarrow 0$  по-прежнему описываются цилиндрическими функциями вида (3.5) с аргументами  $k_0 \tilde{q}_1 \rho$  и  $k_0 \tilde{q}_2 \rho$ , где величины  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  отвечают однородной плазме с плотностью  $N(0)$  и эффективной частотой электронных соударений  $\nu_e(0)$ . Естественно, что выражения для компонент поля в однородной фоновой среде сохраняются в прежнем виде (3.3). Использование граничных условий при  $\rho = a$  позволяет далее получить дисперсионное соотношение для мод, направляемых неоднородным дактом.

## 3.2. Типы мод, направляемых дактом с повышенной плотностью плазмы

Рассмотрим в качестве примера типы мод, направляемых дактом с повышенной плотностью в области частот (1.56). В этой области частот при фиксированном азимутальном индексе  $m$  дакт с повышенной плотностью может поддерживать не более одной собственной моды, поле которой локализовано вблизи границы  $\rho = a$  (см. [12]). Комплексные постоянные распространения данных мод при наличии электронных соударений обозначим через  $p_m = p'_m - ip''_m$ . В случае, когда  $\nu_e = 0$ , мнимые части  $p''_m$  комплексных постоянных распространения (постоянные затухания) равны нулю, так что  $p_m = p'_m$ . Заметим, что при отсутствии потерь постоянные распространения  $p_m$  лежат в области

$$p_m < P_c, \tag{3.9}$$

где величина  $P_c \approx 2\varepsilon_a^{1/2}$  (см. (3.4)) отвечает волнам конической рефракции в однородной плазме с плотностью  $N = N_a$  [9] и может быть получена из фор-

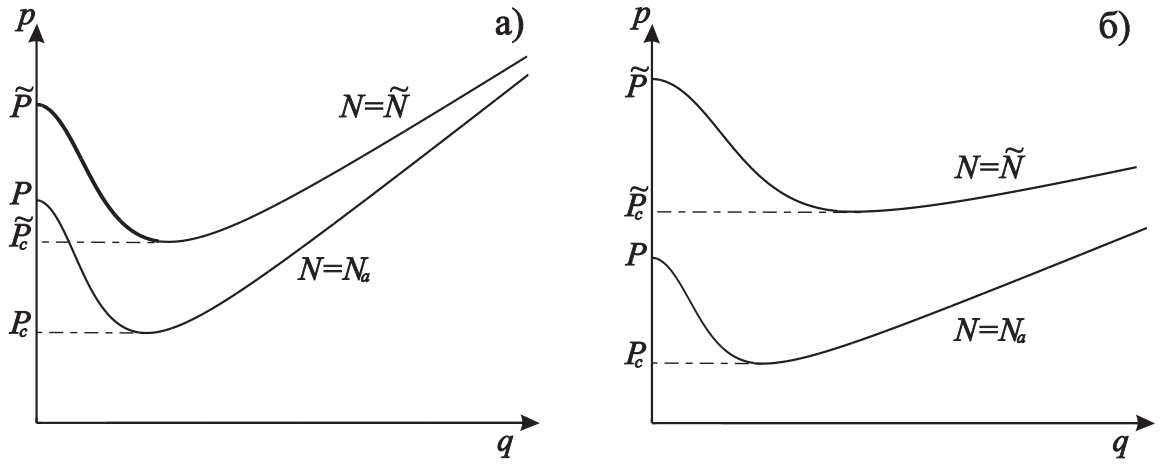


Рис. 3.1. Поверхности показателя преломления «необыкновенной» волны для двух значений плотности плазмы  $N = \tilde{N}$  и  $N = N_a$  в диапазоне частот (1.59) при  $\tilde{P}_c < P$  (а) и  $\tilde{P}_c > P$  (б)

мулы (1.58), если в последней выполнить замены  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_a$ ,  $g \rightarrow g_a$ ,  $\eta \rightarrow \eta_a$ . Для пояснения взаимного расположения величин  $P_c, P, \tilde{P}_c, \tilde{P}$  обратимся к рис. 3.1, на котором изображена поверхность показателя преломления «необыкновенной» волны ( $\alpha = e$ ) в однородной бесстолкновительной плазме с плотностью  $N = N_a$ , описываемая функцией  $p = p_e(q)$ . Там же показана аналогичная поверхность, относящаяся к плазме с плотностью  $N = \tilde{N}$ . Кроме того, на рис. 3.1 отмечены постоянные распространения  $P = (\varepsilon_a - g_a)^{1/2}$  и  $\tilde{P} = (\tilde{\varepsilon} - \tilde{g})^{1/2}$  «необыкновенной» волны, бегущей строго вдоль внешнего магнитного поля в однородной бесстолкновительной плазме при  $N = N_a$  и  $N = \tilde{N}$  соответственно, а также постоянные распространения  $\tilde{P}_c$  волн конической рефракции вдоль внешнего магнитного поля в случае  $N = \tilde{N}$ . Что касается «обыкновенной» волны ( $\alpha = o$ ), то на рассматриваемых частотах она, как уже отмечалось выше, является нераспространяющейся в отсутствие соударений.

Наряду с локализованными (собственными) модами, поля которых имеют поверхностный характер как внутри, так и вне дакта, рассматриваемые плазменные структуры могут также направлять вытекающие (несобственные) моды [9, 10, 12]. Из-за утечки таких мод в окружающую среду их постоянные распространения являются комплексными даже в случае бесстолкновительной плазмы:  $p_{m\nu} = p'_{m\nu} - ip''_{m\nu}$ . Здесь  $m$  — по-прежнему азимутальный индекс моды,  $\nu$  — радиальный индекс вытекающей моды с фиксированным значением  $m$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ).

Как известно [9, 12], при  $\nu_e = 0$  действительные части комплексных постоянных распространения вытекающих мод свистового диапазона лежат в области  $p' > \tilde{P}_c$ , где  $\tilde{P}_c \approx 2\tilde{\varepsilon}^{1/2}$  — постоянная распространения волн конической рефракции вдоль внешнего магнитного поля в однородной плазме с плотностью  $N = \tilde{N}$ . Напомним [9], что данные моды оказываются слабывтекающими

$(p'' \ll p')$  лишь в случае

$$\max(P, \tilde{P}_c) < p' < \tilde{P}, \quad (3.10)$$

где величины  $\tilde{P} = (\tilde{\varepsilon} - \tilde{g})^{1/2}$  и  $P = (\varepsilon_a - g_a)^{1/2}$  являются постоянными распространения вистлера строго вдоль внешнего магнитного поля в однородной плазме при  $N = \tilde{N}$  и  $N = N_a$  соответственно.

Отметим, что в зависимости от поведения полей несобственных мод в области  $\rho > a$  их можно условно разделить на несколько семейств. Первое семейство составляют моды, утечка которых обусловлена наличием в их полях нелокализованных квазиэлектростатических волн, уносящих энергию в фоновую плазму. Геликонная составляющая полей этих мод является локализованной в пространстве. Второе семейство образуют моды, в полях которых как геликонная, так и квазиэлектростатическая составляющие являются нелокализованными. Моды третьего семейства характеризуются наличием локализованной квазиэлектростатической составляющей и нелокализованной геликонной составляющей.

Подчеркнём, что слабовытекающие моды отвечающие условию (3.10), относятся к первому семейству. В данном разделе мы подробно остановимся на свойствах мод именно этого семейства.

Итак в случае (3.10) поле любой вытекающей моды первого семейства вне дакта содержит как локализованную составляющую, отвечающую ветви  $s_1$ , так и нелокализованную составляющую, отвечающую ветви  $s_2$ . Именно с наличием ветви  $s_2$ , соответствующей вытекающим квазиэлектростатическим волнам, и связана утечка этих мод из дактов с повышенной плотностью [9]. Для описание вклада данной волны в полное поле моды при  $\rho > a$  удобнее поэтому использовать функцию Ханкеля первого рода, к которой можно перейти с помощью формулы

$$K_m(k_0 s_2 \rho) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(k_0 q_2 \rho), \quad (3.11)$$

$q_2 = s_2 \exp(i\pi/2)$  ( $\text{Re } q_2 > 0$ ). Указанный здесь выбор ветви функции  $q_2$  связан с тем, что в квазиэлектростатических волнах радиальные компоненты вектора Пойнтинга и волнового вектора имеют противоположные знаки.

Внутри дакта поля вытекающих мод имеют объёмный характер. Так же, как и в фоновой плазме, они характеризуются наличием двух различных составляющих, отвечающих крупномасштабным геликонам (ветвь  $\tilde{q}_1$ ) и мелкомасштабным квазиэлектростатическим волнам (ветвь  $\tilde{q}_2$ ). Объёмный характер полей данных мод в области  $\rho < a$  приводит к тому, что эффективность их возбуждения заданными источниками, расположенными внутри дакта, оказывается, как правило, значительно выше, чем эффективность возбуждения собственных мод [13]. Поэтому особенности каналированного распространения объёмных вытекающих мод в свистовом диапазоне и влияние столкновительных потерь на их характеристики представляют повышенный интерес.

### 3.3. Типы мод, направляемых дактом с пониженной плотностью плазмы

Выясним, моды каких типов могут поддерживаться дактом с пониженной плотностью в свистовом диапазоне частот. Для этого обсудим связь между продольным волновым числом  $p$  и поперечными волновыми числами  $q_{1,2}$ . На рис. 3.2, 3.3 показаны поверхности показателя преломления «необыкновенной» волны в однородной плазме для двух значений плотности  $\tilde{N}$  и  $N_a$  ( $\tilde{N} < N_a$ ) применительно к интервалам частот (1.56) и (1.57), принадлежащим диапазону (1.54). На каждом из рис. 3.2, 3.3 верхняя кривая отвечает плотности фоновой плазмы  $N_a$ , нижняя — плотности плазмы  $\tilde{N}$  во внутренней области дакта. Данные кривые описываются, очевидно, соответствующими ветвями функций  $q_{1,2}(p)$  и  $\tilde{q}_{1,2}(p)$  для указанных плотностей плазмы. Ветви  $q_1(p)$ ,  $\tilde{q}_1(p)$  отвечают крупномасштабной геликонной составляющей поля, а ветви  $q_2(p)$ ,  $\tilde{q}_2(p)$  — мелкомасштабной квазиэлектростатической составляющей. Величины  $\tilde{P}$  и  $P$ , отмеченные на рис. 3.2, 3.3, являются постоянными распространения вистлера строго вдоль направления внешнего магнитного поля в однородной плазме при  $N = \tilde{N}$  и  $N = N_a$  соответственно. Использование выражений (3.1) в случае бесстолкновительной плазмы дает

$$\tilde{P} = (\tilde{\varepsilon} - \tilde{g})^{1/2}, \quad P = (\varepsilon_a - g_a)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Величины  $\tilde{P}_c$  и  $P_c$ , отвечают в частотном интервале (1.54) (для тех же значений плотности плазмы  $\tilde{N}$  и  $N_a$ ) волнам конической рефракции [9]. Обратим внимание на то, что при  $\tilde{N} < N_a$  в обоих частотных интервалах (1.56) и (1.57) возможны два случая взаимного расположения поверхностей показателя преломления:  $P_c < \tilde{P}$  (см. рис. 3.2а, 3.3а) и  $P_c > \tilde{P}$  (см. рис. 3.2б, 3.3б). Последний случай может иметь место только в интервале частот  $\omega^{(-)} < \omega < \omega^{(+)}$ , где

$$\omega^{(\pm)} = \frac{\omega_H}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega_{pa}^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.13)$$

Данное выражение нетрудно получить, решив уравнение  $\tilde{P}(\omega) = P_c$ , корнями которого являются величины  $\omega^{(\pm)}$ . При приближении плотности плазмы  $\tilde{N}$  во внутренней области дакта к фоновой величине  $N_a$  ширина интервала  $\omega^{(+)} - \omega^{(-)}$  стремится к нулю.

Рассматриваемый дакт в бесстолкновительной плазме может поддерживать собственные моды с действительными постоянными распространения  $p$ , если существуют такие области значений  $p$ , в которых величины  $s_1$  и  $s_2$ , относящиеся к фоновой среде, являются одновременно либо действительными ( $s_1^2 > 0$ ,  $s_2^2 > 0$ ), либо комплексно-сопряженными ( $s_1 = s_2^*$ ). Выбор ветвей  $s_1$  и  $s_2$  для собственных мод осуществляется таким образом, чтобы выполнялись условия  $\text{Re } s_1 > 0$ ,  $\text{Re } s_2 > 0$ .

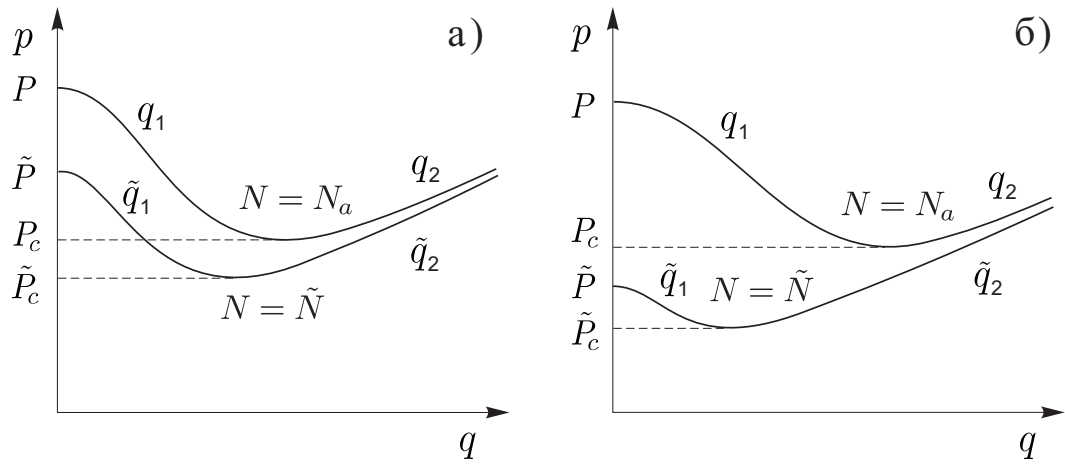


Рис. 3.2. Поверхности показателя преломления необыкновенной волны в частотном интервале (1.56) для двух значений плотности плазмы  $\tilde{N}$  и  $N_a$  ( $\tilde{N} < N_a$ ):  $P_c < \tilde{P}$  (а);  $\tilde{P} < P_c$  (б)

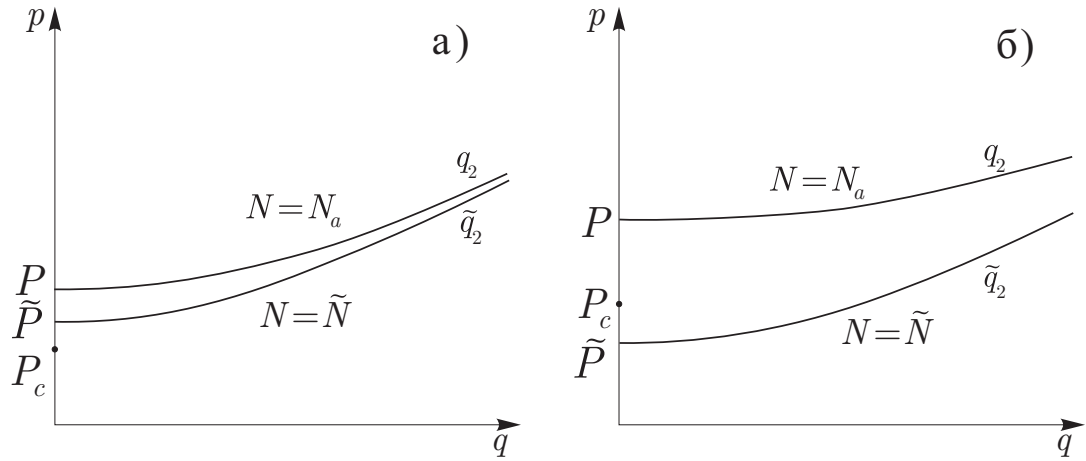


Рис. 3.3. Поверхности показателя преломления необыкновенной волны в частотном интервале (1.57) для двух значений плотности плазмы  $\tilde{N}$  и  $N_a$  ( $\tilde{N} < N_a$ ):  $P_c < \tilde{P}$  (а);  $\tilde{P} < P_c$  (б)

Из анализа выражений для поперечных волновых чисел следует, что в частотном интервале (1.54) величины  $s_1$  и  $s_2$  являются одновременно действительными в области

$$0 < p < P_b \quad (3.14)$$

и комплексно-сопряженными в области

$$P_b < p < P_c. \quad (3.15)$$

Исследование дисперсионного уравнения не выявило в области (3.14) решений, отвечающих собственным модам. Что же касается мод, постоянные распространения которых лежат в области (3.15), то на частотах (1.56) они разделяются на два семейства, соответствующие следующим случаям:

$$p < \tilde{P}_c, \quad (3.16)$$

$$\tilde{P}_c < p < P_c. \quad (3.17)$$

Как показали численные расчеты, в области (3.16) существует не более одной собственной моды для каждого фиксированного азимутального индекса  $m$ . Величины  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  для такой моды являются комплексно-сопряженными, так что ее поле оказывается локализованным в окрестности переходной области  $a_0 < \rho < a_1$  («стенки» дакта). Постоянные распространения мод данного типа, имеющих поверхностный характер, будем обозначать через  $p_m$ . Кроме того, дакт с пониженной плотностью может поддерживать конечное число собственных мод, постоянные распространения которых лежат в интервале (3.17). Эти моды будем отмечать радиальными индексами  $n = 1, 2, \dots$  в порядке возрастания их постоянных распространения  $p_{mn}$  (для фиксированного индекса  $m$ ). При  $P_c < \tilde{P}$ , поперечные волновые числа  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  таких мод во внутренней области дакта действительны (см. рис. 3.2а), и соответствующие собственные моды имеют объемный характер в указанной области. Если же  $P_c > \tilde{P}$ , то  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  действительны при  $\tilde{P}_c < p < \tilde{P}$ , тогда как при  $\tilde{P} < p < P_c$  величина  $\tilde{q}_1$  становится мнимой, а величина  $\tilde{q}_2$  остается действительной. В последнем случае (см. рис. 3.2б) поля собственных мод во внутренней области дакта характеризуются наличием поверхностной геликонной и объемной квазиэлектростатической составляющих, которые описываются цилиндрическими функциями, зависящими от  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  соответственно.

В интервале частот (1.57) дакт с пониженной плотностью может поддерживать собственные моды с постоянными распространения  $p < P$  (см. рис. 3.3). Постоянные распространения мод с комплексно сопряженными величинами  $s_1$  и  $s_2$  по-прежнему находятся в интервале (3.15). При  $P_c < p < P$  величины  $s_1$  и  $s_2$  являются действительными. Что же касается поведения полей мод в внутренней области дакта, то при  $p < \tilde{P}$  они локализованы вблизи «стенки»

дакта (моды с радиальным индексом  $n = 0$ ), а при  $\tilde{P} < p < P$  имеют поверхностную геликонную и объемную квазиэлектростатическую составляющие (моды с радиальными индексами  $n = 1, 2, \dots$ ), для которых  $\tilde{q}_1^2 < 0$  и  $\tilde{q}_2^2 > 0$  соответственно.

### 3.4. Дисперсионные свойства мод

#### 3.4.1. Дисперсионные характеристики мод дакта с повышенной плотностью плазмы

Рассмотрим вначале зависимости постоянных распространения собственных мод в случае отсутствия потерь. На рисунке 3.4 приведены дисперсионные кривые собственных мод с азимутальными индексами  $m = 0, \pm 1$  для следующих значений безразмерных параметров в случае однородного дакта с резкой границей:  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,778$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_{LH}/\omega_H = 4,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega_H a/c = 1$ . На рисунке 3.4 дисперсионные кривые  $p_m(\omega)$  собственных мод показаны сплошными линиями, зависимость  $P(\omega)$  — штриховой линией (кривая 1), зависимости  $P_b(\omega)$  и  $P_c(\omega)$  — штрихпунктирными линиями (кривые 2 и 3 соответственно). Для удобства соответствующие кривые построены в разных масштабах для частотных областей  $\omega > 0,2\omega_H$  (рисунок 3.4а) и  $\omega < 0,2\omega_H$  (рисунок 3.4б).

Из рисунка 3.4 видно, что собственные моды имеют нижнюю частоту отсечки, лежащую в области (1.56), и верхнюю частоту отсечки, лежащую в области (1.57)). На нижней частоте отсечки выполняется либо условие  $p_m = P_b$ , либо условие  $p_m = P_c$ , при которых действительные части комплексных величин  $s_1$  и  $s_2$  обращаются в нуль и мода перестает быть локализованной. На верхней частоте отсечки выполняется условие  $p_m = P$ , при котором величина  $s_2$ , являющаяся действительной в окрестности данной частоты (если  $P_c < p_m < P$ ), обращается в нуль, в то время как величина  $s_1$  остается действительной и не равной нулю. Следовательно, и в этом случае мода перестает быть локализованной. Очевидно, что с удалением от частот отсечки степень локализации поля моды в окружающем пространстве возрастает.

При увеличении плотности плазмы внутри дакта дисперсионные кривые собственных мод сдвигаются в сторону меньших значений  $p_m$  и в предельном случае  $\tilde{N}/N_a \rightarrow \infty$  переходят в дисперсионные кривые мод, направляемых идеально проводящим цилиндром в магнитоактивной плазме. Напротив, при уменьшении  $\tilde{N}$  постоянные распространения  $p_m$  сдвигаются в сторону больших значений. Сдвиг дисперсионных кривых сопровождается изменением частот отсечки и, следовательно, ширины частотного интервала существования мод. В частности, для моды с азимутальным индексом  $m = 1$  верхняя и нижняя частоты отсечки при  $\tilde{N} \rightarrow N_a$  стремятся к  $\omega_H/2$ , и ширина интервала существования моды обращается в нуль.



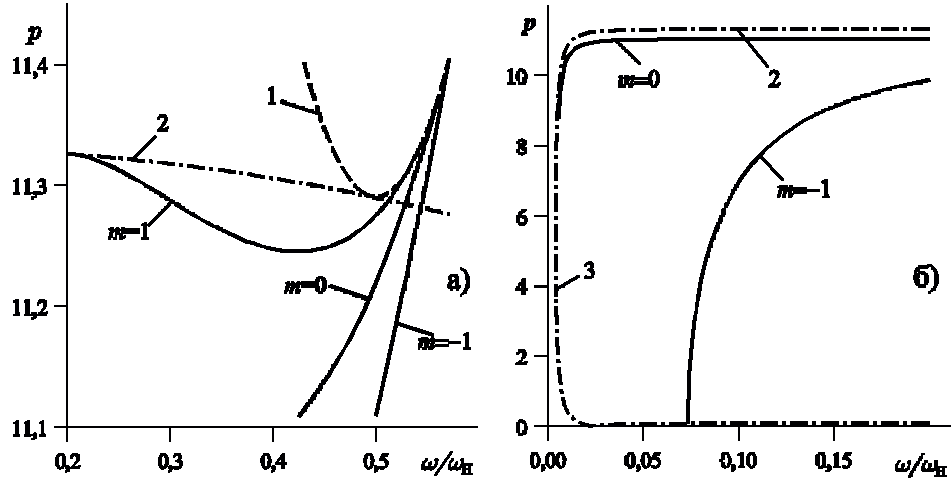


Рис. 3.4. Дисперсионные кривые собственных мод с индексами  $m = 0, \pm 1$  и зависимости  $P(\omega)$  (кривая 1),  $P_b(\omega)$  (кривая 2) и  $P_c(\omega)$  (кривая 3) при  $\nu_e = 0$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,778$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_{LH}/\omega_H = 4,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega_H a/c = 1$

При учёте соударений затухание поверхностных мод, как оказалось, определяется преимущественно диссипативными характеристиками фоновой среды. Такое поведение  $p''_m$  объясняется следующими причинами. При сравнительно малом перепаде плотности плазмы на границе дакта, т.е. в случае  $\tilde{N} - N_a \ll N_a$ , каждая из этих мод является слаболокализованной и основная часть её поля находится в окружающей среде. При увеличении отношения  $\tilde{N}/N_a$ , начиная уже с относительно небольших значений данного отношения ( $\tilde{N}/N_a \sim 1,5 \div 2$ ), поле моды сильно «прижимается» изнутри к границе дакта. В результате, несмотря на некоторое увеличение степени локализации поля в окружающей среде, которое при этом имеет место, основная часть поля моды оказывается по-прежнему сосредоточенной вне дакта.

Сказанное иллюстрируется представленными в табл. 3.1 результатами численных расчётов комплексной постоянной распространения  $p_0 = p'_0 - ip''_0$  азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) собственной моды. Расчёты были выполнены для трёх частных случаев: *a* — бесстолкновительный дакт, окружённый бесстолкновительной фоновой плазмой ( $\tilde{\nu}_e = \nu_{ea} = 0$ ); *б* — столкновительный дакт, окружённый бесстолкновительной фоновой плазмой ( $\tilde{\nu}_e \neq 0$ ,  $\nu_{ea} = 0$ ); *в* — столкновительный дакт, окружённый столкновительной фоновой плазмой ( $\tilde{\nu}_e = \nu_{ea} \neq 0$ ). При проведении расчётов были использованы следующие значения параметров:  $\omega/\omega_H = 0,37$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 2,24$  ( $\tilde{N}/N_a = 5$ ),  $\omega_{pa}/\omega_H = 17,4$ ,  $\omega_H a/c = 0,227$ .

Таблица 3.1

$\tilde{\nu}_e/\omega$	$\nu_{ea}/\omega$	$p_0 = p'_0 - ip''_0$
0	0	32,86
0,05	0	32,65 – i0,15
0,05	0,05	32,65 – i0,93
0,25	0	32,36 – i0,88
0,25	0,25	32,30 – i4,7

Как видно из представленных данных, постоянная затухания моды действительно определяется преимущественно столкновительными потерями в фоновой среде. Заметим, что этот вывод остаётся справедливым и для несимметричных мод.

Что касается структуры поля локализованных мод, то при сравнительно малых частотах соударений ( $\nu_e \ll \omega$ ) она практически не меняется по сравнению со случаем бесстолкновительной плазмы, изученным в работе [12].

Как известно, в однородной плазме при наличии электронных соударений мелкомасштабные квазиэлектростатические волны затухают гораздо быстрее, чем длинноволновые вистлеры. Поскольку поля объёмных мод содержат обе указанные волновые составляющие, вопрос о том, какая из них определяет столкновительное затухание мод, оказывается далеко не очевидным. Ниже на примере несобственных мод первого семейства мы покажем, что учёт столкновительных потерь в плазме (даже сравнительно малых) сопровождается не только появлением дополнительного затухания данных мод, но может приводить и к заметному изменению дисперсионных характеристик и структуры полей мод.

Рассмотрим частный случай

$$|p|^2 \gg |\tilde{P}_c|^2, \quad (3.18)$$

допускающий приближённое исследование дисперсионных свойств мод аналитическими методами. Кроме того, как мы увидим далее, именно моды, постоянные распространения которых удовлетворяют условию (3.18), проявляют наиболее интересные свойства при наличии диссипативных потерь в плазме. Нетрудно убедиться, что в случае (3.18) поперечные волновые числа «свистовой» (геликонной) части поля (ветви  $\tilde{q}_1, s_1$ ) и «квазиэлектростатической» его части (ветви  $\tilde{q}_2, s_2$ ) сильно различаются по абсолютному значению:  $|\tilde{q}_1| \ll |\tilde{q}_2|$ ,  $|s_1| \ll |s_2|$ . При этом имеют место схожие с (2.15) следующие

приближённые соотношения, получаемые из (1.58), (2.6) и (3.4):

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1^2 &= \frac{\tilde{P}^4}{p^2} - p^2, & \tilde{q}_2^2 &= -\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\varepsilon}} \left( p^2 + \frac{\tilde{g}_2^2}{\tilde{\eta}} - \tilde{\varepsilon} \right), \\
s_1^2 &= p^2 - \frac{P^4}{p^2}, & s_2^2 &= -q_2^2 = \frac{\eta_a}{\varepsilon_a} \left( p^2 + \frac{g_a^2}{\eta_a} - \varepsilon_a \right), \\
\tilde{n}_1 &= \frac{\tilde{g}}{p} \left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{p^2} \right), & \tilde{n}_2 &= -p \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{g}} \left( 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{p^2} \right), \\
n_1 &= \frac{g_a}{p} \left( 1 + \frac{\varepsilon_a}{p^2} \right), & n_2 &= -p \frac{\eta_a}{g_a} \left( 1 - \frac{\varepsilon_a}{p^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Напомним, что в частотном интервале (1.59) величина  $\tilde{P}$  описывается выражением

$$\tilde{P} = \tilde{P}' - i\tilde{P}'' \approx \frac{\tilde{\omega}_p}{(\omega\omega_H)^{1/2}} \left( 1 - i\frac{\tilde{\nu}_e}{2\omega_H} \right) \tag{3.20}$$

Выражение для  $P = P' - iP''$  получается из (3.20) заменами  $\tilde{\omega}_p \rightarrow \omega_{pa}$ ,  $\tilde{\nu}_e \rightarrow \nu_{ea}$ . Подставляя формулы (3.19) в строгое дисперсионное уравнение (3.6) и учитывая соотношение  $\varepsilon\eta = -g^2$ , справедливое в частотном интервале (1.59), можно получить приближённое представление дисперсионного уравнения, удобное для последующего анализа. В частном случае  $\nu_e = \tilde{\nu}_e = \nu_{ea}$ , рассматриваемом далее, приближённое дисперсионное уравнение принимает наиболее простой вид

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} + \frac{m\tilde{\alpha}_1}{\tilde{Q}_1} + \frac{\tilde{Q}_1}{S_1} \left( \frac{K_{m+1}(S_1)}{K_m(S_1)} + m\frac{\alpha_1}{S_1} \right) \right] \times \\
& \times \left[ \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_2)}{J_m(\tilde{Q}_2)} - m\frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{Q}_2} + \frac{\eta_a}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{Q}_2}{S_2} \left( \frac{K_{m+1}(S_2)}{K_m(S_2)} - m\frac{\beta_2}{S_2} \right) - \frac{m}{k_0 a p} \left( 1 - \frac{g_a}{\tilde{g}} \right) \right] = \\
& = \kappa(p) \left( \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} - \frac{m\tilde{\beta}_1}{\tilde{Q}_1} - m\frac{\tilde{Q}_1}{(k_0 a \tilde{P})^2} \right) \left( \frac{K_{m+1}(S_1)}{K_m(S_1)} + m\frac{\alpha_1}{S_1} \right) + \\
& + i\delta(p) \frac{\tilde{Q}_1}{S_1} \left( \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_2)}{J_m(\tilde{Q}_2)} - m\frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{Q}_2} \right) \left( \frac{K_{m+1}(S_2)}{K_m(S_2)} + m\frac{\alpha_2}{S_2} \right),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\kappa(p) &= \frac{g_a}{\tilde{g}} \frac{\tilde{Q}_2}{S_1} \frac{\varepsilon_a}{p^2} \left( \frac{\tilde{g}}{g_a} - 1 \right)^2, & \delta(p) &= -i \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{\varepsilon_a}{p^2} \right)^3 \left( \frac{\tilde{g}}{g_a} - 1 \right)^2, \\
\tilde{Q}_1 &= k_0 a \tilde{q}_1, & \tilde{Q}_2 &= k_0 a \tilde{q}_2, & S_1 &= k_0 a s_1, & S_2 &= e^{-i\frac{\pi}{2}} Q_2 = k_0 a s_2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

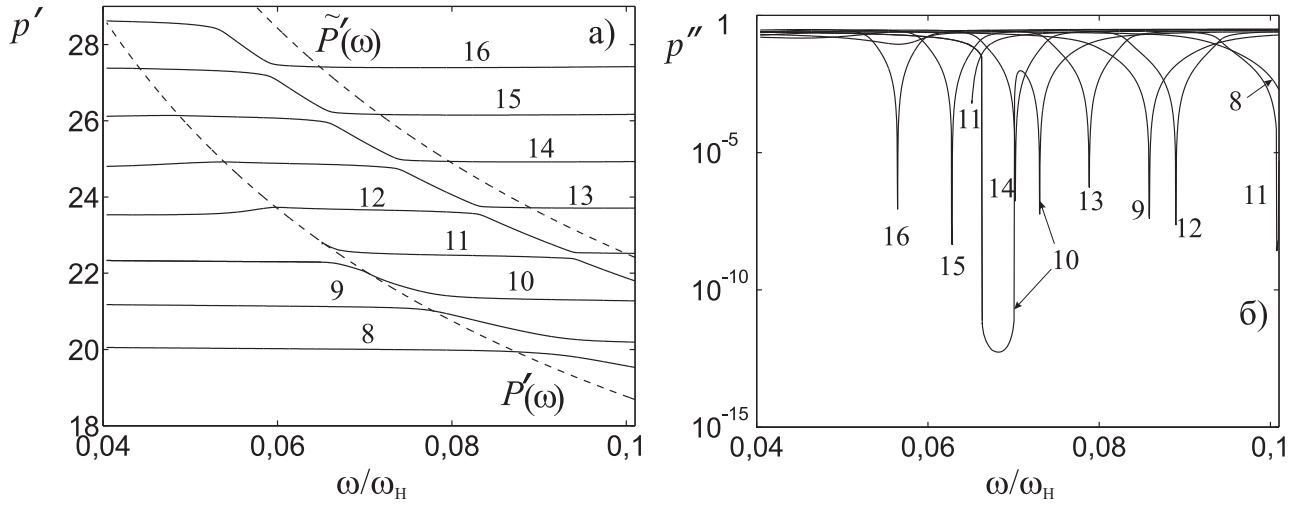


Рис. 3.5. Дисперсионные кривые вытекающих мод с индексами  $m = 1$ ,  $\nu = 8, 9, \dots, 16$  при  $\nu_e = 0$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_H a/c = 2,344$ : а — зависимости  $p'_{m\nu}(\omega)$  (сплошные линии) и  $\tilde{P}'(\omega)$ ,  $P'(\omega)$  (штриховые линии); б — зависимости  $p''_{m\nu}(\omega)$ . Цифрами на кривых показаны значения радиального индекса  $\nu$

Заметим, что упрощающее условие  $\tilde{\nu}_e = \nu_{ea}$ , использованное при получении уравнения (3.21), отвечает, очевидно, случаю, когда столкновительные потери обусловлены электрон-нейтральными соударениями, так что эффективная частота соударений не зависит от профиля плотности плазмы. Нетрудно заметить, что при стремлении эффективной частоты соударений к нулю уравнение (3.21) (с учетом формулы (3.11)) переходит в приближённое уравнение, полученное в работе [12] применительно к случаю бесстолкновительной плазмы.

Отметим, что в дальнейшем при численном исследовании дисперсионных свойств мод, направляемых дактом с повышенной плотностью плазмы, будет использовано строгое дисперсионное уравнение (3.6). К приближённому уравнению (3.21) мы будем обращаться лишь для анализа и объяснения результатов численных расчётов.

Результаты численных расчётов зависимостей  $p'_{m\nu}(\omega)$  и  $p''_{m\nu}(\omega)$ , а также графики величин  $\tilde{P}'(\omega) = \text{Re } \tilde{P}(\omega)$  и  $P'(\omega) = \text{Re } P(\omega)$ , изображены на рис. 3.5 и 3.6 для бесстолкновительного ( $\tilde{\nu}_e = \nu_{ea} = 0$ ) и столкновительного ( $\tilde{\nu}_e = \nu_{ea} \neq 0$ ) дактов соответственно при фиксированных значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ . На рис. 3.5, отвечающем случаю  $\nu_e = 0$ , сплошными линиями показаны дисперсионные зависимости для девяти мод с азимутальным индексом  $m = 1$  и номерами  $\nu = 8 \div 16$  при  $\tilde{\omega}_p/\omega_{ea} = 1,2$  ( $\tilde{N}/N_a = 1,44$ ),  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,62$ ,  $\omega_H a/c = 2,3$ . Здесь же (см. рис. 3.5а) штрихованными линиями изображены графики величин  $\tilde{P}'(\omega)$  и  $P'(\omega)$ , совпадающих в случае бесстолкновительной плазмы с величинами  $\tilde{P}(\omega)$  и  $P(\omega)$  соответственно. Решения  $p_{m\nu}$  дисперсионного уравнения на рис. 3.5 пронумерованы в порядке возрастания значений  $p'_{m\nu}$ , начиная с нижней границы  $p' = \text{Re } \tilde{P}_c$  области существования

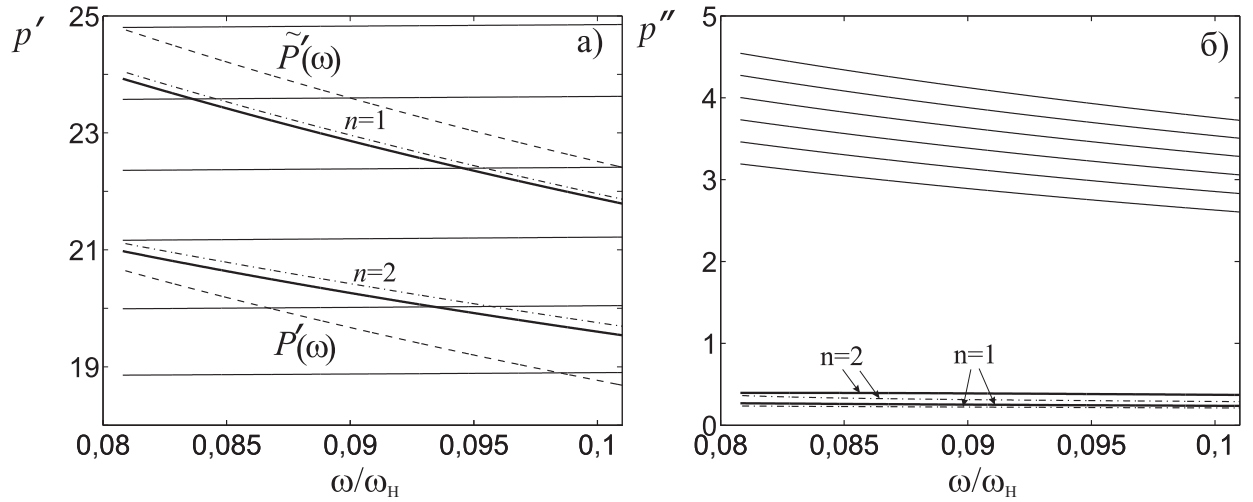


Рис. 3.6. Дисперсионные кривые слабо- и сильнозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$  при  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$  и тех же значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ , что и для рис. 3.5. Жирные сплошные линии отвечают слабозатухающим модам с радиальными индексами  $n = 1, 2$ , тонкие сплошные линии — шести сильнозатухающим модам. Штриховыми линиями показаны зависимости  $\tilde{P}'(\omega)$  и  $P'(\omega)$ , штрих-пунктирными — решения выведенного ниже приближённого дисперсионного уравнения (3.27)

вытекающих мод ( $\tilde{P}_c = \text{Re } \tilde{P}_c$  при  $\nu_e = 0$ ). При этом моды с различными значениями индекса  $\nu$  различаются числом мелкомасштабных вариаций поля по радиусу внутри дакта. Вне дакта поперечные волновые числа указанных мод подчиняются неравенствам  $\text{Re } S_1 > 0$ ,  $\text{Im } Q_2 < 0$ . Из последнего неравенства следует, что рассматриваемые моды действительно являются несобственными (вытекающими). Заметим, что в области (3.18) затухание мод существенно меньше, чем вне этой области.

Поскольку дисперсионные характеристики вытекающих мод, направляемых дактами с повышенной плотностью плазмы при  $\nu_e = 0$ , довольно подробно исследовались в работе [12] и приведены здесь лишь для последующего сопоставления со случаем столкновительной плазмы, мы не останавливаемся подробно на их обсуждении. Отметим, однако, что во избежание повторения рассмотрения, выполненного в [12] применительно к слабому ( $\tilde{N} - N_a \ll N_a$ ) и сильному ( $\tilde{N} - N_a \gg N_a$ ) перепадам плотности плазмы на границе дакта, мы привели на рис. 3.5 результаты, относящиеся к умеренному перепаду плотности:  $\tilde{N} - N_a \lesssim N_a$ . В этом случае, как видно из рис. 3.5, большая часть дисперсионных кривых ведёт себя так же, как и при сильном перепаде плотности. Вместе с тем имеются кривые, поведение которых напоминает ход дисперсионных зависимостей в случае слабого перепада плотности плазмы. Это относится, в частности, к моде с индексом  $\nu = 11$ , которая существует лишь в области  $p > P'$ . Поэтому результаты, приведённые на рис. 3.5, могут представлять и определённый самостоятельный интерес.

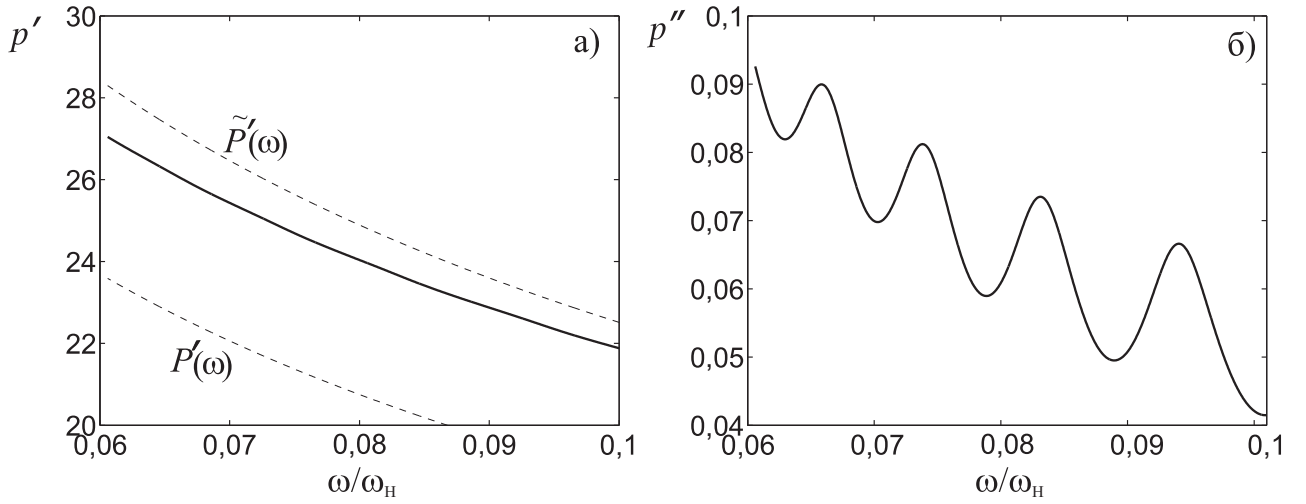


Рис. 3.7. Дисперсионные кривые слабозатухающей моды с индексами  $m = 1$ ,  $n = 1$  при  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-3}$  и тех же значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ , что и для рис. 3.5: а — зависимости  $p'_{11}(\omega)$  (сплошная линия) и  $\tilde{P}'(\omega)$ ,  $P'(\omega)$  (штриховые линии); б — зависимость  $p''_{11}(\omega)$

На рис. 3.6 показаны зависимости  $p'(\omega)$  и  $p''(\omega)$  для мод с азимутальным индексом  $m = 1$  при  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$  и прежних значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ . Сравнение кривых на рис. 3.5 и 3.6 свидетельствует о качественных изменениях в поведении дисперсионных характеристик мод при учёте столкновительных потерь. Как видно из рис. 3.5 и 3.6, участки кривых  $p'(\omega)$  с большей крутизной, отвечающие в случае бесстолкновительной плазмы частотным интервалам, в которых постоянные затухания  $p''(\omega)$  принимают минимальные значения, и соответствующие участки кривых  $p''(\omega)$  «объединяются» при наличии столкновительных потерь в новые ветви, изображённые сплошными жирными линиями на рис. 3.6. Моды, отвечающие этим ветвям и обозначенные на рис. 3.6 индексами  $n = 1$  и  $n = 2$ , являются слабозатухающими; их постоянные затухания определяются отношением эффективной частоты соударений к гирочастоте электронов:  $p''/p' \sim \nu_e/\omega_H$ . Остальные участки кривых на рис. 3.5 дают при учёте электронных соударений дисперсионные зависимости быстрозатухающих мод, показанные сплошными тонкими линиями на рис. 3.6. Постоянные затухания этих мод подчиняются соотношению  $p''/p' \simeq \nu_e/\omega$ . Заметим, что у частотных зависимостей постоянных затухания всех мод при выбранном значении  $\nu_e$  исчезает резонансная структура, характерная для случая бесстолкновительной плазмы. При учёте столкновительных потерь такая структура (хотя и в «сглаженном» виде) может быть заметной лишь при весьма малых значениях эффективной частоты соударений. Сказанное иллюстрируется зависимостями  $p'(\omega)$  и  $p''(\omega)$ , построенными на рис. 3.7 для слабозатухающей моды с индексами  $m = 1, n = 1$  при  $\nu_e = 1,5 \cdot 10^{-3} \omega_H$  (значения остальных параметров прежние).

Примечательно, что слабозатухающие моды оказываются локализованными (собственными), т. е. их поля стремятся к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$  в отличие от несобственных вытекающих мод, направляемых дактом с повышенной плотностью в бесстолкновительной плазме. Поскольку локализация поля данных мод обеспечивается здесь фактически за счёт поглощения, для её реализации необходимо, чтобы величина  $\nu_e$  в фоновой среде превышала некоторое пороговое значение. Что касается остальных (сильнозатухающих) мод, то они могут быть как локализованными, так и нелокализованными в зависимости от конкретных значений радиального индекса и эффективной частоты соударений  $\nu_e$ . С увеличением  $\nu_e$  каждая из нелокализованных мод становится в конечном счёте локализованной.

Отмеченные особенности дисперсионных характеристик мод при  $\nu_e \neq 0$  можно объяснить, анализируя поведение поперечных волновых чисел  $\tilde{Q}_2$  и  $Q_2$ . Мнимые части этих волновых чисел в случае (3.18) описываются выражением

$$\text{Im } \tilde{Q}_2 \approx \text{Im } Q_2 = k_0 a p' \frac{\omega_n}{\omega [1 + (\nu_e/\omega)^2]} \left( \frac{\nu_e}{\omega} - \frac{p''}{p'} \right). \quad (3.23)$$

В случае бесстолкновительной плазмы, когда затухание вытекающих мод по продольной координате  $z$  обусловлено их малыми радиационными потерями ( $p'' \ll p'$ ), величины  $\text{Im } \tilde{Q}_2$  и  $\text{Im } Q_2$  отрицательны и подчиняются неравенствам  $|\text{Im } \tilde{Q}_2| \ll 1$ ,  $|\text{Im } Q_2| \ll 1$ . При учёте электронных столкновений в плазме мнимые части поперечных волновых чисел  $\tilde{Q}_2$  и  $Q_2$  некоторых мод быстро возрастают по абсолютному значению с увеличением  $\nu_e$ . В этом случае, как показывают численные расчёты, величины  $\text{Im } \tilde{Q}_2$  и  $\text{Im } Q_2$  для таких мод становятся положительными. Для достаточно широкого дакта при значениях отношения  $p''/p'$ , не слишком близких к  $\nu_e/\omega$ , данные величины начинают удовлетворять неравенствам  $\text{Im } \tilde{Q}_2 \gg 1$  и  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ , тогда как величины  $\text{Im } \tilde{Q}_1$  и  $\text{Im } S_1$  при соблюдении условия (3.18) остаются ещё малыми по сравнению с единицей. Именно такое поведение реализуется для слабозатухающих мод при наличии столкновительных потерь. В результате для мелкомасштабной («квазиэлектростатической») составляющей поля слабозатухающей моды имеет место явление, аналогичное скин-эффекту: мелкомасштабная часть поля сильно «прижимается» к границе дакта, так что поле моды определяется преимущественно крупномасштабной составляющей, а затухание моды становится близким к затуханию крупномасштабных вистлеров ( $p''/p' \sim \nu_e/\omega_n$ ).

Таким образом, слабозатухающие моды, у которых отношение  $p''/p'$  оказывается значительно меньше, чем величина  $\nu_e/\omega$ , характерная для квазиэлектростатических волн, имеют поперечные волновые числа  $\tilde{Q}_2$  и  $Q_2$ , подчиняющиеся соотношениям  $\text{Im } \tilde{Q}_2 \gg 1$  и  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ , которые так же как и во втором разделе первой главы, сводятся к неравенству

$$k_0 a p' \omega_n \nu_e (\omega^2 + \nu_e^2)^{-1} \gg 1. \quad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что при достаточно большом значении  $k_0 a p' \omega_n / \omega$  неравенство (3.24) может выполняться и в случае  $\nu_e \ll \omega$ .

В отличие от слабозатухающих мод сильнозатухающие моды, для которых справедливо соотношение  $p''/p' \approx \nu_e/\omega$ , характеризуются малыми значениями мнимой части поперечных волновых чисел  $\tilde{Q}_2$  и  $Q_2$ :  $|\text{Im } \tilde{Q}_2| \ll 1$ ,  $|\text{Im } Q_2| \ll 1$ . Следовательно, мелкомасштабные составляющие полей сильнозатухающих мод сохраняют объёмный характер, что и объясняет особенности их затухания.

Покажем, что выделение семейства слабозатухающих мод можно проследить аналитически на основе приближённого дисперсионного уравнения (3.21), которое допускает дополнительные упрощения при  $\text{Im } \tilde{Q}_2 \gg 1$ ,  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ . В этом случае  $J_{m+1}(\tilde{Q}_2)/J_m(\tilde{Q}_2) \approx i$ ,  $K_{m+1}(S_2)/K_m(S_2) \approx 1$ . Используя данные соотношения, а также приближённые формулы

$$\tilde{\alpha}_1 = -1 - \frac{\tilde{P}^2}{p^2}, \alpha_1 = -1 - \frac{P^2}{p^2}, \tilde{\alpha}_2 = \frac{\tilde{q}_2^2}{\tilde{g}}, \tilde{\alpha}_2 = -\frac{q_2^2}{g_a}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\beta}_1 = 1 + \frac{p^2}{\tilde{P}^2}, \beta_1 = 1 + \frac{p^2}{P^2}, \tilde{\beta}_2 \approx \beta_2 \approx 1, \quad (3.26)$$

справедливые в области (3.18), уравнение (3.21) может быть преобразовано к виду

$$\frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} + m \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{Q}_1} + \frac{\tilde{Q}_1}{S_1} \frac{\tilde{K}}{1 + \tilde{\kappa}} = 0, \quad (3.27)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \frac{\kappa \tilde{K}}{m/k_0 a p (1 - g_a/\tilde{g}) - i(1 + g_a/\tilde{g})}, \tilde{K} = \frac{K_{m+1}(S_1)}{K_m(S_1)} + \frac{m \alpha_1}{S_1}.$$

При выводе уравнения (3.27) учтено, что в рассматриваемом случае слагаемое, содержащее величину  $\delta(p)$ , даёт пренебрежимо малый вклад в уравнение (3.21) и поэтому может быть отброшено. Однако данное слагаемое необходимо удерживать в дисперсионном уравнении при  $\nu_e = 0$ , а также при сравнительно малых значениях  $\nu_e$ , когда нарушаются условия  $\text{Im } \tilde{Q}_2 \gg 1$ ,  $\text{Im } Q_2 \gg 1$ , поскольку его учёт обеспечивает правильное описание поведения зависимостей  $p''(\omega)$  вблизи минимумов (см. рис. 3.5б и 3.7б).

Уравнение (3.27) позволяет сразу же получить комплексные постоянные распространения  $p = p' - ip''$  слабозатухающих мод в случае (3.18). Очевидно, что слабозатухающие моды отличаются друг от друга числом крупномасштабных вариаций поля по радиусу. Поэтому представляется более естественным нумеровать их в порядке возрастания числа указанных вариаций. Именно с этой целью мы используем обозначение  $n = 1, 2, \dots$  для радиального индекса слабозатухающих мод (см. рис. 3.6). Нетрудно видеть, что действительная часть  $p'_{mn}$  комплексной постоянной распространения  $p_{mn}$  уменьшается по мере



роста  $n$ . Можно убедиться, что дисперсионные характеристики слабозатухающих мод, удовлетворяющих условию (3.18), с достаточно высокой точностью описываются приближённым уравнением (3.27). В качестве примера на рис. 3.6 штрих-пунктирными линиями показаны решения этого уравнения при выбранных значениях параметров. Как видно из представленных данных, решения приближённого уравнения (3.27) весьма близки к решениям строгого дисперсионного уравнения даже в случае, когда условие (3.18) выполняется с небольшим запасом. Что же касается сильнозатухающих мод, для комплексных постоянных распространения которых мы сохраним прежнее обозначение  $p_{m\nu} = p'_{m\nu} - ip''_{m\nu}$ , то их дисперсионные свойства в случае (3.18) допускают приближённое описание лишь на основе уравнения (3.21). Хотя величина  $\text{Im } \tilde{Q}_1$  для сильнозатухающих мод может заметно превышать по абсолютному значению соответствующую величину для слабозатухающих мод и в случае достаточно широкого дакта удовлетворять неравенству  $|\text{Im } \tilde{Q}_1| \gg 1$ , позволяющему существенно упростить уравнение (3.21), в большинстве практически важных случаев данное неравенство не выполняется. Поэтому применительно к сильнозатухающим модам приходится использовать уравнение (3.21).

Описанные особенности разделения мод на сильно- и слабозатухающие имеют место независимо от величины перепада плотности плазмы на границе дакта. Отметим только, что для дакта с малым перепадом плотности ( $\tilde{N} - N_a \ll N_a$ ) две группы мод (с большими и меньшими постоянными затухания) существуют раздельно уже при  $\nu_e = 0$  (подробности см. в [12]).

Процесс разделения мод на слабо- и сильнозатухающие с ростом  $\nu_e$  весьма интересно проследить с помощью рис. 3.8, на котором изображены зависимости реальной и мнимой частей комплексных постоянных распространения мод с азимутальным индексом  $m = 1$  от частоты соударений при  $\omega/\omega_H = 0,083$  (значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$  те же, что и для рис. 3.5, 3.6). Как и прежде, тонкие сплошные линии на рис. 3.8 относятся к сильнозатухающим модам, для постоянных затухания которых имеет место соотношение  $p''/p' \approx \nu_e/\omega$ . Жирные сплошные линии соответствуют слабозатухающим модам с радиальными индексами  $n = 1$  и  $n = 2$ . При  $\nu_e/\omega_H > 2 \cdot 10^{-3}$  для постоянных затухания данных мод справедлива оценка  $p''/p' \sim \nu_e/\omega_H$ , т. е. эти постоянные затухания имеют тот же порядок величины, что и постоянная затухания вистлера, распространяющегося в однородной плазме (с соответствующими значениями параметров) под небольшим углом к внешнему постоянному магнитному полю.

Примечательно, что зависимость постоянной затухания моды с номером  $n = 1$  (см. рис. 3.8б) от частоты соударений  $\nu_e$  имеет хорошо выраженный немонотонный характер. Это видно на рис. 3.9, показывающем начальный участок ( $\nu_e < 0,01\omega_H$ ) зависимости  $p'' = p''_{11}(\nu_e)$  в увеличенном масштабе. В интервале  $4 \cdot 10^{-4} < \nu_e/\omega_H < 2 \cdot 10^{-3}$  величина  $p''$  уменьшается с ростом  $\nu_e$  до зна-

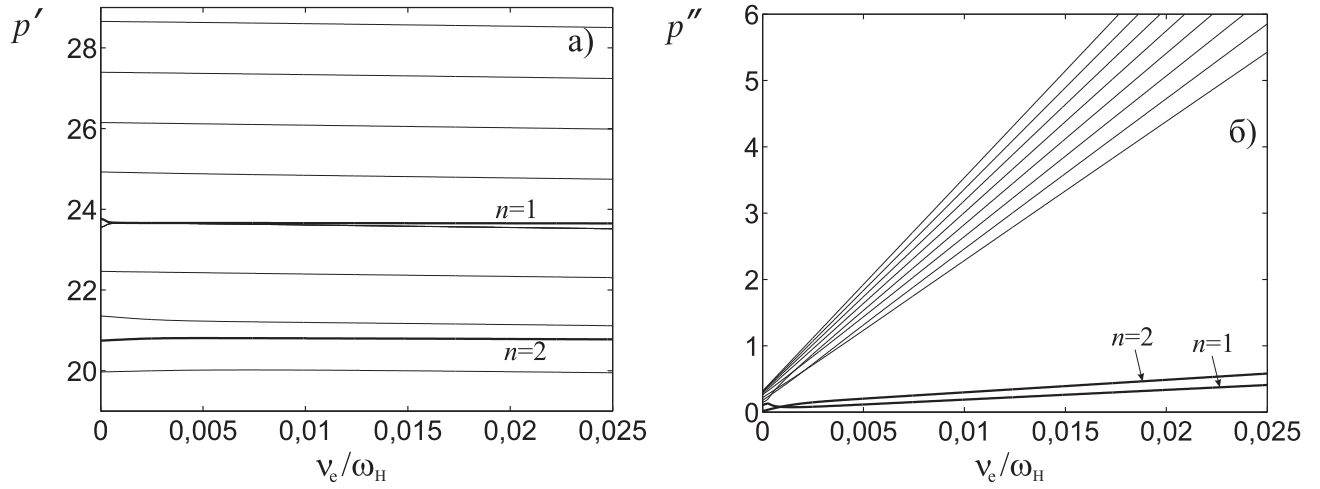


Рис. 3.8. Зависимости величин  $p'$  и  $p''$  от эффективной частоты соударений электронов  $\nu_e$  для слабо- и сильнозатухающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$  при  $\omega/\omega_H = 0,083$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_H a/c = 2,344$ . Жирные линии отвечают слабозатухающим модам с радиальными индексами  $n = 1, 2$ , тонкие линии — сильнозатухающим модам

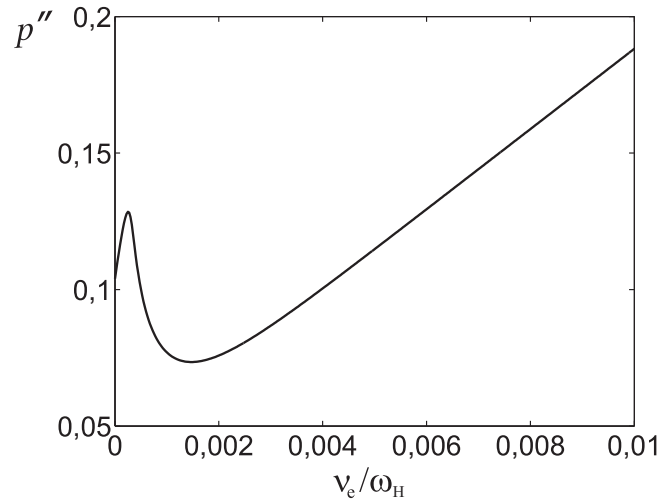


Рис. 3.9. Зависимость постоянной затухания моды с индексами  $m = 1, n = 1$  от эффективной частоты соударений электронов  $\nu_e$  на участке  $\nu_e/\omega_H < 0,01$ . Значения параметров  $\omega/\omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$  те же, что и для рис. 3.8

чения, меньшего, чем значение постоянной затухания в отсутствие соударений электронов, когда потери энергии обусловлены только утечкой моды в окружающую плазму. Сравнительно большое значение  $p''$  при  $\nu_e = 0$  объясняется здесь значительными радиационными потерями моды на выбранной частоте. Существенно, что до начала указанного «переходного» участка ( $\nu_e < 4 \cdot 10^{-4} \omega_H$ ) нарастание постоянной затухания моды при увеличении эффективной частоты соударений происходит по закону, близкому к  $p''/p' \approx \nu_e/\omega_H$ . Заметим, что на частоте  $\omega$ , отвечающей минимуму постоянной затухания в отсутствие соударений, зависимость  $p''(\nu_e)$  растёт с увеличением  $\nu_e$ , начиная с существенно меньшего значения  $p''(\nu_e = 0)$ . В этом случае спадающая часть у данной зависимости отсутствует, а прохождение «переходного» участка, выражается в уменьшении наклона кривой  $p''(\nu_e)$  до значения, соответствующего затуханию крупномасштабных вистлеров в столкновительной плазме. Подчеркнем, что именно при прохождении этого участка происходит изменение распределения поля моды от «двухмасштабной» структуры, отвечающей сравнительно малым значениям  $\nu_e$  (область  $\nu_e < 4 \cdot 10^{-4} \omega_H$  на рис. 3.9), когда поле определяется вкладом двух объемных составляющих (крупномасштабной «свистовой» и мелкомасштабной квазиэлектростатической), к практически «одномасштабной» структуре (область  $\nu_e > 2 \cdot 10^{-3} \omega_H$ ), в которой доминирует крупномасштабная объёмная составляющая, а мелкомасштабная составляющая демонстрирует поверхностный характер, будучи «прижатой» к границе дакта.

Представляется интересным обсудить, возможна ли для слабозатухающей мод ситуация, когда величина  $p''/p'$  оказывается близкой к величине  $\tilde{P}''/\tilde{P}' \simeq \nu_e/(2\omega_H)$ , характеризующей затухание вистлеров при их распространении в однородной магнитоактивной плазме под малыми углами к направлению внешнего магнитного поля. Анализ уравнения (3.27) показывает, что это возможно лишь в случае очень широкого дакта для мод, действительные части комплексных постоянных распространения которых близки к  $\tilde{P}'$ , так что выполняется неравенство  $|\tilde{Q}_1| \ll |S_1|$ . В этом случае можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (3.27), а оставшиеся члены данного уравнения преобразовать следующим образом:

$$\frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} - \frac{m}{\tilde{Q}_1} \left(1 + \frac{\tilde{P}^2}{p^2}\right) \approx \frac{J_{m+1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} - \frac{2m}{\tilde{Q}_1} = -\frac{J_{m-1}(\tilde{Q}_1)}{J_m(\tilde{Q}_1)} \quad (3.28)$$

В результате уравнение (3.27) сводится к виду

$$J_{m-1}(\tilde{Q}_1) = 0. \quad (3.29)$$

Решение уравнения (3.29) удобно искать в форме  $p_{mn} = \tilde{P} - \Delta p_{mn}$ , предполагая, что  $|\Delta p_{mn}| \ll |\tilde{P}|$ . Учитывая формулу (3.20) и приближённое соотношение

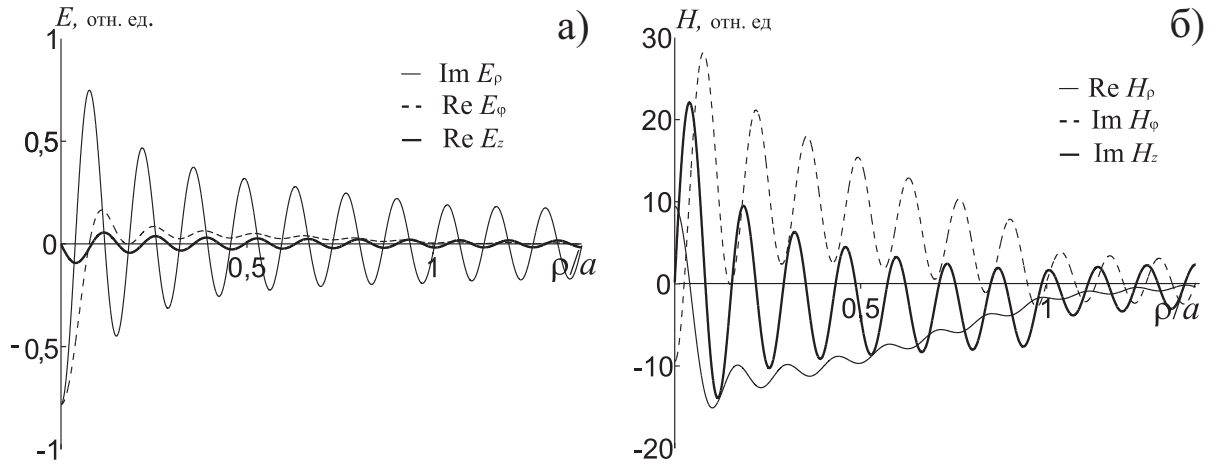


Рис. 3.10. Распределения по поперечной координате компонент поля вытекающей моды с постоянной распространения  $p_{m\nu} = 22,29 - i0,069$  ( $m = 1, \nu = 11$ ) в случае однородного дакта при  $\nu_e = 0, \omega/\omega_H = 0,095, \tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2, \omega_{pa}/\omega_H = 5,623, \omega_H a/c = 2,344$

$\tilde{Q}_1(p_{mn}) \approx 2(k_0 a)(\tilde{P} \Delta p_{mn})^{1/2}$ , из (3.29) имеем

$$p_{mn} = \tilde{P}' \left\{ 1 - \left( \frac{\mu_n^{(m-1)}}{2k_0 a \tilde{P}'} \right)^2 - i \frac{\nu_e}{2\omega_H} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_n^{(m-1)}}{2k_0 a \tilde{P}'} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.30)$$

где  $\mu_n^{(m)}$  —  $n$ -ый нуль функции Бесселя  $J_m$ . Решение в виде (3.30) справедливо при условии  $2k_0 a |\tilde{P}'| \gg \mu_n^{(m-1)}$ . Отсюда следует, что в общем случае соотношение  $p_{mn}''/p_{mn}' \approx \nu_e/(2\omega_H)$  имеет место, если радиус дакта значительно превышает характерную длину волны вистлера  $\lambda_w = 2\pi/(k_0 \tilde{P}')$ . Исключение составляет особый случай основной несимметричной моды с азимутальным индексом  $m = 1$ , которая может существовать при любом значении радиуса дакта [9, 12] и постоянная распространения которой стремится к величине  $P \approx P' [1 - i\nu_e/(2\omega_H)]$  при  $a \rightarrow 0$ . Очевидно, что в этом случае для описания дисперсионных характеристик данной моды приближённое уравнение (3.29) непригодно и необходимо использовать строгое дисперсионное уравнение.

### 3.4.2. Дисперсионные характеристики мод дакта с пониженной плотностью плазмы

Приведём результаты численных расчётов дисперсионных зависимостей  $p(\omega)$  собственных мод, направляемых дактами с пониженной плотностью. Расчёты были выполнены для однородного дакта с резкой границей радиуса  $a$  и неоднородного дакта, плотность плазмы в котором при  $a_0 < \rho < a_1$  имеет вид:

$$N(\rho) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{N} + N_a + (\tilde{N} - N_a) \sin[\pi(a - \rho)/(a_1 - a_0)] \right\}, \quad (3.31)$$

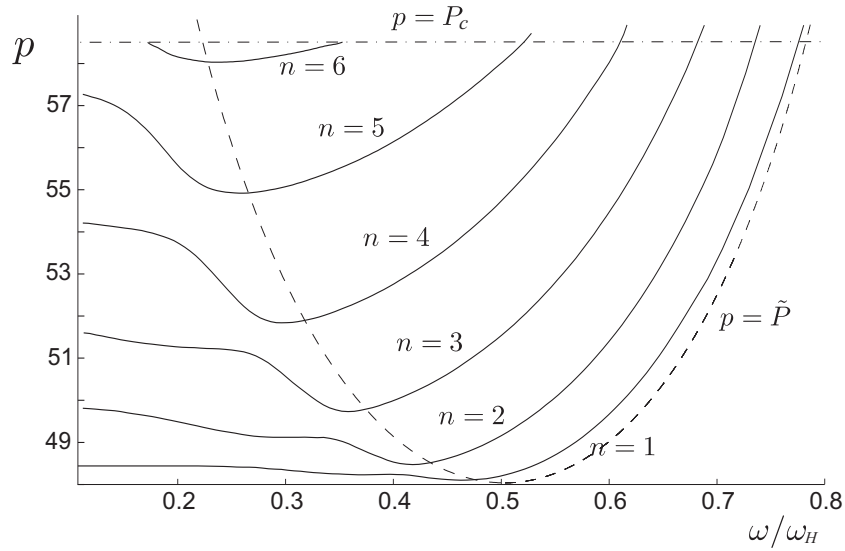


Рис. 3.11. Дисперсионные кривые  $p_{mn}(\omega)$  азимутально-симметричных ( $m = 0$ ) объемных мод неоднородного дакта с размытой границей при  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 0,82$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 29,3$ ,  $\omega_H a/c = 0,42$ ,  $a_0/a = 0,8$ ,  $a_1/a = 1,2$ . Штриховой и штрих-пунктирными линиями показаны зависимость  $p = \tilde{P}(\omega)$  и верхняя граница  $p = P_c$  области (3.25) соответственно [54].

где  $N_a > \tilde{N}$ . Для проведения расчетов были использованы следующие значения безразмерных параметров:  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 0,82$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 29,3$ ,  $\omega_H a/c = 0,42$ ,  $a_0/a = 0,8$ ,  $a_1/a = 1,2$ . Указанные значения безразмерных параметров являются типичными для лабораторных экспериментов, в которых наблюдаются дакты с пониженной плотностью. Укажем также значения величин  $\tilde{P}_c = 47,8$  и  $P_c = 58,6$ , отвечающие выбранным параметрам.

На рис. 3.11 представлены дисперсионные кривые  $p_{mn}(\omega)$  азимутально-симметричных ( $m = 0$ ) объемных собственных мод неоднородного дакта с размытой границей. Аналогичные зависимости для однородного дакта с резкой границей изображены на рис. 3.12. Штриховой и штрих-пунктирными линиями на этих рисунках показаны величины  $\tilde{P}$  и  $P_c$  соответственно в зависимости от частоты  $\omega$ . Как видно из представленных данных, дакт с пониженной плотностью при выбранных параметрах поддерживает шесть собственных мод, постоянные распространения которых на частотах, принадлежащих диапазону (1.56), лежат в области (3.17). В этом случае при  $\omega < \omega^{(-)}$  реализуется неравенство  $P_c < \tilde{P}$ , что отвечает рис. 3.2а. На бóльших частотах, когда  $\omega^{(-)} < \omega < \omega_H/2$ , что отвечает рис. 3.2б, дисперсионные кривые пересекают линию  $p = \tilde{P}(\omega)$ , после чего геликонная составляющая полей мод приобретает поверхностный характер. Далее, в диапазоне (1.57), дисперсионные кривые по мере роста частоты непрерывно переходят из области  $\tilde{P} < p < P_c$  в область  $P_c < p < P$ . Заметим, что в данном частотном диапазоне сперва имеет место ситуация, соответствующая рис. 3.3б (при  $\omega_H/2 < \omega < \omega^{(+)}$ ), а уже затем (при  $\omega^{(+)} < \omega < \omega_H$ ) реализуется случай, показанный на рис. 3.3а.

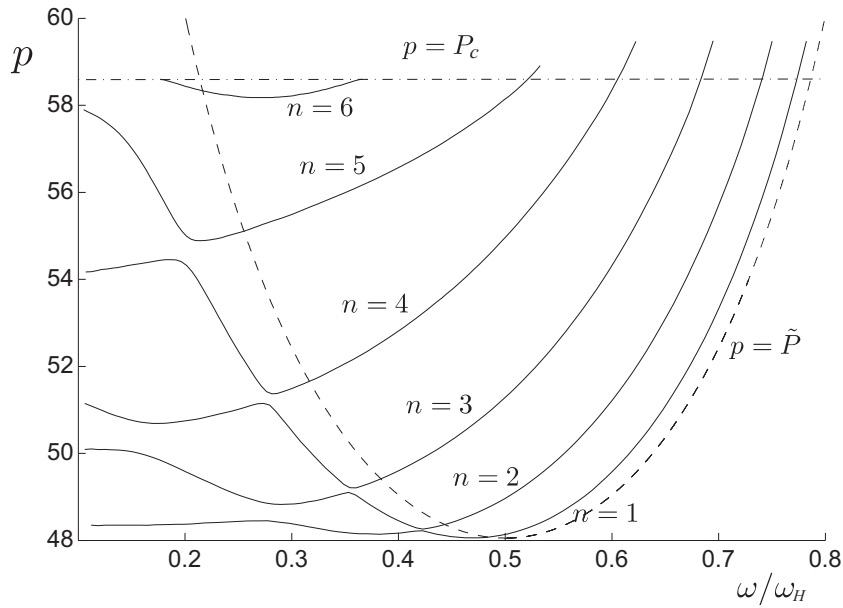


Рис. 3.12. Дисперсионные кривые  $p_{mn}(\omega)$  азимутально-симметричных ( $m = 0$ ) объемных мод однородного дакта с резкой границей. Значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$  и обозначения те же, что и для рис. 3.11 [54]

Из приведенных выше зависимостей видно, что постоянные распространения объемных собственных мод меняются незначительно при переходе от неоднородного дакта с размытой границей к однородному дакту с резкой границей. Данный вывод остается справедливым и для несимметричных мод. Поэтому далее мы приведем дисперсионные кривые несимметричных мод лишь для однородного дакта. Такие кривые для мод с азимутальным индексом  $m = 1$  показаны в качестве примера на рис. 3.13 при тех же значениях безразмерных параметров, что и для рис. 3.12. Как видно из рис. 3.13, дисперсионные зависимости несимметричных мод качественно не отличается от дисперсионных кривых, полученных в случае  $m = 0$ .

Заметим, что при увеличении радиуса дакта  $a$  постоянная распространения фиксированной объемной моды сдвигается вниз, а при уменьшении  $a$  — вверх. В последнем случае степень локализации поля моды в окружающем пространстве ( $\rho > a_1$ ) уменьшается. Если же величина  $p$  достигает верхней границы области существования моды (т.е.  $p = P_c$  при  $\omega < \omega_H/2$  или  $p = P$  при  $\omega_H/2 < \omega < \omega_H$ ), то соответствующая мода становится вытекающей (несобственной).

Следует подчеркнуть, что несмотря на наличие спадающих участков у зависимостей  $p_{mn}(\omega)$  на рис. 3.11–3.13 все исследованные моды являются прямыми, поскольку производная  $d\omega/d(k_0 p)$ , определяющая групповую скорость

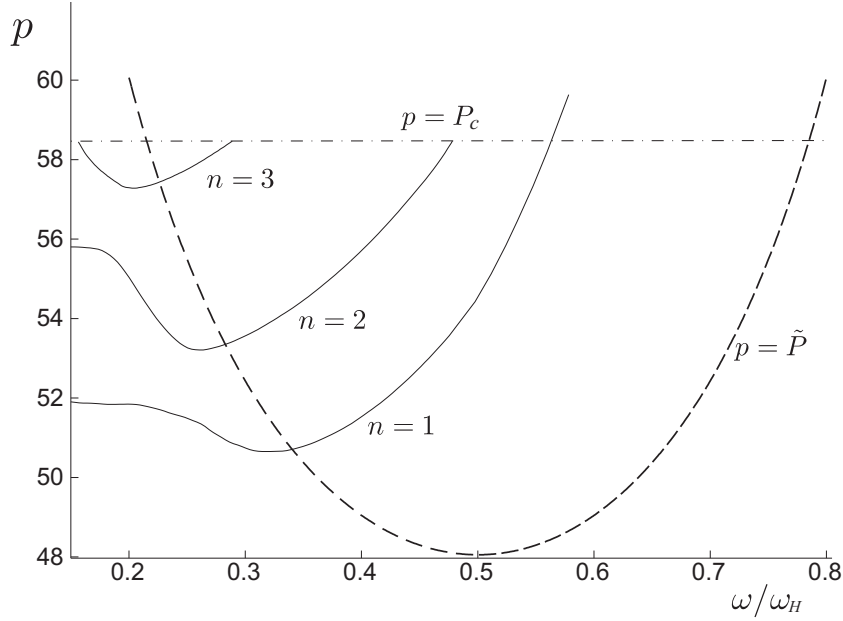


Рис. 3.13. Дисперсионные кривые  $p_{mn}(\omega)$  объемных мод с азимутальным индексом  $m = 1$  в случае однородного дакта с резкой границей. Значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$  и обозначения те же, что и для рис. 3.11 [54]

$v_g$  мод, является положительной для всех частот  $\omega$ :

$$v_g = c \left( p + \omega \frac{dp}{d\omega} \right)^{-1} > 0. \quad (3.32)$$

При этом в точках, где  $dp/d\omega = 0$ , групповая скорость моды совпадает с ее фазовой скоростью  $c/p$ .

Дисперсионные кривые  $p_m(\omega)$  поверхностных мод с азимутальными индексами  $m = 0$ ,  $m = 1$  в случае неоднородного дакта показаны сплошными линиями на рис. 3.14 (значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ ,  $a_0/a$ ,  $a_1/a$  прежние). Там же штриховыми линиями показаны соответствующие зависимости для однородного дакта с резкой границей. Как следует из рис. 3.14, кривые  $p_{m0}(\omega)$  для поверхностных мод, направляемых дактом с пониженной плотностью, лежат в области (3.16). Кроме того, как и в случае объемных мод, изменения дисперсионных кривых поверхностных мод при переходе от неоднородного дакта с размытой границей к однородному дакту с резкой границей оказываются незначительными.

Примечательно, что все исследованные собственные (локализованные) моды являются «быстрыми» в том смысле, что их фазовые скорости превосходят фазовую скорость  $c/P$  однородной плоской волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля в фоновой плазме, а в диапазоне (1.56) — и фазовую скорость  $c/P_c$  волн конической рефракции в том же направлении. Следует иметь в виду, что данное свойство связано с гиротропией магнитоактивной

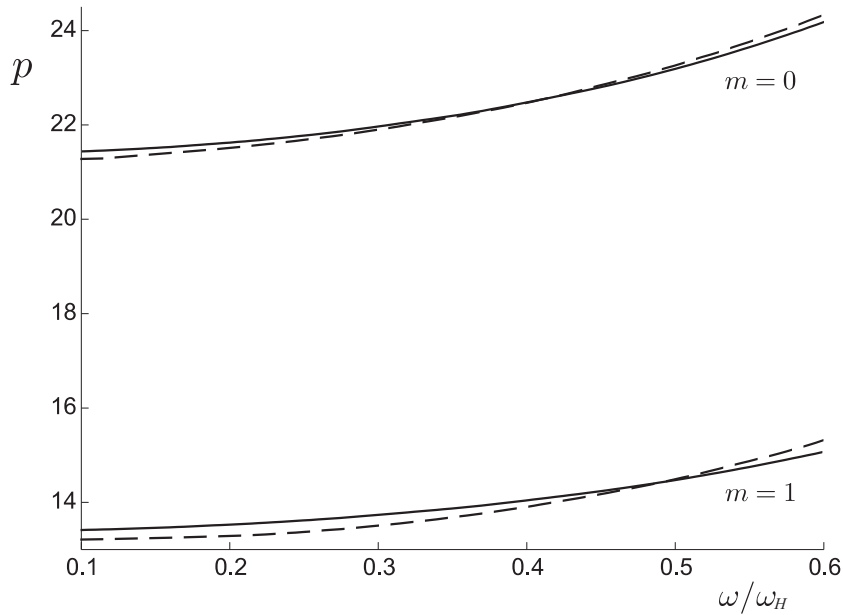


Рис. 3.14. Дисперсионные кривые  $p_m(\omega)$  поверхностных мод с азимутальными индексами  $m = 0, 1$  в случаях неоднородного дакта с размытой границей (сплошные линии) и однородного дакта с резкой границей (штриховые линии). Значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ ,  $a_0/a$ ,  $a_1/a$  те же, что и для рис. 3.11 [54]

плазменной среды, окружающей дакт, и не может наблюдаться у собственных мод открытых направляющих систем, находящихся в негиротропной среде.

Как и для дакта с повышенной плотностью плазмы для рассматриваемого случая наличие электронных соударений (даже сравнительно слабых) приводит при определенных условиях к более существенным эффектам — в частности, к заметным изменениям дисперсионных характеристик и структуры поля объемных мод. Что касается поверхностных мод, для них, в отличие от объемных, наличие малых столкновительных потерь проявляется лишь в появлении затухания.

Для анализа влияния столкновительных потерь на свойства мод, направляемых дактом с пониженной плотностью, мы ограничимся далее рассмотрением азимутально-симметричных объемных мод однородного дакта с резкой границей, считая, что эффективная частота электронных соударений  $\nu_e$  не зависит от радиальной координаты. Такая ситуация имеет место, если величина  $\nu_e$  определяется электрон-нейтральными соударениями, частота которых не зависит от распределения плотности плазмы. Все основные особенности влияния столкновительных потерь на свойства объемных мод могут быть выяснены в рамках этого частного случая.

При наличии столкновений в плазме дисперсионные кривые разделяются на два семейства, отвечающие слабозатухающим и сильнозатухающим модам с различным поведением мнимой части величины  $\tilde{Q}_2 = k_0 a \tilde{q}_2$ . Заметим, что в



случае  $|p| \gg |\tilde{P}_c|$  справедлива следующая приближенная формула:

$$\text{Im } \tilde{Q}_2 = k_0 a p' \frac{\omega_{\text{H}}}{\omega [1 + (\nu_e/\omega)^2]} \left( \frac{\nu_e}{\omega} - \frac{p''}{p'} \right). \quad (3.33)$$

Для слабозатухающих мод имеет место соотношение  $\nu_e/(2\omega_{\text{H}}) < p'/p'' \ll \nu_e/\omega$ . При этом в области частот  $\omega \ll \omega_{\text{H}}$  для таких мод выполняется неравенство

$$|\text{Im } \tilde{Q}_2| = k_0 a p' \frac{\omega_{\text{H}} \nu_e}{\omega^2 [1 + (\nu_e/\omega)^2]} \gg 1. \quad (3.34)$$

Для достаточно широкого дакта, когда неравенство (3.34) выполняется с большим запасом, постоянные затухания соответствующих слабозатухающих мод определяются по порядку величины соотношением  $p'' \simeq (\nu_e/2\omega_{\text{H}})p'$ .

Условие (3.34) означает, что при наличии столкновительных потерь для квазиэлектростатической составляющей поля слабозатухающих мод имеет место явление, аналогичное скин-эффекту: мелкомасштабная составляющая оказывается «прижатой» к границе дакта, так что поле во внутренней области дакта определяется преимущественно крупномасштабной геликонной составляющей.

В случае же сильнозатухающих мод, для постоянных затухания которых имеет место соотношение  $p''/p' \sim \nu_e/\omega \gg \nu_e/\omega_{\text{H}}$ , выполняется неравенство  $|\text{Im } \tilde{Q}_2| \ll 1$ . В результате у данных мод квазиэлектростатическая составляющая поля имеет объемный характер, а «прижатой» к стенке дакта оказывается крупномасштабная составляющая (вследствие увеличения мнимой части величины  $\tilde{Q}_1 = k_0 a \tilde{q}_1$ ). В силу отмеченных обстоятельств моды с такой структурой поля испытывают гораздо большее затухание, близкое к затуханию квазиэлектростатических волн в однородной столкновительной магнитоактивной плазме.

Сказанное иллюстрируется представленными на рис. 3.15 результатами численных расчетов дисперсионных зависимостей первых четырех азимутально-симметричных объемных мод однородного дакта с пониженной плотностью при  $\nu_e/\omega_{\text{H}} = 0,02$  и тех же значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_p/\omega_{\text{H}}$ ,  $\omega_{\text{H}}a/c$ , что и для на рис. 3.12. Как видно из рис. 3.15 при наличии столкновительных потерь участки некоторых дисперсионных кривых  $p'(\omega)$  «объединяются» в единую ветвь, отвечающую слабозатухающей моде с номером  $n = 1$ , поле которой определяется крупномасштабной геликонной составляющей. Остальные участки кривых на рис. 3.15 образуют дисперсионные зависимости сильнозатухающих мод, основной вклад в поля которых дает мелкомасштабная квазиэлектростатическая составляющая. Естественно, что в этом случае нумерация мод по  $n$  отличается от их нумерации при отсутствии столкновительных потерь. Таким образом, наличие столкновительных потерь приводит в случае дакта с пониженной плотностью к селекции мод по постоянным затуханиям так же, как

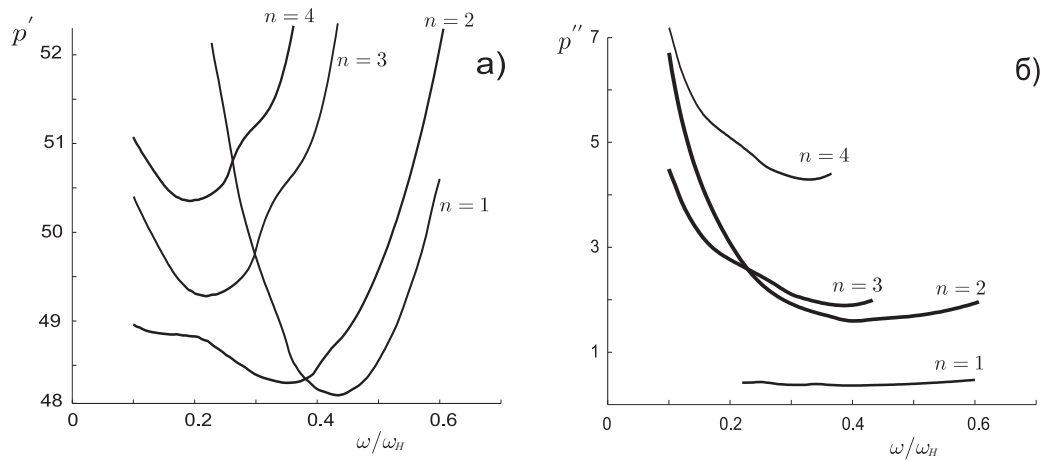


Рис. 3.15. Дисперсионные кривые  $p_{mn}(\omega)$  четырех азимутально-симметричных ( $m = 0$ ) объемных мод однородного дакта с резкой границей при  $\nu_e/\omega_H = 0,02$ ,  $\tilde{\omega}_p/\tilde{\omega}_{pa} = 0,82$ ,  $\tilde{\omega}_{pa}/\omega_H = 29,3$ ,  $\omega_H a/c = 0,42$ .

это имеет место в свистовом диапазоне частот для мод дактов с повышенной плотностью.

## 3.5. Структура полей мод

### 3.5.1. Структура полей мод дакта с повышенной плотностью плазмы

Отмеченные особенности поведения мод наглядно иллюстрируются пространственными распределениями их полей в зависимости от уровня столкновительных потерь в плазме. Ниже представлены распределения по радиусу компонент полей объемных мод с азимутальным индексом  $m = 1$  для  $\omega/\omega_H = 0,095$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_H a/c = 2,344$  при отсутствии и наличии столкновительных потерь. На рис. 3.10 показаны распределения компонент поля вытекающей моды с радиальным индексом  $\nu = 11$  и комплексной постоянной распространения  $p_{m\nu} = 22,29 - i0,069$  в случае  $\nu_e = 0$ . При учёте столкновительных потерь эта мода трансформируется в слабозатухающую моду с радиальным индексом  $n = 1$ , распределения компонент поля которой изображены на рис. 3.16 в случае  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$ . Комплексная постоянная распространения данной моды составляет  $p_{mn} = 22,35 - i0,243$ . Во избежание недоразумений отметим, что на приведённых здесь и далее графиках не изображены зависимости величин  $\text{Re } E_\rho$ ,  $\text{Im } E_\varphi$ ,  $\text{Im } E_z$ ,  $\text{Im } H_\rho$ ,  $\text{Re } H_\varphi$ ,  $\text{Re } H_z$  от поперечной координаты  $\rho$ , которые при используемой нормировке поля существенно меньше по абсолютному значению, чем величины  $\text{Im } E_\rho$ ,  $\text{Re } E_\varphi$ ,  $\text{Re } E_z$ ,  $\text{Re } H_\rho$ ,  $\text{Im } H_\varphi$ ,  $\text{Im } H_z$  соответственно. Как отмечалось выше, это связано с тем, что поле любой моды определяется с точностью до произвольного

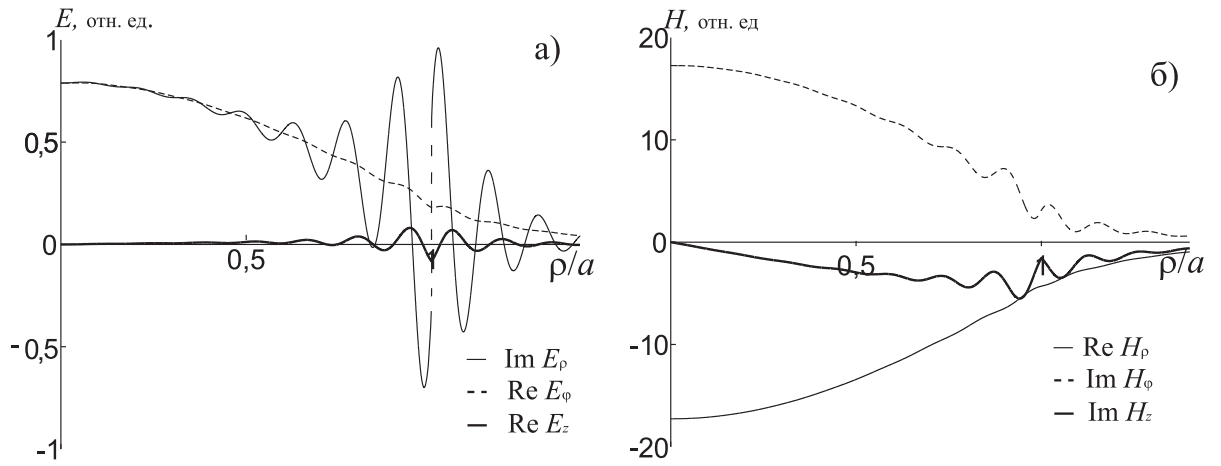


Рис. 3.16. Распределения по поперечной координате компонент поля слабозатухающей моды с постоянной распространения  $p_{mn} = 22,35 - i0,243$  ( $m = 1, n = 1$ ) в случае однородного дакта при  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ; значения параметров  $\omega/\omega_H, \tilde{\omega}_p/\omega_{pa}, \omega_{pa}/\omega_H, \omega_H a/c$  те же, что и для рис. 3.10

комплексного множителя. При  $p'' \ll p'$  этот множитель может быть выбран таким образом, чтобы выполнялось указанное условие. Сравнение графиков на рис. 3.10 и 3.16 показывает, что поле слабозатухающей моды действительно характеризуется преобладающим вкладом крупномасштабной составляющей с поперечными волновыми числами  $\tilde{q}_1$  и  $s_1$  внутри и вне дакта соответственно.

На рис. 3.17 изображены распределения компонент поля сильнозатухающей моды (азимутальный индекс  $m = 1$ ), действительная часть  $p'_{mv}$  комплексной постоянной распространения которой наиболее близка к соответствующей величине  $p'_{mn}$  для слабозатухающей моды с индексами  $m = 1, n = 1$  (см. рис. 3.16):  $p_{mv} = 22,40 - i3,432$  (значения параметров  $\nu_e/\omega_H, \omega/\omega_H, \tilde{\omega}_p/\omega_{pa}, \omega_{pa}/\omega_H, \omega_H a/c$  те же, что и для рис. 3.16). Заметим, что обсуждаемая сильнозатухающая мода является несобственной. Как видно из рис. 3.17, основной вклад в её поле даёт мелкомасштабная квазиэлектростатическая составляющая, отвечающая поперечным волновым числам  $\tilde{q}_2$  и  $s_2$ .

Из представленных данных следует, что слабо- и сильнозатухающие моды с близкими значениями  $p'$ , одновременно существующие в дакте с повышенной плотностью при наличии столкновительных потерь, имеют совершенно различные структуры поля в отличие от случая, когда столкновительные потери отсутствуют и моды с близкими значениями постоянных распространения имеют сходные распределения поля (см. [12]).

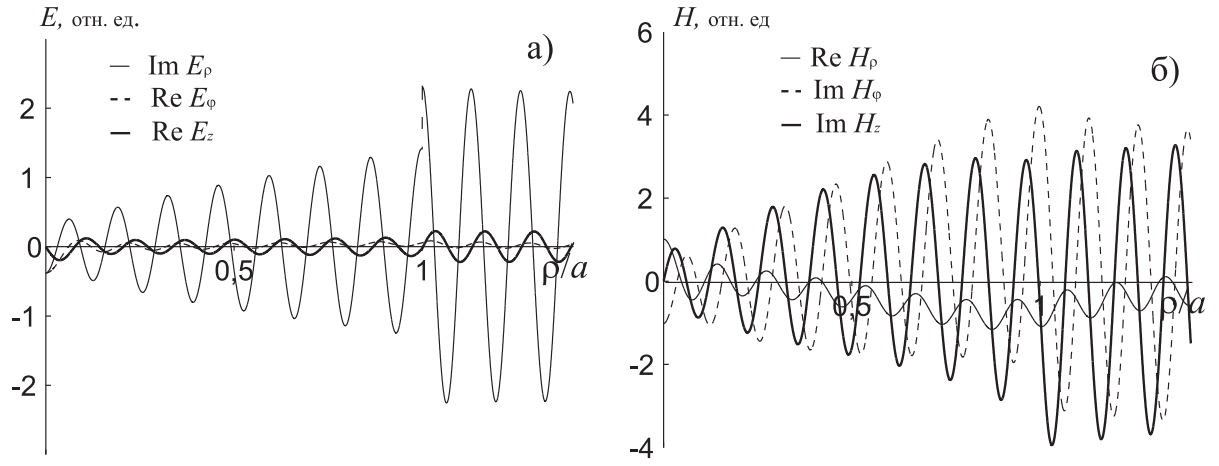


Рис. 3.17. Распределения по поперечной координате компонент поля сильнозатухающей моды с постоянной распространения  $p_{m\nu} = 22,40 - i3,432$  ( $m = 1$ ) в случае однородного дакта; значения параметров  $\nu_e/\omega_H$ ,  $\omega/\omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$  те же, что и для рис. 3.16

### 3.5.2. Влияние неоднородности дакта плотности в поперечном направлении на свойства мод

Для снятия возможных вопросов, связанных с проведённым выше рассмотрением применительно к случаю однородного дакта с резкой границей, обсудим поведение мод для дакта с плавным профилем плотности плазмы. Поскольку представление результатов для всех возможных частных случаев заняло бы слишком много места, мы остановимся лишь на свойствах объёмных мод, полагая, что распределение плотности плазмы по координате  $\rho$  описывается при  $\rho < a$  следующим модельным профилем:

$$\tilde{N}(\rho) = \begin{cases} \tilde{N}(0) = \text{const}, & \rho < \tilde{a}; \\ \frac{1}{2} \left[ \tilde{N}(0) + N_a + (\tilde{N}(0) - N_a) \sin \frac{\pi(a_0 - \rho)}{a - \tilde{a}} \right], & \tilde{a} < \rho < a, \end{cases} \quad (3.35)$$

где  $a_0 = (\tilde{a} + a)/2$ ,  $N_a$  — плотность фоновой плазмы при  $\rho > a$ . Эффективную частоту соударений  $\nu_e$  считаем для простоты не зависящей от пространственных координат. Так же, как и в предыдущем разделе, мы будем считать, что величины  $\tilde{\omega}_p$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{P}_c$  относятся к однородной плазме с плотностью  $N = \tilde{N}(0)$ , а величины  $\omega_{pa}$ ,  $P$ ,  $P_c$  — к однородной плазме с плотностью  $N = N_a$ .

Отметим сразу же, что переход к случаю неоднородного дакта не выявил каких-либо принципиальных отличий в поведении дисперсионных характеристик и структуры поля мод от случая однородного дакта. Так, представляющие основной интерес несобственные моды (при  $\nu_e = 0$ ) имеют комплексные постоянные распространения  $p = p' - ip''$ , действительные части которых лежат по-прежнему в области  $p' > \tilde{P}_c$ . Как и ранее, в случае (3.10) такие моды являются слабовытекающими. При учёте электронных соударений так

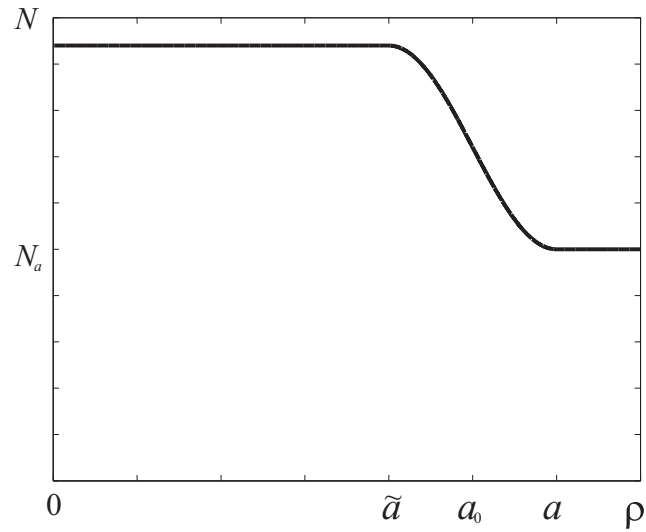


Рис. 3.18. Распределение плотности плазмы в неоднородном дакте, используемое при проведении численных расчётов:  $\tilde{N}(0)/N_a = 1,44$ ,  $a_0 = (\tilde{a} + a)/2$

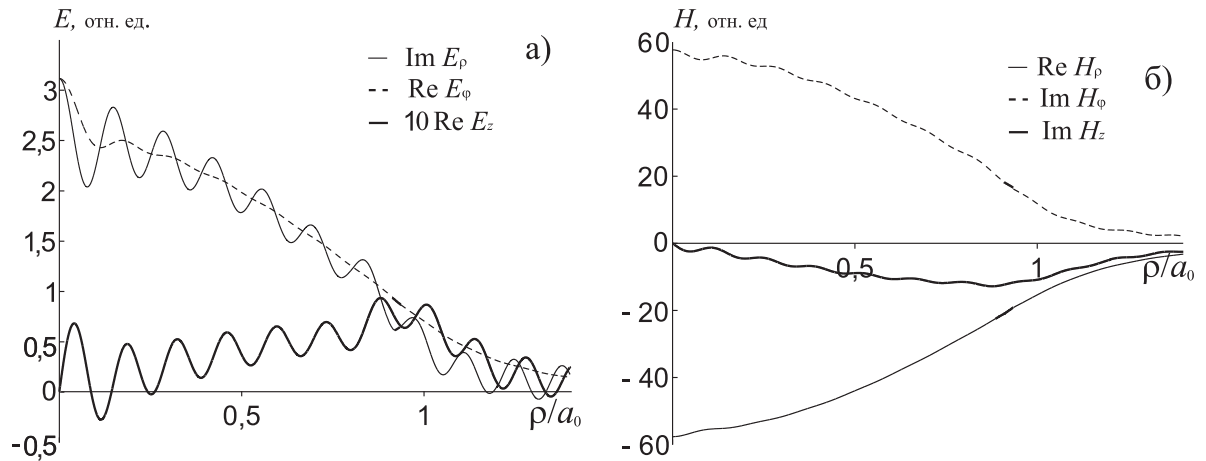


Рис. 3.19. Распределения по поперечной координате компонент поля вытекающей моды с постоянной распространения  $p_{m\nu} = 22,32 - i0,018$  ( $m = 1$ ) в случае неоднородного дакта при  $\nu_e = 0$ ,  $\omega/\omega_H = 0,095$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_H a_0/c = 2,344$

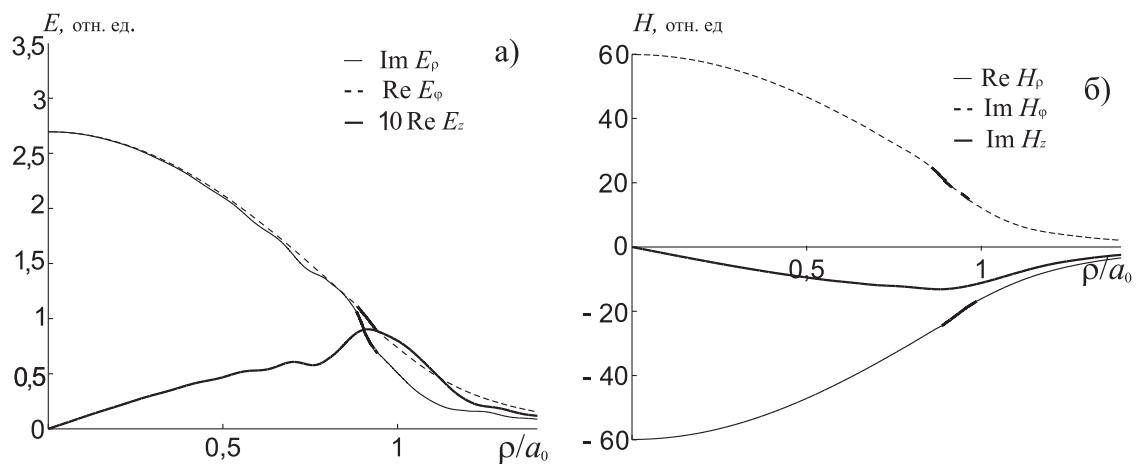


Рис. 3.20. Распределения по поперечной координате компонент поля слабозатухающей моды с постоянной распространения  $p_{mn} = 22,33 - i0,216$  ( $m = 1, n = 1$ ) в случае неоднородного дакта при  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ; значения параметров  $\omega/\omega_H, \tilde{\omega}_p/\omega_{pa}, \omega_{pa}/\omega_H, \omega_H a_0/c$  те же, что и для рис. 3.19

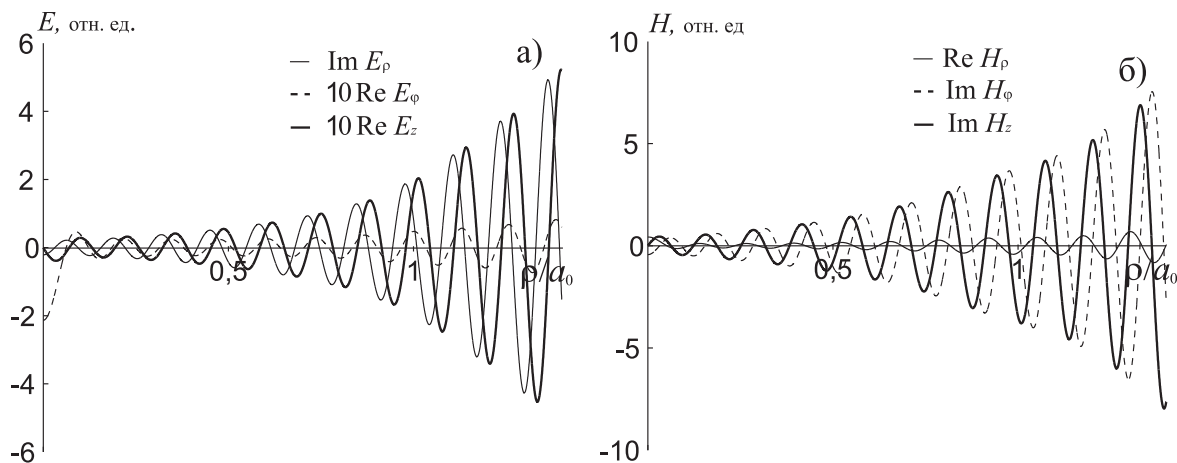


Рис. 3.21. Распределения по поперечной координате компонент поля сильнозатухающей моды с постоянной распространения  $p_{mv} = 22,68 - i4,414$  ( $m = 1$ ) в случае неоднородного дакта; значения параметров  $\nu_e/\omega_H, \omega/\omega_H, \tilde{\omega}_p/\omega_{pa}, \omega_{pa}/\omega_H, \omega_H a_0/c$  те же, что и для рис. 3.20

же, как и в случае однородного дакта, происходит разделение мод на слабо- и сильнозатухающие. Поэтому здесь мы ограничимся лишь тем, что представим распределение полей мод при наличии и отсутствии столкновительных потерь для профиля плотности (3.35). Эффективную частоту соударений  $\nu_e$  считаем для простоты не зависящей от пространственных координат.

Расчёты были выполнены для следующих значений параметров:  $\omega/\omega_H = 0,095$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 1,2$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 5,623$ ,  $\omega_H a_0/c = 2,344$ ,  $\tilde{a}/a_0 = 0,8$ ,  $a/a_0 = 1,2$ . Вид профиля (3.35) при выбранных значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\tilde{a}/a_0$ ,  $a/a_0$  показан на рис. 3.18.

Распределения компонент поля одной из вытекающих мод с азимутальным индексом  $m = 1$  при  $\nu_e = 0$  и указанных выше значениях остальных параметров изображены на рис. 3.19. Постоянная распространения данной моды составляет  $p_{mv} = 22,32 - i0,018$ . Сравнение рис. 3.19 с соответствующими распределениями для случая однородного дакта с резкой границей показывает, что переход к плавному профилю плотности не приводит к появлению в структуре поля каких-то принципиально новых особенностей при отсутствии столкновительных потерь в плазме. Меньший вклад мелкомасштабной составляющей в поле моды по сравнению со случаем однородного дакта (см. рис. 3.10.) связан здесь не только с неоднородностью дакта в поперечном направлении, но и с тем, что постоянная затухания рассматриваемой моды при используемых значениях параметров находится не столь близко к локальному максимуму  $p''_{\max}$  осциллирующей зависимости  $p''(\omega)$ , как это имеет место для моды, поле которой показано на рис. 3.10.

Влияние столкновительных потерь на структуру поля мод с тем же значением индекса  $m$  иллюстрируют рис. 3.20 и 3.21, построенные для  $\nu_e/\omega_H = 1,5 \cdot 10^{-2}$  (значения остальных параметров прежние). На рис. 3.20 показаны распределения компонент поля слабозатухающей моды с радиальным индексом  $n = 1$  и постоянной распространения  $p_{mn} = 22,33 - i0,216$ . Именно в эту моду трансформируется мода, поле которой представлено на рис. 3.19. На рис. 3.21 изображены аналогичные распределения для сильнозатухающей моды, действительная часть  $p'_{mv}$  комплексной постоянной распространения которой ( $p_{mv} = 22,68 - i4,414$ ) наиболее близка к соответствующей величине для слабозатухающей моды с радиальным индексом  $n = 1$  (см. рис. 3.20). Из распределений на рис. 3.21 хорошо видно, что данная сильнозатухающая мода является нелокализованной (несобственной). Таким образом, очевидно, что учёт столкновительных потерь приводит в случае радиально-неоднородного дакта к тем же последствиям, что и в случае однородного дакта.

Приведённые выше результаты относятся к объёмным несимметричным модам с азимутальным индексом  $m = 1$ . Нетрудно убедиться, что изученные особенности поведения дисперсионных характеристик и полей мод при учёте столкновительных потерь в плазме имеют место независимо от значения  $m$ .

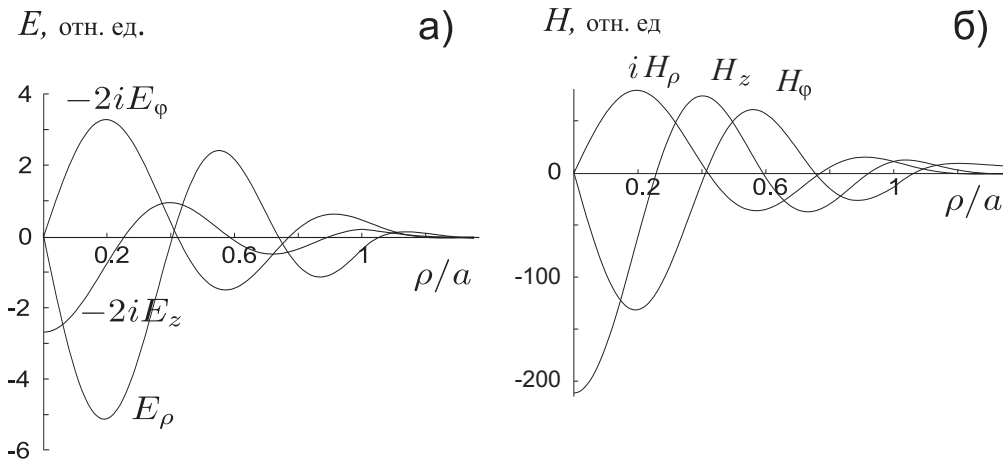


Рис. 3.22. Распределения по поперечной координате компонент поля низшей ( $n = 1$ ) азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) объемной собственной моды неоднородного дакта с размытой границей при  $\omega/\omega_H = 0,2$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa} = 0,82$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H = 29,3$ ,  $\omega_H a/c = 0,42$ ,  $a_0/a = 0,8$ ,  $a_1/a = 1,2$ ; постоянная распространения моды  $p_{01} = 48,44$  [54]

Поэтому мы не останавливаемся на обсуждении поведения мод с другими значениями азимутального индекса.

### 3.5.3. Структура полей мод дакта с пониженной плотностью плазмы

Перейдем к рассмотрению структуры поля собственных мод, направляемых дактами с пониженной относительно фона плотностью плазмы.

На рис. 3.22 изображены распределения компонент поля низшей ( $n = 1$ ) азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) объемной собственной моды по поперечной координате  $\rho$  для дакта с профилем плотности (3.31) при  $\omega/\omega_H = 0,2$  и тех же значениях параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_p/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ ,  $a_0/a$ ,  $a_1/a$  что и на рис. 3.11. Постоянная распространения данной моды составляет  $p_{01} = 48,44$ . Для сравнения на рис. 3.23 представлены зависимости компонент поля моды с индексами  $m = 0$  и  $n = 3$  (постоянная распространения  $p_{03} = 51,26$ , частота и параметры дакта прежние). Отметим, что распределения полей мод в случае дакта с резкой границей мало отличается от аналогичных зависимостей, полученных для дакта с размытой границей.

Поскольку постоянные распространения рассматриваемых мод меньше величины  $\tilde{P}$ , поперечные волновые числа  $\tilde{q}_{1,2}$  во внутренней области дакта являются действительными, так что поля мод в этой области имеют объемный характер. В окружающей плазме поперечные волновые числа оказываются комплексными, причем  $s_1 = s_2^*$ . Поэтому в области  $\rho > a_1$  компоненты поля характеризуются наличием осцилляций, амплитуда которых экспоненциально убывает в поперечном направлении с увеличением расстояния от оси дакта.



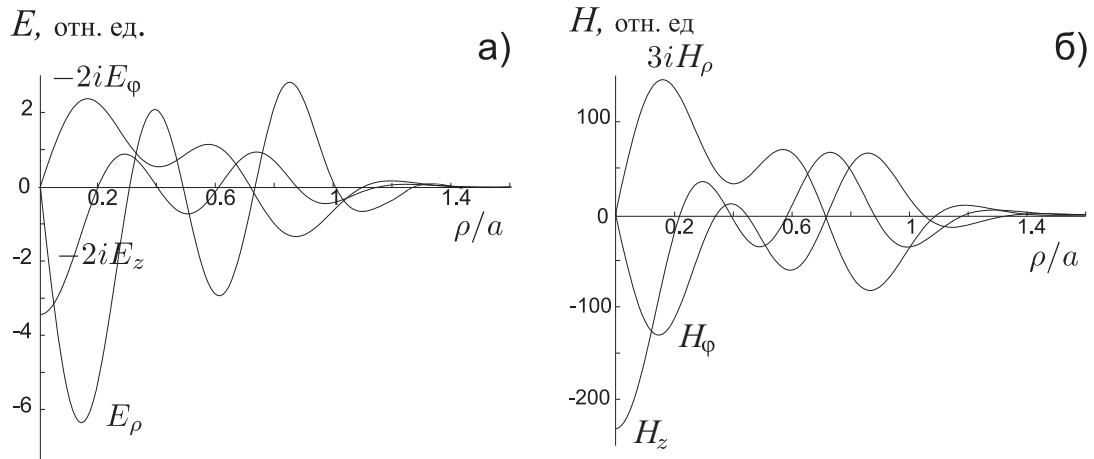


Рис. 3.23. Распределения по поперечной координате компонент поля азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) объемной собственной моды с радиальным индексом  $n = 3$  в случае неоднородного дакта с размытой границей. Значения параметров  $\omega/\omega_n$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_n$ ,  $\omega_n a/c$ ,  $a_0/a$ ,  $a_1/a$  те же, что и для рис. 3.22; постоянная распространения моды  $p_{03} = 51,26$  [54]

Отметим, что для моды с  $n = 1$ , когда значения поперечных волновых чисел  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  достаточно близки друг к другу, различие между пространственными составляющими поля моды, отвечающими этим числам, практически незаметно (см. рис. 3.22). Напротив, для мод с большими значениями  $n$ , когда  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  значительно различаются, наличие двух составляющих становится хорошо заметным (см. рис. 3.23). С ростом  $n$  количество мелкомасштабных осцилляций поля по радиальной координате увеличивается, а крупномасштабных — уменьшается. В результате структура поля таких мод оказывается похожей на структуру поля мод, направляемых дактами с повышенной плотностью. Однако в отличие от рассматриваемых здесь собственных мод объемные моды дактов с повышенной плотностью являются в диапазоне частот (1.55) вытекающими (несобственными).

На рис. 3.24 представлено распределение компонент поля поверхностной азимутально-симметричной собственной моды при  $\omega/\omega_n = 0,2$  (остальные параметры прежние). Поскольку постоянная распространения данной моды  $p_0 = 21,7$  меньше величины  $\tilde{P}_c$ , поперечные волновые числа  $\tilde{q}_{1,2}$  так же, как и величины  $s_{1,2}$ , являются здесь комплексно-сопряженными. Именно поэтому поле моды оказывается «прижатым» к «стенке» дакта с обеих сторон.

Заметим, что структуры полей несимметричных объемных и поверхностных мод оказываются аналогичными представленным здесь распределениям для случая  $m = 0$  при выбранных значениях параметров. Поэтому в специальном обсуждении поведения полей несимметричных мод нет необходимости.

На рис. 3.25, 3.26 для  $\nu_e/\omega_n = 0,02$ ,  $\omega/\omega_n = 0,3$  (значения параметров  $\tilde{\omega}_p/\omega_p$ ,  $\omega_p/\omega_n$ ,  $\omega_n a/c$  прежние) представлены распределения компонент полей азимутально-симметричных ( $m = 0$ ) мод. Рисунок 3.25 отвечает слабозату-

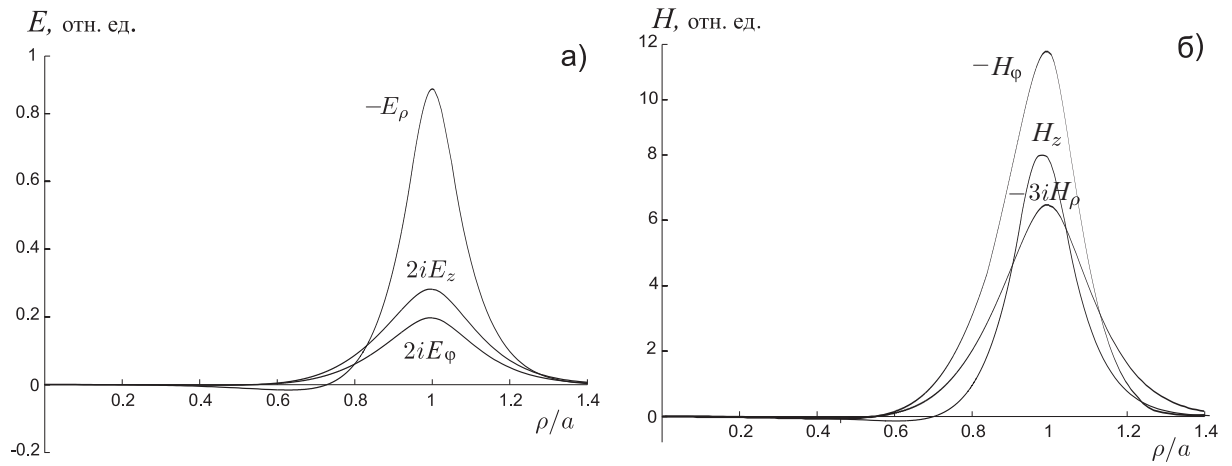


Рис. 3.24. Распределения по поперечной координате компонент поля азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) поверхностной собственной моды неоднородного дакта с размытой границей. Значения параметров  $\omega/\omega_H$ ,  $\tilde{\omega}_p/\omega_{pa}$ ,  $\omega_{pa}/\omega_H$ ,  $\omega_H a/c$ ,  $a_0/a$ ,  $a_1/a$  те же, что и для рис. 3.22; постоянная распространения моды  $p_0 = 21,7$  [54]

хающей моде с радиальным индексом  $n = 1$  и постоянной распространения  $p_{01} = 49,72 - i0,38$ , рис. 13 — сильнозатухающей моде с радиальным индексом  $n = 3$  и постоянной распространения  $p_{03} = 49,8 - i2,12$ .

Резюмируя, можно утверждать, что при учёте столкновительных потерь в плазме и выполнении условий (3.18) и (3.24) объёмные моды, направляемые дактом с повышенной или пониженной плотностью, демонстрируют селективное поведение. Указанное поведение проявляется в том, что при наличии уже сравнительно малых диссипативных потерь моды разделяются на слабозатухающие с преимущественно крупномасштабной (вистлеровской) структурой поля и сильнозатухающие, в поле которых основной вклад даёт мелкомасштабная квазиэлектростатическая составляющая. При этом структура поля слабозатухающих мод в случае, когда  $\nu_e \neq 0$ , кардинально отличается от структуры поля мод, направляемых дактом при отсутствии диссипативных потерь. Напротив, структура поля сильнозатухающих мод при наличии потерь имеет ряд сходных черт со структурой поля вытекающих мод в отсутствие столкновений. Сходство проявляется, прежде всего, в преобладающем вкладе объёмной мелкомасштабной составляющей в поле, а также в том, что соседние моды различаются числом мелкомасштабных вариаций поля по радиусу.

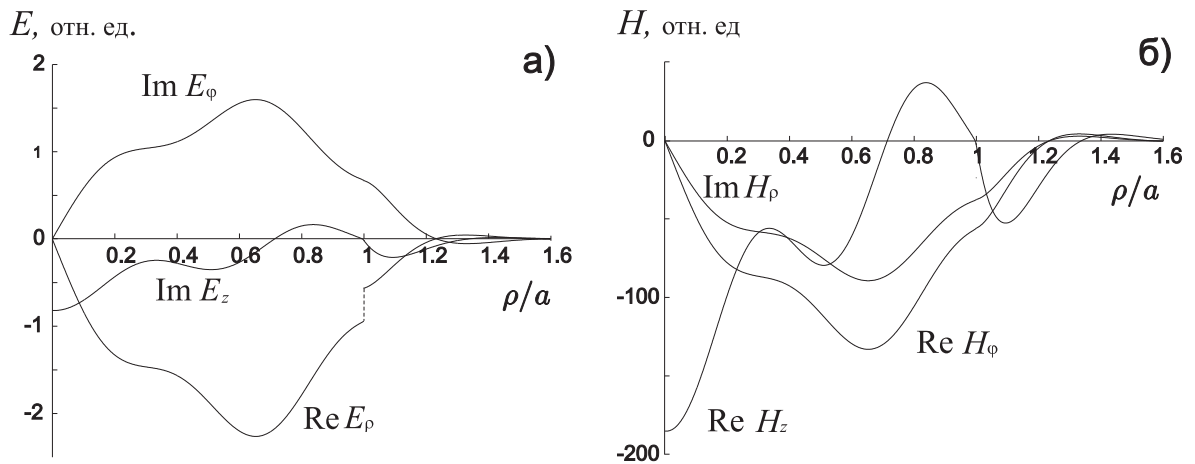


Рис. 3.25. Распределения по поперечной координате компонент поля слабозатухающей азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) собственной моды с радиальным индексом  $n = 1$  при  $\omega/\omega_H = 0,3$ ; постоянная распространения моды  $p_{01} = 49,72 - i0,38$ , значения остальных параметров те же, что и для рис. 3.15.

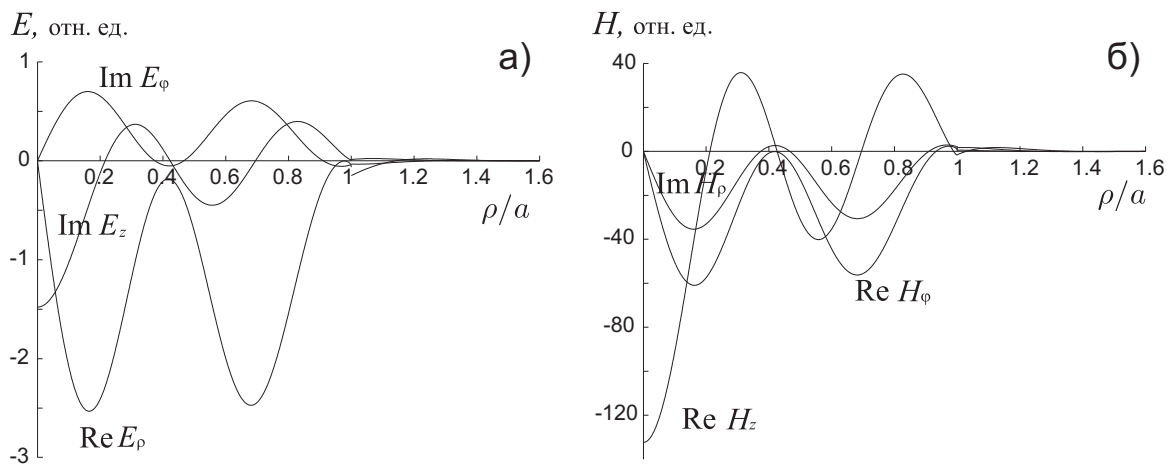


Рис. 3.26. Распределения по поперечной координате компонент поля сильнозатухающей азимутально-симметричной ( $m = 0$ ) собственной моды с радиальным индексом  $n = 3$  при  $\omega/\omega_H = 0,3$ ; постоянная распространения моды  $p_{03} = 49,8 - i2,12$ , значения остальных параметров те же, что и для рис. 3.15.

### 3.6. Программы расчёта дисперсионных характеристик и структур полей однородного и неоднородного дактов плотности

Методика расчета структуры полей и дисперсионных характеристик дакта с повышенной или пониженной плотностью во многом аналогична методике, приведённой в разделе 2.7 предыдущей главы. Различия можно проследить из сравнения результатов анализа распространения электромагнитных волн в волноводах, описанных в разделах 2 и 3, и из приведённых ниже программ для дакта с повышенной плотностью и программ раздела 2.7.

Зададим параметры дакта с повышенной плотностью. Величины с суффиксом «inside» относятся к области внутри дакта, с суффиксом «outside» к внешней области.

```
function [EE_out GG_out HH_out EE_in GG_in HH_in] =
ductParameters(Dw0wH, NuewH)
global m R w_H a_0 EE_outside GG_outside HH_outside
      EE_inside GG_inside HH_inside

n_e_outside = 6.6171e+09; % плотность плазмы вне дакта

%%% параметры электронной части плазмы
e_0 = 4.8e-10;
m_e = 9.1e-28;
w_H = 1.7e7 * 480;
w_p_outside = sqrt(4 * pi * e_0^2 * n_e_outside / m_e);
w_p_inside = w_p_outside * (2)^0.5;

%%% параметры дакта
w_0 = w_H * Dw0wH;
a_0 = 3 * 3e10/w_H;
R = w_0 * a_0 / 3e10;

%%% параметры ионной части плазмы
M_Ar = 39.95 * 1.66e-24;
O_p_outside = w_p_outside * sqrt(m_e / M_Ar);
O_p_inside = O_p_outside * (2)^0.5;
O_H = w_H * m_e / M_Ar;

%%% частота электронных соударений
Nu_e = NuewH * w_H;
```

```

Nu_i = 0;

%%% нижняя гибридная частота
w_LH_outside = w_H * sqrt((O_p_outside.^2 + 2 * O_H^2).*...
    (w_p_outside.^2 + w_H^2).^(-1));
w_LH_inside = w_H * sqrt((O_p_inside.^2 + 2 * O_H^2).*...
    (w_p_inside.^2 + w_H^2).^(-1));
w_LH = w_LH_outside;

%%% верхняя гибридная частота
w_UH_inside = sqrt(w_p_inside.^2 + w_H^2);
w_UH_outside = sqrt(w_p_outside.^2 + w_H^2);

m = 0;

%%% компоненты тензора диэлектрической проницаемости
EE_inside = (w_0.^2 - w_UH_inside.^2).* (w_0.^2 - w_LH.^2).*...
    ((w_0.^2 - w_H^2).* (w_0.^2 - O_H^2)).^(-1) -...
    w_p_inside.^2 * i*Nu_e./ ((w_H^2 - w_0.^2).* w_0);
GG_inside = -w_p_inside.^2*w_H./((w_H^2-(w_0-i*Nu_e).^2).* w_0) +...
    O_p_inside.^2*O_H./((O_H^2-(w_0-i*Nu_i).^2).* w_0);
HH_inside = 1-w_p_inside.^2./((w_0-i*Nu_e).*w_0)-...
    O_p_inside.^2./((w_0-i*Nu_i).*w_0) ;

EE_outside = (w_0.^2 - w_UH_outside.^2).* (w_0.^2 - w_LH.^2).*...
    ((w_0.^2 - w_H^2).* (w_0.^2 - O_H^2)).^(-1) -...
    w_p_inside.^2 * i*Nu_e./ ((w_H^2 - w_0.^2).* w_0);

GG_outside=-w_p_outside.^2*w_H./((w_H^2-(w_0-i*Nu_e).^2).*w_0) +...
    O_p_outside.^2*O_H./((O_H^2-(w_0-i*Nu_i).^2).* w_0);
HH_outside=1-w_p_outside.^2./((w_0-i*Nu_e).*w_0)-...
    O_p_outside.^2./((w_0-i*Nu_i).*w_0);

EE_out = EE_outside;
GG_out = GG_outside;
HH_out = HH_outside;
EE_in = EE_inside;
GG_in = GG_inside;
HH_in = HH_inside;

```

Функция, представляющая собой левую часть дисперсионного уравнения (3.6), описывается следующим образом:

```
function z=dispEquation_new(pp, eigen1, eigen2)

global m R EE_outside GG_outside HH_outsid...
EE_inside GG_inside HH_inside
p = pp;

mainq = EE_inside^2 - GG_inside^2 + EE_inside * HH_inside -...
(HH_inside + EE_inside) * p.^2;
radq = sqrt((HH_inside - EE_inside)^2 * p.^4 + 2 *...
(GG_inside^2 * (HH_inside + EE_inside) - EE_inside *...
(HH_inside - EE_inside)^2) * p.^2 +...
(EE_inside^2 - GG_inside^2 - EE_inside * HH_inside)^2);
Q1 = R * sqrt(0.5 * (mainq - radq) / EE_inside);
Q2 = R * sqrt(0.5 * (mainq + radq) / EE_inside);

for I=1:size(Q2,1)
    for J=1:size(Q2,2)
        if(abs(Q1(I,J)) > abs(Q2(I,J)))
            bufQ = Q1(I,J);
            Q1(I,J) = Q2(I,J);
            Q2(I,J) = bufQ;
        end
    end
end

n_inside1=- (EE_inside*(p*GG_inside).^(-1)).*(p.^2 +...
Q1.^2/R^2+(GG_inside^2/EE_inside-EE_inside));
n_inside2=- (EE_inside*(p*GG_inside).^(-1)).*(p.^2 +...
Q2.^2/R^2+(GG_inside^2/EE_inside-EE_inside));

alp_inside1=(m*Q1/R^2).*(HH_inside + p.* n_inside1).*...
(HH_inside*(p.^2- EE_inside+ GG_inside)).^(-1);
alp_inside2=(m*Q2/R^2).*(HH_inside + p.* n_inside2).*...
(HH_inside*(p.^2- EE_inside+ GG_inside)).^(-1);
bet_inside1 = -m * Q1 / R^2.* (p.* n_inside1.^(-1) +...
(EE_inside-GG_inside)/HH_inside).*(p.^2-EE_inside+GG_inside).^(-1);
bet_inside2 = -m * Q2 / R^2.* (p.* n_inside2.^(-1) +...
(EE_inside-GG_inside)/HH_inside).*(p.^2-EE_inside+GG_inside).^(-1);
```

```

clear mainq
clear radq

mainq = EE_outside^2-GG_outside^2+EE_outside*HH_outside -...
        (HH_outside + EE_outside) * p.^2;
radq = sqrt((HH_outside - EE_outside)^2 * p.^4 + 2 *...
(GG_outside^2 *(HH_outside + EE_outside) - EE_outside *...
(HH_outside - EE_outside)^2) * p.^2 + (EE_outside^2 -...
GG_outside^2 - EE_outside * HH_outside)^2);

Q_out1 = R * sqrt(0.5 * (mainq - radq) / EE_outside);
Q_out2 = R * sqrt(0.5 * (mainq + radq) / EE_outside);

for I=1:size(Q_out2,1)
    for J=1:size(Q_out2,2)
        if(abs(Q_out1(I,J)) > abs(Q_out2(I,J)))
            bufQout = Q_out1(I,J);
            Q_out1(I,J) = Q_out2(I,J);
            Q_out2(I,J) = bufQout;
        end
    end
end

S1 = sqrt(-Q_out1.^2);
S2 = sqrt(-Q_out2.^2);

for I=1:size(Q_out2,1)
    for J=1:size(Q_out2,2)
        if(imag(Q_out2(I,J)) < 0)
            Q_out2(I,J) = - Q_out2(I,J);
        end

        if(real(S1(I,J)) < 0)
            S1(I,J) = - S1(I,J);
        end
    end
end

% %%% region D01

```

```

    if(eigen1 == 0)
        S1 = - S1;
    end
% %%% end region D01

%%%% region D10
    if(eigen2 == 0)
        Q_out2 = -Q_out2;
    end
%%%% end region D10

n_outside1 = - (EE_outside * (p * GG_outside).^(-1)).*...
    (p.^2 + Q_out1.^2 / R^2 + (GG_outside^2 / EE_outside -...
    EE_outside));
n_outside2 = - (EE_outside * (p * GG_outside).^(-1)).*...
    (p.^2 + Q_out2.^2 / R^2 + (GG_outside^2 / EE_outside -...
    EE_outside));
alp_outside1 = - m * S1 / R^2.* (HH_outside +...
    p.*n_outside1).* (HH_outside * (p.^2 - EE_outside +...
    GG_outside)).^(-1);
bet_outside1 =  m * S1 / R^2.* (p.*n_outside1.^(-1) +...
    (EE_outside-GG_outside) / HH_outside).* (p.^2 -...
    EE_outside + GG_outside).^(-1);
alp_outside2 =  m * Q_out2 / R^2.* (HH_outside +...
    p.*n_outside2).* (HH_outside * (p.^2 - EE_outside +...
    GG_outside)).^(-1);
bet_outside2 =-m*Q_out2 / R^2.* (p.* n_outside2.^(-1) +...
    (EE_outside - GG_outside) / HH_outside).* (p.^2 -...
    EE_outside + GG_outside).^(-1);

S2 = - Q_out2;

JM1 = besselj(m+1,Q1);
JM2 = besselj(m+1,Q2);
Jm1 = besselj(m,Q1);
Jm2 = besselj(m,Q2);

KM1 = besserk(m+1,S1);
KM2 = besselh(m+1,1,Q_out2);
Km1 = besserk(m,S1);

```



```

Km2 = besselh(m,1,Q_out2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%E_azimutal
aa11 = (JM1 + alp_inside1.* Jm1);
aa12 = (JM2 + alp_inside2.* Jm2);
aa13 = -(KM1 + alp_outside1.* Km1);
aa14 = -(KM2 + alp_outside2.* Km2);
%E_z
aa21 = i * Q1.* n_inside1.* Jm1 / HH_inside / R;
aa22 = i * Q2.* n_inside2.* Jm2 / HH_inside / R;
aa23 = i * S1.* n_outside1.* Km1 / HH_outside / R;
aa24 = i * S2.* n_outside2.* Km2 / HH_outside / R;
%H_azimutal
aa31 = - n_inside1.* (JM1 - bet_inside1.* Jm1);
aa32 = - n_inside2.* (JM2 - bet_inside2.* Jm2);
aa33 = n_outside1.* (KM1 - bet_outside1.* Km1);
aa34 = n_outside2.* (KM2 - bet_outside2.* Km2);
%H_z
aa41 = - Q1.* Jm1 / R;
aa42 = - Q2.* Jm2 / R;
aa43 = - S1.* Km1 / R;
aa44 = - S2.* Km2 / R;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
zz=abs(aa14.* aa23.* aa32.* aa41 - aa13.* aa24.* aa32.* aa41 - ...
aa14.* aa22.* aa33.* aa41 + aa12.* aa24.* aa33.* aa41 + ...
aa13.* aa22.* aa34.* aa41 - aa12.* aa23.* aa34.* aa41 - ...
aa14.* aa23.* aa31.* aa42 + aa13.* aa24.* aa31.* aa42 + ...
aa14.* aa21.* aa33.* aa42 - aa11.* aa24.* aa33.* aa42 - ...
aa13.* aa21.* aa34.* aa42 + aa11.* aa23.* aa34.* aa42 + ...
aa14.* aa22.* aa31.* aa43 - aa12.* aa24.* aa31.* aa43 - ...
aa14.* aa21.* aa32.* aa43 + aa11.* aa24.* aa32.* aa43 + ...
aa12.* aa21.* aa34.* aa43 - aa11.* aa22.* aa34.* aa43 - ...
aa13.* aa22.* aa31.* aa44 + aa12.* aa23.* aa31.* aa44 + ...
aa13.* aa21.* aa32.* aa44 - aa11.* aa23.* aa32.* aa44 - ...
aa12.* aa21.* aa33.* aa44 + aa11.* aa22.* aa33.* aa44);

z = zz;

```

Поиск дисперсионных зависимостей осуществляется с помощью функции, аналогичной представленной в разделе 2.7, за исключение того, что вместо функции `dispreqh1_new` нужно использовать приведённую выше функцию

```
dispEquation_new.
```

Рассмотрим отдельные части программы, предназначенной для вычисления поля внутри и вне неоднородного дакта с повышенной плотностью. Вначале задаются параметры в однородной приосевой части дакта. На этом участке задаётся поле и выбираются начальные значения для дальнейшего численного счёта:

```
JM=besselj(m+1,ri*Q(x));
Jm=besselj(m,ri*Q(x));
Jm1=Jm.*(ri).^(-1);
JM1=JM.*(ri).^(-1);

Ezi=i/(HH_inside * R) * Jm * ((n_inside(x) * Q(x)));
Hzi=-Jm * Q(x) / R;
E_zi=-i/(HH_inside * R) * ((-besselj(m-1,ri * Q(x)) * Q(x) +...
(m * Jm1)) * n_inside(x) * Q(x));
H_zi=(-besselj(m-1,ri * Q(x)) * Q(x) + m * Jm1) * Q(x)/R;

g1 = GG_inside^2 - (p^2 - EE_inside)^2 ;
g2 = GG_inside^2 - EE_inside * (EE_inside - p^2) ;
e1 = EE_inside - p^2;

Eziri = Ezi.*(ri).^(-1) ;
Hziri = Hzi.*(ri).^(-1);
Eri = 1 / g1 / (R) * (i * p * GG_inside * m * Eziri +...
i * p * e1 * E_zi + e1 * m * Hziri + GG_inside * H_zi);
Efi = 1 / g1 / (R) * (p * e1 * m * Eziri + p * GG_inside *...
E_zi - i * GG_inside * m * Hziri - i * e1 * H_zi);
Hri = 1 / g1 / (R) * (g2 * m * Eziri - p^2 * GG_inside *...
E_zi + i * p * GG_inside * m * Hziri + i * p * e1 * H_zi);
Hfi = 1 / g1 / (R) * (i * p^2 * GG_inside * m * Eziri -...
i * g2 * E_zi + p * e1 * m * Hziri + p * GG_inside * H_zi);

clear g1,g2,e1;

if x==1
    Er1 = Eri;
    Ef1 = Efi;
    Hr1 = Hri;
    Hf1 = Hfi;
```

```

else
    Er21 = Eri;
    Ef2 = Efi;
    Hr2 = Hri;
    Hf2 = Hfi;
end

Hz2 = Hzi;
Ez2 = Ezi;
H_z2=H_zi;
E_z2=E_zi;
Er2=Eri;

JM=besselj(m+1,r2(1)*Q(x));
Jm=besselj(m,r2(1)*Q(x));
Jm1=Jm/r2(1);

ezr = i / (HH_inside * R) * Jm * ((n_inside(x) * Q(x)));
h_zr = -Jm * Q(x) / R;
e_zr = -i/(HH_inside * R) * ((-besselj(m-1,r2(1) * Q(x)) * Q(x) +...
    m * besselj(m,r2(1) * Q(x)) / r2(1)) * n_inside(x) * Q(x));
h_zr = (-besselj(m-1,r2(1) * Q(x)) * Q(x) +...
    m * besselj(m,r2(1) * Q(x)) / r2(1)) * Q(x)/R;
r11=ri;

```

Далее методом Рунге–Кутты ищем поле на неоднородном участке

```

[r1,E]=ode45(@differentequation_for_all_m,[ri:step:r2],...
    [ezr,e_zr,h_zr,h_zr]);

```

и «сшиваем» его с полем во внешней однородной плазме. Здесь `differentequation_for_all_m` — дифференциальное уравнение (1.70):

```

function f=differentequation_for_all_m(r1,E)
global m R EE GG HH n_e2 p w_p a_0 zozo part

```

```

%derivative of plazma frequency

```

```

d_w_p2_d_rho_w_p2 = profile_differ(r1) / profile(r1);

```

```

%derivatives of tenzor elements
EE2 = (EE-1) * d_w_p2_d_rho_w_p2;

```

```

GG2 = GG * d_w_p2_d_rho_w_p2;

gg1 = GG^2 + (p^2 - EE)^2 ;
gg2 = GG^2 - (p^2 - EE)^2 ;
gg3 = GG^2 - EE * (EE - p^2);
pp1 = p^2 - EE ;

%Differential equations
D1=(-gg1 * GG2 - 2 * GG * pp1 * EE2) / (gg2)^2;
D2=(-2 * GG2 * GG * pp1 - EE2 * gg1) / (gg2)^2;

E1r1 = E(1) * (r1).^(-1);
E3r1 = E(3) * (r1).^(-1);
P1 = gg2 / pp1 * ((i * p * E(2) + m * E3r1) *...
  D1 - (i * p * m * E1r1 + E(4)) * D2);
P2 = - gg2 * ((- p^2 * m * E1r1 + i * p * E(4))...
  * D1 + (p^2 * E(2) - i * p * m * E3r1) * D2);

delta = - EE * gg2 / pp1;

E2r1 = E(2) * (-r1)^(-1);
E4r1 = E(4) * (-r1)^(-1);
E1r2 = E(1) * (r1)^(-2);
E3r2 = E(3) * (r1)^(-2);

f=[E(2);E2r1 + m^2 * E1r2 + ((R)^2 * gg2 * (-HH *...
  E(1) + i* p* GG/ pp1* E(3))+ P2- i* p* GG* P1) / delta;
  E(4);E4r1 + m^2 * E3r2 + (i * p * GG / pp1*...
  (-R)^2 * HH * gg2 * E(1) + P2) + gg3 * (-R)^2...
  * gg2 / pp1 * E(3) + P1)) / delta];

```

## Заключение

В настоящем учебном пособии рассмотрены особенности распространения электромагнитных волн в открытых плазменных волноводах, расположенных в свободном пространстве или фоновой магнитоактивной плазме. Приведённые сведения дают основу для более глубокого понимания направляющих свойств открытых замагниченных плазменных структур, расположенных в магнитоактивных средах, а также механизмов поглощения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме.

Проведён подробный анализ влияния столкновительных и бесстолкновительных потерь в плазменной среде на свойства направляемых такими волноводами мод. В частности, показано, что наличие сравнительно малых столкновительных потерь может иметь принципиальное значение и приводить к заметным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей объёмных мод свистового диапазона, направляемых такими плазменными образованиями по сравнению со случаем бесстолкновительной плазмы. При этом моды разделяются на слабозатухающие с преимущественно крупномасштабной геликонной структурой поля и сильнозатухающие, в отдельные компоненты полей которых основной вклад даёт мелкомасштабная квазиэлектростатическая составляющая. В то же время, наличие сравнительно малых столкновительных потерь не сказывается существенно на свойствах поверхностных мод, направляемых рассмотренными плазменными волноводами в свистовом диапазоне частот. Определены условия, при которых учёт бесстолкновительного затухания не приводит к принципиальным изменениям дисперсионных характеристик и структуры полей мод изученных направляющих систем по сравнению со случаем наличия лишь столкновительных потерь в плазме.

Приведены примеры анализа влияния неоднородности распределения плазмы поперёк внешнего магнитного поля на свойства направляемых мод. Показано, что при определённых условиях такая неоднородность не сказывается существенно на свойствах свистовых мод, направляемых цилиндрическими плазменными структурами, расположенными в свободном пространстве или фоновой магнитоактивной плазме.

Описаны численные методы отыскания дисперсионных характеристик и структур полей мод в однородных и неоднородных цилиндрических плазменных волноводах во внешнем магнитном поле. Приведён пакет программ для поиска указанных характеристик волн в таких направляющих структурах.

Материалы данного пособия могут представлять интерес для анализа работы высокочастотных индукционных источников плазмы при наличии внешнего постоянного магнитного поля и могут быть использованы для интерпретации результатов учебных и научных экспериментов по возбуждению и распространению свистовых волн при наличии замагниченных плазменных

каналов. Кроме того, представленные теоретические разработки могут найти применение не только для изучения особенностей распространения электромагнитных волн в магнитоактивных плазменных волноводах, но и для анализа электромагнитных волн, направляемых открытыми волноводами с более сложными вариациями гиротропного заполнения (например, систем с бигиротропным заполнением).

В заключении автор выражает благодарность А. В. Кудрину за многочисленные обсуждения затронутых в данном пособии вопросов.

Замечания по содержанию пособия следует направлять на электронный адрес: [vasiliy.eskin@gmail.com](mailto:vasiliy.eskin@gmail.com)

## Литература

1. Boswell R. W., Chen F. F. [Helicons — The early years](#) // IEEE Trans. Plasma Sci. 1997. V. 25, No. 6. P. 1229–1244. 5, 30
2. Chen F. F., Boswell R. W. [Helicons — The past decade](#) // IEEE Trans. Plasma Sci. 1997. V. 25, No. 6. P. 1245–1257. 5, 30
3. Shinohara S., Shamrai K. P. [Direct comparison of experimental and theoretical results on the antenna loading and density jumps in a high pressure helicon source](#) // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42, No. 4. P. 865–880.
4. Shamrai K. P., Taranov V. B. [Volume and surface rf power absorption in a helicon plasma source](#) // Plasma Sources Sci. Technol. 1996. V. 5, No. 5. P. 474–491. 6
5. Shamrai K. P., Shinohara S. [Spectral and spatial characterization of a radio frequency power absorption in high pressure helicon plasmas](#) // Phys. Plasmas. 2001. V. 8, No. 10. P. 4659–4674. 6
6. Carter M. D., Baity F. W. Jr., Barber G. C., Mori Y., Sparks D. O., White K. F., Jaeger E. F., Chang-Diaz F. R., Squire J. P. [Comparing experiments with modeling for light ion helicon plasma sources](#) // Phys. Plasmas. 2002. V. 9, No. 12. P. 5097–5110.
7. Arnush D., Chen F. F. [Generalized theory of helicon waves. II. Excitation and absorption](#) // Phys. Plasmas. 1998. V. 5, No. 5. P. 1239–1253. 6
8. Miljak D. G., Chen F. F. [Density limit in helicon discharges](#) // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. V. 7, No. 4. P. 537–549. 5
9. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. [Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas](#). Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p. 5, 21, 26, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 76
10. Kostrov A. V., Kudrin A. V., Kurina L. E., Luchinin G. A., Shaykin A. A., Zaboronkova T. M. [Whistlers in thermally generated ducts with enhanced plasma density: Excitation and propagation](#) // Phys. Scripta. 2000. V. 62, No. 1. P. 51–65. 59
11. Kondrat'ev I. G., Zaboronkova T. M., Kudrin A. V. [Excitation and propagation of electromagnetic waves in nonuniform density ducts](#) // Phys. Scripta. 1996. V. 54, No. 10. P. 96–112.

12. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю., Попова Л. Л. Несимметричные свистовые волны, направляемые цилиндрическими дактами с повышенной плотностью плазмы // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 10. С. 835–857. [56](#), [58](#), [59](#), [66](#), [68](#), [69](#), [73](#), [76](#), [83](#)
13. Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Лях М. Ю. Возбуждение несимметричных волн заданными источниками в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 5–6. С. 452–471. [5](#), [57](#), [60](#)
14. Helliwell R. A. 40 years of whistler // Modern radio science 1993 / Ed. H. Matsumoto. New York: Oxford University Press, 1993. P. 189. [5](#)
15. Sazhin S., Hayakawa M., Bullough K. Whistler diagnostics of magnetospheric parameters: a review // Ann. Geophys. 1992. V. 10, No. 5. P. 293–308. [5](#)
16. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Москва: Наука, 1967. 684 с. [10](#)
17. Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. New York: Dover, 2006. 368 p.
18. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. Москва: Наука, 1970. 208 с. [55](#)
19. Фелсен Л., Маркувиц М. Излучение и рассеяние волн. Москва: Мир, 1978. 547 с.
20. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. Москва: Наука, 1984. 392 с.
21. Беллюстин Н. С., Докучаев В. П., Поляков С. В., Тамойкин В. В. Возбуждение волновода Земля–ионосфера ионосферными источниками низкочастотного диапазона // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 9. С. 1323–1332. [5](#)
22. Zhu P., Boswell R. W. Ar II laser generated by Landau damping of whistler waves at the lower hybrid frequency // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63, No. 26. P. 2805–2807. [5](#)
23. Lieberman M. A., Gottscho R. A. Design of high density plasma sources for materials processing // Physics of thin films / Ed. M. Francombe and J. Vossen. New York: Academic Press, 1994. P. 1–119. [5](#)



24. Charles C., Giroult-Matlakowski G., Boswell R. W., Gouillet A., Turban G., Car-dinaud C. Characterization of silicon dioxide films deposited at low pressure and temperature in a helicon diffusion reactor // J. Vac. Sci. Technol. A. 1993. V. 11, No. 6. P. 2954–2963. 5
25. Bridges W. B., Chester A. N., Halsted A. S., Parker J. V. Ion laser plasmas // Proc. IEEE. 1971. V. 59, No. 5. P. 724–737. 5
26. Zhu P., Boswell R. W. A new argon-ion laser based on an electrodeless plasma // J. Appl. Phys. 1990. V. 68, No. 5. P. 1981–1984. 5
27. Chang-Diaz F. R., Squire J. P., Bengston R. D., Breizmann B. N., Baity F. W., Carter M. D. // Proc. 36th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conf. 2000. No. 2000-3756. 5
28. Virko V. F., Virko Yu. V., Slobodyan V. M., Shamrai K. P. The effect of mag-netic configuration on ion acceleration from a compact helicon source with permanent magnets // Plasma Sources Sci. Technol. 2010. V. 19, No. 1. P. 015004-1–015004-7. 5
29. Choueiri E. Y., Polzin K. Faraday acceleration with radio-frequency assisted discharge // Journal of Propulsion and Power. 2006. V. 22, No. 3. P. 611–619.
30. Longmier B. W., Squire J. P., Carter M. D., Cassady L. D., Glover T. W., Chancery W. J., Olsen C. S., Ilin A. V., McCaskill G. E., Chang Diaz F. R., Bering E. A. Ambipolar ion acceleration in the expanding magnetic nozzle of the VASIMR® VX-200i // Proc. 45th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conf. 2009. V. 1, No. 2009–5359. P. 1–10.
31. Gilland J. Helicon wave physics impacts on electrodeless thruster design // Spacecraft propulsion and power. IEPC-0150. Toulouse: 2003. P. 10. 5
32. Ferencz Cs., Ferencz O. E., Hamar D., Lichtenberger J. Whistler phenomena: short impulse prolinebreak pagation. Dordrecht: Kluwer, 2001. 260 p. 5
33. Kudrin A. V., Lyakh M. Yu., Zaboronkova T. M. Wave emission from an open-ended cylindrical channel in a cold magnetoplasma // IEEE Trans. Antennas Propagat. 2001. V. 49, No. 12. P. 1645–1648. 5
34. Chugunov Yu. V., Markov G. A. Active plasma antenna in the Earth's iono-sphere // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2001. V. 63, No. 17. P. 1775–1787. 5
35. Fischer B., Krämer M., Enk Th. Helicon wave coupling to a finite plasma column // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36, No. 12. P. 2003–2020. 5

36. Фролов В. Л., Рапопорт В. О., Комраков Г. П., Белов А. С., Марков Г. А., Парро М., Рош Ж. Л., Мишин Е. В. Создание дактов плотности при нагреве ионосферы Земли мощным коротковолновым радиоизлучением // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 12. С. 908–913. 5
37. Белов А. С., Марков Г. А. Вынужденное ионизационное рассеяние волнового пучка, формирующего разрядный канал в пробочной магнитной ловушке // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 3. С. 252–256. 5
38. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 232 с. 5
39. Марков Г. А. Наблюдение резонансной автонастройки магнитных антенн плазмой ВЧ-разряда // Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 9. С. 1094–1098. 5
40. Кауфман Р. Н., Рябова Н. А. Распространение свистовых волн в цилиндрическом плазменном волноводе, граничащем с вакуумом // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 5. С. 1027–1035. 6
41. Воробьев Н. Ф., Рухадзе А. А. О возбуждении геликона в плазменном цилиндре поверхностным источником тока // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 12. С. 1065–1068.
42. Chen F. F. [Evidence for Trivelpiece-Gould modes in a helicon discharge](#) // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, No. 14. P. 145002-1–145002-4.
43. Krämer M., Aliev Yu. M., Altukhov A. B., Gurchenko A. D., Gusakov E. Z., Niemi K. [Anomalous helicon wave absorption and parametric excitation of electrostatic fluctuations in a helicon-produced plasma](#) // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49, No. 5A. P. A167–A175. 6
44. Shamrai K. P., Taranov V. B. [Resonance wave discharge and collisional energy absorption in helicon plasma source](#) // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36, No. 11. P. 1719–1737. 6
45. Шамрай К. П. Коллективные механизмы поглощения ВЧ-мощности в геликонных источниках плазмы // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 11. С. 934–940.
46. Cho S., Lieberman M. A. [Self-consistent discharge characteristics of collisional helicon plasmas](#) // Phys. Plasmas. 2003. V. 10, No. 3. P. 882–890. 6
47. Arnush D. [The role of Trivelpiece–Gould waves in antenna coupling to helicon waves](#) // Phys. Plasmas. 2000. V. 7, No. 7. P. 3042–3050. 6

48. Шевченко В. В. [Плавные переходы в открытых волноводах](#). Москва: Наука, 1969. 192 с. [6](#)
49. Marcuse D. [Theory of dielectric optical waveguides](#). New York: Academic Press, 1974. 267 p. [6](#)
50. Kudrin A. V., Es'kin V. A. [Whistler wave propagation in a bounded collisional magnetoplasma](#) // Phys. Scripta. 2006. V. 74, No. 4. P. 425–438. [6](#)
51. Еськин В. А., Заборонкова Т. М., Кудрин А. В. [Волны свистового диапазона, направляемые дактами с повышенной плотностью в столкновительной магнитоактивной плазме](#) // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 1. С. 31–49. [6](#)
52. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. [Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере](#). Москва: Наука, 1973. 272 с. [55](#)
53. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. Москва: Наука, 1987. 592 с. [55](#)
54. Бахарев П. В., Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Краффт К. [Волны свистового диапазона, направляемые дактами с пониженной плотностью в магнитоактивной плазме](#) // Физика плазмы. 2012. V. 36, No. 11. P. 979–990. [77](#), [78](#), [79](#), [80](#), [88](#), [89](#), [90](#)

## Приложение А

# ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  с единичными векторами  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  квадрат элемента длины записывается в виде

$$dl^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\xi_3^2, \quad (\text{A.1})$$

где  $h_i$  — коэффициенты Ламэ. Эти коэффициенты могут быть вычислены по следующей формуле:

$$h_i = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.2})$$

Элемент объёма в этих координатах

$$dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (\text{A.3})$$

Основные дифференциальные векторные операции со скалярной  $u$  и векторной  $\mathbf{A}$  функциями в выбранной криволинейной системе координат записываются в виде

$$\text{grad}u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 A_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 A_3) \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Василий Алексеевич **Еськин**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ  
В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ  
ВОЛНОВОДАХ**

*Учебное пособие*

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.