МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Елисеев Е.М.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ: ПРОЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Арзамасского филиала ННГУ, центром инновационных образовательных технологий (Центр «Тюнинг») ИЭП для преподавателей высших учебных заведений и студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Арзамас
2015

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73
Е 51

Рекомендовано УМО по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона в качестве учебного пособия для студентов и преподавателей высших учебных заведений

Материалы подготовлены в соответствии с планом работ по реализации дорожной карты ННГУ на 2015 г.

Задача 1.2. Внедрение современных педагогических технологий в учебный процесс

Мероприятие 1.2.1. Формирование учебно-методических материалов для проектно-ориентированного обучения (project based learning) по разным направлениям обучения

Елисеев Е.М. Основы математической обработки информации: проектно-ориентированный подход. Учебно-методическое пособие. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2015. – 132 с.

В пособии представлены разработки занятий по курсу «Основы математической обработки информации», созданного в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование», профилям «Математика и Физика», «История и Обществознание», «Биология и География», «Русский язык и Литература», «Дошкольное образование». Оно содержит подробное описание организации проектно-ориентированного обучения на занятиях и их структуру.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей и студентов учреждений высшего образования педагогического направления, однако оно также будет полезно преподавателям и студентам других направлений подготовки и преподавателям математики средней школы.

Рецензент: профессор кафедры «Высшая математика» НГТУ им. Р.Е. Алексеева, д-р физ.-мат. наук Галкин В.М.

Ответственные за выпуск: председатель методической комиссии Арзамасского филиала ННГУ проф. С.Н. Пяткин, руководитель центра инновационных образовательных технологий (Центр «Тюнинг») ИЭП проф. А.К. Любимов

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы обработки информации давно уже стали востребованы не только в математических и естественнонаучных, но и в гуманитарных исследованиях. Поэтому владение ими становится обязательной характеристикой компетентного специалиста. Математическая обработка даёт возможность грамотно составлять и оформлять различную документацию, но наиболее важно её применение для прогнозирования реальных событий на основе полученных данных. Именно поэтому предмет «Основы математической обработки информации» (ОМОИ) (с небольшими вариациями названия) включен в учебные планы высшей школы на всех факультетах.

Следовательно, хотя данное пособие подготовлено для направления «Педагогическое образование», но оно может с успехом использоваться и для других направлений подготовки.

Поскольку дисциплина ОМОИ по своему характеру является прикладной, то проектно-ориентированный подход к обучению является соответствующим сути предмета. В пособии предлагается организация деятельности студентов по ОМОИ в рамках проекта. При подготовке проекта студентами следует учитывать сферу их будущей профессиональной деятельности: педагогическую, проектную, исследовательскую или культурно-просветительскую [6], что определяет характер и тематику представляемого проекта. Главные требования к нему: решаемая проблема должна представлять реальный интерес для проектной группы, основываться на актуальной информации, а для её решения должны использоваться математические методы. При работе над проектом студенты могут применять освоенные на занятиях способы математической обработки информации и лекционные материалы.

Такая деятельность будет способствовать формированию у студентов базиса, который в дальнейшем может быть успешно использован при работе в различных проектах. Более подробно сопровождение студенческих проектов описано ниже.

В современных условиях, очевидно, что владение математическими методами обработки информации неотделимо от их реализации с использованием информационно-коммуникационных технологий. В связи с чем, целесообразно освоение математических методов на лабораторных занятиях с применением редактора Microsoft Office Excel. Занятия организуются как учебные мини-проекты. Описание этих работ проводится в соответствии с этапами проектной деятельности.

Этап 1. Постановка цели. Формулировка проблемы, цели и задач проекта.

Этап 2. Планирование. Планирование работы, подбор методов выполнения, защита своей позиции (при обсуждении с преподавателем и другими студентами).

Этап 3. Реализация. Выполнение проекта, практическая реализация, получение результатов.

Этап 4. Обсуждение. Анализ и корректировка достигнутых результатов, завершение проекта. Защита проекта. Рефлексия. Оценка проекта.

Таким образом, студенты осваивают математические методы (приложение 1), работая над основным личностно-значимым проектом и последовательно выполняя учебные мини-проекты (в рамках лабораторных занятий) с информационными паузами для усвоения базовых теоретических знаний (на лекционных занятиях). Лекционный курс представлен в пособии Е.М. Елисеева и М.Е. Сангаловой «Основы математической обработки информации: курс лекций».

Свою деятельность по освоению математических методов обработки информации студенты отражают в электронном портфолио проекта. При очной форме обучения оно осуществляет дистанционную поддержку курса. Главная идея электронного портфолио заключается в создании комфортной среды взаимодействия преподавателя и студентов в ходе проектных работ.

Для работы над основным и мини-проектами студенты делятся на группы (как правило, по 2-3 человека), возможно также индивидуальное выполнение проекта. На лабораторных занятиях группы организуются в начале каждого занятия.

В пособии приняты обозначения:

 – задания для группы;

 – индивидуальные задания;

 – применение редактора Microsoft Office Excel;

■ – конец решения задачи.

Описанию организации работы студентов над учебным материалом предшествует изложение целей курса в соответствии с методологией проекта «Tuning Educational Structures in Europe» [5]. Исходя из поставленных целей разработано тематическое планирование курса. Затем описаны технологии обучения, определяемые целями и содержанием дисциплины.

Автор будет признателен за отзывы или замечания, которые можно направлять по адресу: eliseev1949@inbox.ru.

Постановка целей курса «Основы математической обработки информации»

В соответствии с федеральным государственным стандартом (ФГОС) цели дисциплины должны быть сформулированы исходя из компетентностной модели выпускника, его будущей профессиональной деятельности. Они представлены в разделах IV и V ФГОС ВПО по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование» с двумя профилями образования (уровень бакалавр), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17 января 2011 г. № 46 [7] и в разделах IV и V проекта ФГОС ВО по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» с двумя профилями образования (уровень бакалавр) [6].

I. Описание выпускника бакалавриата в контексте обучения основам математической обработки информации.

Чтобы сделать математические методы обработки информации действенным инструментом обучения конкретному предмету, необходимо соблюдать ряд принципов.

1. *Принцип обучения сбору, отбору, структурированию и систематизации информации.* Далеко не всегда данные для обработки предоставляются исследователю в готовом виде, более того, чаще всего так не происходит. Поэтому нужно чётко знать: сколько, где собранных и каких данных следует иметь для получения достоверного результата. Понятия допустимой ошибки, достоверности, репрезентативности выборки, являются важными для понимания любого исследователя и представителя науки.
2. *Принцип обучения представлению информации с помощью различных математических моделей (в том числе переход от одной модели к другой).* Математическая модель – это приближённое количественное описание реальных процессов и явлений с использованием математических понятий. Хорошие результаты для прогнозирования и управления процессами даёт использование различных математических моделей. В сознании учащегося нужно стремиться отчётливо обозначить

разницу между моделью и реальностью, понимание плюсов и ограниченности математической модели.

3. *Принцип обучения использованию математических формул и теорем для работы внутри построенной модели.* Часто обладая информацией об основных математических теоремах и методах, учащиеся затрудняются их применять при решении задач. Используя метафору, учащиеся располагают некоторым набором инструментов. Однако им следует уметь выбирать тот или иной из них в зависимости от условия задачи, предполагать результат, знать особенности применения этих инструментов. Только тогда можно говорить об их эффективности.
4. *Принцип обучения интерпретации данных, полученных математическими методами, построению профессионально-значимых выводов.* Как отмечалось ранее, при обучении данной дисциплине на первый план выходит прикладной аспект изучения математики. То есть ценно не столько само решение математической задачи, но и те практические выводы и новые гипотезы, которые из него следуют.
5. *Принцип применения информационно-коммуникационных технологий.* На современном этапе многие значительные результаты (в областях различных наук начиная от истории и заканчивая математикой) получены с помощью компьютерных программ и их приложений.

   Компьютерная обработка математических моделей позволяет:
   - получать максимально точные результаты с экономией времени;
   - отслеживать динамику модели;
   - получать многообразие представлений рассматриваемой модели;
   - наглядно и чётко отражать результаты исследования.

Классическая теория вероятности и математическая статистика помогают обосновать и облегчают применение указанных принципов. Они должны органично войти в сознание всякого преподающего и изучающего конкретную науку и составляют вычислительную и алгоритмическую культуру учителя.

Из приведённого выше описания модели выпускника, вытекают компетенции, на развитие которых направлено обучение ОМОИ.

II. Компетенции, которыми должен обладать выпускник бакалавриата, развивающиеся у студентов в ходе занятий по ОМОИ.

В соответствии со ФГОС ВПО по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование» [7] выпускник должен обладать следующими компетенциями:

- способностью использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);

- готовностью использовать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки информации, готов работать с компьютером как средством управления информацией (ОК-8);

- способностью к подготовке и редактированию текстов профессионального и социально значимого содержания (ОПК-5).

Сейчас переходный период: идёт процесс утверждения нового стандарта ФГОС ВО 3+, поэтому следует предусмотреть возможность преобразования курса в соответствие с ним.

По проекту ФГОС ВО для направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки) [6] выпускник программы бакалавриата должен обладать:

- способностью использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве (ОК-3);
- способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-6);
- способность использовать современные методы и технологии обучения и диагностики (ПК-2);
- готовностью использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11) (в соответствии с исследовательским видом деятельности);

– способностью выявлять и формировать культурные потребности различных социальных групп (ПК-13) (в соответствии с культурно-просветительским видом деятельности).

III. Конкретизация содержания дисциплины (главы, разделы, темы)

В результате освоения дисциплины ОМОИ обучающийся должен

знать:

- основные понятия, теоремы и методы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики;
- основные способы сбора, отбора и представления информации с использованием математических средств;
- сферы применения простейших базовых математических моделей в профессиональной области;

уметь:

- решать типовые задачи по теории вероятности и математической статистике;
- читать и представлять статистические данные в различных видах (таблицы, диаграммы, графики);
- использовать информационно-коммуникационные технологии для сбора, математической обработки и представления информации;

владеть:

- математическим аппаратом обработки данных исследования;
- основами вычислительной и алгоритмической культуры педагога и исследователя.

На основании перечисленного выше разработано тематическое планирование.

По учебному плану на освоение дисциплины ОМОИ выделяется 16 часов лекционных занятий, 16 часов лабораторных занятий, итого 32 аудиторных часа.

Тематическое планирование

№№ п.п.	Тема	Кол-во часов	
		ЛК	ЛБ
1.	Основы комбинаторики. Сочетания, размещения и перестановки. Бином Ньютона.	2	2
2.	Случайные события и действия над ними. Классическая и статистическая вероятность.	2	2
3.	Подсчёт полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли и Лапласа.	2	4
4.	Дискретные и непрерывные случайные величины. Характеристики случайных величин.	2	1
5.	Основные теоретические законы распределения.	2	1
6.	Основные понятия математической статистики. Графическое представление статистических данных.	2	2
7.	Статистические гипотезы. Критерии Пирсона и Стьюдента.	2	2
8.	Корреляция и регрессия. Количественные оценки меры связи двух случайных величин. Статистические отчёты.	2	
9.	Защита проектов.		2
	Итого	16	16

IV. Образовательные технологии, способствующие формированию компетенций выпускника при обучении основам математической обработки информации.

В качестве технологий обучения ОМОИ выбраны проектно-ориентированные технологии: метод проектов, технология портфолио, технология развития критического мышления.

Анализ литературы по реализации проектов позволяет выделить характерные черты проекта:

- мотивированность;
- ориентация на конечный продукт;
- планирование деятельности;
- рефлексия;

- самостоятельная деятельность участников на всех этапах проекта.

Это указывает на необходимость использования именно метода проектов для формирования отобранных компетенций.

Для наиболее эффективной реализации метода проектов в обучении привлекаются приёмы технологии развития критического мышления (полное название «Технология развития критического мышления через чтение и письмо» – ТРКМЧП). Это вытекает из того, что именно для критического мышления характерно:

- рассмотрение и обсуждение всех возможных вариантов решения;
- принятие обоснованных решений, касающихся того, отклонить какое-либо суждение, согласиться с ним или временно отложить его рассмотрение;
- оценка самого мыслительного процесса – хода рассуждений, которые приводят к тем или иным выводам, или факторов, которые учитываются при принятии решения.

Также предусматривается применение образовательной технологии портфолио. На протяжении всего курса (начиная с первого занятия) студенты ведут портфолио проекта, что способствует формированию активной позиции каждого студента. Данная работа рассматривается с нескольких позиций:

- инструмент оценки и самооценки достижений студента по конкретной теме, разделу или всей дисциплине;
- метод организации самостоятельной работы студента;
- инструмент развития критического мышления студента;
- способ самовыражения;
- развитие исследовательских умений студента;
- инструмент проектирования своей деятельности, включающий рефлексию учебной работы.

Данные педагогические технологии одновременно служат инструментарием организации занятий и являются предметом изучения будущих педагогов. Поэтому применение указанных образовательных технологий способствует формированию у студентов следующих компетенций (не вошедших в предыдущий список):

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-4);
- способность работать в команде, толерантно воспринимать социальные, культурные и личностные различия (ОК-5).

V. Адекватные методы оценки (прозрачные и понятные всем участникам образовательного процесса).

Для текущей оценки достижений студентов используется портфолио проекта, по которому можно судить о выполнении плана проекта, собранной информации, выполнении учебных мини-проектов, продуктивности деятельности участников. Процедура итогового контроля реализуется зачётом, условиями выставления которого является выполнение всех учебных мини-проектов и успешная защита основного проекта.

Критерии оценки проекта:

- правильность математических расчетов;
- тиражируемость (возможность использовать результаты и методы проекта для других потребителей с минимальной адаптацией) и жизнеспособность проекта;
- востребованность работодателем (работа в контакте с потенциальными работодателями, наличие отзывов);
- организация взаимодействия участников проекта, вклад каждого из них;
- качество представленного отчёта, презентации проекта.

Вводное занятие. Постановка цели проекта.

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

Так как данное занятие – вводное, то оно также реализует организационные функции в отношении всего курса, поэтому его целями являются:

- ориентация в предмете и постановка личной цели изучения дисциплины «Основы математической обработки информации»;
- формулировка темы основного проекта по дисциплине «Основы математической обработки информации», создание проектных групп, формулировка проблем внутри темы.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Для создания проектных групп и определения тематики проектов может использоваться одна из следующих систем последовательных заданий.

Осуществляется произвольное деление на группы (например, в алфавитном порядке) по 4-6 человек. Каждой группе даётся задание с регламентом по времени.

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. В каких сферах деятельности человека употребляются (и вам известны примеры) математические методы обработки информации (ММОИ)?
2. Когда у учителя может возникнуть необходимость использовать математические методы для представления и обработки информации?
3. Может ли учитель использовать математические методы в своей деятельности:
   a) как преподавателя предмета (истории, биологии,…)? Какие (приведите пример)? Как именно?
   b) в качестве классного руководителя? Какие (пример)? Как?
   c) при взаимодействии с коллегами, родителями, администрацией? Какие (приведите пример)? Как?

d) в научно-исследовательской деятельности? Какие (приведите пример)? Как?

4. Какое влияние оказывает использование именно математических методов представления и обработки информации на конечный результат?

В аудитории организуется беседа, в ходе которой каждая группа представляет результаты своей работы. В итоге на доске создается обобщающая схема (по вопросу 1) и список направлений проектов (по вопросу 3). Поскольку схема является творческим продуктом конкретной учебной группы студентов, то её окончательный вид не может быть определён и зависит от жизненного опыта и интересов студентов. Она может иметь более или менее сложные ветвления, стрелками пользуются для отражения связи компонент. Примерное начало схемы можно увидеть ниже (рис. 1).

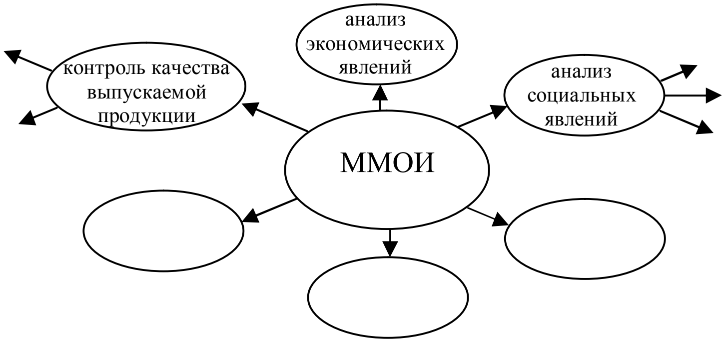


Рис. 1

Далее студентам выдаются чистые листы бумаги формата А4, материалы из ФГОС ВО (профессиональные задачи) и примеры возможных направлений проектов, связанных с этими задачами (раздаточный материал).

Вариант 1

Задание 2.1.1. 🚹 Ознакомьтесь с раздаточным материалом и определите приоритетную для Вас профессиональную задачу. В рамках этой задачи сформулируйте тему проекта (или конкретную проблему) представляющую для Вас интерес. Выпишите эту проблему в верхней части листа.

Для выполнения этого задания студенты могут использовать список на доске.

Далее по сигналу преподавателя (например, хлопку) студенты передают лист соседу справа.

Задание 2.1.2. На попавшем к Вам листе укажите, какой конкретно вклад вы можете внести в предлагаемый проект, что готовы сделать, какие функции выполнять внутри проекта. (Например, «могу получить доступ к данным некоторого класса/ школы», «могу быть координатором проекта, договариваться о встречах», «могу вести документацию проекта на компьютере», «подавать идеи», «красиво оформить наглядность», «выступать перед аудиторией по результатам проекта» и т.п.).

Передача листов происходит до тех пор, пока листы не вернутся к первоначальным владельцам.

Задание 2.1.3. Выберите наиболее ценные для вас предложения, подчеркните их.

Происходит обсуждение, на котором зачитывают результаты выполнения задания 2.1.3. Преподаватель предлагает объединить сходные темы проектов, идёт беседа по внесённым предложениям. На базе проведенного обсуждения образуются проектные группы.

Вариант 2

Здесь у преподавателя находится ватман с записанными по порядку профессиональными задачами.

Задание 2.2.1. Ознакомьтесь с раздаточным материалом и определите конкретные проблемы (от одной до трех), представляющие для Вас интерес. На листочке с клеящим слоем запишите краткое описание проекта (ов): тему, основную идею и план проекта, его предполагаемый результат. Прикрепите листочки на ватман рядом с соответствующей профессиональной задачей.

Происходит совместное обсуждение сформулированных проблем, возможны корректировки (если учащийся согласится, что его проект лучше соотносится с другой профессиональной задачей). На основе обсуждения выделяются группы студентов со сходными интересами, образуются проектные группы.

Задание 3. Сформулируйте тему проекта и выявите проблемы внутри темы (используйте мозговой штурм). Выберите конкретную проблему, которая будет решаться. Запишите коротко основную идею или девиз проекта, задачи проекта в виде плана. пределите роли внутри проекта. Опишите как можно конкретнее предполагаемый результат проекта.

Следует сразу отметить, что на данном этапе должно быть получено лишь рабочее название проекта, которое затем группа может корректировать или даже менять по согласованию с преподавателем. Также подлежат корректировке, «шлифовке» основной идеи и задачи проекта. Можно изменять (по согласованию) роли участников проекта.

На этом этапе занятия можно увидеть всё разнообразие проектов, в том числе и связанных с профилем обучения.

Например, для профиля подготовки «Математика и Физика»:

- подготовка учеников к олимпиаде по теме «Комбинаторные объекты и числа»,
- создание в школе исследовательской группы «Комбинаторные объекты и числа в жизни»,
- подборка задач по комбинаторике для математического кружка, для школьной олимпиады,
- демонстрация возможностей редактора Excel для решения конкретных комбинаторных задач.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА

Далее происходит:

- обсуждение предполагаемых рубрик портфолио;
- презентация рубрик и их уточнение;
- выбор рубрик для своего портфолио проекта.

Примеры рубрик, предлагаемые преподавателем:

1. **Наш портрет.** Краткий рассказ о членах проектной группы, их возможностях, интересах, опыте участия в проектах; распределение ролей участников.
2. **Кратко о проекте.** Тема проекта, цель, проблема и основная идея проекта, его задачи и предполагаемый результат. Здесь размещается первоначальный план с датами исполнения и контрольными точками (проверки выполнения плана и соблюдении сроков), вносимые коррективы (если они есть) и их обоснование.

3. **Рабочие материалы.** В этой рубрике могут быть представлены выполненные членами группы работы по проекту: схемы, иллюстрации, презентации, найденная информация по проекту со ссылкой на источник, записи бесед, интервью, анкеты, тесты, измерения и т.д.
4. **Математические методы.** Здесь размещается выполненное членами группы и понятное для них описание тех математических методов, с которыми они ознакомились на занятиях. Возможно включение в эту рубрику поясняющих примеров, схем, таблиц и других графических материалов.
5. **Отчёт по проекту.** В этой рубрике должны быть представлены итоги выполнения проектного задания, делаются выводы, оценивается практическая ценность проекта и возможности его применения на практике.
6. **Размышления.** Здесь размещаются размышления членов группы по вопросам:
   - оценка результатов проекта;
   - дальнейшие перспективы проекта;
   - новые вопросы и проблемы, возникшие в ходе работы;
   - личный вклад в проект;
   - соответствие проекта изначально поставленным целям и задачам.

Студентам предоставляется выбор вести портфолио проекта как в электронном, так и в бумажном вариантах.

Далее учащиеся переходят к деятельности по освоению комбинаторных методов в рамках мини-проектов на лабораторных работах.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Выпускник программы бакалавриата с присвоением квалификации «академический бакалавр» в соответствии с видом (видами) профессиональной деятельности, на который (которые) ориентирована программа бакалавриата, готов решать следующие **профессиональные задачи:**

педагогическая деятельность:

изучение возможностей, потребностей, достижений обучающихся в области образования (анализ успеваемости отдельного класса по предметам/по годам обучения; сравнение успеваемости классов в параллели; динамика успеваемости класса в течение нескольких лет; выявление интересов учащихся для организации при школе работы организаций дополнительного образования, их потребностей в факультативах по предметам, желаний для участия в школьных предметных олимпиадах в рамках предмета/по всем предметам внутри школы);

обучение и воспитание в сфере образования в соответствии с требованиями образовательных стандартов (обработка результатов тестов по различным предметам, коэффициенту интеллекта; организация внеклассных мероприятий согласно опросам учащихся; подготовка к обязательному тестированию в рамках ГИА и ЕГЭ);

использование технологий, соответствующих возрастным особенностям обучающихся и отражающих специфику предметных областей (использование математических методов для обучения школьников профильному предмету, разработка соответствующей тематики проектов по определенному разделу/ на год обучения);

осуществление образовательной деятельности с учётом особых образовательных потребностей (использование статистических методов для выявления таких потребностей);

организация взаимодействия с общественными и образовательными организациями, детскими коллективами и родителями, участие в самоуправлении и управлении школьным коллективом для решения задач профессиональной деятельности (математическая обработка результатов изучения возможностей, потребностей, достижений обучающихся в области образования для представления родителям или администрации школы, подготовка информационного наполнения для сайта, в том числе с использованием возможностей Microsoft Office Excel);

формирование образовательной среды для обеспечения качества образования, в том числе с применением информационных технологий (создание математического аппарата для выведения статистики обработки результатов теста с использованием

Microsoft Office Excel, валидность теста (соответствие тестовых результатов целям проведения тестирования); изучение отдельных вопросов и дистракторов (правдоподобных, но неверных ответов) теста);

осуществление профессионального самообразования и личностного роста (проведение статистических исследований личностного роста по ряду параметров);

обеспечение охраны жизни и здоровья учащихся во время образовательного процесса (анализ и представление различных параметров аудиторий школы (освещённость, площадь, шумоизоляция, температурный режим в течении года, электромагнитное воздействие, влажность и т.п.); анализ и представление некоторых параметров здоровья учеников класса, например, зрения; статистический анализ дорожно-транспортных происшествий вблизи школы);

проектная деятельность:

проектирование содержания образовательных программ и современных педагогических технологий с учётом особенностей образовательного процесса, задач воспитания и развития личности через преподаваемые предметы (статистический анализ и сравнение различных образовательных программ/ деятельности образовательных учреждений)

моделирование индивидуальных маршрутов обучения, воспитания и развития обучающихся, а также собственного образовательного маршрута и профессиональной карьеры (математическая обработка изучения предпочтений учащихся при выборе профессии, изучение ситуации с приёмом в учреждения среднего и высшего образования в регионе);

исследовательская деятельность:

постановка и решение исследовательских задач в области науки и образования (использование статистических методов и методов теории вероятности для проведения научных исследований по профилю обучения; использование математических методов обработки информации для исследования нерешённых задач фундаментальной науки);

использование в профессиональной деятельности методов научного исследования (составление статистических отчётов; математические расчёты с использованием Microsoft Office Excel);

культурно-просветительская деятельность:

изучение и формирование потребностей детей и взрослых в культурно-просветительской деятельности (применение математических методов к результатам изучения возможностей, потребностей, достижений учащихся в культурно-просветительской деятельности);

организация культурного пространства (изучение интересов учащихся, привлечение их к участию в культурных мероприятиях);

разработка и реализация культурно-просветительских программ для различных социальных групп (например, лекция о последних достижениях в области науки/техники/спорта с применением ОМОИ).

Лабораторная работа 1. Элементы комбинаторики

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- правила суммы и произведения;
- определение основных комбинаторных объектов;
- формулы для числа размещений, сочетаний, перестановок без повторений и с повторениями;
- функции Microsoft Office Excel, которые используются для вычисления комбинаторных чисел;

уметь:

- определять вид комбинаторного объекта из условия задачи;
- применять правила суммы и произведения для решения комбинаторных задач;
- применять формулы для вычисления комбинаторных чисел;
- использовать возможности Microsoft Office Excel для решения комбинаторных задач и оформления отчёта мини-проекта;

владеть:

- математическими методами, связанными с вычислением комбинаторных чисел.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Далее студенты переходят к деятельности по освоению комбинаторных методов в рамках мини-проекта на лабораторной работе.

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта исходя из общих целей курса и специфики темы.

Цель мини-проекта: освоение математических методов вычисления комбинаторных чисел.

Очевидно, что для этого нужно решать комбинаторные задачи, в которых фигурируют различные комбинаторные объекты.

Учебная задача:

Вариант 1. Выбрать варианты проектного задания из представленных пятнадцати. Они содержат по десять комбинаторных задач (раздаточный материал 1) различной сложности, для решения которых необходимо применять как правила суммы и произведения, так и формулы сочетаний, размещений, перестановок с повторениями и без повторений, учитывать дополнительные условия.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	4	9	12	17	20	25	28	33	36
2	2	5	10	13	18	21	26	29	34	37
3	3	6	11	14	19	22	27	30	35	38
4	1	7	10	15	18	23	26	31	35	39
5	2	8	9	16	19	24	27	32	34	40
6	3	5	11	13	17	21	25	32	33	38
7	1	6	11	14	19	22	25	31	34	39
8	2	4	10	12	17	23	27	30	35	40
9	3	7	9	15	18	24	26	29	33	36
10	1	8	10	16	17	20	26	28	35	37
11	2	6	11	14	19	22	25	31	33	37
12	3	4	9	12	18	23	27	32	34	39
13	1	5	9	13	18	24	27	28	34	36
14	2	7	11	15	17	21	25	29	33	38
15	3	8	10	16	19	20	26	30	35	40

Вариант 2. Из представленного списка задач (раздаточный материал 1) выбрать две задачи из первых восьми (номера 1-8), две задачи из следующих восьми (задачи 9-16) и так далее. В итоге получится проектное задание из 10 комбинаторных задач. В проектных заданиях различных групп не должно совпадать более трёх задач.

ПЛАНИРОВАНИЕ

Студентам предлагается составить план реализации мини-проекта и затем представить его преподавателю. При обсуждении плана студенты должны обосновать необходимость каждого пункта, защищая свою точку зрения. Им следует обратить внимание на разработку формы отчёта по мини-проекту. При затруднениях преподаватель может предложить им некоторые варианты отчёта. Основная форма отчёта – это файл в табличном процессоре Excel в котором записаны исходные данные задачи, ход решения и выделены полученные результаты. Также допускается файл в текстовом редакторе Microsoft Word или решение задач, записанное в тетради.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При выполнении проектного задания студенты могут использовать материалы лекций, а также раздаточные материалы, в которых представлено описание функций Excel и примеры решения комбинаторных задач, таблицы с основными формулами, блок-схема решения задач, отчёты в Excel (раздаточный материал 2)

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

Студенты представляют отчёт по мини-проекту, происходит обсуждение с преподавателем результатов и процесса выполнения работы, отмечаются плюсы и минусы, направления дальнейшей работы. Мини-проект будет зачтён, если представлено верное решение шести задач. При этом учитывается обоснованность решения, вклад каждого члена проектной команды, качество оформления отчёта.

Если при обсуждении выявлены ошибки в решении задач, недостатки в отчёте мини-проекта, либо группа не успела в отведенное время реализовать план, то проект отправляется на доработку. В этом случае участники группы вносят корректировки в план проекта (например, замены задач, исполнителей или методов решения) и продолжают работать внеаудиторно, размещая отчёт в электронном портфолио проекта, например, в рубрике «Математические методы». Здесь обсуждение и оценка мини-проекта происходит дистанционно на форуме или через комментарии.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Составьте краткое описание проекта по схеме: название, проблема, необходимые ресурсы и оборудование, задачи, план работ, предполагаемые результаты проекта, форма отчёта по проекту. Составьте график выполнения проекта с конкретными датами для каждой задачи, указанием лиц, работающих по данной задаче, и обязательным выделением одного ответственного. Отметьте также промежуточные результаты и предложите точки контроля.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

1. Найдите число маршрутов из города A в город B через город C, если из A в C ведут 3 дороги, из C в B – 5 дорог.
2. Надо переслать 6 срочных писем. Сколько существует способов передачи, если каждое письмо можно передать с любым из 3 курьеров?
3. В турнире разыгрывается три медали (золотая, серебряная, бронзовая) среди 10 команд. Сколько вариантов различных призовых троек?
4. Сколькими способами можно выбрать 10 книг из 15?
5. Сколько существует перестановок из букв слова «колобок»?
6. Сколькими способами можно 17 человек разбить на три группы: две по 5 и одну из 7 человек?
7. В магазине продаётся 4 сорта мороженого и 6 сортов шоколада. Сколькими способами можно купить набор из мороженого и шоколада?
8. Сколько можно образовать шестизначных телефонных номеров, если использовать только цифры 3, 7, 9?
9. В турнире разыгрывается три медали (золотая, серебряная и бронзовая) среди 7 команд. Сколькими способами можно их разыграть?
10. Сколькими способами можно выбрать бригаду в 3 студента из группы, состоящей из 10 студентов?
11. Сколько существует перестановок из букв слова «институт»?
12. Сколькими способами можно 25 человек разбить на три группы: две по 7 и одну из 11 человек?
13. Сколько пар можно составить из 7 юношей и 5 девушек?
14. Сколько можно образовать шестизначных телефонных номеров, если использовать только цифры 2, 5, 3, 8?
15. В студенческой группе из 20 человек выбирают старосту, профорга и физорга. Сколькими способами можно это сделать?
16. Сколькими способами можно выбрать бригаду в 19 студентов из группы, состоящей из 24 студентов?

17. Сколько существует перестановок из букв слова «приоритет»?

18. Сколькими способами можно 15 человек разбить на три группы: две по 4 и одну из 7 человек?

19. В продаже имеются юбки 5 фасонов и жакеты 4 фасонов. Сколькими способами можно купить костюм из юбки и жакета?

20. Известно, что пятизначный код сейфа содержит только цифры 3 и 7. Сколько существует таких кодов?

21. Из 10 журналистов одной газеты требуется выбрать четырёх для ведения тематических страничек: «Спорт», «Новости дня», «Красота», «Здоровье». Сколькими способами это можно сделать?

22. Сколькими способами можно выбрать 3 карты из колоды в 32 карты?

23. Сколько существует перестановок из букв слова «переворот»?

24. Сколькими способами можно 23 человек разбить на три группы: две по 10 и одну из 3 человек?

25. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 чёрных. Сколько различных узоров можно составить из этих кружков, располагая их в ряд?

26. Флаг Анчурии составляется из 13 горизонтальных полос красного, белого и голубого цвета, причем 2 соседние полосы должны быть разных цветов. Сколькими способами можно это сделать?

27. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «перешеек», чтобы четыре буквы «е» не стояли рядом?

28. В лаборатории работают 20 человек. Нужно составить группу в 5 человек для поездки в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если начальник, его заместитель и главный инженер одновременно уехать не могут?

29. Сколько шестизначных чисел содержат ровно 4 одинаковые цифры?

30. Сколько чётных пятизначных чисел можно получить, переставляя цифры 2, 3, 4, 5, 9?

31. Сколько существует способов размещения 10 пассажиров в трёх вагонах?

32. Сколькими способами можно из 15 человек выбрать группу

людей для работы?

33. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть, чтобы не все девушки сидели рядом?

34. Буквы азбуки Морзе состоят из точек и тире. Сколько всего букв можно изобразить, если буква содержит не более пяти символов?

35. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были чётными?

36. Завод выпускает погремушки, состоящие из кольца с надетыми на нем 5 синими и 3 красными шариками. Сколько разных видов погремушек может выпускать завод?

37. Сколько можно составить девятизначных чисел, у которых все цифры разные и идут слева направо в порядке убывания?

38. Сколько пятизначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 (с повторениями и без повторений)?

39. Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

40. Сколько существует положительных целых чисел, меньших, чем 10 000, цифры которых располагаются в неубывающем порядке?

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Пусть множество $\boldsymbol{E}$ содержит n элементов. Все необходимые формулы удобно свести в таблицу.

Таблица 1.

Основные комбинаторные объекты и числа

Название объекта	Характеристика объекта	Комбинаторное число	Вычислительная формула
Множество всех подмножеств $P(\boldsymbol{E})$	Все неупорядоченные подмножества	$\lvert P(\boldsymbol{E})\rvert$	2^n
Размещение k элементов множества $\boldsymbol{E}$	Упорядоченный кортеж длины k	A_n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Перестановка элементов мно-	Упорядоченный кортеж длины n	P_n	$n!$

жества ***E***			
Сочетание k элементов множества ***E***	Неупорядоченное подмножество мощности k	C_n^k	$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Сочетание с повторениями k элементов множества ***E***	Неупорядоченное подмножество мощности k с повторными элементами	$\overline{C_n^k}$	C_{n+k-1}^k
Перестановка с повторениями элементов множества ***E***	Упорядоченный кортеж длины (k_1+k_2+...+k_n), куда a_i входит k_i раз	$\overline{P_{k_1,k_2,\ldots k_n}}$	$\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!..k_n!}$
Размещение с повторениями k элементов множества ***E***	Упорядоченный кортеж длины k с повторными элементами	$\overline{A_n^k}$	n^k

Для решения задач по данной теме необходимо знание двух следующих правил:

П р а в и л о с у м м ы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами, то выбор «A <u>или</u> B» осуществляется (m+n) способами.

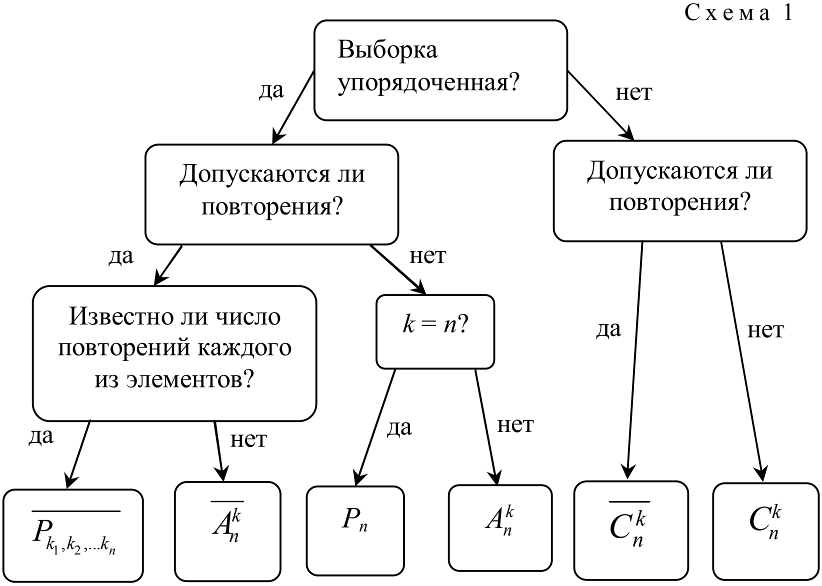
П р а в и л о п р о и з в е д е н и я. Если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор «A <u>и</u> B» в указанном порядке осуществляется ($m \cdot n$) способами.

При решении задачи с использованием комбинаторных объектов и чисел основными трудностями являются:

- выбор комбинаторного объекта, соответствующего условию задачи;
- правильное определение параметров выборки n и k.

Выбор комбинаторного объекта, вообще говоря, неоднозначен, так как все основные объекты связаны между собой и могут выражаться друг через друга.

Схема 1



Вполне можно рекомендовать *алгоритм решения задач с помощью комбинаторных объектов*. Для этого нужно последовательно выполнить такие действия:

1) определить конкретный объект, о котором идёт речь в задаче (число – набор цифр; букет – набор цветов; слово – набор букв);
2) найти число k элементов в наборе, а также число n элементов во множестве, из которого осуществляется выборка;
3) по схеме 1 ответить на поставленные вопросы, определить комбинаторный объект для решения и найти нужную формулу в таблице 1;
4) вычислить соответствующее комбинаторное число, подставив в выбранную формулу значения n и k;
5) обратить внимание на наличие дополнительных условий, не учтённых при выборе комбинаторного объекта, и скорректировать решение с использованием правил суммы и

произведения.

Редактор Microsoft Office Excel содержит обширную библиотеку специальных функций, которые позволяют быстро отыскать нужные комбинаторные числа.

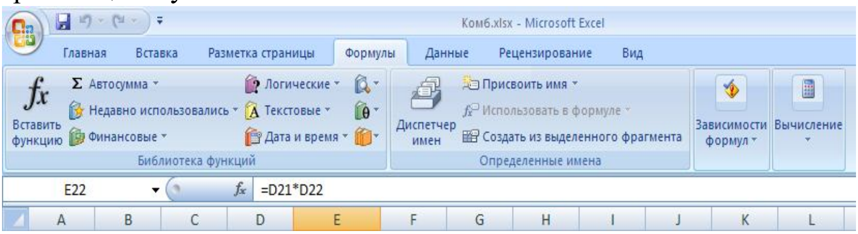
Ниже приводятся формулы для вычисления основных комбинаторных чисел из схемы 1.

Число сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ можно подсчитать с помощью функции ЧИСЛКОМБ(n, k), которая относится к математическим функциям. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^k}$ вычисляется с помощью этой же функции, но вместо n нужно взять (n+k–1).

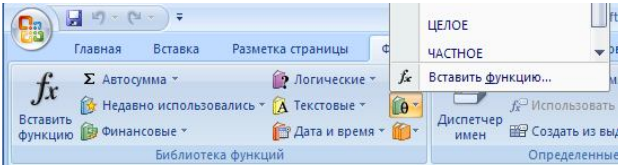
Для нахождения числа размещений $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ используется статистическая функция ПЕРЕСТ(n; k), а для размещений с повторениями $\overline{A_n^k}$ – математическая функция СТЕПЕНЬ(n; k).

Число перестановок P_n можно вычислить двумя способами: либо с помощью математической функции ФАКТР(n), либо используя статистическую функцию ПЕРЕСТ(n; n). Для перестановок с повторениями $\overline{P_{k_1,k_2,\ldots k_n}}$ нужно сначала подсчитать числитель: ФАКТР(k_1+k_2+…+ k_n), а затем произведение факториалов в знаменателе и произвести деление в соответствии с формулой.

Несложные формулы можно просто набирать в строке формул, обязательно начиная со знака равенства «=». Вводить в формулу адрес нужной ячейки с клавиатуры не обязательно, достаточно просто щёлкнуть по этой ячейке левой кнопкой мыши.



Для набора сложных формул проще всего использовать мастер функций, который вызывается с помощью кнопки с надписью «f_x», размещённой на панели формул. Соответствующие функции выбираются из списка в меню.



З а д а ч а 1.1. Рассматриваются различные семизначные числа, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 1, 2, 3. Сколько существует таких чисел, в которых:

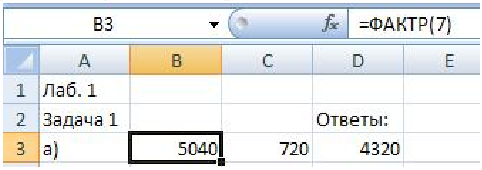
a) цифры не повторяются;

b) цифры могут повторяться;

c) содержится ровно три цифры 4, две цифры 5 и по одной 6 и 7;

d) только две различные цифры.

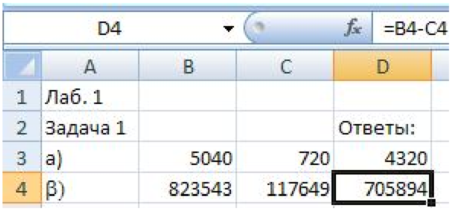
Р е ш е н и е. Семизначное число можно считать за упорядоченный набор из семи цифр, первая из которых не может быть равна 0. По условию, все цифры следует выбирать из множества $\boldsymbol{A} = \{0,4,5,6,7,8,9\}$.


B3 =ФАКТР(7)

	A	B	C	D	E
1	Лаб. 1				
2	Задача 1			Ответы:	
3	а)	5040	720	4320	

а) Если цифры не повторяются, то число получается перестановкой всех 7 элементов множества $\boldsymbol{A}$. Можно просто щёлкнуть по ячейке B3 и в строке формул записать =ФАКТР(7) или найти функцию ФАКТР в списке математических функций. Но если на первом месте находится цифра 0, то число не будет семизначным. Все такие числа получатся перестановкой шести остальных цифр на 2-7 местах. Их количество ФАКТР(6) записано в ячейке C3. Ответ получается как разность ячеек B3 и C3 и записывается в ячейке D3.

b) В этом случае цифры могут повторяться, поэтому надо использовать функцию СТЕПЕНЬ(7;7). Для случаев с нулём на первом месте подсчитывается их число: СТЕПЕНЬ(7;6). Итоговая


D4 =B4-C4

	A	B	C	D
1	Лаб. 1			
2	Задача 1			Ответы:
3	а)	5040	720	4320
4	β)	823543	117649	705894

разность записывается в ячейку D4.

c) Наиболее сложными являются расчёты именно в этом случае. Сначала в ячейках B5-B9 последовательно записываются количества цифр 4, 5, 6, 7 и общее количество цифр, а в C5-C9 вычисляются их факториалы. Затем в ячейке D9 получается ответ.

D9 f_x =C9/C5/C6/C7/C8

	A	B	C	D	E
1	Лаб. 1				
2	Задача 1			Ответы:	
3	a)	5040	720	4320	
4	β)	823543	117649	705894	
5	c)	3	6		
6		2	2		
7		1	1		
8		1	1		
9		7	5040	420	

d) В этом случае готовой формулы нет, поэтому приходится рассуждать логически. Вначале для составления числа следует выбрать две цифры из семиэлементного множества A, то есть $k = 2$ и $n = 7$. Выбор цифр осуществляется C_7^2 способами (ячейка B11). Затем на каждое из 7 мест можно поставить любую из двух выбранных цифр. Это можно сделать $\overline{A_2^7}$ способами, что записано в ячейке B12. Количество всех таких чисел определяется по правилу произведения (B13). Но и здесь может оказаться ноль на первом месте и ещё какая-то из цифр (например, цифра a). Тогда для каждого из мест со 2-ого по 7 существует два способа выбора: a или 0. Такие числа (их количество в ячейке C13) нужно исключить. Полученный итог записан в ячейке D13. ■

B13 f_x =B11*B12

	A	B	C	D
1	Лаб. 1			
2	Задача 1			Ответы:
3	a)	5040	720	4320
4	β)	823543	117649	705894
5	c)	3	6	
6		2	2	
7		1	1	
8		1	1	
9		7	5040	420
10	d)	2	2	
11		21	6	
12		128		
13		2688	64	2624

Обратите внимание на последнюю картинку. Именно в таком виде можно предоставлять решение задачи в файле из Microsoft Office Excel. Для составления отчёта по мини-проекту достаточно в этот же файл включить решение остальных девяти задач.

Аналогичным образом можно оформлять отчёты и по остальным мини-проектам. В решении следующей задачи подсчёт несложен, поэтому он приведен без иллюстрации в Excel.

З а д а ч а 1.2. На одной из двух данных параллельных прямых отмечено 8 точек, на другой – 11 точек. Найдите число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

Р е ш е н и е. Любой треугольник можно задать его вершинами, поэтому каждому треугольнику соответствует набор из трёх точек. По условию две вершины любого треугольника приходится выбирать на одной прямой и третью – на другой (рис. 2). Поэтому треугольники будут двух видов – с двумя вершинами на первой прямой (где восемь точек), и имеющие две вершины, принадлежащие второй прямой.

Далее нужно отдельно подсчитать число треугольников каждого вида и сложить полученные числа (используется правило суммы: будет треугольник 1-ого или 2-ого вида, то есть выбор объекта «*A* или *B*»).

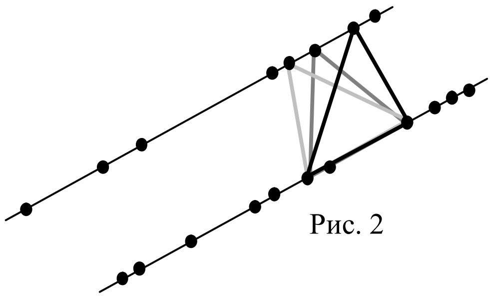


Рис. 2

Две точки из восьми, которые лежат на первой прямой, можно выбрать C_8^2 способами (тут порядок точек не важен, и повторный выбор невозможен). Третью вершину треугольника на другой прямой можно выбрать 11 способами. Всего треугольников первого вида будет $C_8^2 \cdot 11$. Здесь используется правило произведения, так как одновременно нужно выбрать три точки (сначала две точки на одной прямой, и после этого – ещё одну на другой прямой), следовательно, выбирается объект «*A* и *B*».

Аналогично треугольников второго вида – $C_{11}^2 \cdot 8$.

Число всех треугольников будет равно: $8 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_8^2 = 748$. ■

Лабораторная работа 2. Классическая вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определения классической и статистической вероятности и формулы для их вычисления;
- теоремы сложения и умножения вероятностей и их частные случаи;

уметь:

- выбирать события и устанавливать связи между ними согласно условию задачи;
- использовать теоремы сложения и умножения вероятностей при решении задач;
- использовать функции Excel для подсчёта вероятностей;

владеть:

- методами вычисления классической и статистической вероятностей.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Цель мини-проекта: освоение математических методов вычисления классической и статистической вероятности, теорем сложения и умножения вероятностей.

Для достижения этой цели решаемые задачи должны использовать как формулу вероятности, так и теоремы сложения и умножения вероятностей. Общее их число должно быть значительным для наработки навыков и развития математической интуиции, но, с другой стороны укладываться во временные рамки занятия.

Учебная задача: Составить проектное задание не менее чем из 10 задач. При этом можно использовать приёмы известные по прошлому занятию (варианты 1 и 2) или предложить свой вариант отбора задач из списка (раздаточный материал 1).

ПЛАНИРОВАНИЕ

Составляя план мини-проекта студенты используют опыт предыдущего занятия, соответственно внося доработки и коррективы, учитывая замечания при обсуждении. При планировании участники группы более чётко описывают свои роли.

РЕАЛИЗАЦИЯ

Студентам предоставляется информационно-справочный материал по их запросу (раздаточный материал 2). Здесь приведены основные определения, формулы и теоремы в соответствии с тематикой занятия, примеры решения задач, в том числе с использованием Microsoft Office Excel, примеры оформления отчёта по мини-проекту.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп, уже завершивших выполнение своего задания. Мини-проект зачтён, если верно решено три задачи из первых двадцати и три задачи из вторых двадцати задач списка. Если проект не зачтён, то студенты продолжают работать вне аудитории и представляют отчёт дистанционно в портфолио проекта.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обдумайте возможности использования методов, освоенных на лабораторных работах 1 и 2 в основном проекте. Выполняйте проектные работы в соответствии с планом.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы на все задачи записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Загадано двузначное число. Найти вероятность того, что его цифры различны.
2. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится изображение герба.
3. В коробке семь одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу вытаскивают все кубики по очереди. Найти вероятность того, что номера кубиков появятся в убывающем порядке.
4. В пачке содержится 30 пронумерованных карточек. Наудачу взято 3 карточки. Найти вероятность того, что взяты карточки с номерами 12, 24, 30.
5. Среди 25 участников розыгрыша 5 призов находятся 10 девушек. Вычислить вероятность того, что обладателями ровно двух призов окажутся девушки.

6. В коробке 4 белых и 5 чёрных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна из футболок белая, а другая – чёрная.

7. 30 экзаменационных билетов содержат по 3 вопроса, которые не повторяются. Студент знает ответы на 45 вопросов. Найти вероятность того, что в вытащенном билете студент знает ответы на все вопросы.

8. Из 20 плееров 2 имеют дефекты. Для проверки произвольно взято три плеера. Найти вероятность того, что в число отобранных для проверки плееров попадут оба бракованных.

9. В ремонт сдано 16 компьютеров, из них 8 нуждаются в мелком ремонте. Мастер наугад отобрал 6 компьютеров. Найти вероятность того, что ровно два из них нуждаются в мелком ремонте.

10. Среди 14 женщин и 9 мужчин разыгрываются 6 билетов на бесплатное посещение театра. Найти вероятность того, что билеты достанутся трём женщинам и трём мужчинам.

11. В ящике лежат 6 чёрных и 6 синих пар перчаток. Из них наудачу взято 7 пар перчаток. Найти вероятность того, что взято 3 пары синих и 4 пары чёрных перчаток.

12. В коробке 12 мячиков, из которых 3 красных, 5 зелёных и 4 жёлтых. Наудачу взято 3 мячика. Найти вероятность того, что все три мячика разного цвета.

13. В партии из 12 шкафов при транспортировке 4 получили повреждение. Наудачу выбрано 6 шкафов. Вычислить вероятность того, что из них ровно 2 шкафа имеют повреждения.

14. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Наугад выбрано два котёнка. Найти вероятность того, что они разного цвета.

15. На блюде лежало 30 пирожков, из них с 6 грибами. Наугад взято 3 пирожка. Найти вероятность того, что хоть один пирожок окажется с грибами.

16. Вася забыл номер телефона своего приятеля, но помнит из него первые 4 цифры. Всего в номере 7 цифр. Найти вероятность того, что Вася дозвонится до приятеля, если наберёт номер случайным образом.

17. У замка сейфа есть 4 диска с пятью секторами, на каждом

из которых записана одна из цифр от 0 до 4. Найти вероятность открыть замок сейфа, набрав 4 цифры наугад.

18. Из группы, в которой 16 юношей и 14 девушек, выбирается делегация из 5 человек. Найти вероятность того, что при случайном выборе в состав делегации войдут три девушки и два юноши.

19. В мешке лежат 25 красных, 19 синих и 16 зелёных шарфов, одинаковых на ощупь. Наудачу выбрано 9 шарфов. Вычислить вероятность того, что выбрано 4 красных, 3 синих и 2 зелёных шарфа.

20. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семёрка и туз.

21. В ящике лежат 15 игрушек, среди которых 4 с дефектами. Найти вероятность того, что среди семи наудачу вынутых игрушек ровно одна окажется с дефектом.

22. Среди 17 желающих поехать на модный курорт 10 женщин. Определить вероятность того, что среди 12 случайным образом купивших путёвки окажется 7 женщин.

23. Из 22 пар ботинок 3 пары бракованные. Случайным образом для проверки выбрано 6 пар. Найти вероятность того, что в число отобранных ботинок войдёт не более одной бракованной пары.

24. На прилавке лежат 15 дынь, среди которых есть три нестандартные. Найти вероятность того, что среди четырёх наугад отобранных дынь будет хотя бы одна нестандартная.

25. В команде из 16 спортсменов 6 являются мастерами спорта. Для выступления на Олимпиаде выбирают 4 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

26. Экзаменационный билет содержит четыре вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй – 0,85; на третий – 0,8; на четвёртый – 0,75. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на три вопроса.

27. Доля костюмов высшего качества составляет 85%. Найти вероятность того, что из трёх наугад взятых костюмов хотя бы

один будет высшего качества.

28. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,9, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что охотник попал в цель.

29. Шкаф состоит из 5 крупных деталей. Вероятности брака при изготовлении каждой детали равны 0,1; 0,05; 0,03; 0,02; 0,04 соответственно. Найти вероятность того, что изделие будет бракованным, если для этого достаточно наличие в сборке одной бракованной детали.

30. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель каждого стрелка равны 0,9; 0,8; 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в цель попадут ровно два стрелка.

31. Оператор обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок потребует внимания оператора, равна 0,6; для второго станка эта вероятность равна 0,5; для третьего – 0,8; а для четвёртого – 0,65. Найти вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок потребует к себе внимания оператора.

32. Гардеробщица выдала номерки 5 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятность того, что каждому из 5 лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу.

33. Произведён залп из трёх орудий по мишени. Вероятность поражения мишени первым орудием равна 0,8; вторым – 0,75; третьим – 0,9. Найти вероятность поражения мишени.

34. Ребёнок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки – А, А, К, Ш. Найти вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд у него получится слово "каша".

35. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечётные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

36. На 25 одинаковых жетонах нанесены двузначные числа от 25 до 49. Наугад выбран один жетон. Найти вероятность того, что номер жетона делится на 3 или на 5.

37. Из множества 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 наудачу выбрано три различных числа. Найти вероятность того, что сумма выбранных чисел делится на 5.

38. На гранях кубиков написаны числа от 1 до 6. Бросают три кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших чисел меньше или равна числу 12.

39. Вероятность попадания в кольцо первого игрока – 0,7, а второго игрока – 0,8. Игроки бросают мяч по два раза независимо друг от друга. Найти вероятность того, что мяч попадет в кольцо ровно два раза.

40. Из колоды из 32 карт наугад одна за другой вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что в руках окажутся валет, дама, король и туз.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Для расчёта вероятностей событий необходимо учитывать связи между ними, которые перечислены ниже.

1. $A \subset B$ – событие *A содержится* в событии *B* (рис. 3а);
2. $A = B$ – *равносильность* событий *A* и *B*;
3. $A{\cdot}B$ или $A \cap B$ – *произведение* (или *пересечение*) *A* и *B* (рис. 3б);
4. $A{\cdot}B = \varnothing$ – *несовместность* событий *A* и *B* (рис. 3в);
5. $A+B$ или $A \cup B$ – *сумма* (*объединение*) событий *A* или *B* (рис. 3г);
6. $A + \overline{A} = U$, где *U* универсальное множество; $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ – *дополнение* $\overline{A}$ события *A* (рис. 3д);
7. $A \backslash B = A - B$ – *разность* событий *A* и *B* (рис. 3е).

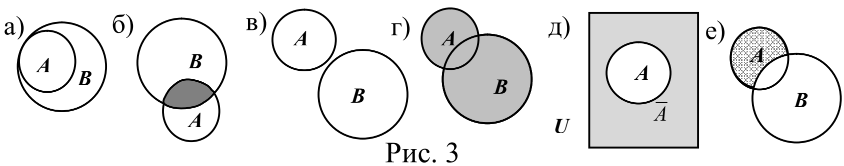


Рис. 3

Частота события – это отношение числа испытаний $m(A)$, в которых появилось данное событие *A*, и общего числа проведенных испытаний *n*. Частота события *A* равна:

$P^*(A) = \dfrac{m(A)}{n}$ (1).

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятных для этого события случаев k к числу n всех возможных случаев, образующих полную группу несовместных равновозможных событий. При этом вероятность события A равна:

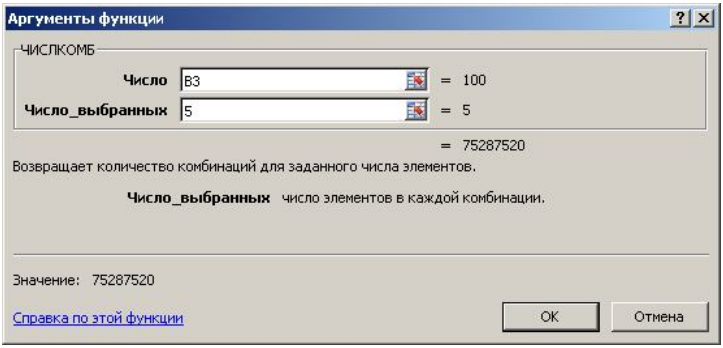
$P(A) = \dfrac{k}{n}$ (2).

При достаточно большом числе испытаний частота *близка* к соответствующей теоретической вероятности $P(A) \cong P^*(A) = \dfrac{m(A)}{n}$.

З а д а ч а 2.1. В ящике находится 100 деталей, из которых 80 штук стандартные. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных деталей найдётся хотя бы одна стандартная.

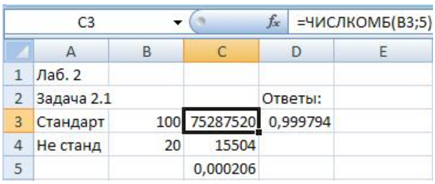
Р е ш е н и е. Пусть событие A – наличие хотя бы одной стандартной детали среди выбранных. Тогда противоположным к A будет событие $\overline{A}$, при котором среди выбранных деталей нет ни одной стандартной. Числа стандартных и нестандартных деталей записываются соответственно в ячейках B3 и B4.

Далее нужно найти $P(\overline{A})$. Ясно, что взять 5 деталей из 100 имеющихся можно C_{100}^{5} способами. Так как число нестандартных деталей равно 100–80 = 20, то из них можно C_{20}^{5} способами выбрать 5 нестандартных деталей. Для ячейки C3 нужно вызвать функцию ЧИСЛКОМБ, затем следует для графы «Число» щёлкнуть левой кнопкой мыши по ячейке B3 и нажать «Enter». В графе «Число_выбранных» просто набирается «5» и «Enter». Затем нужно нажать «OK», и в ячейке C3 появится число, равное C_{100}^{5}.



Для расчёта C_{20}^{5} проще всего «взяться» левой кнопкой мыши за квадратик в правом нижнем углу ячейки C3 (он превратится в крестик), и протянуть его на ячейку C4, где и появится нужный результат.

Вероятность того, что среди выбранных пяти деталей нет ни одной стандартной, подсчитывается как частное C4/C3 и записывается в ячейке C5. Она равна $P(\overline{A}) = {C_{20}^{5}}\Big/{C_{100}^{5}} \approx 0{,}0002$.



	A	B	C	D	E
1	Лаб. 2				
2	Задача 2.1			Ответы:	
3	Стандарт	100	75287520	0,999794	
4	Не станд	20	15504		
5			0,000206		

Окончательный результат легко найти как разность

$P(A) = 1 - 0{,}0002 \approx 0{,}9998$.

Он размещён в ячейке D3.■

З а д а ч а 2.2. В лотерее разыгрывается 100 билетов, из которых 10 выигрышных. Виктор покупает три билета. Найти: а) вероятность того, что хотя бы один из билетов выиграет; б) какое минимальное число билетов нужно купить, чтобы вероятность получения хотя бы одного выигрыша оказалась больше, чем 0,5?

Р е ш е н и е. а) Для начала нужно определить число способов выбора трёх любых лотерейных билетов. Если перенумеровать все возможные тройки билетов, то их будет 1, 2, ... n, где n = $C_{100}^{3} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Пусть событие A состоит в том, что хотя бы один из выбранных билетов оказался выигрышным. Благоприятными для A являются такие группы из трёх билетов, которые содержат хотя бы один выигрышный билет, неблагоприятными – такие, в которых ни на один билет не падает выигрыш. Число неблагоприятных групп равно C_{90}^{3}. Следовательно, число благоприятных равно $k = C_{100}^{3} - C_{90}^{3}$. Отсюда

$$p(A) = \frac{k}{n} = 1 - \frac{C_{90}^{3}}{C_{100}^{3}} = 1 - \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}2735.$$

б) Пусть куплено m билетов, и вероятность выигрыша хотя бы по одному из них равна p_m. Ясно, что с ростом m число p_m будет возрастать. Нужно найти наименьшее значение m, при котором это число станет большим 0,5. Аналогично пункту а), получается:

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{10}{100}\right)\left(1 - \frac{10}{99}\right)\ldots\left(1 - \frac{10}{100 - (m-1)}\right).$$

Поэтому примерно должно получиться $p_m > 1-(0{,}9)^m$.

При $m = 6$ правая часть будет больше 0,5. Следовательно, искомое значение m находится среди чисел 1,2,3,4,5,6. При подсчёте получается:

$p_4 = 0{,}34\ldots$, $p_5 = 0{,}43\ldots$ Оба эти числа меньше 0,5. Таким образом, искомое значение m равно 6. ■

З а д а ч а 2.3. В аудитории присутствуют k человек. Какова вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения совпадают (событие T)?

Р е ш е н и е. Если не считать маловероятные високосные годы, то все возможные дни рождения у k случайно собравшихся людей можно заменить случайной выборкой с повторением k элементов из множества $\boldsymbol{E} = \{1, 2, \ldots 365\}$. В задаче требуется найти вероятность события T – совпадения дней рождения у каких-либо двух из присутствующих. Событие, противоположное T, заключается в том, что все дни рождения различны. При $n = 365$ получится:

$$p(T) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot \left(365 - (k-1)\right)}{365^k}.$$

Это выражение для $p(T)$ зависит от k – числа собравшихся в зале. Подсчитав $p(T)$ для различных значений k с точностью до трёх знаков после запятой, можно получить следующую таблицу.

k	5	10	22	23	30	60
$p(T)$	0,027	0,117	0,476	0,507	0,706	0,994

Из этой таблицы видно, что если в зале находятся всего лишь 23 человека, то уже и в этом случае имеется более половины шансов на то, что, по крайней мере, у двоих из них дни рождения совпадают! ■

Задача 2.4. Слово "фото", составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад достают одну за другой все буквы. Какова вероятность того, что при этом снова появится слово "фото" (событие A)?

Решение. Можно обозначить нужные события:

A_1 – первой достали букву "ф";

A_2 – второй букву "о";

A_3 – третьей букву "т",

A_4 – и последней четвертой ещё одну букву "о".

Тогда $A = A_1A_2A_3A_4$. По формуле произведения событий получится:

$$p(A) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_1A_2}(A_3)p_{A_1A_2A_3}(A_4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{12}.$$ ■

Лабораторная работа 3. Полная вероятность. Формула Байеса

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЙ

В результате освоения содержания занятий обучающийся должен знать:

- понятия условной вероятности и гипотезы;
- формулы полной вероятности и Байеса;

уметь:

- по условию задачи выделять возможные гипотезы и само интересующее событие;
- применять формулы полной вероятности и Байеса к решению практических задач.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта, исходя из общих целей курса и специфики темы.

Цель мини-проекта: освоить математические методы вычисления полной вероятности и вероятности гипотезы, при условии, что данное событие уже произошло.

Учебная задача: Составьте проектное задание не менее чем из 10 задач. При этом в задание должно входить одинаковое количество задач на формулу полной вероятности и формулу Байеса. Предложите и обоснуйте свой вариант отбора задач из списка либо по таблице, либо другой вариант (раздаточный материал 1). В заданиях разных групп допускаются не более трёх совпадающих задач.

ПЛАНИРОВАНИЕ

При составлении плана преподаватель обращает внимание студентов на важность сбора информации, категориями которой являются определения, формулы, теоремы, информация о функциях редактора Excel, примеры с решениями, схемы, скриншоты.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При выполнении мини-проекта студентам предоставляется по запросу информационно-справочный материал (раздаточный материал 2). Важным элементом реализации плана проекта является контроль работы: проверка верности решения задач. Первичная проверка – это принципиальная возможность решения:

- с точки зрения определений конкретных математических величин (например, вероятность p всегда находится в пределах от 0 до 1, а получилось – 1,24);
- с позиций соответствия условию задачи (из условия задачи вытекает, что практически все детали, выпускаемые на заводах качественные, вероятность брака мала, а при решении она получилась 0,56).

Выполняя более детальную проверку можно отслеживать правильность каждого шага решения. Надёжной проверкой является решение задачи другим исполнителем (студентом), не знакомым с найденным ранее ответом или решение задачи другим способом.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп уже завершивших выполнение своего задания. Лабораторная работа зачтена, если решено шесть задач проектного задания.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обдумайте и опишите возможности использования методов, освоенных на лабораторной работе в вашем проекте. Выполняйте проектные работы в соответствии с планом. Продолжайте заполнять рубрики портфолио проекта.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Заготовки деталей поступают из двух цехов предприятия: 60% из первого и 40% из второго. Заготовки первого цеха содержат 5% брака, а второго – 3%. Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка будет без дефекта.

2. В одном ящике 6 синих и 11 зелёных шаров, а в другом – 7 синих и 9 зелёных шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Найти вероятность того, что только один из двух шаров синий.

3. В группе из 25 стрелков имеются 5 отличных, 15 хороших и 5 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна: 0,95 для отличного стрелка, 0,75 для хороше-

го, 0,5 для посредственного. Два стрелка из группы стреляют по одному разу. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

4. В партии стаканов 95% отвечают стандарту. Контроль признаёт пригодным стандартный стакан с вероятностью 0,98 и нестандартный стакан с вероятностью 0,03. Определить вероятность того, что стакан, прошедший контроль, отвечает стандарту.

5. Имеются две партии стульев по 25 и 48 штук, причём в первой партии 2 стула ниже других, а во второй – четыре. Один наугад выбранный стул из первой партии переставлен во вторую партии. Покупатель купил стул из второй партии. Найти вероятность того, что он купил стандартный стул.

6. Устройства сигнализации производятся тремя фирмами. Устройства первой фирмы установлены на 43% машин; устройства второй фирмы – на 28%; устройства третьей фирмы – на 29%. Вероятность успешной работы в течение года устройства, изготовленного первой фирмой, равна 0,9; второй – 0,8; третьей – 0,85. Найти вероятность успешной работы в течение года наугад взятого устройства.

7. На опытной станции имеется запас семян сосны, полученных из двух лесничеств. Среди них 30% семян заготовлены в первом лесничестве, а 70% – во втором. Известно, что всхожесть семян из первого лесничества составляет 90%, а семян из второго лесничества – 80%. Определить вероятность того, что наугад посаженное семечко взойдёт.

8. В ателье работают три портнихи. Первая выполняет 40% всех заказов; вторая – 35%, а третья – 25%. При изготовлении костюмов процент брака у каждой из портних составляет 2, 3 и 5% соответственно. Найти вероятность дефекта у случайно выбранного костюма.

9. В одном мешке лежат 15 синих перчаток и 18 зелёных, а в другом – 21 синяя перчатка и 17 зелёных. Из одного мешка наугад взято две перчатки. Найти вероятность того, что обе перчатки будут одного цвета.

10. На двух станках изготавливаются детали для стульев и складываются в общую тару. Вероятность получения детали нестандартного типа на первом станке равна 0,086, а на втором –

0,065. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь нестандартная.

11. Даны два ящика. В первом ящике четыре белых и три чёрных шара, во втором – пять белых и семь чёрных шаров. Из первого и второго ящика перекладывают по одному шару в третий ящик. Наугад из третьего ящика взят один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

12. На склад поступает продукция трёх фабрик. Причём продукция первой фабрики составляет 20%; второй – 46%; третьей – 34%. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%; для второй – 3%, а для третьей – 1,5%. Вычислить вероятность того, что, наугад взятое изделие окажется стандартным.

13. Среди восьми винтовок пристрелянными являются только три. Вероятность попадания из пристрелянной винтовки равна 0,9, а из непристрелянной – 0,5. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристрелянная винтовка.

14. С первого склада на сборку поступает 35% деталей; со второго – 22%; с третьего – 25%; с четвертого – 18%. Вероятность получить с первого склада бракованную деталь равна 0,01; со второго – 0,003; с третьего – 0,005; с четвертого – 0,001. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

15. В магазин поступило 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем ящиках находится по 5 белых и 7 синих кружек, в четвертом и пятом – по 6 белых и 6 синих кружек. Из случайно выбранного ящика наугад взята кружка. Найти вероятность того, что эта кружка синяя.

16. Первой бригадой производится в четыре раза больше деталей, чем второй. Вероятность того, что деталь окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

17. Для посева заготовлены семена 4 видов клёна: 1-го вида 22% семян; 33% – 2-го вида; 32% – 3-го вида; 13% – 4-го вида. Вероятность всхожести для семян первого вида равна 0,69; для второ-

го – 0,74; для третьего – 0,43; для четвёртого – 0,38. Найти вероятность того, что наугад взятое семечко взойдёт.

18. В группе спортсменов 19 прыгунов, 17 бегунов и 12 метателей снарядов. Вероятность выполнить квалификационную норму для прыгуна равна 0,71; для бегуна – 0,89; для метателя снаряда – 0,73. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

19. При попытке угона машины сигнализация первого вида подаёт сигнал тревоги с вероятностью 0,84, а сигнализация второго вида – с вероятностью 0,99. Вероятность того, что машина оборудована сигнализацией первого или второго вида соответственно равна 0,7 и 0,3. Найти вероятность подачи сигнала тревоги на случайно выбранной машине.

20. В соревнованиях участвуют 7 спортсменов из Москвы, 9 из Поволжья, 13 из Сибири. Спортсмен из Москвы попадает в сборную с вероятностью 0,9; из Поволжья – 0,7; а из Сибири – 0,85. Найти вероятность попадания в сборную наугад выбранного спортсмена.

21. Браконьер, убегая от лесника, вышел на поляну, от которой в разные стороны идут пять дорог. Если идти по первой дороге, то вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,7; по второй – 0,4; по третьей – 0,3; по четвёртой – 0,2; по пятой – 0,6. Через час браконьер вышел из леса. Найти вероятность того, что он пошёл по первой дороге.

22. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле у трёх охотников равна, соответственно, 0,8; 0,6; 0,7. При одновременном выстреле всех трёх охотников зафиксировано одно попадание. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

23. Соревнования на стрельбище происходят следующим образом. Один из трёх спортсменов вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,2; для второго – 0,4; для третьего – 0,7. Мишень не была поражена стрелком. Найти вероятность того, что на линию огня вызывался второй стрелок.

24. Для сдачи экзамена по правилам дорожного движения слушателям нужно было выучить 45 билетов. Из 30 слушателей 15

выучили все билеты; 8 – 30 билетов; 6 – 20 билетов и 1 – 10 билетов. Слушатель сдал экзамен. Найти вероятность того, что он знал всего 20 билетов.

25. Среди абитуриентов, подавших документы в приёмную комиссию, 60% закончили обучение в текущем году, 30% – не более трёх лет назад и 10% более трёх лет назад. Вероятность поступления из этих групп абитуриентов равна 0,88, 0,73 и 0,45 соответственно. Найти вероятность того, что успешно сдавший экзамены абитуриент закончил обучение более трёх лет назад.

26. В лесхозе 50% посадок составляет сосна; 40% береза и 10% ель. Вероятность поражения грибковыми заболеваниями для этих деревьев составляет 0,3; 0,6 и 0,8 соответственно. При санитарном осмотре было выбраковано дерево. Найти вероятность того, что это ель.

27. На склад поступает продукция трёх фабрик: с первой фабрики 26%; со второй – 40%; с третьей – 34%. Средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%; для второй – 3%; а для третьей – 1,5%. Вычислить вероятность того, что, наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

28. В гимназии 67% учащихся девочки. 89% девочек и 78% мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Найти вероятность того, что билет принадлежит девочке.

29. В группе из 30 стрелков 7 отличных, 11 хороших, 10 посредственных и 2 плохих. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,98; хороший – с вероятностью 0,9; посредственный – с вероятностью 0,75; а плохой – с вероятностью 0,4. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды, при этом зафиксировано одно попадание и один промах. Каким стрелком вероятнее всего были произведены выстрелы?

30. В цеху изготавливается 40% овощных соков и 60% фруктово-ягодных. В среднем 9 пакетов овощных соков из 1000 оказываются с недоливом, а среди 500 пакетов фруктово-ягодных соков в 2 пакетах встречается недолив. Случайно выбранный пакет с соком оказался неполным. Найти вероятность того, что это пакет с овощ-

ным соком.

31. При исследовании жирности молока лосих всё стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 50%; во второй 33% и в третьей 17% всех лосих. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной лосихи, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы лосих соответственно равна 0,7; 0,45 и 0,2. Взятая наугад лосиха даёт молоко жирностью 4%. Найти вероятность того, что эта лосиха из первой группы.

32. Имеется 5 ящиков с кружками. В первом, втором и третьем находится по 6 белых и 8 синих кружек, в четвёртом и пятом ящиках по 4 белых и 6 синих кружек. Из наугад выбранного ящика взята одна кружка. Найти вероятность того, что был выбран четвёртый или пятый ящик, если эта кружка оказалась белой.

33. Первая бригада производит в четыре раза больше деталей, чем вторая. Вероятность того, что деталь окажется стандартной для первой бригады 0,88; для второй – 0,93. Взятая наугад деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она сделана первой бригадой.

34. Для контроля влажности воздуха в музее установлены четыре датчика. Вероятности ошибки в их показаниях равны 0,01 для первого, 0,013 для второго, 0,011 для третьего и 0,009 для четвертого. Контролёр наугад снимает показания с одного из датчиков и записывает его показания в контрольный журнал. Найти вероятность того, что были сняты показания со второго датчика, если они оказались ошибочными.

35. В собранной электрической цепи могут быть поставлены предохранители 3 типов. Вероятности постановки предохранителя первого, второго или третьего типов равны 0,17; 0,62 и 0,21. Вероятности перегорания при перегрузке цепи для предохранителей первого, второго и третьего типов равны 0,98; 0,87 и 0,84 соответственно. Найти вероятность того, что поставлен предохранитель первого или второго типа, если предохранитель перегорел.

36. На мебельной фабрике выпускаются столы: 24% – "под орех"; 37% – "под сосну"; 39% – "под дуб". При этом в течение месяца продается 99% выпускаемых столов "под орех"; 95% – "под сосну"; 90% – "под дуб". Найти вероятность того, что проданный

сегодня утром стол имеет окраску "под орех".

37. Три пассажира вышли из вагона метро на станции "Киевская". Вероятности того, что они сделают пересадку, равны 0,89; 0,73 и 0,92, соответственно, для первого, второго и третьего пассажиров. Двое из пассажиров вышли к Киевскому вокзалу. Найти вероятность того, что среди них был второй пассажир.

38. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: K_1 (практически не рискует), K_2 (мало рискует), K_3 (всегда рискует). Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 24% водителей принадлежит классу K_1; 48% – классу K_2 и 28% – классу K_3. Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей класса K_1 равна 0,01; класса K_2 – 0,015; класса K_3 – 0,024. Найти вероятность того, что водитель, ни разу не попавший за год в аварию, из класса K_1.

39. На одной яблоне привиты три сорта яблок, а на второй два из них. В этом году с первой яблони собрали 30 яблок сорта анис, 42 яблока сорта грушовка и 32 яблока сорта пепин шафранный, а со второй яблони – 43 яблока сорта анис и 54 яблока сорта пепин шафранный. Хозяин угостил мальчика яблоком сорта пепин шафранный. Найти вероятность того, что это яблоко росло на второй яблоне.

40. Туристы могут пообедать в трёх ресторанах города. Вероятность того, что они направятся к первому ресторану – 1/3; ко второму – 1/5; к третьему – 7/15. Вероятность того, что эти рестораны уже закрыты на обслуживание какой-то другой группы туристов, для первого ресторана равна 0,5; для второго – 0,127; для третьего – 0,333. Туристы пообедали в том ресторане, куда они пришли. Найти вероятность того, что это был второй ресторан.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Пусть событие A может наступить только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2,… H_k, образующих полную группу. Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)+P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)+\cdot ...\cdot +P_{H_k}(A)\cdot P(H_k),$$

где через $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A),...\cdot P_{H_k}(A)$ обозначены условные вероятности события A для различных гипотез.

Если событие A уже произошло, то среди всех таких испытаний можно найти вероятность осуществления гипотезы H_i, где i = 1,2, ... k. Для этого служит *формула Байеса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A)\cdot P(H_i)}{P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)+P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)+\ldots+P_{H_k}(A)\cdot P(H_k)}.$$

З а д а ч а 3.1. Даны три урны. В первой находятся 5 белых и 3 чёрных шара, во второй – 4 белых и 4 чёрных, в третьей – 8 белых. Из какой-то урны наугад извлекается шар. Найти вероятность того, что он окажется чёрным (событие A).

Р е ш е н и е. Шар может быть взят из первой урны (гипотеза H_1), либо из второй (H_2), либо из третьей (H_3). Так как шансы выбрать любую из урн равны, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3 \approx 0{,}3333$. Достаточно набрать 1/3 в ячейке B3, а затем протащить правый нижний угол ячейки до B5. При этом вероятности H_2 и H_3 появятся автоматически.

D3 =C3/8

	A	B	C	D
1	Лаб. 3			
2	Задача 3.1		Ч.шаров	Вероятн
3	Первая	0,333333	3	0,375
4	Вторая	0,333333	4	0,5
5	Третья	0,333333	0	0

Далее следует записать в ячейках C3-C5 число чёрных шаров в каждой урне и делением на 8 определить вероятности события A для каждой из гипотез H_1, H_2, H_3 в ячейках D3-D5.

E3 =B3*D3

	A	B	C	D	E	F
1	Лаб. 3					
2	Задача 3.1		Ч.шаров	Вероятн		Ответы:
3	H1	0,333333	3	0,375	0,125	0,291667
4	H2	0,333333	4	0,5	0,166666667	
5	H3	0,333333	0	0	0	

Для подсчёта по формуле полной вероятности удобнее всего вначале сосчитать слагаемые в ячейках E3-E5 и затем суммированием получить ответ в ячейке F3. Окончательно получится:

$$P(A) = P_{H1}(A)P(H_1)+P_{H2}(A)\,P(H_2)+\,P_{H3}(A)p(H_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{0}{8}=\frac{7}{24}\approx 0{,}2917.\ \blacksquare$$

З а д а ч а 3.2. Детали производятся на трёх станках: на первом 30%, на втором 25%, а остальные – на третьем станке. На первом станке получается 1% брака произведенных на нём деталей, на втором – 1,5%, на третьем – 2%. Наугад выбранная деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена на первом станке.

Р е ш е н и е. Можно ввести обозначения для событий: A – деталь бракованная; H_1 – деталь произведена на первом станке; H_2 – на втором станке; H_3 – на третьем станке. Тогда:

$P(H_1) = 0{,}30$, $P(H_2) = 0{,}25$, $P(H_3) = 0{,}45$,

$P_{H1}(A) = 0{,}01$, $P_{H2}(A) = 0{,}0015$, $P_{H3}(A) = 0{,}02$;

$P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}30 + 0{,}015 \cdot 0{,}25 + 0{,}02 \cdot 0{,}45 = 0{,}015$;

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}30}{0{,}015} = 0{,}20.$$

Таким образом, из всех бракованных деталей 20% изготовлены на первом станке. ■

З а д а ч а 3.3. При обследовании больного имеется подозрение на одно из двух заболеваний H_1 и H_2. Их вероятности в данных условиях: $P(H_1) =0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$. Для уточнения диагноза проводится анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция. В случае болезни H_1 вероятность положительной реакции равна 0,9, а отрицательной – 0,1; в случае болезни H_2 положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ произведен дважды, и оба раза реакция оказалась отрицательной (событие A). Найти вероятность каждого заболевания после проделанных анализов.

Р е ш е н и е. В случае заболевания H_1 событие A происходит с вероятностью $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$, а в случае заболевания H_2 – с вероятностью $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Следовательно, по формуле Байеса получится:

$$P_A(H_1) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}6}{0{,}01 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4} \approx 0{,}06, \quad P_A(H_2) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}01 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}4} \approx 0{,}94.$$

Отсюда видно, что полученные результаты анализов дают веские основания предполагать болезнь H_2. ■

Лабораторная работа 4. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теоремы Лапласа

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- формулу Бернулли;
- локальную и интегральную теоремы Лапласа;
- условия применимости и ограничения формулы Бернулли и теорем Лапласа;
- функции Microsoft Office Excel для вычисления вероятностей по формуле Бернулли и теоремам Лапласа;

уметь:

- использовать таблицы значений локальной и интегральной функций Лапласа $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$;
- применять формулу Бернулли и теоремы Лапласа к решению практических задач;

владеть:

- техникой альтернативных вычислений по теоремам Лапласа с использованием таблиц и функций Microsoft Office Excel.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта.

Цель мини-проекта: освоить методы вычисления вероятностей, связанных с наступлением события k раз в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события известна.

Учебная задача: В списке задач для студентов разграничить задачи на формулу Бернулли, локальную теорему Лапласа и интегральную теорему Лапласа. Составить проектное задание (не менее 10 задач), в котором представлены все их группы. Проанализируйте, можно ли использовать для этого таблицу.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	5	9	8	12	17	23	27	28	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	27

3	3	4	12	13	14	18	20	22	25	28
4	4	5	16	20	21	23	24	27	28	29
5	5	7	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	26
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	24
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	11	13	17	20	23	25	26	27
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	29
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	26
14	6	11	14	15	17	18	19	22	24	28
15	7	12	15	16	18	20	21	27	29	30

ПЛАНИРОВАНИЕ

Составляя план выполнения мини-проекта, студенты определяют роли всех участников группы. Также следует заранее определить методы работы: использование статистических таблиц, непосредственное вычисление, использование функций Excel. Нужно ответить на вопросы: следует ли выполнять решение задачи двумя способами? Будет ли это способствовать достижению цели мини-проекта? Участники группы должны обосновать все свои решения в беседе с преподавателем.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При реализации плана проекта большое значение имеет грамотное распределение времени, а также умение укладываться в определённые временные рамки. В данном случае на выполнение мини-проекта отводится два академических часа. Можно посоветовать определить контрольные точки. Например, после одного часа работы проверить, какой объём работы уже выполнен. В зависимости от результатов проверки либо ускорить темп работ, либо уделить внимание другим важным параметрам проекта (правильности решения, оформлению отчёта), расширить проектное задание.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

Имея уже некоторый опыт выполнения мини-проектов на лабораторных работах, студенты в ходе обсуждения пытаются самостоятельно определить:

- минусы и плюсы мини-проекта;
- помехи в совместной работе;
- типы задач, которых решено недостаточно для достижения цели проекта;
- вклад каждого участника в решение задач.

Студенты могут сами выдвигать предложения: как можно было бы организовать работу более эффективно, как нивелировать имеющиеся минусы в работе группы, какие информационные материалы можно было бы запросить, какие составляющие работы надо усилить и как это сделать, как представить оптимальный отчёт по мини-проекту. Развивая свои рефлексивные умения, студенты обеспечивают успех своих будущих проектов.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Включите в портфолио проекта описание методов, освоенных на данном лабораторном занятии. Составьте задачу на данные формулы, отражающую специфику вашего предмета или темы основного проекта.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

1. Мастер обслуживает шесть однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания мастера в течение дня, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение дня мастеру придётся вмешаться в работу станков: а) не придётся; б) больше 2-х раз; в) меньше 3-х раз.
2. В мастерской работают 8 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найти вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются 4 мотора.
3. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет от 4 до 6 раз.
4. Игральная кость брошена 5 раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет единица.
5. Перерасход горючего в течение рабочего дня наблюдается в среднем по парку у 20% машин. Найти вероятность того, что из десяти вышедших на линию машин перерасход горючего произойдёт не менее чем у трёх машин.
6. Всхожесть семян астры данного сорта имеет вероятность 0,85. Найти вероятность того, что из семи посеянных семян взой-

дут не менее четырёх.

7. В освещении помещения фирмы используются 14 лампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна 7/8. Найти вероятность того, что в течение года придётся заменить не меньше половины всех лампочек.

8. Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Найти вероятность того, что у стрелка останется хотя бы один неизрасходованный патрон, если он получил 7 патронов и вероятность попадания в цель при одиночном выстреле равна 1/7.

9. Вероятность выигрыша по облигациям займа за всё время его действия равна 0,25. Найти вероятность выиграть по четырём из них для человека, купившего 6 облигаций.

10. Найти вероятность того, что при 18 бросаниях монеты герб выпадет ровно 10 раз.

11. Согласно рекламе вероятность устойчивости данного покрытия против коррозии равна 0,95. Взято 20 независимых образцов. Найти вероятность обнаружения более чем одного случая брака, если реклама соответствует действительности.

12. Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,03. Найти вероятность того, что из 10 телевизоров хотя бы один потребует ремонта в течение гарантийного срока.

13. Вероятность того, что студент забросит мяч в корзину, равна 0,4. Студент произвел 24 броска. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

14. В июне в Москве в среднем бывает 20 дождливых дней. Найти вероятность того, что в период с 20 по 25 июня какие-то два дня окажутся дождливыми.

15. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного охотника равна 0,9 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 7 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

16. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 41 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 5 покупателей обувь этого размера понадобится: а) одному; б) по крайней мере, двум поку-

пателям.

17. Вероятность изготовления детали высшего качества на данном станке равна 0,43. Найти наивероятнейшее число деталей высшего качества среди 42 деталей. Чему равна вероятность этого события?

18. Вероятность опоздать на электричку для студента ежедневно равна 0,15. Студент ездит на учёбу 236 дней в году. Найти наивероятнейшее число опозданий в течение года и вероятность этого числа.

19. Игральную кость бросают 180 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет шесть очков? Найти вероятность этого события.

20. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Найти вероятность того, что из 1000 деталей не менее 880 стандартные.

21. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 10000 новорождённых, мальчиков окажется не больше, чем девочек.

22. Игральную кость бросают 15 000 раз. Найти вероятность того, что шестёрка появится не менее 2 000 и не более 2 500 раз.

23. Вероятность выигрыша в лотерее равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 1000 наугад купленных билетов не менее 30 и не более 40 выигрышных.

24. Мебельная фабрика производит продукцию, среди которой 90% высшего качества. Найти вероятность того, что среди 200 изделий этой фабрики высшего сорта будет: а) не меньше 160; б) не больше 170.

25. При изготовлении радиоламп в среднем случается 2% брака. Найти вероятность того, что в партии из 400 радиоламп число годных заключено от 385 до 395.

26. Саженцы сосны приживаются с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посаженных саженцев число прижившихся будет заключено между 348 и 368.

27. Вероятность выздоровления больных при применении нового лекарства составляет 85%. В больницу на лечение положили 125 больных. Найти вероятность того, что 117 из них вылечатся.

28. Посажено 800 деревьев. Вероятность приживания дерева

равна 0,85. Найти вероятность того, что прижившихся деревьев больше 350.

29. Вероятность появления на занятиях студента равна 0,2. В семестре всего 385 занятий. Найти вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 76 занятиях.

30. Монету бросают 387 раз. Найти вероятность того, что герб при этом выпадет не менее 195 раз, но не более 207 раз.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Если обозначить $P_n(k)$ вероятность того, что в n независимых испытаниях успех наступит k раз, то справедлива *формула Бернулли:*

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (1), где $k = 0,1,2, \dots n$ и $q = 1 - p$.

Наибольшим из чисел $P_n(0)$, $P_n(1)$,... $P_n(n)$ является *наивероятнейшее число успехов* α. Если число $\alpha = (n+1)p$ не является целым, то максимум чисел $P_n(k)$ достигается при целом, ближайшем слева к числу α. А в случае, если число α – целое, максимум достигается сразу при двух соседних значениях $k = \alpha$ и $k = \alpha-1$.

Функция БИНОМРАСП(k,n,p,ЛОЖЬ) позволяет проводить вычисления по формуле Бернулли. Здесь k – количество успехов, n – число испытаний; p – вероятность успеха; "ЛОЖЬ" – указание на то, что определяется вероятность появления ровно k успехов. В случае, когда последний аргумент функции равен "ИСТИНА", функция даёт вероятность того, что в n испытаниях успех наступит не более k раз.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, некоторое событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется формулой:

$P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ (2), где $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Для вычисления значения $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ можно использовать функцию НОРМАЛИЗАЦИЯ, а именно:

x = НОРМАЛИЗАЦИЯ(k; μ; σ), где $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

Для определения значения функции $\varphi(x)$ применяется функция НОРМРАСП с параметрами ноль и единица:

$\varphi(x)$ = НОРМРАСП(x; 0; 1; ЛОЖЬ).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность $P(k_1, k_2)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), некоторое событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется формулой:

$P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ и

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\left(z^2/2\right)} dz$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа в её стандартном представлении для заданного значения аргумента легко может быть вычислена с помощью функции НОРМСТРАСП:

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\left(z^2/2\right)} dz$ = НОРМСТРАСП(x) − 0,5.

Расчёты по локальной и интегральной теоремам Лапласа можно проводить двумя способами:

1) с использованием таблиц локальной и интегральной функций Лапласа (приложения 2 и 3);

2) средствами Microsoft Office Excel.

Полученные результаты небезынтересно сравнить.

З а д а ч а 4.1. Найти вероятность того, что событие X наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Р е ш е н и е. По условию, $n = 243$; $k = 70$; $p = 0{,}25$; $q = 0{,}75$. Так как $n = 243$ – *достаточно большое* число, можно использовать локальную теорему Лапласа.

Сначала надо подсчитать $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \dfrac{9{,}25}{6{,}75} =$ 1,37.

Затем по таблице значений для функции $\varphi(x)$ легко найти значение $\varphi(1,37) = 0,1561$. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$P_{243}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{6,75}\cdot 0,1561 \approx 0,0231.$$

Применяя функции Excel, решение этого примера можно вычислить следующим образом:

$\mu = np = 243\cdot 0,25 = 60,75$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75} = 6,75$;

x = НОРМАЛИЗАЦИЯ(70; 60,75; 6,75) = 1,37;

$\varphi(x)$ = НОРМРАСП(1,37; 0; 1; ЛОЖЬ) = 0,1561;

$$P_{243}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{6,75}\cdot 0,1561 = 0,0231.$$

В данном случае результаты совпали. ■

З а д а ч а 4.2. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8.

Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

Р е ш е н и е. а) По условию, $n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$; $p = 0,8$; $q = 0,2$.

Так как $n = 100$ – достаточно большое число, вполне можно использовать *интегральную* теорему Лапласа. Сначала надо найти x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = -1,25;\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}} = 2,5.$$

Учитывая, что функция Лапласа *нечётна*, то есть $\Phi(-x) = \Phi(x)$, можно получить:

$P_{100}(75; 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$.

По таблице значений функций Лапласа легко найти:

$\Phi(2,5) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность $P_{100}(75; 90) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75, либо 76, либо 77, ..., либо 100. Тогда в рассматриваемом случае следует принять:

$n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 100$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$.

Отсюда $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25$;

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

По таблице можно найти $\Phi(5) = 0{,}5$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Искомая вероятность будет равна:

$P_{100}\,(75;\ 10) \approx \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944$.

в) События "A появилось не менее 75 раз" и "A появилось не более 74 раз" противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность равна:

$P_{100}(0;\ 74) = 1 - P_{100}(75;\ 100) \approx 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$.

Используя функции Excel, решение этого примера для пункта а можно найти следующим образом:

$\mu = np = 100 \cdot 0{,}8 = 80$; $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$;

x_1 = НОРМАЛИЗАЦИЯ(75; 80; 4) = –1,25;

x_2 = НОРМАЛИЗАЦИЯ(90; 80; 4) = 2,5;

$\Phi(x_1)$ = НОРМСТРАСП(–1,25) = 0,3944;

$\Phi(x_2)$ = НОРМСТРАСП(5) = 0,5;

$P_{100}\,(75;\ 10) \approx \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944$. ■

З а д а ч а 4.3. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Р е ш е н и е. По условию задано: $n = 24$; $p = 0{,}6$. Наивероятнейшее число годных к продаже образцов товаров можно найти, вычислив значение $(np+p)$:

$np+p = 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 = 14{,}4 + 0{,}6 = 15$.

Так как $np+p = 15$ – целое, то наивероятнейших чисел два:

$k_0 = 14$ и $k_0 + 1 = 15$. ■

Лабораторная работа 5. Числовые характеристики случайной величины. Основные теоретические законы распределения

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определение дискретной и непрерывной случайной величины;
- определения числовых характеристик случайной величины: функции распределения, плотности распределения, математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения;
- определения основных теоретических распределений случайной величины: биномиального распределения, распределения Пуассона, нормального, показательного и равномерного распределений;
- функции Microsoft Office Excel для подсчёта числовых характеристик случайных величин, подчиняющихся определённым законам распределения;

уметь:

- различать дискретные и непрерывные случайные величины;
- по условию задачи определять закон распределения случайной величины;

владеть:

- методами расчёта числовых характеристик случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения, в том числе с использованием функций Microsoft Office Excel.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта.

Цель мини-проекта: освоить методы расчёта числовых характеристик случайных величин, в том числе, и имеющих распределение, близкое к известному теоретическому распределению (дискретному или непрерывному).

Учебная задача: Составить проектное задание не менее чем из восьми задач. В соответствии с целью мини-проекта можно выделить собственно вычисления числовых характеристик случайных величин и применение дискретных и непрерывных распределений. Поэтому для формирования проектного задания следует в списке задач для студентов (раздаточный материал 1) разграничить разные группы задач: они должны быть обязательно представлены. Следует учесть, что в задачах 1, 12 и 13 предложены пятнадцать вариантов числовых данных. Это позволяет их включить в проектное задание всем группам, не опасаясь дублирования.

Если требуется, преподаватель может предложить таблицу.

Номер варианта	Номер задачи							
1	1	3	6	12	13	19	25	32
2	1	5	7	12	13	18	23	33
3	1	2	8	12	13	20	24	34
4	1	11	9	12	13	21	28	35
5	1	2	10	12	13	22	27	36
6	1	4	6	12	13	15	26	37
7	1	3	7	12	13	22	14	38
8	1	5	8	12	13	20	15	39
9	1	4	9	12	13	19	16	23
10	1	11	10	12	13	18	17	24
11	1	2	6	12	13	17	31	25
12	1	3	7	12	13	16	30	40
13	1	4	8	12	13	15	29	39
14	1	5	9	12	13	14	22	38
15	1	11	10	12	13	16	21	37

ПЛАНИРОВАНИЕ

Имея известный опыт планирования подобных мини-проектов, приобретённый на прошлых занятиях, студенты могут оптимизировать свой план, используя параллельную деятельность участников. Возможно, один студент может решать задачи 1, 12 и 13 на простую подстановку данных в формулы и сразу оформлять отчёт, а другой студент займётся решением более сложных задач.

РЕАЛИЗАЦИЯ

Основной проблемой при реализации это мини-проекта может являться выбор закона распределения в соответствии с условием задачи. Чтобы избежать ошибок следует чётко уяснить различие между распределениями.

При решении задач нужно обратить внимание на использование специальных функций Excel, которых в этой работе предлагается довольно много. Возможно их протестировать на решенных примерах из раздаточного материала. Следует помнить, что, решение задачи двумя способами добавит уверенности при защите мини-проекта.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

Следует обратить внимание на практическую значимость полученных результатов и их полезность для повседневной жизнедеятельности. В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп уже завершивших выполнение своего задания. Лабораторная работа зачтена, если верно решено 6 задач проектного задания.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Определите: возможно ли в вашем проекте применить известные теоретические законы распределения. Способствует ли это использование продвижению проекта? Продолжайте выполнять проектные работы в соответствии с планом и размещать полученные результаты в электронном портфолио.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Подсчитать математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной одним из следующих вариационных рядов (три ряда в каждом варианте):

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ вариационного ряда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	8	6	4	2
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	12	14	15	16	18
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	25	23	21	27	29

1.	10	13	17	20	25	**2.**	8	14	17	20	23	**3.**	20	24	29	34	37
	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05		0,2	0,1	0,2	0,4	0,1		0,2	0,3	0,25	0,15	0,1
4.	14	15	17	25	26	**5.**	16	20	25	30	35	**6.**	0	1,5	1,9	2,5	2,9
	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05		0,2	0,15	0,15	0,3	0,2		0,1	0,25	0,35	0,25	0,05
7.	100	114	128	144	160	**8.**	45	53	67	80	95	**9.**	25	45	60	75	98
	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1		0,25	0,3	0,25	0,19	0,01		0,15	0,25	0,3	0,2	0,1
10.	60	75	80	105	110				**11.**	1	2	3		7	9	10	12
	0,05	0,25	0,45	0,15	0,1					0,04	0,26	0,31		0,09	0,18	0,11	0,01
12.	6	8	14	17	19	20		23	**13.**	20	24	28		30	34	37	40
	0,1	0,11	0,14	0,17	0,18	0,22		0,08		0,1	0,23	0,25		0,18	0,13	0,08	0,03
14.	10	13	15	17	25	27		29	**15.**	8	16	18		20	25	30	35
	0,1	0,12	0,23	0,3	0,17	0,05		0,03		0,01	0,17	0,19		0,26	0,15	0,12	0,1
16.	0,5	1,5	1.9	2,3	2,5	2,9		3,2	**17.**	100	114	125		128	144	157	160
	0,1	0,25	0,27	0,13	0,15	0,07		0,03		0,1	0,25	0,23		0,17	0,15	0,08	0,02
18.	45	53	61	67	78	80		95	**19.**	25	37	45		60	68	75	98
	0,12	0,17	0,22	0,25	0,16	0,07		0,01		0,015	0,085	0,125		0,17	0,3	0,2	0,1
20.	60	75	77	80	105	108		110	**21.**	10	13	16		17	20	25	26
	0,005	0,13	0,225	0,375	0,12 5	0,09		0,05		0,1	0,3	0,3		0,1	0,13	0,05	0,02
22.	8	11	14	16	17	20		23	**23.**	20	24	29		33	34	36	37
	0,02	0,06	0,1	0,22	0,2	0,3		0,1		0,1	0,17	0,25		0,16	0,12	0,1	0,1
24.	14	15	17	21	25	26		31	**25.**	16	19	20		23	25	30	35
	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,04		0,01		0,08	0,12	0,15		0,3	0,15	0,11	0,09
26.	0	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9		3,2	**27.**	100	107	114		128	144	160	
	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,03		0,02		0,1	0,12	0,37		0,22	0,05	0,14	
28.	45	53	67	78	80	95		**29.**	25	45	60	75		87	98		
	0,15	0,3	0,25	0,2	0,09	0,01			0,12	0,27	0,29	0,21		0,1	0,01		
30.	160	170	175	180	105	110											
	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1											

2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

3. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,3. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка:

а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

4. Показания электронных часов изменяются на единицу в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что на данный момент время на часах отличается от истинного не более чем на 20 секунд.

5. Паром для перевозки машин через реку подходит к причалу через каждые 40 мин. Найти вероятность, что подъехавшая случайным образом автомашина будет ожидать прибытия парома не более 10 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее

квадратичное отклонение времени ожидания.

6. Для случайной величины X, равномерно распределённой на промежутке $(-1;5)$, найти математическое ожидание и $P(0 < X < 3)$.

7. Кабинки фуникулёра подъезжают к подножию горы через каждые полчаса. Найти вероятность, что подошедшим лыжникам ждать придётся менее 5 мин. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени ожидания.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(3; 9)$.

9. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(35; 98)$.

10. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале $(123; 245)$.

11. Станок-автомат выдает обработанную деталь через каждые 7 мин. Найти вероятность, что подошедший контролёр будет ожидать готовую деталь менее 30 секунд. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени ожидания.

12. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределённой случайной величины X равны числам a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале $(a + c; a + 2c)$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	32	20	12	42	25	52	13	28	65	78	22	26	35	62	15
b	64	5	4	16	3	7	2	4	5	11	64	5	4	16	3
c	2	5	3	1	2	3	2	4	5	3	2	7	4	3	5

13. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределённой случайной величины X равны a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале $(a - 2c; a + c)$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	56	30	12	42	25	52	33	48	65	78	22	26	25	62	15

b	4	3	10	16	3	9	2	8	5	11	64	5	4	16	3
c	3	2	3	1	2	5	2	3	5	7	2	6	4	3	5

14. Менеджер торгово-посреднической фирмы получает жалобы от некоторых клиентов на то, что служащие фирмы затрачивают слишком много времени на выполнение их заказов. Собрав и проанализировав соответствующую информацию, он выяснил, что среднее время выполнения заказа составляет 6,6 дней, однако для выполнения 20% заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа случайная величина, распределённая по нормальному закону, найдите фактическое стандартное отклонение времени обслуживания клиентов.

15. Производится взвешивание целлюлозной массы без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 30$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

16. Производится измерение диаметра бревна без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой по абсолютной величине, не превосходящей 15 мм.

17. Случайные ошибки при измерении площадей помещений подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ см^2 и математическим ожиданием $\mu = 0$. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного из трёх независимых измерений по абсолютной величине не превзойдёт 4 см^2.

18. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от заданной величины по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Пусть случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma =$ 0,3 мм. Найти среднее количество годных шариков среди ста изготовленных.

19. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролёром, – если поток

машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = 5e^{-5t}$.

20. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,04 \cdot e^{-0,04x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (1, 2).

21. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3e^{-3x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0,13; 0,7).

22. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,6x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (3, 5).

23. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение показательного закона, заданного плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10e^{-10x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

24. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов; в) не менее пяти вызовов.

25. Среднее число клиентов банка в одну минуту равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты придут:

а) три клиента; б) менее трёх клиентов; в) не менее трёх клиентов. Поток клиентов предполагается простейшим.

26. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что в результате перевозки одна бутылка окажется раз-

битой, равна 0,004. Найти вероятности того, что в магазин привезут разбитых бутылок:

а) ровно две; б) меньше двух; в) более двух.

27. Мебельная фабрика отправила на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути до базы равна 0,001. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий:

а) ровно три; б) менее трёх; в) более трёх.

28. На автоматическую телефонную станцию поступают вызовы со средней плотностью 5 вызовов в час. Считая, что число вызовов на любом участке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что за две минуты на станцию поступит:

а) ровно три вызова; б) не менее трёх вызовов; в) хотя бы один вызов.

29. На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка. Найти вероятность того, что за смену (8 часов) число обрывов нити будет не менее 2 и не более 4.

30. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение суток равна 0,002. Найти вероятность того, что за сутки откажут ровно три элемента.

31. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

32. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов с вероятностью отказа для каждого в течение времени t равной 0,0005. Найти вероятность того, что в течение времени t откажут:

а) ровно 2 элемента; б) ни одного элемента; в) менее трёх элементов.

33. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель не попадет:

а) один снаряд; б) два снаряда; в) ни одного снаряда.

34. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Найти вероятность обнаружения 5 семян сорняков при случайном отборе 2500 семян.

35. Завод отправил на базу 3000 изделий. Вероятность повре-

ждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

36. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на четырёх веретенах.

37. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 отобранных деталей окажется:

а) 5 бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

38. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

39. Пусть вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365. Найти вероятность того, что из 500 человек у двух человек день рождения придётся на Новый год.

40. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель попадёт:

а) один снаряд; б) два снаряда; в) не попадает ни одного снаряда.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Случайная величина может принимать некоторое множество значений в зависимости от условий. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина имеет конечное или счётное множество значений. Если множество значений является интервалом числовой оси, то случайная величина называется *непрерывной*.

Для задания случайной величины необходимо знать *закон распределения*, который определяет вероятность появления случайной величины в любом интервале. В свою очередь этот закон может быть задан одним из трёх способов: рядом, функцией или плотностью распределения.

Ряд распределения применяется для задания дискретных случайных величин. Он представляет собой таблицу, в которой записаны возможные (или наблюдаемые) значения случайной величины и соответствующие им вероятности (частоты).

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$, где x – переменная величина, определяет вероятность того, что случайная величина X примет некоторое значение, меньшее, чем x $(X < x)$.

Плотность распределения $f(x)$ – производная функции распределения. Вероятность попадания случайной величины X на интервал $[a, b)$ вычисляется как интеграл от плотности:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Различные числовые характеристики случайных величин указывают на тот или иной закон распределения этих величин. Основными характеристиками являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Среднее значение или *математическое ожидание* дискретной случайной величины X, вычисляется по формуле:

$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i p^*(x_i)$, где x_i – возможные значения случайной величины X; p_i – вероятность (или частота $p^*(x_i)$) появления i-го возможного значения случайной величины X.

Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от своего математического ожидания:

$$D(X) = \sigma^2 = M[(X - M(X))^2].$$

Среднее квадратичное отклонение σ равно положительному значению корня квадратного из дисперсии.

Редактор Excel позволяет достаточно просто вычислять характеристики дискретных случайных величин по рядам их распределения.

З а д а ч а 5.1. Дискретная случайная величина X задана рядом

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,0769	0,1538	0,0256	0,1538	0,0769	0,0256	0,1026	0,1795	0,0769	0,1284

распределения.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X.

Р е ш е н и е. Ряд значений дискретной случайной величины X

следует перенести в Excel. На рисунке в столбце A записаны значения случайной величины X, а в столбце B – их вероятности.

Математическое ожидание $M(X)$ для дискретной случайной величины X проще всего вычислять по формуле:

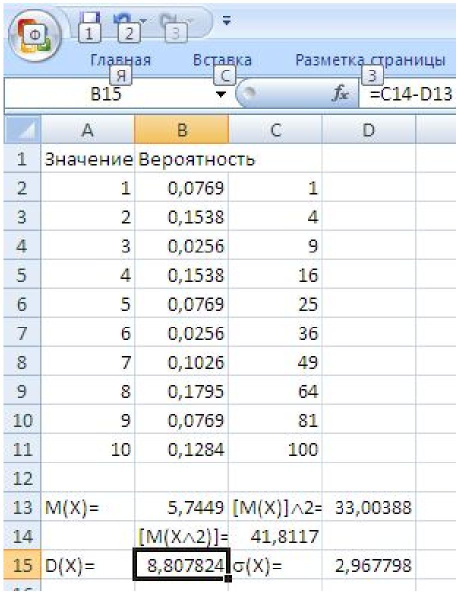
=СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11).

Результат содержится в ячейке B13.

Для подсчёта дисперсии случайной величины X можно воспользоваться формулой:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Сначала проще найти вычитаемое: квадрат математического ожидания. Результат записан в ячейке D14. Затем нужно отыскать математическое ожидание величины X^2. Для этого значения величины X возводятся в квадраты, и результаты записываются в столбец C. После этого вычисляется $M(X^2)$.



	A	B	C	D
1	Значение	Вероятность		
2	1	0,0769	1	
3	2	0,1538	4	
4	3	0,0256	9	
5	4	0,1538	16	
6	5	0,0769	25	
7	6	0,0256	36	
8	7	0,1026	49	
9	8	0,1795	64	
10	9	0,0769	81	
11	10	0,1284	100	
12				
13	M(X)=	5,7449	[M(X)]^2=	33,00388
14		[M(X^2)]=	41,8117	
15	D(X)=	8,807824	σ(X)=	2,967798

Результат находится в ячейке C14.

Наконец по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ достаточно вычислить разность между значениями ячеек C13 и B13, что видно на рисунке.

В данном случае дисперсия равна 8,8078, что записано в ячейке B15.

Среднее квадратичное отклонение легко подсчитать как корень квадратный из дисперсии.

Результат находится в ячейке D15. ■

Ниже даны определения пяти теоретических распределений случайной величины X (двух дискретных и трёх непрерывных распределений).

I. *Биномиальное распределение* задаётся формулой Бернулли:

$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ $(m = 0,1, \ldots n)$ (1), где $P(X = m)$ – вероятность появлений события A ровно m раз в серии из n испытаний.

Вычисления вероятностей по формуле Бернулли рассматривались на предыдущем занятии.

II. *Распределение Пуассона* (закон редких явлений) – это предельный случай биномиального распределения при $p \to 0$ и $n \to \infty$ так, что $np \to M(X) = a > 0$.

Плотность распределения Пуассона

$$P_n(m) = f(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (2).$$

Плотность распределения Пуассона вычисляется с помощью статистической функции ПУАССОН(m; a; ЛОЖЬ).

Значение функции распределения $P(X < m) = F(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e^{-a} a^k}{k!}$ вычисляется как ПУАССОН(m–1; a; ИСТИНА).

Интенсивность – среднее число событий λ, происходящих за единицу времени t. Вероятность появления m событий за время t равна:

$P_t(m) = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}$. Отсюда $a = \lambda t$.

III. *Нормальное распределение* – распределение, функция которого имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3).$$

Это непрерывное распределение задаётся математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.

Значение функции нормального распределения для значения x вычисляется по формуле:

НОРМРАСП(x; μ; σ; ИСТИНА) = $F(x)$.

Если нужно найти значение плотности нормального распределения, то последний аргумент следует взять "ЛОЖЬ".

IV. *Показательное распределение* – распределение с плотностью:

$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x > 0$ (4), где λ – параметр распределения.

Значение плотности показательного распределения $\lambda e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции ЭКСПРАСП(x; λ; ЛОЖЬ).

Функция показательного распределения имеет вид:

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (5), где $\lambda > 0$, $0 \le x < \infty$.

Значение функции показательного распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции ЭКСПРАСП(x; λ; ИСТИНА).

V. <u>*Равномерное распределение*</u> на отрезке $[a, b]$ – на этом отрезке плотность распределения постоянна, а вне отрезка – равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ï ðè } a < x < b \\ 0 \quad\ , \text{ï ðè } x \ge b; x \le a \end{cases} \qquad (6).$$

Функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad\ , \text{ï ðè } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ï ðè } a < x \le b \\ 1 \quad\ , \text{ï ðè } x \ge b \end{cases} \quad (7).$$

Вероятность попадания равномерно распределённой случайной величины X на отрезок $[\alpha, \beta]$ выражается формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

В таблице 5.1 приводятся числовые характеристики рассмотренных теоретических распределений.

Т а б л и ц а 5.1.

Дискретные распределения

Распределение	Область значений	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	0, 1, 2,.... n	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	$np(1-p)$
Пуассона	0, 1, 2, ...	$P_n(m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$	a	a

Непрерывные распределения

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	(a, b)	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{b-a}{12}$
Нормальное	$(-\infty,\infty)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Показательное	$(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

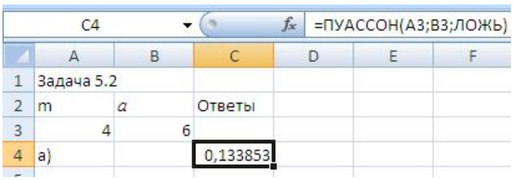
Ниже рассматриваются задачи на вычисление различных параметров этих теоретических распределений.

З а д а ч а 5.2. Среднее число заказов билетов, поступающих кассиру в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) четыре заказа; б) менее четырёх заказов; в) не менее четырёх заказов.

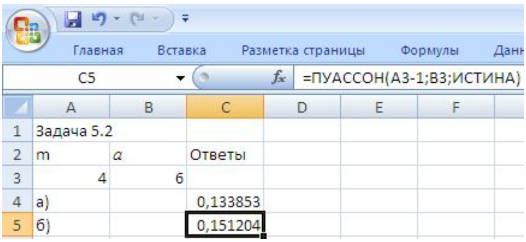
Р е ш е н и е. Поступление заказа можно считать «редким» явлением, подчиняющимся распределению Пуассона. Тогда из условия легко найти $\lambda = 3$, $t = 2$, $m = 4$ и $a = \lambda t = 6$.

а) Искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит четыре заказа по формуле (2) равна:



$$P_2(4) = \frac{6^4\cdot e^{-6}}{4!} \approx 0{,}1339.$$

В Excel нужно подсчитать плотность вероятности ПУАССОН(4; 6; ЛОЖЬ).



б) Событие "поступило менее четырёх заказов" можно разложить на случаи поступления заказов: 3, 2, 1 и 0 заказа. Они несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$P_2(k < 4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) =$

$$\frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6 \cdot e^{-6}}{1!}+$$

$+ e^{-6} = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = e^{-6}\cdot 61 \approx 0{,}1512.$

В Excel проще найти значение функции ПУАССОН(3; 6; ИСТИНА).

в) События "поступило менее четырёх заказов" и "поступило не менее четырёх заказов" противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее четырёх заказов, равна:

$P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k < 4) \approx 1 - 0{,}1512 = 0{,}8488.$ ■

З а д а ч а 5.3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $\mu = 32$ и дисперсией $\sigma^2 = 16$. Найти:

а) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (28, 38).

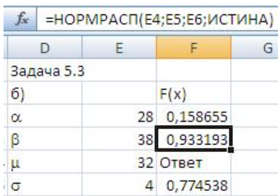
Р е ш е н и е. По условию $\mu = 32$, $\sigma^2 = 16$, отсюда $\sigma = 4$. Поэтому:

а) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-32)^2}{32}}$ (по таблице 5.1);

б) Подставив $\alpha = 28$, $\beta = 38$, $\mu = 32$, $\sigma = 4$ в формулу:

$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\dfrac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, легко получить:

$$P(28 < X < 38) = \Phi\left(\frac{38-32}{4}\right) - \Phi\left(\frac{28-32}{4}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1).$$



По таблице значений функции $\Phi(x)$ из приложения 2 можно найти значения:

$\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$, $\Phi(1) = 0{,}3413$.

Таким образом, искомая вероятность равна:

$P(28 < X < 38) = 0{,}4332 + 0{,}3413 = 0{,}7745.$

В Excel можно использовать функцию НОРМРАСП, как это видно из рисунка. Сначала подсчитывается $F(\alpha)$ в ячейке F3, затем $F(\beta)$ – в F4 и, наконец, их разность – в F6. ■

Задача 5.4. Пусть X – случайная величина, подчинённая нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 1{,}6$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что при четырёх испытаниях эта случайная величина хотя бы один раз попадёт в интервал (1, 2).

Решение. Сначала нужно найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1, 2) при одном испытании:

$$P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6) =$$

$$= 0{,}1554 + 0{,}2258 = 0{,}3812.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина X <u>не попадёт</u> в интервал (1, 2) при одном испытании равна:

$1 - 0{,}3812 = 0{,}6188$.

Следовательно, для четырёх испытаний вероятность непопадания получится $0{,}6188^4 \approx 0{,}1466$.

Значит, искомая вероятность $P = 1 - 0{,}1466 = 0{,}8534$. ■

Задача 5.5. Время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения. Среднее время безотказной работы прибора равно 100 ч. Найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) функцию распределения;

в) вероятность того, что время безотказной работы прибора превысит 120 ч.

Решение. Из условия задачи по математическому ожиданию случайной величины X легко найти параметр λ:

$M(X) = 1/\lambda = 100$, откуда $\lambda = 1/100 = 0{,}01$. Следовательно,

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}01e^{-0{,}01x}, & x \ge 0 \end{cases}$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}01x}, & x \ge 0 \end{cases}$;

в) нужную вероятность можно вычислить, используя функцию распределения $F(x)$ =ЭКСПРАСП(x; λ; ИСТИНА):

$P(X > 120) = 1 -$ ЭКСПРАСП(120; 0,01; ИСТИНА) $\approx 0{,}3012$. ■

Задача 5.6. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ (t – время в часах). Найти вероятность безотказной работы элемента в течение 100 часов.

Р е ш е н и е. Из формулы плотности (4) видно, что интенсивность отказов λ = 0,02. Тогда можно вычислить вероятность <u>безотказной</u> работы (*надёжности* R) элемента в течение 100 часов:

$R(100) = 1 - F(100) = e^{-0,02\cdot 100} = e^{-2} \approx 0,1353.$

Значение надёжности $R(100) = e^{-0,02\cdot 100}$ можно найти следующим способом:

R(100) = 1 – ЭКСПРАСП(100; 0,02; ИСТИНА). ■

З а д а ч а 5.7. Поезда метро идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Найти вероятность того, что ждать пассажиру придётся не больше полуминуты. Определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Р е ш е н и е. Случайная величина X – время ожидания поезда – на временном отрезке [0, 2] имеет равномерный закон распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 2 \\ 1/2, & x \in [0,2] \end{cases}.$$

Тогда вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты:

$$P(X \le 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4}.$$

По таблице 5.1 легко найти:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ (мин.)}, \ D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/3} \approx 0,5774 \text{ (мин)}. ■$$

Лабораторная работа 6. Статистические гипотезы. Критерии Пирсона и Стьюдента. Использование математических методов в педагогических исследованиях

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен

знать:

- определение статистической гипотезы и способы проверки её достоверности;
- формулировки критериев Пирсона и Стьюдента;
- функции Microsoft Office Excel для проверки критериев Пирсона и Стьюдента;

уметь:

- формулировать статистические гипотезы;
- сравнивать эмпирический закон распределения случайной величины X с теоретическим распределением;
- применять критерии Пирсона и Стьюдента для оценки достоверности гипотез;

владеть:

- методами использования статистических функций редактора Microsoft Office Excel для подсчётов χ^2 и t.

ХОД ЗАНЯТИЯ

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Студенты и преподаватель совместно формулируют цель мини-проекта, исходя из общих целей курса и специфики темы.

Цель мини-проекта: освоить приёмы формулировки гипотез исследования в соответствии с условиями задачи; освоить математические методы проверки достоверности выдвинутых гипотез.

Учебная задача. Составьте проектное задание не менее чем из 10 задач. Возможен выбор задач по таблице.

Номер варианта	Номер задачи									
1	1	5	9	8	17	23	28	30	33	38
2	2	6	7	11	19	21	26	27	35	39
3	3	4	12	13	18	20	25	28	32	36
4	4	5	16	20	23	24	28	29	31	37
5	5	7	9	10	13	16	23	25	31	40

6	6	8	12	14	17	18	24	26	34	36
7	1	3	7	14	16	18	23	24	35	36
8	2	4	8	10	14	22	28	30	32	40
9	5	7	9	11	15	17	21	23	33	39
10	6	8	10	14	18	25	27	28	35	40
11	2	5	11	13	20	23	26	27	31	37
12	3	10	12	17	19	22	27	29	34	38
13	4	9	13	16	20	21	25	26	33	39
14	6	11	14	15	18	19	24	28	32	37
15	7	12	15	16	20	21	29	30	34	38

Можно также предложить и обосновать свой вариант отбора задач из списка (раздаточный материал 1). В заданиях разных групп допускаются не более трёх совпадающих задач.

ПЛАНИРОВАНИЕ

При составлении плана преподаватель обращает внимание студентов на важность сбора информации, категориями которой являются определения, формулы, теоремы, информация о функциях редактора Excel, примеры с решениями, схемы, скриншоты.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При выполнении мини-проекта студентам предоставляется по запросу информационно-справочный материал (раздаточный материал 2). Важным элементом реализации плана проекта является контроль работы, если расчёты провести двумя способами, то можно избежать ошибок. Следует обратить внимание на формулировку правильного вывода из сделанных расчётов. Возможные выводы обсудить в группе.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп уже завершивших выполнение своего задания. Лабораторная работа зачтена, если решено шесть задач проектного задания.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обдумайте и опишите возможности использования методов, освоенных на лабораторной работе в Вашем проекте. Выполняйте проектные работы в соответствии с планом. Продолжайте заполнять рубрики портфолио проекта.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

1. Из урны с большим количеством белых и чёрных шаров наугад достаётся шар, фиксируется его цвет, затем шар опускается обратно в урну, после чего шары перемешиваются. После 100 таких действий оказалось, что 67 раз достали белый шар и 33 раза – чёрный. На 5%-м уровне значимости проверить гипотезу о том, что доля белых шаров в урне составляет 0,6.

2. Из школьников, обучавшихся по стандартному учебнику по информатике, 80% получили на экзамене 4 и 5. По новому учебнику обучалась группа из 100 учащихся. На экзамене 90 из них получили 4 и 5. Проверить гипотезу о том, что новый учебник лучше на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Для условия задачи 2 проверить гипотезу о том, что новый учебник лучше на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

4. Игральный кубик бросили 60 раз, при этом числа 1,2,3,4,5,6 выпали соответственно 12,9,13,11,8,7 раз. Можно ли на пятипроцентном уровне значимости отвергнуть гипотезу о симметричности кубика?

5. Трое рабочих работают на трёх одинаковых станках. В конце смены первый рабочий изготовил 60 деталей, второй – 80. третий – 100 деталей. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о том, что производительности труда первых двух рабочих равны между собой и в два раза меньше производительности третьего рабочего.

6. В таблице даны эмпирические частоты p_i^* и теоретические частоты p_i, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, случайно или закономерно расхождение между частотами.

p_i^*	5	10	20	8	7
p_i	6	14	18	7	5

7. У одного преподавателя двойки получили 14 из 280 студентов, а у второго – 5 из 125 по такому же курсу. Сделайте вывод о достоверности различий в подготовке студентов у первого и второго преподавателей.

8. Крупная фармацевтическая компания провела исследование частоты побочных реакций при приёме нового препарата. Из

2500 больных, принимавших новый препарат, 50 отмечали побочные эффекты. В группе сравнения из 3000 больных, принимавших обычные лекарства, побочные реакции наблюдались у 96. Сделайте вывод о достоверности различий частоты побочных реакций при приёме обычных лекарств и нового препарата.

9. После года эксплуатации нуждались в ремонте 12 из 200 автомобилей «Лада». В контрольной группе из 400 иномарок после года эксплуатации ремонт потребовался в шести случаях. Сделайте вывод о влиянии производителя на качество автомобиля.

10. После проведения вакцинации от гриппа среди студентов были получены результаты: из 500 вакцинированных в период эпидемии заболели гриппом 20 человек, из 1600 отказавшихся от вакцинации гриппом заболели 200 человек. Оцените эффективность вакцины от гриппа.

11. Из 450 школьников, посещавших подготовительные курсы, не поступило в университет 18 человек. Из 500 школьников, не посещавших курсы, в тот же университет не поступило 42 человека. Сделайте вывод об эффективности подготовительных курсов.

12. В соревнованиях по бегу на 60 метров приняли участие школьники младших классов из двух школ. Из первой школы ($n = 60$) ученики показали средний результат $M = 10{,}1$ сек, при среднем квадратичном отклонении $\sigma = 2{,}5$. Из второй школы ($n = 85$) – $M = 9{,}5$ сек, $\sigma = 1{,}8$. Сделайте вывод о значимости показанного учеником результата для определения той из двух школ, в которой он обучается.

13. Для студентов-заочников ($n = 36$), посетивших менее половины лекций, средняя оценка на экзамене составила 3,2, $\sigma = 0{,}2$. А для посетивших более 90% лекций по предмету ($n = 150$), средняя оценка на экзамене составила 4,5, $\sigma = 0{,}5$. Сделайте вывод о достоверности различий успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций по предмету.

14. Температура тела у 400 больных воспалением лёгких до приёма нового препарата составила: $M = 39{,}2$, $\sigma = 0{,}6$, а через 30 минут после приёма: $M = 37{,}6$, $\sigma = 0{,}8$. Сделайте вывод об эффективности нового препарата для понижения температуры.

15. Распределение машин предприятия по величине грузообо-

рота за месяц характеризуется следующими данными.

Грузооборот, т	Число машин	Средняя себестоимость одной т/км, у.е.
До 2	3	52
24	5	49
40	4	45
6 и более	4	46

Определите среднюю себестоимость одной тонны/км по предприятию в целом.

16. Продажа грузовых автомобилей КамАЗ-55111 на товарной бирже города характеризуется следующими данными.

Дата торга	Реализовано автомобилей, шт.	Средняя цена одного автомобиля, тыс. руб.	Дата торга	Общая сумма выручки от реализации автомобилей, тыс. руб.	Средняя цена одного автомобиля, тыс. руб.
4.01	18	120,5	1.02	1830	122,0
17.01	25	118,7	15.02	2651	120,5
28.01	24	116,0	26.02	1232	123,2

Определить, на сколько процентов изменилась средняя цена одного грузового автомобиля в феврале по сравнению с январём.

17. Из работников данной фирмы случайным образом было выбрано 30 человек. По выборке оказалось, что средняя зарплата (в месяц) составляет 10 тыс. рублей при среднем квадратичном отклонении 3 тыс. рублей. С вероятностью 0,99 определить среднюю зарплату в фирме.

18. По двум предприятиям фирмы имеются следующие данные о затратах на производство продукции.

Предприятия, входящие в фирму	Прошлый год		Отчётный год	
	Доля затрат на оплату труда в общих затратах на производство в %	Общие затраты на производство, млн руб.	Затраты на оплату труда, млн руб.	Доля затрат на оплату труда в общих затратах на производство в %
1	18,0	200	40,7	18,5
2	19,5	180	38,0	20,2

Определить изменение (в %) доли затрат на оплату труда в общих затратах на производство в целом по фирме в отчётном году по сравнению с прошлым годом.

19. Имеются данные о себестоимости транспортной работы по автотранспортным предприятиям объединения:

Предприятия, входящие в объединение	Август		Сентябрь	
	Транспортная работа, тыс. т/км	Себестоимость 10 т/км, руб.	Общая сумма затрат на транспортную работу, тыс. руб.	Себестоимость 10 т/км, руб.
1	20800	0,512	10784,7	0,521
2	8500	0,540	4609,6	0,536
3	30000	0,497	14520,2	0,481

Определить на сколько процентов изменилась средняя себестоимость 10 т/км по объединению в сентябре по сравнению с августом.

20. Для оценки качества двух учебников по геометрии методом случайного отбора были выбраны два района с большим количеством сельских школ. Учащиеся первого района (20 классов) обучались по учебнику №1, учащиеся второго района (15 классов) – по учебнику №2.

Районы	Ответы		Всего
	Да	Нет	
1	15	5	20
2	7	8	15
Сумма	22	13	35

Учителя школ этих районов должны были ответить на вопрос: «Доступен ли учебник в целом для самостоятельного чтения и помогает ли он усвоить материал, который учитель не объяснял в классе? (Ответ: да – нет.)». Обе выборки учителей случайные и независимые. Ответы 20 учителей первого района и 15 учителей второго района записаны в таблице. Назовите учебник более доступный для самостоятельного изучения.

21. Случайным образом из учащихся первого района (см. задача 20), писавших контрольную работу по геометрии, отобрано 50 человек, и из учащихся второго района – тоже 50 человек. Результаты выполнения работы нужно использовать для проверки гипотезы о том, что учебник №1 способствует лучшему усвоению прове-

Районы	Оценки				Всего
	2	3	4	5	
1	3	19	18	10	50
2	9	24	12	5	50
Сумма	12	43	30	15	100

ряемого раздела курса, то есть учащиеся первого района в среднем будут получать более высокие оценки, чем учащиеся второго района.

22. Оценки за одну и ту же контрольную работу для учащихся экспериментальных и контрольных классов указаны в таблице.

Классы	Оценки				Всего
	2	3	4	5	
Экспериментальные	5	9	15	6	35
Контрольные	16	32	52	20	120
Сумма	21	41	67	13	155

Проверить гипотезу о равенстве вероятностей получения отметок «5», «4», «3» и «2» за выполнение этой работы учащимися контрольных и экспериментальных классов.

23. С целью повышения уровня ориентации учащихся на художественно-эстетические ценности в экспериментальной группе проводились беседы, выставки детских рисунков, организовывались посещения музеев и картинных галерей, встречи с музыкантами, художниками и артистами. Для проверки эффективности этой работы до её начала и после неё проводилось тестирование. Оценить эффективность этой работы.

Результаты теста

Ученики (n = 10)	Баллы		Разность d	d^2
	до начала эксперимента (X)	в конце эксперимента ($У$)		
Иванов	14	18	4	16
Новиков	20	19	–1	1
Сидоров	15	22	7	49
Пирогов	11	17	6	36
Агапов	16	24	8	64
Суворов	13	21	8	64
Рыжиков	16	25	9	81
Серов	19	26	7	49
Топоров	15	24	9	81
Быстров	9	15	6	36
Сумма	148	211	63	477
Среднее	14,8	21,1		

24. С уровнем значимости α = 0,05 определить максимальное отклонение среднего значения генеральной совокупности от среднего выборки 3,4,4,2,5,3,4,3,5,4,3,5,6.

25. Дана случайная выборка весов детей в кг: 21,21,22,22,22,22, 22,22,22,22,22,23,23,23,23,23,23,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,25, 25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,26,26,26,26,26,26,26, 26,26,26, 26,26,26,26,27,27. Проверить соответствие экспериментальных данных нормальному закону распределения.

26. В таблице даны ежемесячные количества проданных турфирмой путёвок за периоды до и после начала активной рекламной компании.

	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август
С рекламой	162	156	144	137	125	145	151
Без рекламы	135	126	115	140	121	112	130

Определить достоверность отличия данных реализации турфирмой путевок за периоды до и после начала рекламной компании.

27. Найти границы 95%-ного доверительного интервала для среднего значения, если у 25 телефонных аккумуляторов среднее время разряда в режиме ожидания составило 140 часов, а стандартное отклонение – 2,5 часа.

28. В таблице дано количество наличных денег в рублях у двух групп студентов по пять человек.

1 группа	30	30	40	50	60
2 группа	10	20	30	40	50

Определить достоверность различия между группами, если группы состоят из различных студентов.

29. Для условия задачи 28 определить достоверность различия между группами 1 и 2, если группы состоят из одних и тех же студентов, но первая – до посещения буфета, а вторая – после.

30. Определите, лежит ли значение 15 внутри границ 95%-ного доверительного интервала выборки 2,3,5,7,4,9,6,4,9,10,4,7,19.

31. После окончания институтов трудоустроилось по специальности из первого института 90 человек, а из второго – 60 (обе группы молодых специалистов включали по 100 человек). Проверить гипотезу о равной востребованности выпускников этих институтов на рынке труда.

32. Пусть имеется выборка, содержащая числовые значения: 13,15,17,19,22,25,19. Необходимо определить границы 95%-ного доверительного интервала для среднего значения.

33. Определение веса в кг для случайной выборки из 55 студентов дало результаты: 64,57,63,62,58,61,63,60,60,61,65, 62,62,60,64,61,59,59,63,61,62,58,58,63,61,59,62,60,60,58,61,60,63,63, 58,60,59,60,59,61,62,62, 63,57,61,58,60,64,60,59,61,64,62,59,65. Проверить соответствие этих результатов нормальному закону распределения.

34. Даны результаты бега на дистанции 100 м в секундах для двух групп студентов. Студенты первой группы в течение года посещали факультативные занятия по физкультуре. Определите, достоверны ли отличия по результатам бега в этих группах.

Посещавшие факультатив	12,6	12,3	11,9	12,2	13,0	12,4
Не посещавшие	12,8	13,2	13,0	12,9	13,5	13,1

35. В социологическом опросе на вопрос о перенесённом в детстве заболевании мужчины и женщины дали следующие ответы.

	Да	Нет	Не помню
Мужчины	58	11	10
Женщины	35	25	23

Проверить достоверность отличий в ответах женщин и мужчин.

36. В таблице приводятся данные о ежемесячной результативности (количество голов) футбольной команды в двух сезонах.

Сезон	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь
2013 г.	3	4	5	8	9	1	2	4	5
2014 г.	6	19	3	2	14	4	5	17	1

Определить достоверность статистических различий результативности команды в рассматриваемых сезонах.

37. В таблице приведена заработная плата обслуживающего персонала и официантов ресторана.

Персонал	2100	2100	2000	2000	2000	1900	1800	1800
Официанты	3200	3000	2500	2000	1900	1800		

Можно ли по этим данным сделать вывод о большей зарплате официантов ресторана?

38. Ваш друг утверждает, что он умеет различать на вкус два близких сорта вина если и не всегда, то хотя бы в четырёх случаях

из пяти. Вы же склонны считать, что он просто угадывает. Сформулируйте оба этих мнения в виде статистических гипотез и предложите какую-либо процедуру проверки. В чем состоят ошибки первого и второго рода?

39. Определите, достоверны ли различия в количестве туристских путёвок, приобретаемых семейными парами и отдельными туристами.

	Количество путёвок					
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь
Пары	67	75	58	89	96	94
Одиночки	43	56	78	87	85	90

40. В таблице приведены результаты группы студентов по скоростному чтению до и после специального курса по быстрому чтению.

Студент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До курса	86	83	86	70	66	90	70	85	77	86
После	82	79	91	77	68	86	81	90	85	94

Произошли ли статистически значимые изменения скорости чтения у студентов?

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Статистическая гипотеза – это предположение о виде неизвестного распределения случайной величины или о параметрах известных распределений.

Вероятность совершить ошибку 1-го рода (необоснованно отклонить гипотезу H_0, когда она верна) обычно обозначается α и называется *уровнем значимости.* Для верной гипотезы H_0 такая вероятность должна быть относительно небольшой. Вероятность совершить ошибку 2-го рода (принять гипотезу H_0, когда она неверна) обозначается через β. При этом вероятность $(1–\beta)$ не допустить ошибку 2 рода (отклонить H_0 именно тогда, когда она неверна) называется *мощностью* критерия. Для верной гипотезы H_0 мощность должна быть близкой к 1.

Пусть требуется проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что случайная величина X подчиняется теоретическому закону распределения. Для величины X известны результаты n независимых испытаний и по ней построен вариационный ряд распределения (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Интервал	x_1-x_2	x_2-x_3	…	x_i-x_{i+1}	…	x_k-x_{k+1}
Частота p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\cdots$	p_i^*	$\cdots$	p_k^*

Здесь k – число интервалов эмпирического закона распределения; i – номер интервала; m_i – наблюдаемое количество значений случайной величины, попадающих в i-й интервал; $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ – частота (статистическая вероятность) попадания случайной величины в i-й интервал.

Для теоретического распределения нужно построить ряд с теми же интервалами (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Интервал	x_1 -x_2	x_2-x_3	…	x_i-x_{i+1}	…	x_k-x_{k+1}
Вероятность p_i	p_1	p_2	…	p_i	…	p_k

Здесь p_i – теоретическая вероятность попадания случайной величины X в i-й интервал.

По критерию χ^2 Пирсона за *меру расхождения* между теоретическим законом распределения и наблюдаемым распределением принимается величина:

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i} \quad (1).$$

Далее следует определить достоверность гипотезы H_0 о том, что распределение величины X действительно близко к теоретическому закону.

Для этого вычисляется вероятность $P(\chi^2_{\alpha,k} \le \chi^2) = 1 - \alpha$. Это вероятность того, что за счёт чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений χ^2 будет не меньше, чем табличное (критическое) значение $\chi^2_{\alpha,k} = \chi^2_{\text{êð}}$ для данной выборки.

Для того чтобы найти α, следует подсчитать число степеней свободы r для данного вариационного ряда распределения:

$r = k - l$ (2),

где k – число интервалов, а l – число независимых условий («связей»), наложенных на частоты p_i^*. Например, всегда сумма частот равна единице $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$ (то есть l всегда ≥ 1), также могут совпадать средние значения или дисперсии.

По таблице приложения 4 можно для каждого значения $\chi^2_{\alpha,k}$ и числа степеней свободы r найти вероятность α того, что величина, распределённая по закону χ^2, не превзойдёт это значение. В таблице заголовками служат значение вероятности α в столбцах и число степеней свободы r в строках. Числа в таблице являются теоретическими значениями $\chi^2_{\alpha,k}$.

Таким образом, схема применения критерия χ^2 к оценке гипотезы о согласованности теоретического и статистического распределений сводится к следующим действиям:

1) вычисление меры расхождения χ^2 по формуле (1);

2) подсчёт числа степеней свободы r по формуле (2);

3) поиск подходящего значения $\chi^2_{\alpha,k}$ в строке с найденным значением r таблицы (приложения 4) и подсчёт вероятности того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, будет не меньше $\chi^2_{\alpha,k}$.

4) если эта вероятность очень мала, то гипотеза H_0 не принимается как неправдоподобная. Если же вероятность относительно велика, то гипотеза H_0 считается не противоречащей опытным данным.

Ниже приведены примеры на применение критерия χ^2.

Задача 6.1. Гипотеза H_0: население острова Кипр состоит из примерно одинакового количества мужчин и женщин. Для проверки H_0 взята случайная выборка из 100 человек: в ней оказалось 46 мужчин и 54 женщины. Верна ли гипотеза H_0?

Решение. Согласно гипотезе H_0 отношение количества мужчин и женщин в выборке должны быть равными (50/50). Число степеней свободы $r = 1$. Тогда, согласно критерию Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i} = \frac{\left(46-50\right)^2}{50} + \frac{\left(54-50\right)^2}{50} = 0{,}64.$$

При $r = 1$ для $\chi^2 = 0{,}4549$, $p = 0{,}5$; а для $\chi^2 = 0{,}7083$, $p = 0{,}6$.

Несложный расчёт даёт: $\dfrac{0{,}64 - 0{,}4549}{0{,}7083 - 0{,}4549} = \dfrac{x}{0{,}1}$.

Отсюда $x = 0{,}073$ и $p = 0{,}5 + x \approx 0{,}573$. Так как эта вероятность, соответствующая значению $\chi^2 = 0{,}64$ маленькой не является, то это не противоречит выполнению гипотезы H_0. ■

Задача 6.2. Для 500 деталей отклонение X их размера от стандартного (в мм) указано в таблице.

I_i	–4;–3	–3;–2	–2;–1	–1;0	0;1	1;2	2;3	3;4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10

Проверить гипотезу H_0 о том, что закон распределения величины X является нормальным.

Решение. Нормальный закон распределения определяется параметрами μ и σ. Поэтому, сначала нужно вычислить значения этих параметров для данной выборки. Это можно сделать тем же способом, как на занятии 5.

Здесь в строке 4 записаны наблюдаемые значения, в строке 5 – их частоты p_i^*, а в ячейках A13 и B15, соответственно, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Затем нужно вычислить теоретические вероятности p_i попадания в те же разряды для нормального распределения с математическим ожиданием $\mu = 0{,}168$ и средним квадратичным отклонением и $\sigma = 1{,}44837$.

Проще всего в Excel использовать функцию НОРМРАСП, но не забывать про «хвосты». Из строки 9 видно, что для теоретического распределения примерно одно значение < (–4), и два значения > 4.

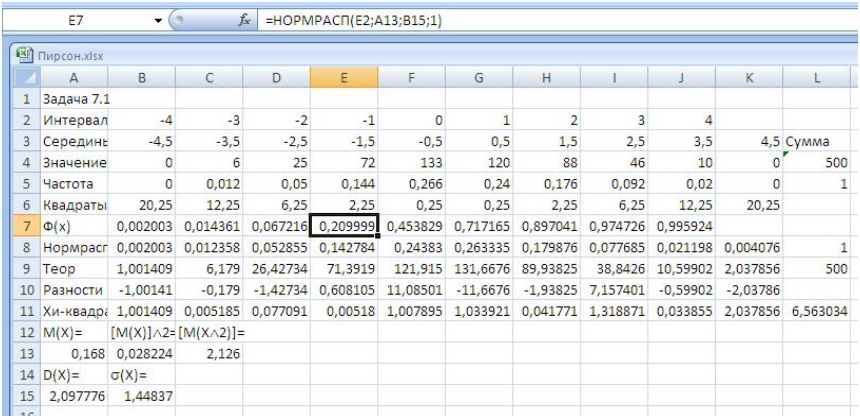
В строке 7 последовательно записываются значения функции $\Phi(x)$ от (–4) до 4, а в строке 8 считаются разности вероятностей попадания значений функции в 10 интервалов $(-\infty,-4]$, $(-4,-3]$,…

(3,–4], (4,∞). После этого в строке 9 вычисляются соответствующие теоретические значения np_i (для $n = 500$). На первый взгляд, соответствующие теоретические значения np_i в строке 7 и числа попаданий в интервалы m_i в строке 4 довольно близки. Теперь нужно вычислить критерий Пирсона.

По формуле (2) подсчитывается значение меры расхождения:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 6{,}563.$$

Разности из числителя записываются в 10 строке, а значения χ^2 для каждого слагаемого в 11-ой. Таким образом, значение χ^2 находится в ячейке L11.


E7 =НОРМРАСП(E2;A13;B15;1)

Пирсон.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Задача 7.1											
2	Интервал	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
3	Середины	-4,5	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	Сумма
4	Значение	0	6	25	72	133	120	88	46	10	0	500
5	Частота	0	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02	0	1
6	Квадраты	20,25	12,25	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	12,25	20,25	
7	Φ(x)	0,002003	0,014361	0,067216	0,209999	0,453829	0,717165	0,897041	0,974726	0,995924		
8	Нормрасп	0,002003	0,012358	0,052855	0,142784	0,24383	0,263335	0,179876	0,077685	0,021198	0,004076	1
9	Теор	1,001409	6,179	26,42734	71,3919	121,915	131,6676	89,93825	38,8426	10,59902	2,037856	500
10	Разности	-1,00141	-0,179	-1,42734	0,608105	11,08501	-11,6676	-1,93825	7,157401	-0,59902	-2,03786	
11	Хи-квадра	1,001409	0,005185	0,077091	0,00518	1,007895	1,033921	0,041771	1,318871	0,033855	2,037856	6,563034
12	M(X)=	[M(X)]^2=	[M(X^2)]=									
13	0,168	0,028224	2,126									
14	D(X)=	σ(X)=										
15	2,097776	1,44837										

Число степеней свободы определяется как число интервалов минус число наложенных связей s (в данном случае $s = 3$, так как сумма $p_i = 1$, $\mu = 0{,}168$ и $\sigma = 1{,}44837$): $r = 10 - 3 = 7$.

По приложению 4 для $r = 7$ легко найти при $\chi^2 = 6{,}3458$, $p = 0{,}50$; а при $\chi^2 = 7{,}2832$, $p = 0{,}60$.

Следовательно, искомая вероятность p при $\chi^2 = 6{,}563$ приблизительно равна 0,5232. Эта вероятность малой не является. Поэтому гипотезу о том, что величина X распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной. ■

Одновыборочный t-критерий Стьюдента применяется для проверки гипотезы H_0: $M(X) = \mu$ о равенстве математического ожидания $M(X)$ у выборки объёма n известному значению μ генеральной совокупности. При этом случайная величина X считается распределённой нормально, а её среднее квадратичное отклонение σ неизвестно.

Для распределения Стьюдента существует доверительный интервал $\gamma = \left(\bar{x} - t_\gamma \, {}^{s}\!/\!\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_\gamma \, {}^{s}\!/\!\sqrt{n}\right)$, куда попадёт μ с надёжностью γ. При этом $\bar{x}$ – среднее, а s – среднее квадратичное отклонение для выборки.

В таблице приложения 5 по заданным n и γ можно найти t_γ.

Наиболее часто используется двухвыборочный t-критерий, который пригоден для проверки равенства средних значений в двух выборках.

Для применения этого критерия необходимо, чтобы исходные данные имели нормальное или близкое к нему распределение. В случае применения двухвыборочного критерия для независимых выборок также необходимо соблюдение условия равенства дисперсий.

Пусть имеются две независимые выборки с объёмами n_1, n_2 нормально распределенных случайных величин X_1, X_2. Необходимо проверить по выборочным данным гипотезу равенства математических ожиданий этих случайных величин H_0: $M_1 = M_2$.

Значение t-критерия Стьюдента для проверки гипотезы H_0 равно:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_d} = \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) : \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (3),$$ где ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) – разность выборочных средних; s_1^2 и s_2^2 – дисперсии выборок.

При справедливости гипотезы H_0 случайная величина T имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы, где

$$k = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 : \left(\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}\right) \quad (4).$$

В случае, если дисперсии выборок предполагаются одинаковыми, значение t-критерия равно:

$$t=\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right):s_X\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ \text{(6), где } s_X=\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s_1^2+\left(n_2-1\right)s_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

Число степеней свободы равно: $k = n_1 + n_2 - 2$. После этого по таблице приложения 5 легко найти критическое значение t-критерия Стьюдента для нужного уровня значимости (например, $\alpha < 0{,}05$) и при данном числе степеней свободы k. Возможны два варианта:

1) рассчитанное значение t равно или больше критического табличного значения $t_{крит}$. Тогда различия между сравниваемыми величинами можно считать не случайными (*статистически значимыми*);

2) значение t меньше табличного $t_{крит}$. Тогда различия сравниваемых величин считаются случайными (они *статистически не значимы*).

Ниже рассматривается пример оценки статистической значимости различий по исследуемому признаку между двумя выборками.

Задача 6.3. Дано задание изучить показатели интеллекта студентов 1 и 5 курсов технического вуза. Для этого случайным образом были отобраны 12 студентов первого курса и 13 студентов 5 курса, у которых коэффициент интеллекта определялся по одной и той же методике. Были получены следующие результаты: 1 группа – первый курс: 111,104, 107,90,101,107,106,107,95,106,105,115; 2 группа – пятый курс: 113,107,123,122,117,112,105,108,111,114,102, 104,108. Оценить с помощью критерия Стьюдента достоверность различий между этими группами.

Решение. Гипотеза H_0: различия между группами случайны.

В Excel для оценки достоверности отличий по t-критерию Стьюдента используются специальная функция ТТЕСТ. Она использует параметры: *ТТЕСТ (массив 1; массив 2; хвосты; тип).* Здесь:

•*массив 1* – первое множество данных;

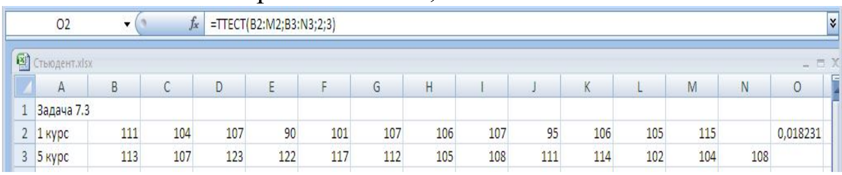
•*массив2* – второе множество данных;

•*хвосты* – число незаданных «хвостов» распределения. Обычно число хвостов равно 2 (влево до $-\infty$ и вправо до $+\infty$);

•*тип* – это вид используемого t-теста (1 – парный одновыборочный, 2 – двухвыборочный с равными дисперсиями, 3 – двухвыборочный с неравными дисперсиями).

Далее следует ввести в ячейку A2: 1 курс, а затем в ячейки B2:M2 – коэффициенты интеллекта у студентов первой группы. Аналогично вводится в ячейку A3: 5 курс, а в B3:N3 – коэффициенты интеллекта у студентов второй группы.

Для свободной ячейки O2 надо из статистических функций выбрать функцию ТТЕСТ и нажать ОК. В появившемся диалоговом окне следует указателем мыши (при нажатой левой кнопке) ввести диапазон данных первой группы в Массив 1 (B2:M2). В поле Массив 2 тем же способом вводится диапазон данных второй группы (B3:N3). В поле Хвосты ставится цифра 2 (без кавычек), а в поле Тип – цифра 3. Осталось нажать кнопку ОК и в ячейке O2 появится значение вероятности – 0,018231.



O2 =ТТЕСТ(B2:M2;B3:N3;2;3)

Стьюдент.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Задача 7.3														
2	1 курс	111	104	107	90	101	107	106	107	95	106	105	115		0,018231
3	5 курс	113	107	123	122	117	112	105	108	111	114	102	104	108	

Получившаяся вероятность p = 0,018563 < 0,02 случайности различий между группами слишком мала. Поэтому, на этом уровне значимости гипотеза H_0 отклоняется. Следовательно, различия между группами не случайные, и средние выборок считаются отличающимися друг от друга. Вывод: имеющиеся различия между группами статистически достоверны. ■

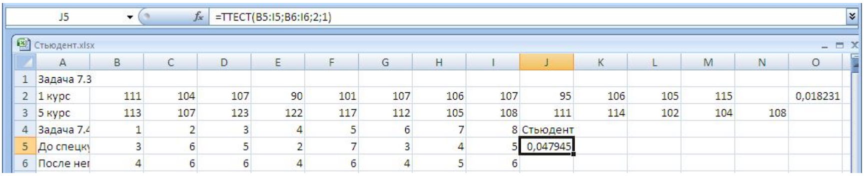
З а д а ч а 6.4. Для оценки эффективности спецкурса до и после него проводилось тестирование по 10-балльной шкале в группе из 8 студентов. Результаты тестирования приведены в таблице.

Студенты	1	2	3	4	5	6	7	8
До спецкурса	3	6	5	2	7	3	4	5
После спецкурса	4	6	6	4	6	4	5	6

С помощью критерия Стьюдента проверить гипотезу о том, что спецкурс повысил уровень знаний студентов.

Р е ш е н и е. Гипотеза H_0: различия между результатами тестирования до и после спецкурса носят случайный характер.

В рабочую таблицу нужно ввести в ячейку A5 слова: До спецкурса и затем первую строку таблицы (B5:I5). Далее вводятся в ячейку A6 слова: После него, а в B6:I6 – значения из 2-ой строки.



J5 =ТТЕСТ(B5:I5;B6:I6;2;1)

Стьюдент.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Задача 7.3														
2	1 курс	111	104	107	90	101	107	106	107	95	106	105	115		0,018231
3	5 курс	113	107	123	122	117	112	105	108	111	114	102	104	108	
4	Задача 7.4	1	2	3	4	5	6	7	8	Стьюдент					
5	До спецку	3	6	5	2	7	3	4	5	0,047945					
6	После не	4	6	6	4	6	4	5	6						

Затем в свободной ячейке J5 вычисляется значение функции ТТЕСТ:

ТТЕСТ(B5:I5;B6:I6;2;1) ≈ 0,047945.

На этот раз в поле Тип вводится цифра 1, так как выборка парная.

Вероятность случайного различия между результатами тестирования p = 0,047945 < 0,05, поэтому гипотеза H_0 отклоняется. Следовательно, различия между выборками неслучайные, и средние выборок считаются достоверно отличающимися друг от друга.

Вывод: различия между показателями тестирования до и после спецкурса значимы (p < 0,05). ■

Лабораторная работа 7. Обработка статистических данных. Формы графического представления данных

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- особенности работы с статистическими данными;
- понятие допустимой ошибки и способы её определения;
- основные формы графического представления данных; (таблицы, диаграммы, графики с трендом, графики, гистограммы и полигоны распределения);

уметь:

- строить таблицы, диаграммы, графики с трендом, графики, гистограммы и полигоны распределения, в том числе с помощью функций Excel.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Необходимые пояснения

Для постановки цели занятия студенты должны представлять, с какими данными им предстоит работать. Поэтому первоначально преподаватель проводит со студентами группы тестирование «Проверьте грамотность» по четырём вариантам (раздаточный материал 1). Ответы студенты представляют на бумажном носителе. Это позволяет выполнять более разносторонний анализ тестовых данных и избавляет от ограничений тестирующей программы. Затем сообщается, что аналогичное тестирование проходили и студенты других направлений и профилей подготовки, а также заочной формы обучения; доступны опросные листы студентов предыдущих лет обучения.

Студенты проводят самопроверку теста, пользуясь ключом (раздаточный материал 1), начисляют себе по одному баллу за каждый правильный ответ и подсчитывают итоговое количество баллов. То есть за первое задание испытуемый может набрать 5 баллов, за второе, третье, пятое, шестое – 2 балла, за четвёртое и седьмое – 1 балл, за восьмое – 3 балла.

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

Цель мини-проекта: приобрести опыт обработки реальных данных с использованием математических методов (на примере обработки результатов тестирования), освоить различные формы графического представления данных (таблицы, диаграммы, гистограммы и полигоны распределения, график функции распределения).

Учебная задача. Составить проектное задание на исследование результатов тестирования. В рамках этого задания требуется проанализировать различные варианты графического представления данных, обосновать выбор оптимального для целей исследования варианта.

В качестве ориентира студентам предлагаются некоторые варианты тем и проблем исследования.

I. Тема. *Распределение числа студентов по количеству правильных ответов в листе.*

Проблема 1. Как преподавателю можно определить ожидаемое число правильных ответов в работе студентов до проведения тестирования? Насколько точно можно это сделать?

Проблема 2. Какие результаты тестирования считать нормой, а какие исключением?

Проблема 3. Как отличаются результаты тестирования для студентов различных направлений/профилей обучения?

Проблема 4. Как отличаются результаты тестирования для студентов очной и заочной формы обучения?

Проблема 5. В чём различие прохождения теста по сравнению со студентами предыдущих лет обучения?

II. Тема. *Распределение числа правильных ответов по вопросам.*

Проблема: Какие вопросы теста являются неэффективными? Какие изменения можно предложить для увеличения валидности теста?

III. Тема. *Распределение числа правильных ответов по студентам.*

Проблема. Как определить валидность теста? Какими дополнительными данными нужно для этого располагать?

IV. Тема. *Распределение числа вопросов по числу правильных ответов на вопрос.*

V. Тема. *Распределение числа правильных ответов по вариантам.*

Проблема. Насколько равнозначны варианты тестирования? Если есть существенные отличия, то чем они обусловлены? Какие дополнительные распределения нужно рассмотреть для более эффективного решения проблемы?

ПЛАНИРОВАНИЕ

Так как в данном случае проектное задание отличается от заданий, выполнявшихся ранее, то можно рекомендовать студентам приблизительные планы, которые они должны уточнить и скорректировать в соответствии с проблемой конкретного мини-проекта. Приблизительные планы даны в соответствии с темами.

I. Тема. *Распределение числа студентов по количеству правильных ответов в листе.*

1. Составить закон распределения по числу правильных ответов (число правильных ответов/ кол-во студентов, получивших именно столько правильных ответов). Набрать закон распределения в Excel.
2. Построить гистограмму распределения, полигон и круговую диаграмму.
3. Найти функцию распределения и построить её график.
4. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.
5. Вычислить также моду числа правильных ответов.
6. На другом листе Excel представить то же самое для студентов другой выборочной группы (если это требуется).
7. Сформулировать выводы. Найти допустимую ошибку.

II. Тема. *Распределение числа правильных ответов по вопросам.*

1. Составить закон распределения исходя из данных анкетирования студентов (№ вопроса/ число правильных ответов).
2. Построить гистограмму распределения и другие графики, выбрать оптимальный вид графического представления для отчёта.
3. Найти также моду числа правильных ответов.

4. Сделать выводы о самых сложных и лёгких вопросах, сформулировать рекомендации преподавателю по улучшению теста. Найти допустимую ошибку.

III. Тема. *Распределение числа правильных ответов по студентам.*

1. Составить закон распределения (номер студента в списке/ число верных ответов этого студента). Набрать закон распределения в Excel.
2. Построить гистограмму распределения и другие графики, выбрать оптимальный вид графического представления для отчёта.
3. Найти дополнительные данные о грамотности студентов и также представить их графически.
4. Сформулировать выводы, учесть допустимую ошибку.

IV. Тема. *Распределение числа вопросов по числу правильных ответов на вопрос.*

Можно взять за ориентир план первой темы.

V. Тема. *Распределение числа правильных ответов по вариантам.*

Можно взять за ориентир план второй темы.

РЕАЛИЗАЦИЯ

При реализации проекта для полученных статистических данных обнаруживается довольно много неожиданных затруднений (по сравнению с предыдущими мини-проектами):

- отбор данных для обработки: необходимо получить точные выводы, а для этого следует отрегулировать объём выборки, оказывающий влияние на допустимую ошибку, использовать некоторые механизмы отбора (такое затруднение возникает, если обследование не сплошное);
- построение закона распределения: в стандартных задачах по теории вероятностей уже дан закон распределения и вычисления проводятся на его основе; здесь же все данные следует извлекать из первоисточников (листов с ответами);
- оптимальное представление результатов: выбор не только вида диаграммы, но и различных атрибутов, таких как цве-

товое решение, наличие/отсутствие вспомогательных линий, подписи осей, внесение цифровых данных.

- формулировка выводов: получив ответ на языке математики, студенты часто затрудняются интерпретировать полученный результат.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

При оценке мини-проекта обращается внимание на выбор оптимальных форм графического представления результатов тестирования, количество и качество графиков в отчёте, количество найденных характеристик распределения. Однако самым важным является решение поставленной проблемы и построение выводов.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Обосновать особенности выбора данных для основного проекта, найти объём выборки в зависимости от значения допустимой ошибки и вероятности. Протестировать различные формы графического представления результатов проекта и выдвинуть предложения по использованию тех или иных видов диаграмм.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Тест «Проверьте грамотность» (четыре варианта).

Вариант 1.

1. Расставьте ударения в следующих словах (для двуударных слов отметить два ударения): *вероисповедание, гофрированный, колледж, петля, раскупорить*.
2. Приведите множественное число родительного падежа в словах (нет …кого? чего?): *апельсины, барышни*.
3. Приведите множественное число слов (они …кто? что?): *договор, шофер*.
4. Проверьте правильность использования глагола «избегать» в следующей фразе: «Избегайте шутливые формы подачи материала».
5. Проверьте правильность написания согласных в словах: *безполезный, бесвкусный*.
6. Проверьте правильность написания слов и двойных согласных: *диковинный, ветренный*.
7. Проверьте правильность сочетания слов в следующей фразе: «Приведя примеры, студент улучшил научный уровень своей работы».

8. Проверьте правильность написания слов: *скомпроментировать, венегрет, сталилитейный*.

Вариант 2.

1. Расставьте ударения в следующих словах (для двуударных слов отметить два ударения): *жизнеобеспечение, завидно, кулинария, сливовый, мускулистый*.
2. Приведите множественное число родительного падежа в словах (нет …кого? чего?): *блюдца, зеркала*.
3. Приведите множественное число слов (они …кто? что?): *кучер, цыпленок*.
4. Проверьте правильность использования глагола «соблюдать» в следующей фразе: «В любом научном произведении необходимо соблюдать чувство меры».
5. Проверьте правильность написания согласных в словах: *всдремнуть, бездарный*.
6. Проверьте правильность написания слов и двойных согласных: *кованный, масленица*.
7. Проверьте правильность сочетания слов в следующей фразе: «Не всегда можно достичь научную истину».
8. Проверьте правильность написания слов: *сосредотачивать, подчерпнуть, предистория, компоновка*.

Вариант 3.

1. Расставьте ударения в следующих словах (для двуударных слов отметить два ударения): *звонит, избалованный, микроволновая, пломбированный, манит*.
2. Приведите множественное число родительного падежа в словах (нет …кого? чего?): *носки, серьги*.
3. Приведите множественное число слов (они …кто? что?): *топор, профессор*.
4. Проверьте правильность использования глагола «разместить» в следующей фразе: «На каком стенде размещен Ваш плакат?»
5. Проверьте правильность написания согласных в словах: *изкривленный, безпосадочный*.
6. Проверьте правильность написания слов и двойных согласных: *подветреный, деревянный*.

7. Проверьте правильность сочетания слов в следующей фразе: «Согласно распоряжения заведующего лаборатории».
8. Проверьте правильность написания слов: *ассиметрия, словестный, весткий аргумент*.

Вариант 4.

1. Расставьте ударения в следующих словах (для двуударных слов отметить два ударения): *каталог, красивее, передом, одновременно, феномен*.
2. Приведите множественное число родительного падежа в словах (нет …кого? чего?): *сапоги, полотенца.*
3. Приведите множественное число слов (они …кто? что?): *директор, лист* (бумаги).
4. Проверьте правильность использования глагола «избегать» в следующей фразе: «Избегайте использование таблиц с большим объемом материала».
5. Проверьте правильность написания согласных в словах: *безсрочный, изхудалый*.
6. Проверьте правильность написания слов и двойных согласных: *балованный, серебрянный*.
7. Проверьте правильность сочетания слов в следующей фразе: «Необходимо слова заменить на символы».
8. Проверьте правильность написания слов: *полисадник, агенство, скурпулезно.*

Ответы (приведены по заданиям).

1. Вероисповéдание, гофрирóванный, жизнеобеспéчение, зави´дно, звони´т, избалóванный, каталóг, краси´вее, кóллéдж, кулинáри´я, мáнит, микровóлнóвая, мýскулистый, одноврéмéнно, передóм, пéтля´, пломбирóванный, раскýпорить, сли´вовый, фенóмéн.
2. Апельсины – апельсинов, барышня – барышень, блюдце – блюдец, зеркало – зеркал, носки – носков, полотенце – полотенец, сапог – сапог, серьга – серёг.
3. Директор – директора, договор – договоры, кучер – кучера, лист – листы, профессор – профессора, топор – топоры, цыпленок – цыплята, шофер – шоферы.

4. Глагол «избегать» требует дополнения в родительном падеже. Например, «избегайте шутливых форм подачи материала» или «избегайте использования таблиц с большим объемом материала».

   Фраза «На каком стенде размещен Ваш плакат?» неправильна, так как глагол «разместить» предполагает количество размещаемых лиц или предметов больше одного.

   В предложении «В любом научном произведении необходимо соблюдать чувство меры» глагол «соблюдать» применен неправильно. Соблюдать можно правило, закон, распорядок и пр. «Чувство меры» можно проявлять.
5. В приставках без-, воз-, вз-, из-, раз-, низ-, из-, чрез-(через-) перед глухими к, п, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ пишется «с» вместо «з». Правильное написание: бесполезный, безвкусный, беспосадочный, искривленный, вздремнуть, бездарный, исхудалый, бессрочный.
6. Подветренный, деревянный, серебряный, ветреный, диковинный, кованый, балованный, масленица.
7. Ошибка в примененном словосочетании связана с влиянием близкого по смыслу выражения «поменять что-то на что-то». В данном случае следует убрать предлог и заменить падеж: «необходимо слова заменить символами».

   Предлог «согласно» употребляется с дательным падежом, а слово «заведующий» требует дополнения в творительном падеже: «согласно распоряжению заведующего лабораторией».

   Глагол «достичь» требует дополнения в родительном падеже: «не всегда можно достичь научной истины».

   Глагол «улучшить» не сочетается со словом «уровень». Уместно употребить выражение «повысил научный уровень» или «улучшить качество».
8. Скомпрометировать, компоновка, скрупулезно, асимметрия, сталелитейный, агентство, палисадник, словесный, предыстория, почерпнуть, винегрет, веский аргумент.

Данные варианты созданы на основе теста на проверку грамотности из пособия: Богатов В.В. Организация научно-исследовательских работ [1], ключ взят из этого же источника.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Способы формирования группировки данных

Разработка способов сбора и группировки сведений, получаемых в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов, является одной из важных задач математической статистики. В статистических задачах (в отличие от вероятностных) распределение неизвестно, и целью исследования является получение достоверной информации об этом распределении на основе данных, собранных в результате испытаний. Значительное количество однородных данных следует нужным образом обработать, чтобы получить как можно более точную информацию об измеряемой величине.

Одна из наиболее типичных задач статистики – найти характеристики определённого множества, располагая сведениями о его части. Исследуемое множество *называется генеральной совокупностью*. Например, генеральная совокупность может представлять собой: множество рыб в озере; множество изделий, выпущенных заводом за последний год; множество жителей, имеющих право голоса на выборах; множество людей, страдающих от определенного заболевания; множество студентов или школьников, изучающих данный предмет по данному учебнику.

Итак, пусть дана *генеральная совокупность*, то есть некоторое множество однородных объектов, обладающих определёнными качественными или количественными признаками. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

Чтобы найти характеристики этих объектов относительно нужных признаков, иногда проводится сплошное обследование, то есть обследуется каждый объект. Но на практике это делается крайне редко, а применяется случайный отбор ограниченного числа объектов и их тщательное изучение.

Выборочная совокупность (*выборка*) – это множество случайно отобранных объектов генеральной совокупности. *Объём совокупности* – это число её объектов. Отсюда вытекает, что задача формирования выборки может быть разбита на подзадачи:

1) определение объёма выборки;
2) определение способа формирования выборки некоторого объёма из генеральной совокупности.

Ниже решение этих подзадач рассматривается подробнее.

1. Поскольку каждое значение случайной величины несёт в себе некоторую погрешность, то очевидно, что точность и достоверность результатов исследования зависят от объёма выборки. Статистикой выявлено, что при возрастании объёма выборки до определённого уровня величина ошибки уменьшается сначала быстро, а затем всё медленнее. Для определения оптимального объёма выборки можно рекомендовать таблицу больших чисел. Таблица рассчитана на определение выборочного объёма для признаков, имеющих нормальное распределение или же близкое к нормальному, для других распределений точность будет ниже. Для использования таблицы исследователь должен задать желаемый уровень вероятности P и возможную допустимую ошибку $m_{\text{доп}}$. В исследованиях высокую достоверность обеспечивает допустимая ошибка менее 5%, а вероятность в пределах 95-99%.

Пусть задана вероятность 97 %, $P = 0,97$ и величина допустимой ошибки 0,05. По таблице определяется объём выборки 470. Это значит, что нужно исследовать 470 объектов. При этом результаты в 97 случаях из 100 будут иметь ошибку, не превышающую 0,05, и только в 3 случаях из каждых 100, она может быть больше 0,05.

2. Необходимо, чтобы выборка правильно представляла генеральную совокупность, то есть она должна быть <u>*репрезентативной*</u> (<u>*представительной*</u>). Правильное формирование выборки даёт определённую гарантию корректности сделанных выводов.

Применяется несколько способов формирования репрезентативной выборки:

- случайный отбор (с помощью жеребьёвки или таблицы случайных чисел);
- механический отбор (берётся по одному объекту из равных частей генеральной совокупности, например, каждый 10 объект или же в этих частях производится случайный отбор);
- типическая выборка (совокупность сначала разделяется на ка-

чественно однородные группы, из которых отбор уже проводится случайным способом);

- серийный отбор (случайно выбираются группы объектов, которые подвергаются сплошному обследованию);
- комбинированная выборка (комбинация перечисленных способов отбора).

Графические способы представления данных

Графические изображения используются, если в задачи исследования входит подчеркнуть какую-либо особенность данных, провести их сравнение, выявить закономерность. Благодаря наглядности и образности, применение графиков повышает эффективность восприятия статистического материала. Графики обязательно сопровождаются заголовком. Ниже приведены определения наиболее часто используемых видов графиков.

Гистограмма распределения – ступенчатая фигура, применяющаяся в основном для изображения интервальных рядов вида.

Интервал	x_1-x_2	x_2-x_3	…	x_i-x_{i+1}	…	x_k-x_{k+1}
Частота p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\cdots$	p_i^*	$\cdots$	p_k^*

На оси OX откладываются интервалы рассматриваемой величины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, а на оси OY – плотности частот $f_i = p_i^* / \Delta x_i$ (при ширине интервала $\Delta x_i = 1$ плотности совпадут с частотами). Затем последовательно строятся прямоугольники с основаниями Δx_i и высотами f_i.

Полигон распределения представляет собой многоугольник (с обязательными точками нулевых частот до первой и после последней значений признака), который строится обычно для дискретного ряда распределения вида.

Значения x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
Частота p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\cdots$	p_i^*	$\cdots$	p_k^*

На оси абсцисс выбирается шкала для значений x_i случайной величины, а на оси ординат – для соответствующих частот p_i^*. Затем следует построить точки $M_1\left(x_1, p_1^*\right)$, $M_2\left(x_2, p_2^*\right)$,… $M_k\left(x_k, p_k^*\right)$ и соединить их ломаной линией M_1M_2 … M_i... M_k. Если крайние точки M_1 и M_k не лежат на оси Ox, то следует построить точки $M_0(x_0, 0)$ и $M_{k+1}(x_{k+1}, 0)$ на оси абсцисс. Многоугольник $M_0M_1M_2 \ldots M_i \ldots M_kM_{k+1}$ является *полигоном распределения*.

Полигон распределения можно построить и для интервального ряда, для этого за вершины ломаной берутся середины верхних сторон прямоугольников гистограммы. Эти точки легко получить, даже не строя самой гистограммы.

Тренд выражает линейную зависимость между величинами X и Y, значения которых откладываются по осям координат.

Тренд рассматривается, в основном, для динамических рядов, при этом на оси абсцисс располагается временная шкала, а на оси ординат шкала величин ряда. В получившейся прямоугольной системе координат точками отмечаются значения случайной величины, которые являются вершинами ломаной. Линию тренда можно построить с помощью редактора Excel. Она отражает основную тенденцию развития.

З а д а ч а 7.1. Дано распределение служащих некоторой компании по возрасту.

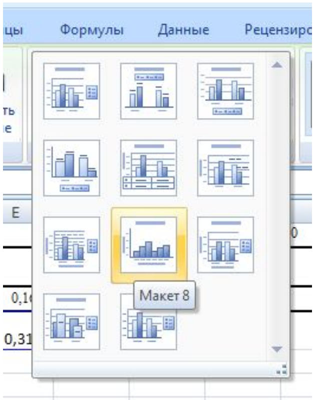
Возраст	18	22	23	28	30	35
Кол-во служащих	2	10	13	15	21	18

Найти статистическую функцию распределения и построить её график. Используя графические возможности наглядно показать тенденции, имеющие место для указанных признаков в данной компании.

Р е ш е н и е. Для дискретной случайной величины функция распределения определяется формулой $F^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i^*$. Поэтому её можно записать в виде:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < 18; \\ 0{,}0253, & 18 < x \le 22; \\ 0{,}1519, & 22 < x \le 23; \\ 0{,}3165, & 23 < x \le 28; \\ 0{,}5063, & 28 < x \le 30; \\ 0{,}7722, & 30 < x \le 35; \\ 1, & x \ge 35. \end{cases}$$

Для построения графика стической функции распределения в Microsoft Office Excel следует дополнить закон распределения строкой значений функции, выделить первую и третью строки и выбрать «Вставка» → «Диаграммы» → «Гистограммы». После этого можно выбрать макет 8. Линия, ограничивающая фигуру сверху, является графиком функции распределения и имеет характерный вид ступенек. Макет можно изменять, например, на рисунке 4 удалены названия диаграммы и осей.



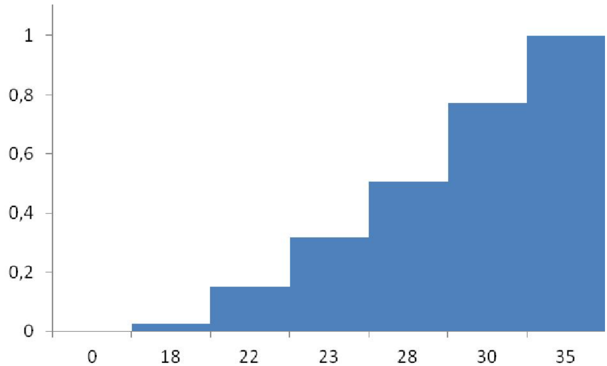
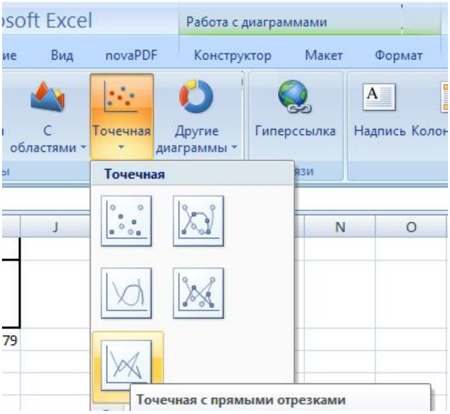


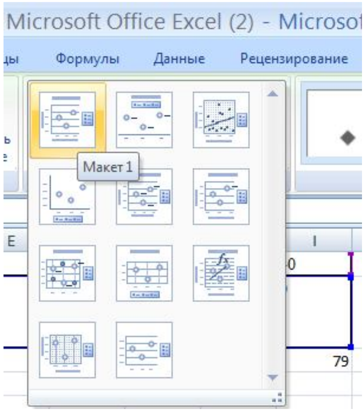
Рис. 4. График функции распределения

Данный ряд распределения является дискретным, поэтому для него можно построить полигон распределения. Чтобы получился многоугольник, следует подсчитать частоты и ввести две дополнительные точки, например, (16,0) и (40,0). Ряд примет вид.

Возраст	16	18	22	23	28	30	35	40
Кол-во служащих	0	2	10	13	15	21	18	0
Частоты	0	0,0253	0,1265	0,1645	0,1898	0,2658	0,2278	0

С помощью редактора Microsoft Office Excel легко построить полигон распределения. Для этого нужно ввести в ячейки данные последней таблицы, выделить первую и третью строки и выбрать в меню «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная» или «Вставка» → «Диаграммы» → «График».





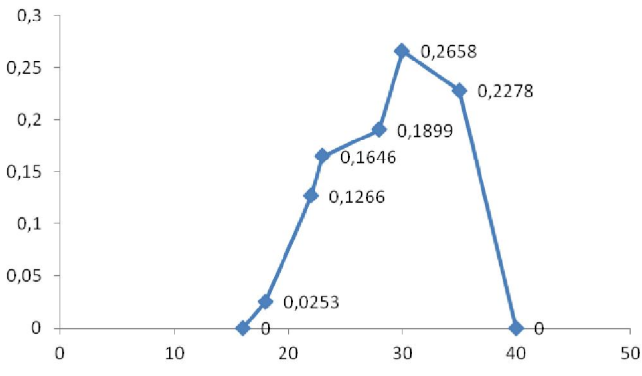


Рис. 5. Полигон распределения, построенный с использованием функции «График»

После появления диаграммы нужно подобрать макет и адаптировать его для целей исследования. В данном случае из макета 5 убраны дополнительные линии сетки, название диаграммы и элементы легенды, подписи осей. Также для подписей данных изменён формат: в них включены только значения Y (то есть частоты). Как видно на рисунке 5 построение здесь проводится с соблюдением масштаба.

Немного другая картина получится после использования функции «Диаграммы» $\rightarrow$ «График». Здесь по оси *OX* перенесено начало координат, а также нарушен масштаб оси: все значения записаны через равные промежутки вне зависимости от их величины (рис. 6). Поэтому такая форма является оптимальной, если в первой строке закона распределения находятся неколичественные данные.

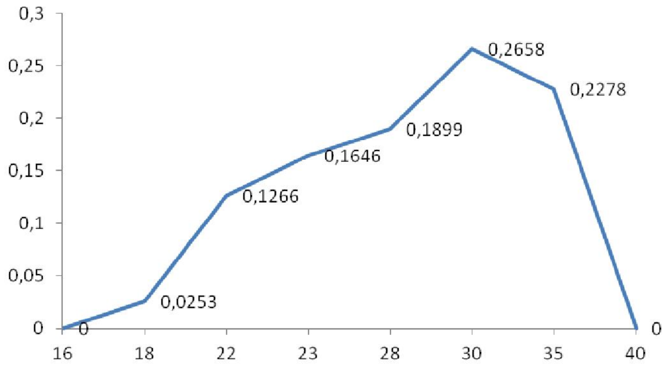


Рис. 6. Полигон распределения, построенный с помощью функции «График»

Круговая диаграмма (рис.7) позволяет сравнить между собой не только количество служащих разного возраста, но и выяснить их долю относительно общего числа работников. По этой диаграмме можно видеть, что половина служащих компании в возрасте 30 лет и старше, а более половины старше 27 лет.

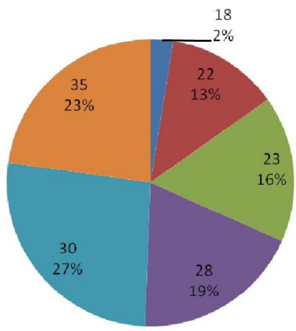
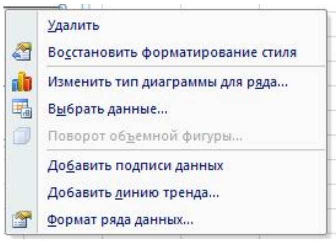


Рис. 7. Круговая диаграмма

Также в данной компании не может быть ярко выражен конфликт поколений, поскольку невелика доля сотрудников, имеющих разницу в возрасте более 16 лет.

Для получения графика с линией тренда следует выделить все ячейки таблицы с числовыми данными и выбрать точечную диаграмму с прямыми отрезками. После этого появится диаграмма. Затем в пункте меню «Макеты диаграмм» следует выбрать любой макет с линией тренда, например, макет 3. Также можно при выделенной линии графика нажать левую кнопку мыши и выбрать команду «Добавить линию тренда». На графике появится линия тренда.



После удаления сетки и всех ненужных в данном случае подписей получится следующий график (рис. 8). Из него можно увидеть общую тенденцию роста численности служащих с увеличением их возраста. ■

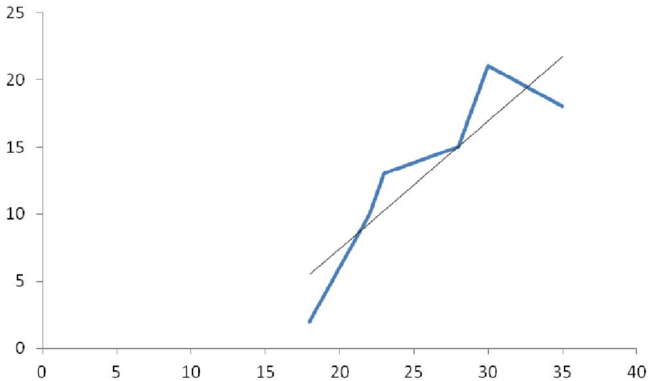


Рис. 8. График с линией тренда

З а д а ч а 6.2. Дано распределение вкладов физических лиц в одном из банков.

Интервал Δx, тыс. руб	2–32	32–62	62–92	92–122	122–152
Частота p_i^*	0,55	0,2	0,1	0,05	0,1

Построить гистограмму распределения.

Р е ш е н и е. Для построения гистограммы следует, прежде всего, подсчитать плотности частот и дополнить таблицу соответствующей строкой.

Интервал Δx, тыс. руб	2-32	32-62	62-92	92-122	122-152
Частота p_i^*	0,55	0,2	0,1	0,05	0,1
Плотности частот f_i	0,0183	0,0067	0,0033	0,0017	0,0033

Удобнее это делать в Microsoft Office Excel. Следует выделить первую и вторую строки и, воспользовавшись меню «Вставка» $\to$ «Диаграммы» $\to$ «Гистограмма», выбрать макет 8. Можно изменить формат области построения: например, добавить линии границы и убрать заливку (рис. 9).

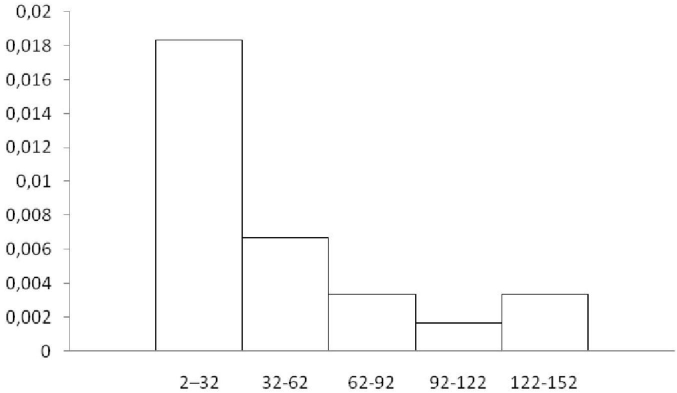


Рис. 9. Гистограмма распределения ■

Лабораторная работа 8. Защита проектов

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

Данное занятие является итоговым для всего курса. Следовательно, на этом занятии студенты должны продемонстрировать тот или иной уровень сформированности компетенций, на освоение которых направлена данная дисциплина.

ПОДГОТОВКА

К этому занятию студенты должны

- ✓ завершить все проектные работы в соответствии с планом;
- ✓ подготовить отчёт по проекту в заранее разработанной форме для предоставления экспертам;
- ✓ подготовить презентацию Microsoft Office PowerPoint для выступления на защите проекта;
- ✓ завершить оформление портфолио проекта, чтобы иметь возможность демонстрировать любые его части как иллюстрацию выступления на защите.

Желательно также иметь отзывы о проекте, написанные представителями администрации вуза и/или работодателей, преподавателями, студентами старших курсов, сокурсниками.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Необходимые пояснения

На последнем занятии проводится обсуждение и подведение итогов работы студентов по изучению данного курса. Этому будет способствовать форма конференции проектов с использованием одного из приёмов технологии развития критического мышления: «Шесть шляп мышления», «Кубик», «Трансферный лист», Таблица «Плюс-Минус-Интересно» [8]. Ниже представлено подробное описание использования приёма «Кубик».

Имеющиеся проектные группы и группа экспертов (преподаватели выпускающей кафедры, представители работодателей и администрации вуза, магистранты, студенты старших курсов) образуют шесть рабочих групп. Отдельную группу может образовать преподаватель данного курса.

Далее начинается конференция проектов: проходят выступления проектных групп, во время которых созданные рабочие группы выполняют задание.

Вариант 1

Задание 1. (вариативное) При защите проекта рассмотрите его с одной из шести позиций – граней «Кубика» (рис. 10) в соответствии с инструкцией для работы с гранями (раздаточный материал 1).

Рис. 10. Грани «Кубика»

Вариант 2

При временных ограничениях и/или большом количестве проектов можно использовать просто отдельные грани «Кубика». В таких случаях можно рекомендовать грани «Оценка», «Анализ» (приём «Плюсы-Минусы-Проблемы»), «Применение» (приём «Двойной дневник»).

После представления каждого проекта проходит его обсуждение. Задаются вопросы, выступают рабочие группы по граням «Кубика» (либо, в варианте 2, группы дополняют друг друга).

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Инструкция по работе над 1-ой гранью кубика «АССОЦИАЦИИ»

Уважаемые участники группы!

Вам предстоит создать ассоциативный «портрет»/ образ проекта.

Вы можете изобразить это в виде цветовой гаммы или геометрических фигур; можете создать картину, которая возникает перед Вашим мысленным взором, когда Вы представляете этот проект; можете действительно нарисовать портрет некоего человека, в котором, по Вашему мнению, отражаются особенности проекта. Одним словом, Вы можете отразить свои ассоциации как только Вам будет угодно.

После обсуждения в группе оформите «образ» на отдельном листе.

Инструкция по работе над 2-ой гранью кубика «ОПИСАНИЕ»

Уважаемые участники группы!

Вам предстоит описать работу над проектом, выделяя его стадии и приёмы работы проектной группы.

Описание должно быть кратким и исчерпывающим. Вы можете использовать любой вид графического представления или систему обозначений.

После обсуждения в группе оформите описание на отдельном листе.

Инструкция по работе над 3-ей гранью кубика «СРАВНЕНИЕ»

Уважаемые участники группы!

Вам предстоит сравнить данный проект с другим известным Вам решением выбранной в группе проблемы. Для этого, опираясь на представленное выступление, выделите свои параметры (положения) для сравнения.

Поскольку сравнение должно быть кратким и исчерпывающим, предлагается составить так называемую концептуальную таблицу.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Проект						
Другое решение:						

Здесь под 1, 2, 3, 4, 5 и 6 понимаются те параметры (положения), по которым Вы считаете целесообразным проводить сравнение.

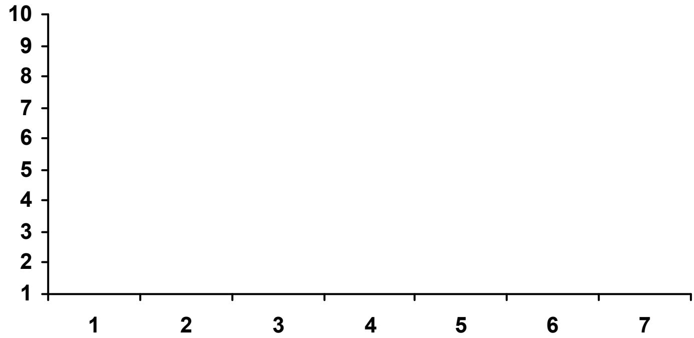
Таким образом, следует:

- выделить параметры для сравнения;
- вписать в соответствующие графы то, что характерно (относительно определённого параметра) для каждого вида решения.

После обсуждения в группе оформите таблицу на отдельном листе.

Инструкция по работе над 4-ой гранью кубика «ОЦЕНКА»

Уважаемые участники группы!



Вам предстоит оценить проект, опираясь на его представление проектной группой.

Поскольку это нужно сделать быстро, кратко и исчерпывающе, Вам предлагается расставить свои оценочные приоритеты относительно некоторых сторон проекта на шкале от 1 до 10.

Здесь под 1, 2, 3 и т.д. (по горизонтали) понимаются те критерии (аспекты), по которым Вы считаете целесообразным оценить проект (например, правильность математических расчётов).

После обсуждения в группе оформите результаты на отдельном листе.

Инструкция по работе над 5-ой гранью кубика «АНАЛИЗ»

Уважаемые участники группы!

Вам предстоит проанализировать проект, опираясь на его представление проектной группой.

Поскольку анализ должен быть кратким и исчерпывающим, Вам предлагается заполнить табличку «ПМП».

П: Плюсы	**М: Минусы**	**П: Проблемы**

После обсуждения в группе оформите таблицу на отдельном листе.

Инструкция по работе над 6-ой гранью кубика «ПРИМЕНЕНИЕ»

Уважаемые участники группы!

Из выступления проектной группы Вам предстоит выделить те идеи, которые Вы хотели бы и могли бы взять для применения в своей деятельности или видите их использование в деятельности образовательных учреждений.

Поскольку это необходимо сделать достаточно быстро, кратко и исчерпывающе, Вам предлагается вести двойной дневник: фиксировать идеи в виде ключевых слов (или словосочетаний) в одной графе таблицы, а в другой графе давать краткое обоснование, почему это Вам показалось интересным, или же делать любые другие заметки, касающиеся этой идеи.

Таким образом, у Вас должна получиться таблица.

Идеи (ключевые слова)	**Пояснения**

После обсуждения в группе оформите двойной дневник на отдельном листе. [8]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии приведено описание организации работы студентов по освоению дисциплины «Основы математической обработки информации» в рамках проекта.

Представлено подробное разъяснение работы по созданию проектных групп, объединённых общими интересами в сфере будущей профессиональной деятельности. В процессе изучения курса предлагается вести электронное портфолио проекта. Оно служит как инструментом взаимодействия участников проекта и преподавателя, так и средством самоорганизации и самооценки проектной деятельности. Итоги освоения курса подводятся на конференции по защите проектов.

Кроме того, дано описание организации лабораторных работ как мини-проектов в соответствии с этапами проектной деятельности. В раздаточных материалах к работам приведен теоретический материал, необходимый для решения задач и на примерах рассмотрена методика их решения. Специально выделены примеры решения задач с использованием табличного процессора Microsoft Office Excel. Для их лучшего понимания можно рекомендовать не просто знакомиться с примерами, но и выполнять на компьютере нужную последовательность действий. В системе задач пособия можно выделить задачи по теории вероятности и математической статистике. Объектами рассмотрения здесь являются выборки различной природы, результаты испытаний и наблюдений.

Можно отметить, что ввиду малого количества часов, за рамками лабораторных занятий остаётся достаточно много интересных с точки зрения математики вопросов и задач. Это определяет широкий круг возможностей для дальнейшей самостоятельной проектной деятельности с применением математических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богатов В.В. Организация научно-исследовательских работ. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 259 с.
2. Данилин Г.А. и др. Элементы теории вероятностей с Excel. – М: МГУЛ, 2004. – 87 с.
3. Ерофеева Л.Н., Лещева С.В. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике – Н.Новгород: НГТУ, 2014. – 152 с.
4. Решение математических задач средствами Excel: Практикум/ Под.ред. В.Я. Гельман. – СПб: Питер, 2003. – 240 с.
5. Ковтун Е.Н., Родионова С.Е. Образовательные программы «болонского» типа и возможность их реализации в России (на примере направления подготовки ВПО «Филология»). [электронный ресурс] URL: http://slavcenteur.ru/Proba/Kovtun/kovtun_obrprogrammy.pdf (дата обращения 22.05.2015).
6. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (квалификация (степень) бакалавр): Проект. [электронный ресурс] URL: http://kpfu.ru/do/normativnoe-obespechenie/obrazovatelnye-standarty/proekty-fgos-3 (дата обращения 2.09.2015).
7. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) бакалавр). Утверждён приказом Министерства образования РФ от 17 января 2011 г. № 46. [электронный ресурс] URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgos/5/20111207164014.pdf (дата обращения 2.09.2015).
8. Швец И.М., Левина Л.М., Марико В.В., Грудзинская Е.Ю. Современные педагогические технологии в контексте ФГОС третьего поколения. [электронный ресурс] URL: http://www.unn.ru/books/met_files/current_teaching.pdf (дата обращения 5.05. 2015).

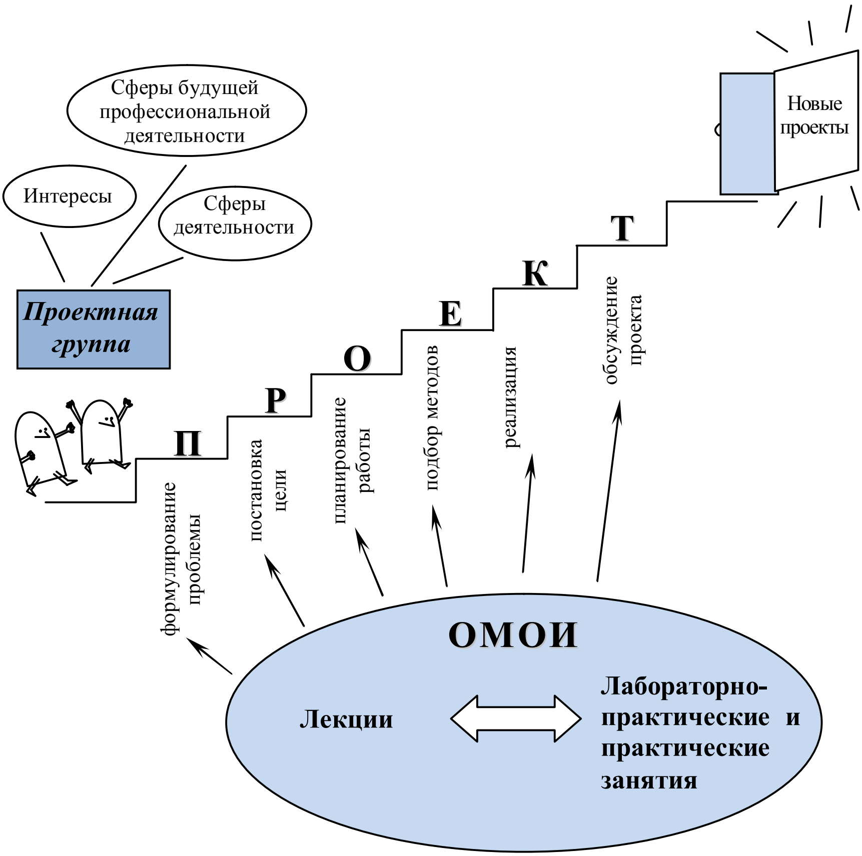
Авторские публикации

1. Елисеев Е.М., Сангалова М.Е. Особенности преподавания курса «Основы математической обработки информации» для гуманитариев // Тенденции и перспективы развития математического образования. Материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, посвященного столетию ВятГГУ. – Киров, 2014. – С. 166-171.

2. Елисеев Е.М., Сангалова М.Е. Применение Excel для вычисления вероятностей при повторных независимых испытаниях // Web-технологии в образовательном пространстве: проблемы, подходы, перспективы: сборник статей участников Международной научно-практической конференции. – Арзамас , 2015. – С. 518-524.

Приложение 1.

Схема построения курса



Приложение 2.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009

3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Для отрицательных значений x можно брать те же самые таблицы, так как функция $\varphi(x)$ чётная, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$ для всех x.

Приложение 3.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000

0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Для $x < 0$ можно брать ту же таблицу, так как функция $\Phi(x)$ нечётна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ для всех x. В таблице приведены значения интеграла лишь до $x = 5$, так как для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

Приложение 4.

Квантили распределения χ^2 Пирсона

$r\backslash\alpha$	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,1485	0,2750	0,4549	0,7083	1,0742	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,4463	0,7133	1,0217	1,3863	1,8326	2,4079	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,0052	1,4237	1,8692	2,3660	2,9462	3,6649	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,6488	2,1947	2,7528	3,3567	4,0446	4,8784	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,3425	2,9999	3,6555	4,3515	5,1319	6,0644	7,2893	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,0701	3,8276	4,5702	5,3481	6,2108	7,2311	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	3,8223	4,6713	5,4932	6,3458	7,2832	8,3834	9,8032	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	4,5936	5,5274	6,4226	7,3441	8,3505	9,5245	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,3801	6,3933	7,3570	8,3428	9,4136	10,6564	12,2421	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,1791	7,2672	8,2955	9,3418	10,4732	11,7807	13,4420	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	6,9887	8,1479	9,2373	10,3410	11,5298	12,8987	14,6314	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	7,8073	9,0343	10,1820	11,3403	12,5838	14,0111	15,8120	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	8,6339	9,9257	11,1291	12,3398	13,6356	15,1187	16,9848	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	9,4673	10,8215	12,0785	13,3393	14,6853	16,2221	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	10,3070	11,7212	13,0297	14,3389	15,7332	17,3217	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,1521	12,6243	13,9827	15,3385	16,7795	18,4179	20,4651	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,0023	13,5307	14,9373	16,3382	17,8244	19,5110	21,6146	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	12,8570	14,4399	15,8932	17,3379	18,8679	20,6014	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	13,7158	15,3517	16,8504	18,3377	19,9102	21,6891	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	14,5784	16,2659	17,8088	19,3374	20,9514	22,7745	25,0375	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	15,4446	17,1823	18,7683	20,3372	21,9915	23,8578	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	16,3140	18,1007	19,7288	21,3370	23,0307	24,9390	27,3015	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	17,1865	19,0211	20,6902	22,3369	24,0689	26,0184	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	18,0618	19,9432	21,6525	23,3367	25,1063	27,0960	29,5533	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	18,9398	20,8670	22,6156	24,3366	26,1430	28,1719	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	19,8202	21,7924	23,5794	25,3365	27,1789	29,2463	31,7946	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	20,7030	22,7192	24,5440	26,3363	28,2141	30,3193	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	21,5880	23,6475	25,5093	27,3362	29,2486	31,3909	34,0266	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	22,4751	24,5770	26,4751	28,3361	30,2825	32,4612	35,1394	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	23,3641	25,5078	27,4416	29,3360	31,3159	33,5302	36,2502	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	24,2551	26,4397	28,4087	30,3359	32,3486	34,5981	37,3591	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	25,1478	27,3728	29,3763	31,3359	33,3809	35,6649	38,4663	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858
33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	26,0422	28,3069	30,3444	32,3358	34,4126	36,7307	39,5718	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	26,9383	29,2421	31,3130	33,3357	35,4438	37,7954	40,6756	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	27,8359	30,1782	32,2821	34,3356	36,4746	38,8591	41,7780	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	28,7350	31,1152	33,2517	35,3356	37,5049	39,9220	42,8788	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	29,6355	32,0532	34,2216	36,3355	38,5348	40,9839	43,9782	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	30,5373	32,9919	35,1920	37,3355	39,5643	42,0451	45,0763	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621

39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	31,4405	33,9315	36,1628	38,3354	40,5935	43,1053	46,1730	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	32,3450	34,8719	37,1340	39,3353	41,6222	44,1649	47,2685	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	33,2506	35,8131	38,1055	40,3353	42,6506	45,2236	48,3628	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654	34,1574	36,7550	39,0774	41,3352	43,6786	46,2817	49,4560	54,0902	58,1240	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	35,0653	37,6975	40,0496	42,3352	44,7063	47,3390	50,5480	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871	35,9743	38,6408	41,0222	43,3352	45,7336	48,3957	51,6389	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	36,8844	39,5847	41,9950	44,3351	46,7607	49,4517	52,7288	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152	37,7955	40,5292	42,9682	45,3351	47,7874	50,5071	53,8177	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	38,7075	41,4744	43,9417	46,3350	48,8139	51,5619	54,9056	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491	39,6205	42,4201	44,9154	47,3350	49,8401	52,6161	55,9926	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826
49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182	40,5344	43,3664	45,8895	48,3350	50,8660	53,6697	57,0786	62,0375	66,3386	70,2224	74,9195
50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886	41,4492	44,3133	46,8638	49,3349	51,8916	54,7228	58,1638	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539

Приложение 5.

Критические точки распределения Стьюдента (t_k)

Число степеней свободы	Уровень значимости				
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Приложение 6.

Критерии оценки проектов

Для итоговой оценки учебного проекта можно рекомендовать следующую четырёхуровневую систему.

Самый высокий уровень проекта. Отчёт о проекте данного уровня полностью соответствует всем критериям (представленным выше). Он свидетельствует о том, что к работе было приложено много усилий, об очевидном прогрессе студентов в плане развития мышления, умения решать задачи, прикладных и коммуникативных умений, а также о наличии высокого уровня самооценки и творческого отношения к предмету. Имеются положительные отзывы о проекте работодателей, преподавателей, студентов. В содержании и оформлении отчёта ярко проявляются оригинальность и изобретательность.

Высокий уровень. Отчёт по проекту демонстрирует солидные знания и умения студентов, но, в отличие от предыдущего уровня, в нём могут отсутствовать некоторые элементы, а также может быть недостаточно выражена оригинальность в содержании, востребованность работодателем.

Средний уровень. Получены запланированные результаты проекта и представлен отчёт, который позволяет судить о прогрессе участников в освоении ОМОИ. Математические расчёты выполнены верно или имеются мелкие недочёты. Однако проект имеет узкую направленность. Участники проекта внесли в работу неодинаковый вклад, проектная группа имеет слабую организацию. Возможны незначительные отклонения от сроков, намеченных в плане.

Слабый уровень. Отчёт по проекту оформлен с существенными нарушениями и не даёт представления о способностях студентов. Присутствуют отрывочные задания, имеются математические ошибки и т.д. Практически невозможно определить прогресс в обучении и уровень сформированности качеств, отражающих основные цели курса и критерии оценки.