Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**М.В. Донцова**

**Неопределенные интегралы**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ,

обучающихся по направлению подготовки

09.03.04 «Программная инженерия».

Нижний Новгород

2019

УДК 517.31

ББК 22.161.1

Д-

Д- Донцова М.В. Неопределенные интегралы: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс]. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 28 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ИРИТ ФГБОУ ВО «НГТУ им. Р.Е. Алексеева» **И.П. Рязанцева**

В учебном пособии приводятся краткие теоретические положения, примеры решения задач, практические задания и пример аудиторной контрольной работы по теме «Неопределенные интегралы».

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса института информационных технологий, математики и механики ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК 517.31

ББК 22.161.1

**© Нижегородский государственный**

**университет им. Н.И. Лобачевского, 2019**

**Содержание**

Введение ………………………………..………………………………..…………..4

1. Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.…………………………………….………….....……….5

2. Таблица основных неопределенных интегралов.………………………………6

3. Основные методы интегрирования.…………………………………….………..7

3.1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью преобразований……………………..…………………………………….……………...8

3.2. Интегрирование методом замены переменной……………………..…………9

3.3. Метод интегрирования по частям……………………..………………….…..11

4. Интегрирование рациональной функции……………………..………………..13

5. Интегрирование тригонометрических функций……………………..………...19

6. Интегрирование некоторых иррациональных функций………………………22

7. Практические задания……………………..…………………………………….25

8. Пример аудиторной контрольной работы……………………..……………….26

Литература……………………..……………………………………………………27

**Введение**

Интегральное исчисление является одним из основных разделов курса высшей математики и очень важным с точки зрения его приложений в различных областях науки и техники. В учебном пособии приводятся краткие теоретические положения, примеры решения задач, практические задания и пример аудиторной контрольной работы по теме «Неопределенные интегралы». Рассмотрены понятия первообразной функции, неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла. Приводится таблица неопределенных интегралов. Рассмотрены основные методы вычисления неопределенных интегралов: интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью преобразований, интегрирование методом замены переменной, метод интегрирования по частям. Рассмотрено интегрирование рациональной функции, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование некоторых иррациональных функций.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса института информационных технологий, математики и механики ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» и может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий, организации самостоятельной работы студентов.

**1. Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла**

В дифференциальном исчислении по заданной функции  приходилось отыскивать ее производную .

В интегральном исчислении рассматривается обратная задача: по заданной функции  восстановить такую функцию , для которой  была бы ее производной, т.е. .

**Определение.** Функция  называется *первообразной* для функции  на интервале , если для любого  выполняется равенство

.

**Примеры.**

1) Функция  является первообразной для функции  на , так как для любого  выполняется равенство .

2) Функция  является первообразной для функции  на интервале , так как для любого  выполняется равенство 

**Теорема 1.1.**  Если функция  является первообразной для функции  на интервале , то любая первообразная для функции  на интервале  имеет вид  где *C* — некоторая постоянная.

**Определение 1.1.** Совокупность всех первообразных функций для данной функции  на интервале  называется ***неопределенным интегралом*** от функции  на интервале  и обозначается символом



где – знак интеграла;  – подынтегральная функция;  – подынтегральное выражение;  – переменная интегрирования;  – произвольная постоянная;  – некоторая первообразная для функции  на интервале .

**Примеры.**

1) на  так как функция  является первообразной для функции  на .

2) на интервале , так как функция  является первообразной для функции

 на интервале .

**Теорема 1.2.** Для любой функции, непрерывной на интервале  на этом интервале существует неопределенный интеграл.

***Свойства неопределенного интеграла***:

1) 

2)   –постоянная, 

3)  

4)   –любая постоянная.

5) Если  то  где  – дифференцируемая функция.

**2. Таблица основных неопределенных интегралов**

|  |  |
| --- | --- |
| № | Основные неопределенные интегралы |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |
| 17 |  |

**3. Основные методы интегрирования**

*К основным методам интегрирования* относятсяследующие три способа интеграции:

– использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразо-ваний, а также свойств интегралов;

– замена переменной интегрирования;

– интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения.

**3.1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью преобразований**

Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;

– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение;

– выделение полных квадратов (кубов);

– использование формул сокращённого умножения;

– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);

– выделение в числителе дроби производной от знаменателя;

– использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гипербо-лических формул и т.п.

**Пример 3.1.1.** Вычислить



Применив свойства 1) и 2), имеем



Далее, используя соответственно формулы 2, 3, 6, 16 таблицы основных интегралов, находим:



**Пример 3.1.2.** Вычислить



**Решение.**





Здесь мы применили свойства 1, 2 и формулу 2 таблицы основных интегралов.

**Пример 3.1.3.**

****

Здесь мы применили свойства 1, 2 и формулы 7 и 8 таблицы основных интегралов.

**Пример 3.1.4.** Вычислить 



Здесь подынтегральная функция также является дробью, числитель которой равен 1. Так как , то к этому примеру также применим метод интегрирования разложением. Исходный интеграл можно записать в виде:



Применяя свойство 1 и формулы 7, 8, находим



**Пример 3.1.5.**





Здесь мы применили свойство 1 и формулы 2 и 4 таблицы основных интегралов.

**3.2. Интегрирование методом замены переменной**

*Метод подстановки: е*сли  непрерывна, то, полагая  где  - функция непрерывная вместе со своей производной  получим



Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала. Применяется, когда в подынтегральном выражении есть произведение  (дифференциал функции).

Пусть требуется найти интеграл  По определению дифференциала функции  Тогда и, применяя свойство 5 интеграла, получим первообразную  Заметим, что рассмотренный метод равносилен подстановке .

**Пример 3.2.1.** Найти неопределенный интеграл



Проведем замену переменной интегрирования *t =* sin*x,* т.к*. dt =* cos*xdх*, тогда:

= 

**Пример 3.2.2.** Найти интеграл



Полагая , имеем , т.е. . Отсюда получим



**Пример 3.2.3.** 

**Пример 3.2.4.** 

**Пример 3.2.5.** 

Приведем формулы наиболее *часто встречающихся дифференциалов*:

|  |  |
| --- | --- |
| , , , | , |
| , | , |
| , | , |
| , | , |
| ,  ,  , | ,  , |

**3.3. Метод интегрирования по частям**

Метод интегрирования по частям применяется, когда под интегралом стоит произведение или частное, и проверено, что вносить под знак дифференциала нет смысла, то есть после внесения множителя под дифференциал не образовался табличный интеграл. Этот метод основан на следующей теореме:

**Теорема 3.3.1.** Если функции  и  дифференцируемы на некотором промежутке и существует , то существует и , причем .

Эта формула называется формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Большую часть интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, можно разбить на три группы:

**.** Интегралы вида    где  ‒ многочлен, ‒ некоторое число.

Для их вычисления следует положить  и соответственно

  

2. Интегралы вида     где ‒ многочлен.

Для их вычисления следует положить    и соответственно 

3. Интегралы  где  и  ‒ некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

В других случаях за  принимается функция, которая дифференцированием упрощается, а за  ‒та часть подынтегрального выражения, содержащая , интеграл от которой известен или может быть легко найден.

**Пример 3.3.1.**



**Пример 3.3.2.** Вычислить



**Решение.**





Метод интегрирования по частям можно применять неоднократно.

**Пример 3.3.3.** Вычислить



**Решение.**







**Пример 3.3.4.** Вычислить



**Решение.**





Перенося интеграл из правой части в левую, получим



Следовательно, 

Когда под интегралом стоит одна функция, интеграл от которой не известен (логарифмические функции, обратные тригонометрические функции), тогда за  берут всю подынтегральную функцию.

**Пример 3.3.5.** Вычислить



Здесь под интегралом стоит одна логарифмическая функция, интеграл от нее не известен. Будем вычислять его по частям, взяв за  всю подынтегральную функцию:





**4.** **Интегрирование рациональной функции**

Рациональная функция или рациональная дробь записывается в виде:

, где  и  – многочлены степени  и  соответственно.

Если , то дробь называется *правильной*, а если , то дробь называется *неправильной*.

Неправильную дробь в результате деления числителя на знаменатель можно представить в виде:



где – многочлен степени *k*,  – правильная дробь, .

Под простейшими дробями понимают дроби вида:

1) 2)  3)  

4)  

Правильную дробь  можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей.

Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей представим знаменатель в виде произведения линейных и квадратичных множителей:



где — действительные корни многочлена кратности  соответственно,  т.е. квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей воспользуемся таблицей.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Множитель знаменателя | Соответствующие слагаемые |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

Рассмотрим интегралы от простейших рациональных дробей:

1),

в данном случае мы использовали тот факт, что произвольную константу можно вносить под знак дифференциала, т.е. 

2) 

3)  

Выделим в числителе дроби производную знаменателя  Для этого числитель представим в виде 

Тогда



Найдем интеграл  Для этого выделим полный квадрат в знаменателе дроби:



Поскольку , то . Следовательно, наш интеграл примет вид



.

Поскольку  то получаем







4)   

Интеграл в этом случае вычисляется по формуле



где , 



*Правило интегрирования рациональных дробей*

1. Определить вид рациональной дроби. Если дробь неправильная, выделить целую часть.
2. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители и представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.
3. Найти неизвестные коэффициенты.
4. Проинтегрировать целую часть (многочлен) и сумму простейших дробей с найденными коэффициентами.

**Методы нахождения неопределённых коэффициентов**

|  |  |
| --- | --- |
| **Метод**  **частных значений** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.  2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.  3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Метод**  **неопределённых коэффициентов** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.  2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.  3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента *х*  в правой и левой частях уравнения. |
| **Метод**  **комбинированный** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.  2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.  3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов. |

**Пример 4.1.** Найти интеграл



Разложим правильную дробь на простейшие дроби и используем метод неопределенных коэффициентов:



 или 

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему:

.

Тогда





Покажем, как можно найти неизвестные коэффициенты  и  методом частных значений.

Рассмотрим тождество .

Пусть , тогда .

Пусть , тогда .

**Пример 4.2.** Найти



Разложим подынтегральную правильную дробь на простейшие и используем метод неопределенных коэффициентов:





или 

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему:

 

Отсюда получаем





**Пример 4.3.** Вычислить



Выделим в знаменателе квадрат суммы, получим





При вычислении последнего интеграла мы воспользовались табличным интегралом 16, где  

**Пример 4.4.** Найти интеграл

.

Разложим подынтегральную правильную дробь на простейшие и используем метод неопределенных коэффициентов:

Поскольку  - это двукратный множитель, то

.

.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *х*:

 

Следовательно,



.

Здесь используется равенство 

**Пример 4.5.** Найти интеграл



Поскольку,  то



Разложим правильную дробь, стоящую под знаком интеграла на простейшие и используем метод частных значений:







:

Отсюда 



**5.** **Интегрирование тригонометрических функций**

Интегралы вида  :

Чтобы вычислить эти интегралы, следует представить подынтегральное произведение в виде суммы, используя формулы







**Пример 5.1.** Найти интеграл



**Решение.**



**Пример 5.2.** Найти интеграл



**Решение.**









Интегралы вида: **

*где*  *– рациональная функция*от своих аргументов.

а)  – нечетная функция от **

Подстановка 

б)  – нечетная функция от **

Подстановка 

в)  – четная функция от  ** и 

Подстановка 

г)  – произвольная рациональная функция от  ** и 

Интегралы этого вида вычисляются с помощью универсальной подстановки . Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную с помощью следующих формул:

, 

Тогда 

Таким образом: 

**Пример 5.3.** Найти интеграл



Здесь  ее произвольная рациональная функция от  ** и  Найдем этот интеграл с помощью универсальной подстановки  Значит,  Тогда 

 

**Пример 5.4.** Найти интеграл



В данном примере  

Значит,  – нечетная функция от ** и применяем подстановку  

Таким образом,







**Пример 5.5.** Найти интеграл



**Решение.**

 

Значит,  – нечетная функция от ** и поэтому применим подстановку  Тогда

 

 или  Таким образом,



.

т.е. 

**Пример 5.6.** Найти интеграл

.

Здесь 





т.е.  – четная функция от  ** и 

Сделаем подстановку  тогда

,  ,  Следовательно, имеем





**6.** **Интегрирование некоторых иррациональных функций**

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе *рационализирующих подстановок*, т.е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к ра-циональному виду. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

*Интеграл вида* , *где  ‒ рациональная функция*,  *постоянные*, *- натуральное число*, 

Интегралы такого типа находят методом замены переменной .

*Интеграл вида  где  ‒ рациональная функциия,*  *n- натуральное число*,  *постоянные*, 

С помощью подстановки  функция рационализируется, т.к.



тогда 

*Интеграл вида *

*где  ‒ рациональная функция своих аргументов,*  *постоянные*,  целые числа, натуральные числа,  несократимые дроби.

Интегралы такого типа находят методом замены переменной

 

**Пример 6.1.** Вычислить



Применим метод замены переменной:  т.е.   Значит,  После замены переменной подынтегральная функция превратилась в неправильную рациональную дробь (степени многочленов числителя и знаменателя совпадают), следовательно, нужно выделить целую часть.





**Пример 6.2.** Найти интеграл



Здесь 

Применим метод замены переменной:  т.е.   Тогда

 







*Интеграл вида*  где  ‒ рациональная функция своих аргументов, постоянная, подстановкой  или  сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* и cos*t.*

**Пример 6.3.** Найти интеграл



Применим подстановку   Тогда



*Интеграл вида*  где  ‒ рациональная функция своих аргументов, постоянная, подстановкой  или  сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* и cos*t.*

**Пример 6.4.**







*Интеграл вида*  где  ‒ рациональная функция своих аргументов, постоянная, подстановкой  или  сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* и cos*t.*

**Пример 6.5.**









**7.** **Практические задания**

**Задание.** Найти интегралы:

1.  2.  3.  4. 

5.  6.  7.  8. 

9.  10.  13.  14. 

15.  16.  17.  18. 

19.  20.  21.  22. 

23.  24.  25.  26. 

27.  28.  29.  30. 

31.  32.  33.  34. 

35.  36.  37.  38. 

39.  40. 

**8.** **Пример аудиторной контрольной работы**

**Вариант 1**

**Задание.** Найти интегралы:

1.  2.  3.  4. 

5. 

**Вариант 2**

**Задание.** Найти интегралы:

1.  2.  3.  4. 

5. 

**Вариант 3**

**Задание.** Найти интегралы:

1.  2.  3.  4. 

5. 

**Литература**

1. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.:АСТ: Астрель, 2006. - 558 с.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И.,   
Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы, ряды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 504 с.

3. Павельева Е. Б. Неопределенные интегралы: методические указания к решению задач по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения» — Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 91 с.

4. Хорошилова Е.В. Математический анализ: неопределённый интеграл(в помощь практическим занятиям): Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2007.– 184с.

Марина Владимировна **Донцова**

**Неопределенные интегралы**

***Учебно-методическое пособие***

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.