

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

**Национальный исследовательский университет**

**Учебно-научный и инновационный комплекс**  
«Модели, методы и программные средства»

**Основная образовательная программа**

010400 «Прикладная математика и информатика», профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика», квалификация (степень) бакалавр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**  
«Дискретная математика»

**Основная образовательная программа**

010800 «Механика и математическое моделирование», профиль «Механика деформируемых тел и сред», квалификация (степень) бакалавр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**  
«Дискретная математика»

**Павленкова Е.В., Чекмарев Д.Т.**

## **СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Нижний Новгород  
2012

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ. Павленкова Е.В.,  
Чекмарев Д.Т. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород:  
Нижегородский госуниверситет, 2012. – 68 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются вопросы ряда основных разделов курса «Дискретная математика»: «Теория множеств», «Отношения», «Комбинаторика», «Алгебра логики» и «Теория графов». Учебно-методическое пособие содержит краткую теоретическую часть, большое количество задач для решения на практических занятиях и для самостоятельной работы.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика» и 010800 «Механика и математическое моделирование», профиль «Механика деформируемых тел и сред», квалификация (степень) бакалавр, изучающих курс «Дискретная математика».

# Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Теория множеств.....	5
1.1. Элементы и множества.....	5
1.2. Задание множеств.....	5
1.3. Множества точек на плоскости.....	7
1.4. Парадоксы теории множеств.....	9
1.5. Отношения между множествами.....	9
1.6. Мощность.....	10
1.7. Подмножества.....	10
1.8. Диаграмма Венна. Теоретико-множественные операции над множествами.....	10
1.9. Законы алгебры множеств.....	13
1.10. Прямое произведение множеств.....	14
Глава 2. Отношения.....	16
2.1. Отношение. Композиция отношений. Свойства отношений.....	16
2.2. Функции.....	17
2.3. Отношение эквивалентности. Фактормножества.....	18
2.4. Отношение порядка.....	19
Глава 3. Комбинаторика.....	22
3.1. Общие комбинаторные схемы: множество функций, урновая схема.....	22
3.2. Простейшие комбинаторные конфигурации.....	24
3.3. Бином Ньютона.....	29
Глава 4. Алгебра логики.....	34
4.1. Функции алгебры логики.....	34
4.2. Существенные и фиктивные переменные. Исключение и введение фиктивных переменных. Равенство функций.....	35
4.3. Формулы алгебры логики. Реализация функций формулами. Суперпозиция.....	36
4.4. Законы алгебры логики.....	37
4.5. Функция, двойственная данной функции. Самодвойственная функция. Теорема двойственности. Принцип двойственности.....	39
4.6. Разложение булевых функций по переменным. СДНФ. СКНФ.....	40
4.7. Полнота системы функций. Замыкание множеств.....	41
4.8. Замкнутые классы: $T_0$ , $T_1$ , $S$ .....	41
4.9. Класс монотонных функций.....	42
4.10. Полином Жегалкина. Класс линейных функций. Способы определения линейности функций.....	42
4.11. Представление булевой функции в виде диаграммы.....	42
4.12. Критерий Поста полноты системы функций. Базис полной системы функций алгебры логики.....	44
Глава 5. Теория графов.....	47
5.1. Способы задания графа. Орграф. Полный граф. Дополнение графа. Надграф, подграф.....	47
5.2. Теорема о сумме степеней вершин графа. Число вершин с нечетными степенями.....	49
5.3. Теорема о связности графа или его дополнения. Путь, цикл. Расстояние между вершинами. Связность. Матрица связности. Лемма о соотношении между числом ребер и вершин в связном графе.....	50
5.4. Изоморфизм графов. Инварианты.....	51
5.5. Планарный граф. Грани. Теорема Эйлера о числе граней в плоском изображении графа. Следствия из теоремы Эйлера: Соотношение между числом вершин и ребер в связном планарном графе.....	52
5.6. Гомеоморфизм графов. Критерий Понтрягина-Куратовского планарности графа.....	53
Список литературы.....	67

## Введение

Попытаемся сформулировать вкратце предмет данного учебного пособия. Как учебный курс дискретная математика сформировалась сравнительно недавно – не более 30 лет назад, заменив собой курс математической логики. Введение такого курса связано прежде всего с развитием вычислительной техники, поскольку в дискретной математике собраны математические дисциплины, являющиеся теоретической основой программирования и архитектуры ЭВМ. Дискретная математика – совокупность математических дисциплин, в которых не используется понятие предела или непрерывности. Иными словами, дискретная математика изучает свойства, присущие как бесконечным, так и конечным множествам. Конечно, не все разделы математики, не использующие понятие предела, вошли в состав дискретной математики как научной дисциплины (не говоря уже об учебном курсе). Важнейшие из них – алгебра и теория чисел, традиционно излагаются в отдельных курсах. Отметим еще одну особенность дискретной математики – ее отсутствие в программе средней школы. Если другие математические дисциплины, изучаемые на первом курсе (математический анализ, алгебра, аналитическая геометрия), в значительной мере опираются на школьные знания, то дискретная математика изучается практически «с чистого листа». Исключение составляют элементы алгебры логики, изучаемые в курсе школьной информатики и отчасти начала комбинаторики. Но некоторые разделы дискретной математики (например, теория графов) широко используются во внеклассной работе школьников, в частности в школьной олимпиадной математике, в виде задач «на сообразительность». С этим связано присутствие в списке литературы книг по внеклассной работе со школьниками.

В настоящее время дискретная математика как научная дисциплина включает следующие основные разделы: теория множеств и отношений на множествах, алгебра логики, логические исчисления, комбинаторика, теория кодирования и теория графов. Все эти разделы, кроме логических исчислений и теории кодирования, входят в состав семестрового курса дискретной математики и отражены в данном учебном пособии. По каждому разделу даются краткие теоретические сведения и набор задач. Приводятся примеры решения типовых задач. При изложении теоретического материала авторы по возможности стремились к элементарному стилю изложения, доступному для первокурсников. Основным источником теоретического материала послужил учебник [4], но использовалась также и другая литература.

Материал, изучаемый в курсе дискретной математики, присутствует практически во всех других математических дисциплинах. Такие понятия, как отношение эквивалентности, изоморфизм, инвариант и т. д. используются очень широко и являются неотъемлемой частью математической культуры, без наличия которой ни один программист, инженер-механик, математик-экономист, а тем более математик не могут считать себя полноценными специалистами в своей области.

# Глава 1. Теория множеств

## 1.1. Элементы и множества

1.1. Приведите несколько примеров конечных, бесконечных и пустых множеств.

1.2. Пусть  $A$  – множество всех живых существ, умеющих летать;  $B$  – множество всех насекомых;  $C$  – множество всех птиц.

а) Назовите элемент множества  $B$ , не являющийся элементом множества  $A$ .

б) Назовите элемент множества  $C$ , не являющийся элементом множества  $A$ .

в) Назовите элемент множества  $A$ , не являющийся элементом множеств  $B$  и  $C$ .

г) Существуют ли элементы, принадлежащие всем трем множествам?

1.3. Пусть  $A$  – множество корней квадратного уравнения  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

Верна ли запись:

а)  $3 \in A$ ; б)  $-5 \in A$ ; в)  $10 \notin A$ ; г)  $4 \notin A$  ?

1.4. Верно ли, что

а)  $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$  ?

б)  $a \in \{\{a, b, c\}\}$  ?

в)  $\{1\} \in \mathbb{N}$  ?

г)  $a \in \{a\}$  ?

д)  $a \in \{\{a\}\}$  ?

е)  $\{a\} \in a$  ?

1.5. Сколько элементов содержат множества

$\{a\}$ ,  $\{\{a\}\}$ ,  $\{\{a, b\}\}$ ,  $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$  ?

1.6.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$ ,  $C = \{A, B\}$

$1 \in C$  ?  $4 \in C$  ?

1.7. Доказать, что  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , где  $\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел

## 1.2. Задание множеств

Существуют три основных способа задания множеств: перечисление элементов, задание порождающей процедуры и описание характеристического свойства.

1. Перечисление элементов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

2. Порождающая процедура  $A = \{x \mid x = f\}$ .

Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо из других объектов. Элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

3. Характеристическое свойство  $A = \{x \mid P(x)\}$ .

Описание характеристического свойства, которым элементы множества должны удовлетворять.

$P(x)$  – характеристическое свойство (характеристический предикат).

В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют геометрическим местом точек с данным свойством.

1.8. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством или порождающей процедурой:

а)  $A = \{x \mid x^4 - 10x^2 + 9 = 0\}$ .

б)  $A = \{x \mid (x-1)(x^2-1) = 0\}$ .

в)  $A = \{x \mid 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0\}$ .

г)  $A = \{x \mid \log_5^2 x = 4\}$ .

д)  $A = \{x \mid (x-1)\sqrt{6x-x^2-8} = 0\}$ .

е)  $A = \{x \mid 2^{2x} + 2^{x+1} - 2 = 0\}$ .

ж)  $A = \{x \mid 1 \in A; 2) \text{ Если } x \in A, \text{ тт } 3x \in A; 3) x \leq 100\}$ .

з)  $A = \{x \mid 1 \in A; 2) \text{ Если } x \in A, \text{ тт } (-2)x \in A; 3) |x| \leq 20\}$ .

1.9. Задайте множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству:

а)  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

б)  $\cos x \leq \frac{1}{2}$

в)  $\operatorname{tg} x \geq 1$

1.10. Опишите множество точек  $M$  на плоскости, таких, что:

а)  $\{M \mid OM = R\}$ ;

б)  $\{M \mid OM \leq R\}$ ;

в)  $\{M \mid AM = BM\}$ ;

г)  $\{M \mid AM = BM = CM\}$ ,

где  $O, A, B, C$  – фиксированные точки плоскости;  $R$  – положительное число.

1.11. Исследуйте, принадлежат ли числа  $\frac{2}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, \frac{17}{20}$  множеству

$$A = \left\{ x \mid x = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 4}, n \in N \right\}.$$

1.12. Задайте множество характеристическим свойством его элементов:

а)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

б)  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

в)  $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ .

г)  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ .

д)  $\{-1, +1\}$ .

1.13. Докажите, что указанное множество не содержит целых чисел:

$$2.1. \quad A = \left\{ x \mid x = \frac{n}{n+1}, \quad n \in N \right\},$$

$$2.2. \quad A = \left\{ x \mid x = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1}, \quad n \in N \right\},$$

$$2.3. \quad A = \left\{ x \mid x = \frac{3n^3 + 4}{n^3 + 2}, \quad n \in N \right\}.$$

1.14. Совпадают ли множества корней для пары уравнений:

$$а) \quad x + 5 = 15 - x \quad u \quad x + 5 + \sqrt{x} = 15 - x + \sqrt{x}$$

$$б) \quad x + 15 = 5 - x \quad u \quad x + 15 + \sqrt{x} = 5 - x + \sqrt{x}$$

$$в) \quad (x + 1)(x - 1) = 0 \quad u \quad (x + 1)\sqrt{x - 1} = 0$$

$$г) \quad \sqrt{(x - 6)(x - 1)} = \sqrt{14} \quad u \quad \sqrt{x - 6}\sqrt{x - 1} = \sqrt{14}$$

1.15. Найдите множество значений переменной, при которых существует функция (область определения функции):

$$а) \quad y = (x - 2)\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$б) \quad y = \sqrt{\sin x}$$

$$в) \quad y = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - \sin x}$$

$$г) \quad y = \log_{x-2}(6x - x^2 - 5)$$

$$д) \quad y = \lg(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})$$

$$е) \quad y = \arccos(2 \sin x)$$

1.16. Найдите область определения и множество значений функции:

$$а) \quad y = \sqrt{2 + x - x^2}$$

$$б) \quad y = \cos(\arccos x)$$

$$в) \quad y = \sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(x + 2)^2}$$

$$г) \quad y = \arccos(\cos x)$$

### 1.3. Множества точек на плоскости

Множества точек на плоскости часто задают их характеристическими свойствами.

Множество точек на плоскости можно задать также с помощью равенства или неравенства, связывающего их координаты. Так, равенство  $F(x, y) = 0$

задает множество точек  $M(x, y)$  плоскости, координаты которых удовлетворяют этому равенству.

Кривая разбивает плоскость на части. В одних из этих частей выполняется неравенство  $F(x, y) < 0$ , в других – неравенство  $F(x, y) > 0$ .

1.17. Постройте множество точек  $M(x, y)$  плоскости, для которых:

а)  $y = \frac{x+1}{x-1}$                       б)  $y = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{x+1}{|x+1|} - \frac{1}{x}$

1.18. Напишите уравнение окружности, если

а) центр находится в точке  $A(a; b)$ , радиус  $R$ ;

б) центр находится в точке  $A(3; 1)$  и окружность проходит через точку  $B(7; 4)$ ;

в) окружность описана вокруг треугольника  $ABC$ , где  $A(9; 2)$ ,  $B(7; 6)$ ,  $C(0; -1)$ .

1.19. Найдите уравнение множества точек  $M(x, y)$ , равноудаленных от точки  $F(0, -\frac{3}{4})$  и от прямой  $y = -\frac{5}{4}$ .

1.20. Задайте множество точек на плоскости, которые лежат внутри верхнего полукруга с центром в точке  $A(a; b)$  и радиусом  $R$  (задать условия на  $x, y$ ).

1.21. Постройте множество точек  $M(x, y)$  плоскости, для которых:

а)  $x^2 + y^2 + 6y \leq 0$ ;

б)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y \geq 3$ ;

в)  $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \\ y+2 \geq x \\ x^2 - 8x + 12 \leq 0 \end{cases}$

г)  $|y| \leq |x+1|$ ;

д)  $\frac{(y-2)(y-x^2+2)}{x-y} \geq 0$ ;

е)  $x^2 + y^2 - 10x + 2y \leq 10$ ;

ж)  $\begin{cases} x^2 - 4x - y \leq 0 \\ y - x + 4 \leq 0 \\ 5x - x^2 \geq 6 \end{cases}$

з)  $|x-1| + |y+1| \leq 2$ ;

и)  $(x^2 + y^2 + 4x + 4y)(x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3) \leq 0$ .



## 1.4. Парадоксы теории множеств

1.22. Привести пример теоретико-множественного парадокса.

## 1.5. Отношения между множествами

### Равенство

Два множества  $A$  и  $B$  равны ( $A=B$ ), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть если всякий элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , и всякий элемент множества  $B$  принадлежит множеству  $A$ :

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ и } \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

### Включение

Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то говорят, что множество  $A$  включено в множество  $B$ . В этом случае  $A$  называется подмножеством множества  $B$ .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

### Сравнимость множеств

Множества  $A$  и  $B$  сравнимы, если имеет место  $A \subseteq B$  или  $B \subseteq A$ . Если же  $A \not\subseteq B$  и  $B \not\subseteq A$ , то множества не сравнимы.

1.23. Верно ли, что:

а)  $\{1,2\} = \{\{1,2\}\}$ ?

б)  $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ ?

в)  $\{1,2,3\} \subseteq \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ ?

г)  $\{\{1,2\}\} \subseteq \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ ?

д)  $1 \subseteq N$ ?  $\{1\} \subseteq N$ ?

е)  $\{1,2,3,4,5\} \subseteq N$ ?

1.24. Приведите примеры таких множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , что выполнено следующее

а)  $A \in B$  и  $A \subset B$

б)  $A \subset B$ ,  $B \in C$ ,  $C \subset D$

в)  $A \in B$ ,  $B \subset C$ ,  $A \not\subset C$

г)  $A \in B$ ,  $B \in C$ ,  $A \notin C$

д)  $A \subset B$ ,  $B \in C$ ,  $A \notin C$ ,  $A \not\subset C$

## 1.6. Мощность

Между множествами  $A$  и  $B$  установлено взаимно-однозначное соответствие, если элементы этих множеств можно объединить в пары  $(a, b)$  такие, что:

1. Элемент  $a \in A$ , а элемент  $b \in B$ ;
2. Каждый элемент обоих множеств попал в одну и только одну пару.

Два множества  $A$  и  $B$  (конечных или бесконечных) имеют одинаковую мощность ( $|A| = |B|$ ), если между этими множествами можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Множество, имеющее такую же мощность, что и множество натуральных чисел, называется счетным.

1.25. Установить взаимно-однозначное соответствие между:

- а)  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ ;
- б)  $(0, 1)$  и  $[0, 1]$ ;
- в)  $(0, 1)$  и всей числовой прямой;
- г)  $[0, 1]$  и всей числовой прямой.

1.26. Доказать, что множество целых чисел  $Z$  – счетно.

## 1.7. Подмножества

Булеан множества  $A$  – это множество всех подмножеств множества  $A$ . Обозначается  $P(A)$  или  $2^A$ .

То есть  $P(A)$  – множество, элементами которого являются подмножества множества  $A$ .

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

**Теорема.** Мощность множества всех подмножеств множества  $A$  равна «2 в степени мощность множества  $A$ ».

$$|P(A)| = |2^A| = 2^{|A|}$$

1.27. Дано множество  $A$ . Найти  $P(A) = ?$   $|P(A)| = ?$

- а)  $A = \{a, b, c, d\}$ .
- б)  $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

## 1.8. Диаграмма Венна. Теоретико-множественные операции над множествами

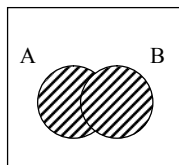
Для графической иллюстрации отношений между множествами используются диаграммы Венна 1 и 2 типа.

Универсальное множество  $U$  – множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

## Операции над множествами

1. Объединение

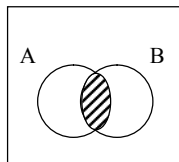
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$



2. Пересечение

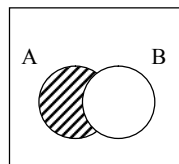
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\},$$

$$A \cap B = AB.$$



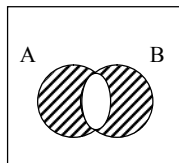
3. Вычитание (из A вычесть B)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$



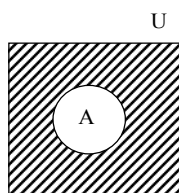
4. Симметрическая разность

$$A \otimes B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \\ = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



5.  $\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$ -

дополнение множества A (до универсального множества U).



1.28.  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ ,  $A = \{a, b, c, h, i\}$ ,  $B = \{a, c, e, f, i\}$ ,  $C = \{a, d, e, h, j\}$ . На диаграммах Венна 1 и 2 типа расставить все элементы.

1.29. Дана пара множеств X и Y, которые образованы тремя произвольными множествами A, B и C при помощи операций над ними. На диаграммах Венна 1 и 2 типа заштриховать множества X и Y и определить отношения между ними. Варианты:  $X = Y$ ,  $X \subseteq Y$ ,  $X \supseteq Y$  или X и Y не сравнимы.

- а)  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \setminus C$ ,
- б)  $X = A \cup (B \setminus C)$ ,  $Y = (A \cup B) \setminus C$ ,
- в)  $X = (A \setminus B) \cup C$ ,  $Y = A \cup (C \setminus B)$ ,
- г)  $X = (A \cup B) \otimes C$ ,  $Y = (A \otimes B) \cup C$ .

**Пример:**  $X = (A \otimes C) \cap B$ ,  $Y = (A \otimes B) \cup \bar{C}$ .

Диаграмма Венна I типа

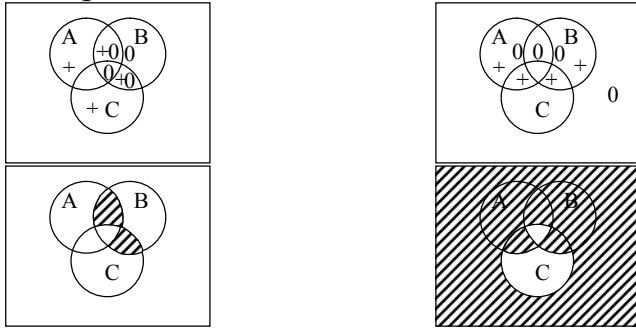


Диаграмма Венна II типа

	A		$\bar{A}$	
B	0	0+	0+	0
$\bar{B}$		+	+	
	C	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

$A \otimes C$  – “+”

B – “0”

	A		$\bar{A}$	
B		0	+	+
$\bar{B}$	+	+		0
	C	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

$A \otimes B$  – “+”

$\bar{C}$  – “0”

Результат:  $X \subseteq Y$

1.30. На диаграммах Венна 1 и 2 типа заштриховать множества:

- $(A \cap \bar{B}) \setminus C$ ,
- $(\bar{A} \otimes B) \setminus C$ ,
- $(A \cup B) \otimes \bar{C}$ ,
- $(A \cup B) \setminus \overline{(B \cap C)}$ ,
- $(B \otimes C) \cap \overline{(A \setminus C)}$ ,
- $\bar{A} \setminus (B \otimes C)$ ,
- $(A \otimes B) \setminus (C \otimes D)$  (диаграмма Венна 2 типа),
- $\overline{(A \otimes C)} \setminus (B \otimes D)$  (диаграмма Венна 2 типа),
- $(A \setminus \bar{C}) \cap B$ ,
- $(A \otimes \bar{C}) \setminus (B \otimes C)$ ,
- $\overline{(A \otimes B)} \cup \bar{C}$ ,
- $\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus C)}$ ,
- $\bar{A} \setminus (B \cap \bar{C})$ ,
- $\overline{(A \cup B)} \setminus (A \cup \bar{C})$ ,
- $\overline{(A \otimes B)} \cap \bar{C}$ ,
- $(\bar{A} \otimes \bar{B}) \cap \bar{C}$ ,
- $(\bar{A} \otimes \bar{B}) \otimes \bar{C}$ .

## 1.9. Законы алгебры множеств

Пусть задано универсальное множество  $U$ . Тогда  $\forall A, B, C \subseteq U$ .

### 1. Законы коммутативности

$$1.1. A \cup B = B \cup A$$

$$1.2. A \cap B = B \cap A$$

$$1.3. A \otimes B = B \otimes A$$

$$A \otimes B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \otimes A$$

### 2. Законы ассоциативности

$$2.1. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$2.2. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C = ABC$$

$$2.3. (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

### 3. Законы дистрибутивности

$$3.1. (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC$$

$$3.2. (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

### 4. Законы де Моргана

$$4.1. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$4.2. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

### 5. Законы поглощения

$$5.1. (A \cup B) \cap A = A$$

$$5.2. (A \cap B) \cup A = A$$

### 6. Законы идемпотентности

$$6.1. A \cup A = A$$

$$6.2. A \cap A = A$$

### 7. Закон инволютивности

$$\overline{\overline{A}} = A$$

### 8. Свойства нуля и единицы

$$8.1. \overline{\emptyset} = U$$

$$8.4. \overline{U} = \emptyset$$

$$8.2. A \cup \emptyset = A$$

$$8.5. A \cap U = A$$

$$8.3. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$8.6. A \cup U = U$$

### 9. Свойства дополнения

$$9.1. A \cup \overline{A} = U$$

$$9.2. A \cap \overline{A} = \emptyset$$

### 10. Выражение для разности

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Для упрощения записи формул скобки можно опускать, придерживаясь следующего правила: **пересечение сильнее всех остальных операций** (сам знак пересечения можно опустить).

Например,

$$A \cup (\bar{B} \cap C) = A \cup \bar{B} \cap C = A \cup \bar{B}C.$$
$$(A \cap B) \otimes C = AB \otimes C.$$

Закон дистрибутивности 3.1 можно записать следующим образом:

$$(A \cup B)C = AC \cup BC.$$

**Пример.**

При помощи законов алгебры множеств доказать справедливость тождества:

$$AC \otimes BC = (A \otimes B)C \quad (*)$$

$$X \otimes Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X\bar{Y}) \cup (Y\bar{X}) = X\bar{Y} \cup \bar{X}Y.$$

Используя закон де Моргана и закон дистрибутивности, получим

$$AC \otimes BC = AC\bar{B}C \cup A\bar{C}BC = AC(\bar{B} \cup \bar{C}) \cup (\bar{A} \cup \bar{C})BC =$$
$$= AC\bar{B} \cup AC\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{C}BC = A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$$

$$[AC\bar{C} = \emptyset, \bar{C}BC = B\bar{C}\bar{C} = \emptyset, X \cup \emptyset = X].$$

Аналогично преобразуем правую часть

$$(A \otimes B)C = (\bar{A}B \cup A\bar{B})C = \bar{A}BC \cup A\bar{B}C.$$

Так как обе формулы  $AC \otimes BC$  и  $(A \otimes B)C$  задают одно и то же множество, то они тождественно равны. Тождество (\*) выполнено.

1.31. Путем алгебраических преобразований упростить

- а)  $\overline{A\bar{B} \cup B}$ .
- б)  $\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})B}$ .
- в)  $\overline{A \cup B \cup \bar{A}}$ .
- г)  $\overline{\bar{A}B \cup B}$ .
- д)  $AB \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B$ .
- е)  $(A \cup B)(A \cup C)(B \cup D)(C \cup D)$ .
- ж)  $ABD \cup ABCDE \cup ADA\bar{A}$ .
- з)  $ABCD\bar{D} \cup \bar{A}C \cup \bar{B}C \cup CD$ .
- и)  $A \otimes (A \otimes B)$ .
- к)  $A \otimes AB$ .
- л)  $(A \otimes B) \cup AB$ .
- м)  $A \otimes B \otimes AB$ .

## 1.10. Прямое произведение множеств

**Определение.** Прямое (декартово) произведение множеств  $A$  и  $B$   $A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \}$  - множество упорядоченных пар  $\langle a, b \rangle$ , где  $a$  - элемент множества  $A$ , а  $b$  - элемент множества  $B$ .

**Определение.** Кортеж длины  $n$  – это упорядоченный набор  $n$  элементов  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ .

**Определение.** Множество  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n} \}$  называется прямым произведением  $n$  множеств.

**Лемма.**  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

**Теорема.**  $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|$ .

**Следствие.**

$$\left| \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ раз}} \right| = |A^k| = |A|^k$$

1.32. Найти множество  $D$  и его мощность, если  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $C = \{+, -\}$

а)  $D = A \times B$ ;

б)  $D = B^2 \times C$ ;

в)  $D = A \times B \times C$ ;

1.33. Написать несколько элементов множества  $D$  и найти его мощность:  
 $D = A^4 \times B^5 \times C^3$ .

## Глава 2. Отношения

Понятие отношения является одним из наиболее общих понятий математики. Отображения и функции являются частными случаями отношений. Что касается дискретной математики, все ее разделы, рассматриваемые в данной работе, так или иначе связаны с изучением отношений, а теория графов полностью посвящена изучению их свойств специфическими методами.

### 2.1. Отношение. Композиция отношений. Свойства отношений

**Определение.** Отношением  $R$  из множества  $A$  в множество  $B$  называется подмножество прямого произведения  $A \times B$ :

$$R \subset A \times B$$

(мы рассматриваем только *бинарные* отношения, т. е. отношения для двух множеств). Для отношений используется следующая форма записи:

$$aRb, \text{ если } \langle a, b \rangle \in R \subset A \times B.$$

**Определение.** Если  $A=B$ , то отношение  $R$  называется отношением *на множестве*  $A$ . Вместе с любым отношением на множестве  $A$  мы также будем рассматривать следующие отношения:

- универсальное отношение:  $U = A \times B$ ,
- дополнение отношения:  $\bar{R} = U \setminus R$ ,
- обратное отношение:  $R^{-1} = \{ \langle a, b \rangle : \langle b, a \rangle \in R \}$ ,
- тождественное отношение:  $I = \{ \langle a, a \rangle : a \in A \}$ .

**Определение.** Композицией двух отношений  $R_1 \subset A \times B$  и  $R_2 \subset B \times C$  назовем отношение  $R_1 \circ R_2 \subset A \times C = \{ \langle a, c \rangle : \exists b \in B : aR_1b, bR_2c \}$ . Композиция отношений на множестве  $A$  является отношением на множестве  $A$ .

**Определение.** Степенью отношения  $R$  на множестве  $A$  называется его композиция с самим собой:

$$R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n \text{ раз}}.$$

Вводя также определение нулевой и первой степени отношения, получим:

$$R^0 = I, R^1 = R, R^2 = R \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R.$$

**Теорема.** Если некоторая пара  $\langle a, b \rangle$  принадлежит какой-либо степени отношения  $R$  на множестве  $A$  мощности  $n$ , то эта пара принадлежит и степени  $R$  не выше  $n-1$ .

**Следствие.**

$$(R \subset A^2, |A| = n) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i.$$



## Свойства отношений на множестве

Пусть  $R$  – отношение на множестве  $A$ :  $R \subset A^2$ .

Рассмотрим важнейшие свойства отношений на множестве.

$R$  рефлексивно, если  $\forall a \in A \langle a, a \rangle \in R$ ,

$R$  антирефлексивно, если  $\forall a \in A \langle a, a \rangle \notin R$ ,

$R$  симметрично, если  $\forall \langle a, b \rangle \in R \langle b, a \rangle \in R$ ,

$R$  антисимметрично, если  $\forall a, b \in A: (\langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R) \Rightarrow a = b$ ,

$R$  транзитивно, если  $\forall a, b, c \in A: (\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R) \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$ ,

$R$  полное или линейное, если  $\forall a, b \in A (\langle a, b \rangle \in R) \text{ или } (\langle b, a \rangle \in R)$ ,

**Теорема.** Пусть  $R$  – отношение на множестве  $A$ :  $R \subset A^2$ . Тогда:

$R$ рефлексивно	$\Leftrightarrow$	$I \subset R$
$R$ антирефлексивно	$\Leftrightarrow$	$R \cap I = \emptyset$
$R$ симметрично	$\Leftrightarrow$	$R = R^{-1}$
$R$ антисимметрично	$\Leftrightarrow$	$R \cap R^{-1} \subset I$
$R$ транзитивно	$\Leftrightarrow$	$R \circ R \subset R$
$R$ полно	$\Leftrightarrow$	$R \cup I \cup R^{-1} = U$

## 2.2. Функции

Понятие функции – одно из основополагающих в математике. Под функцией  $f: A \rightarrow B$  мы будем понимать отношение из  $A$  в  $B$ , обладающее свойством однозначности.

### Определение функции

Пусть  $f$  – отношение из  $A$  в  $B$ , такое, что

$$(\langle a, b \rangle \in f, \langle a, c \rangle \in f) \Rightarrow b = c,$$

тогда отношение называется функцией из  $A$  в  $B$  и обозначается:

$$f: A \rightarrow B \text{ или } A \xrightarrow{f} B.$$

Если  $\langle a, b \rangle \in f$ , то используют обозначение  $b = f(a)$ , при этом  $a$  называют аргументом функции, а  $b$  – значением функции.

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется:

инъективной, если из  $b = f(a_1)$  и  $b = f(a_2)$  следует  $a_1 = a_2$ ;

сюръективной, если  $\forall b \in B \exists a \in A: b = f(a)$ ;

биективной или взаимнооднозначной, если она инъективная и сюръективная.

### 2.3. Отношение эквивалентности. Фактормножества

**Определение.** *Отношением эквивалентности* называется рефлексивное симметричное транзитивное отношение. Если  $R$  – отношение эквивалентности и  $\langle a, b \rangle \in R$ , используют обозначение:

$$a \equiv b.$$

**Определение.** *Классы эквивалентности*

Пусть  $R$  – отношение эквивалентности на множестве  $A$ . Классом эквивалентности элемента  $a \in A$  называется множество элементов множества  $A$ , находящихся в отношении  $R$  с  $a$ :

$$[a] = \{b \mid a \equiv b\}$$

**Лемма 1**

$$\forall a \in A [a] \neq \emptyset.$$

**Лемма 2**

$$a \equiv b \Rightarrow [a] = [b].$$

**Лемма 3**

$$a \cup b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset.$$

**Определение.** *Разбиением* множества называется множество его попарно не пересекающихся подмножеств, объединение которых равно  $A$ .

Пусть  $\Psi = \{B_i\}_{i \in I}$  – некоторое множество подмножеств  $A$ .  $\Psi$  называется *разбиением* множества  $A$ , если оно обладает следующими свойствами:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \bigcup_{i \in I} B_i = A.$$

**Теорема.** Всякое отношение эквивалентности на множестве  $A$  определяет разбиение множества  $A$ , причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества  $A$ , не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве  $A$ .

#### **Фактормножества**

Множество классов эквивалентности множества  $A$  по отношению эквивалентности  $R$  называется *фактормножеством* и обозначается  $A/R$ .

Фактормножество является подмножеством множества всех подмножеств (булеана)  $A$ :  $A/R \subset 2^A$ .

**Пример.** Рассмотрим множество целых чисел  $Z$  и введем на нем следующее отношение  $R$ :  $aRb$ , если  $a-b$  делится на 5 без остатка. Легко убедиться, что данное отношение является отношением эквивалентности: рефлексивность, симметричность и транзитивность следует из свойств арифметической операции деления с остатком. Фактормножеством  $Z/R$  данного множества будет являться множество, состоящее из 5 классов эквивалентности:  $Z/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ .

## 2.4. Отношение порядка

Отношение порядка широко используется в математике, информатике и повседневной жизни. С упорядочиванием тех или иных объектов мы сталкиваемся постоянно. Для иллюстрации приведем примеры его использования в математике и информатике.

В математике отношение порядка лежит в основе понятий максимума, минимума, монотонной функции и т.д.

В информатике с отношением порядка связаны все алгоритмы сортировки, перебора и т.д.

В данном пункте даются строгие определения отношения порядка, его разновидностей и связанных с ним понятий.

**Определение.** Отношением *порядка* называется антисимметричное транзитивное отношение. Рефлексивное отношение порядка называется отношением *нестрогого порядка*. Антирефлексивное отношение порядка называется отношением *строого порядка*. Если отношение порядка полное, его называют отношением *полного*, или *линейного порядка*. В противном случае говорят об отношении *частичного порядка*.

**Обозначения.** Если  $R$  – отношение порядка, то  $aRb$  обозначается:

$a < b$  для строгого порядка;

$a \leq b$  для нестроогого порядка;

$a \prec b$  в общем случае.

### *Минимальные элементы*

Элемент  $a$  множества  $A$  с отношением порядка называется *минимальным элементом*, если для него не существует меньших элементов:

$$\neg \exists b \in A : (b \neq a, b \prec a).$$

**Теорема.** Во всяком конечном непустом частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент.

**Теорема.** Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть дополнен до линейного.

### **Определение.** *Монотонная функция*

Пусть  $A$  и  $B$  – упорядоченные множества,  $f: A \rightarrow B$ . Функция  $f$  называется монотонной, если  $\forall a_1, a_2 \in A$  из  $a_1 < a_2$  следует  $f(a_1) \leq f(a_2)$ . Функция называется строго монотонной, если  $\forall a_1, a_2 \in A$  из  $a_1 < a_2$  следует  $f(a_1) < f(a_2)$ .

## Задачи.

2.1. Пусть  $A, B \neq \emptyset$  и  $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times D)$ . Доказать, что  $A=B=C=D$ .

2.2. Найти область определения, область значений,  $R^{-1}, R^2, R * R^{-1}, R^{-1} * R$  для следующих отношений:

а)  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y \}$

б)  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in N \text{ и } y \text{ делит } x \}$

в)  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y - \text{действительные числа и } x + y \leq 0 \}$

г)  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y - \text{действительные числа и } 2x \geq 3y \}$

д)  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ и } y \geq \sin x \}$

2.3. Для каких бинарных отношений справедливо  $R^{-1} = \bar{R}$ ?

2.4. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно.

а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?

б) Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?

в) Сколько имеется инъективных функций из  $A$  в  $B$ ?

г) При каких  $m$  и  $n$  существует взаимно-однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ?

2.5. Доказать, что  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$  для любой функции  $f$ .

2.6. Пусть  $U$  – непустое множество. Для любого подмножества  $A$  множества  $U$  обозначим через  $\chi_A^U$  следующую функцию (характеристическую функцию множества  $A$ ):

$$\chi_A^U = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Доказать, что введенная функция удовлетворяет следующим условиям:

а)  $\chi_U^U(x) = 1$

б)  $\chi_{\emptyset}^U(x) = 0$

в)  $\chi_{U \setminus A}^U(x) = 1 - \chi_A^U(x)$

г)  $\chi_{A \cup B}^U(x) = \chi_A^U(x) + \chi_B^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$

д)  $\chi_{A \cap B}^U(x) = \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$

е)  $\chi_{A \setminus B}^U(x) = \chi_A^U(x) - \chi_{A \cap B}^U(x)$

ж) если  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ , то  $\chi_A^U(x) = \max_{i \in I} \chi_{A_i}^U(x)$

з) если  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ , то  $\chi_A^U(x) = \min_{i \in I} \chi_{A_i}^U(x)$

2.7. Доказать, что отношение  $R$  на множестве  $A$  является одновременно эквивалентностью и частичным порядком в том и только в том случае, когда  $R = I_A$  (тождественное отношение)

2.8. На множествах  $N$  и  $N \times N$  определим отношения  $R_m, Q, S$ . Доказать, что они являются отношениями эквивалентности.

а)  $\langle a, b \rangle \in R_m \Leftrightarrow (a - b)$  делится на  $m$  ( $m > 0$ )

б)  $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in Q \Rightarrow a + d = b + c$

в)  $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in S \Rightarrow [((ad = bc) \text{ и } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0) \text{ или } (a = c, b = 0, d = 0)]$

2.9. Пусть  $A$  – множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения:

а) параллельность прямых;

б) перпендикулярность прямых?

2.10. На множестве действительных чисел определим отношение  $R$  следующим образом:

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \text{ - рациональное число.}$$

Доказать, что  $R$  – эквивалентность.

2.11. Доказать, что если  $R$  есть эквивалентность, то  $R^{-1}$  есть также эквивалентность.

2.12. Доказать, что  $R$  тогда и только тогда является отношением эквивалентности на множестве  $A$ , когда существует система  $P$  попарно непересекающихся множеств, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$R = \bigcup_{C \in P} C \times C \text{ и } \bigcup_{C \in P} C = A$$

2.13. Доказать, что если  $R$  частичный (полный) порядок на  $X$  и  $A \subseteq X$ , то  $R \cap A^2$  есть частичный (полный) порядок на  $A$ .

2.14. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – линейные порядки на множестве  $A$ . Когда  $R_1 * R_2$  – линейный порядок?

2.15. Доказать, что любое конечное множество можно упорядочить.

2.16. Пусть  $R_A$  есть частичный порядок на множестве  $A$ ,  $R_B$  – частичный порядок на множестве  $B$ . Назовем прямым произведением частично упорядоченных множеств  $A$  и  $B$  множество  $A \times B$  с заданным на нем отношением  $R$ :

$$\langle a_1, b_1 \rangle R \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow (a_1 R_A a_2, b_1 R_B b_2).$$

Доказать, что  $R$  есть частичный порядок на  $A \times B$ .

## Глава 3. Комбинаторика

Во многих математических, программистских и практических задачах приходится делать перебор всех возможных вариантов. Определение числа возможных вариантов – задача комбинаторики, как раздела математики. Безусловно, как и любая другая математическая дисциплина, комбинаторика ограничивается некоторым набором формальных схем и поэтому не может охватывать все практические задачи, связанные с перебором вариантов. Нашей задачей является описание самых типовых комбинаторных конфигураций. Мы будем считать нашу задачу выполненной, если студенты научатся правильно определять, какую комбинаторную конфигурацию или комбинацию конфигураций нужно применять при решении той или иной задачи.

В самом общем виде задача комбинаторики может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется некоторое конечное множество. Рассмотрим всевозможные комбинации элементов этого множества, удовлетворяющие некоторому набору ограничений. Необходимо определить число различных комбинаций. Второй задачей комбинаторики (уже из области программирования) является генерация всех различных комбинаций. Но решение второй задачи может оказаться лишеным смысла, если число комбинаций окажется слишком большим. Так, например, число перестановок в множестве из  $n$  элементов равно  $n!$  и при  $n > 20$  генерация более чем  $10^{18}$  комбинаций невозможна за разумное время даже на самом мощном компьютере.

Важнейшее значение в комбинаторике имеет различимость комбинаций. Без четкого понимания, какие комбинации мы считаем одинаковыми, а какие различными, трудно получить правильный ответ. Например, на множестве людей комбинации («Иванов», «Петров», «Сидоров») и («Петров», «Сидоров», «Иванов») в одном случае различаются, а в другом – нет. Соответственно, в первом случае мы имеем две различных комбинации, а во втором – одну. Все зависит от условий (ограничений) комбинаторной задачи.

### 3.1. Общие комбинаторные схемы: множество функций, урновая схема

Для лучшей формализации комбинаторных задач удобно использовать общие формальные схемы. При этом каждая конкретная комбинаторная задача будет отличаться от других задач только набором параметров и условий (ограничений). Рассмотрим две наиболее популярные общие комбинаторные схемы.

## Множество функций

Рассмотрим два упорядоченных множества  $X$  и  $Y$  (на них задан строгий линейный порядок), мощность которых равна соответственно:  $|X|=m$ ,  $|Y|=n$ . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $X=\{1,\dots,m\}$ ,  $Y=\{1,\dots,n\}$  Рассмотрим множество функций

$$F: X \rightarrow Y.$$

Сколько существует различных функций  $F$ , удовлетворяющих заданным ограничениям?

### Урновая схема

Дано  $m$  предметов. Их нужно разложить в  $n$  ящиков так, чтобы выполнялись заданные ограничения.

Сколько существует различных способов такого размещения?

Совокупность ограничений, а также, возможно, условия на  $m$  и  $n$  определяют **комбинаторную конфигурацию**. Различие комбинаторных конфигураций определяется различием ограничений.

В качестве примера приведем конфигурацию с отсутствием ограничений.

Схема **множество функций** дает следующий результат:  $n^m$  различных функций.

**Доказательство.** Каждому значению  $x \in X$  можно поставить в соответствие одно из  $n$  различных значений  $y_1, \dots, y_n$ . Соответственно  $m$  значениям  $x$  можно поставить в соответствие  $n^m$  различных наборов из  $y_1, \dots, y_n$ .

Аналогичный результат дает **урновая схема**: существует  $n^m$  различных способов разложить  $m$  предметов в  $n$  ящиков.

**Доказательство.** Каждый из  $m$  предметов можно положить в один из  $n$  ящиков.

**Примечание.** Считаем все предметы и все ящики различными.

Рассмотренная комбинаторная конфигурация имеет название **число размещений с повторениями**.

Обе приведенные здесь общие комбинаторные схемы одинаково универсальны: любая комбинаторная конфигурация может быть интерпретирована как через первую схему, так и через вторую. Но эквивалентность данных интерпретаций вообще говоря должна быть обоснована. В целом в зависимости от ситуации иногда удобнее использовать первую общую комбинаторную схему (**множество функций**), иногда вторую (**урновую схему**). Иногда же удобнее не привязываться ни к одной из общих комбинаторных схем. Ниже мы в

основном так и будем поступать для типовых комбинаторных конфигураций. Но для каждой из них также по возможности будем приводить и обе интерпретации в общих комбинаторных схемах.

### 3.2. Простейшие комбинаторные конфигурации

Рассматриваются наиболее часто встречающиеся комбинаторные конфигурации

#### Сумма

Данный способ решения комбинаторных задач сводится к более или менее рациональному перебору комбинаций. При этом все возможные комбинации разбиваются на непересекающиеся классы, мощности которых определяются тем или иным способом, а потом суммируются.

**Пример 1.** *Определить  $M$  – количество двузначных натуральных чисел, у которых вторая цифра строго больше первой*

**Решение.** Разобьем двузначные натуральные числа на классы: числа, начинающиеся с  $1, 2, \dots, 9$ . Двузначных чисел, начинающихся с  $1$  и удовлетворяющих условию задачи, всего  $8$ : от  $12$  до  $19$ ; начинающихся с  $2$  –  $7$ ; начинающихся с  $3$  –  $6$  и т.д. Далее, суммируя полученные результаты по всем классам, получим

$$M=8+7+6+5+4+3+2+1+0=36$$

Данная задача может быть решена и другими способами: примеры других решений будут приведены ниже.

#### Прямое произведение

Во многих задачах допустимые комбинации (множество  $A$ ) являются элементами прямого произведения двух или более множеств:  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  (некоторые множества могут совпадать). Число таких комбинаций равно мощности прямого произведения этих множеств. В результате имеем следующую формулу решения комбинаторной задачи:

$$|A| = |A_1| * \dots * |A_n|.$$

**Пример 2.** В детской спортивной школе по фигурному катанию занимаются  $12$  девушек и  $8$  юношей. К предстоящим соревнованиям необходимо подготовить пару для выступления в программе парного катания. Сколько вариантов составления пары может быть рассмотрено тренерами?

**Ответ.**  $96=12*8$ .

**Пример 3.** В соревнованиях рыболовов принимают участие  $20$  человек. Разыгрываются три приза: за наибольший вес улова, за самую большую рыбу и за самую маленькую рыбку. Организован тотализатор. Каждый участник тотализатора заполняет карточку с указанием фамилий победителей в каждом виде. Сколько существует способов заполнения карточки тотализатора?

**Ответ.**  $8000=20^3$ .

Рассмотрим пример, где используется и сумма и произведение.



**Пример 4.** В Стране Чудес есть четыре города: А, Б, В, Г. Из города А в город В можно проехать либо через город Б, либо через город Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, из города Б в город В ведет 4 дороги, из города А в город Г ведет 2 дороги, из города Г в город В ведет 3 дороги (рис. 3.1.). Сколькими способами можно проехать из А в В?

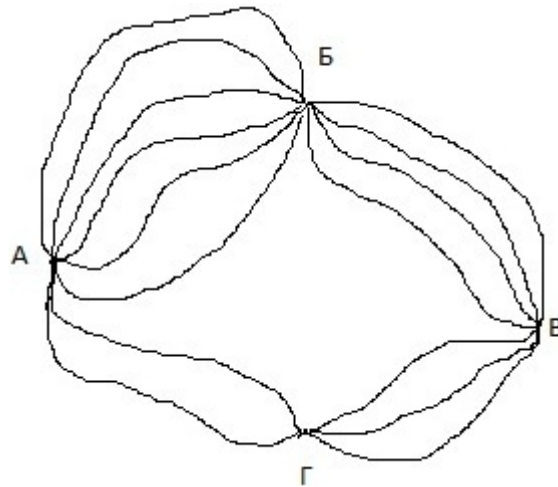


Рис. 3.1.

**Решение.** Число дорог, ведущих из А в В через Б, равно  $6 \cdot 4$  (прямое произведение); число дорог, ведущих из А в В через Г, равно  $2 \cdot 3$  (прямое произведение). Общее число дорог, ведущих из А в В, получаем как сумму двух вариантов (дороги, ведущие через Б и дороги, ведущие через Г).

**Ответ.**  $30 = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3$

#### **Множество всех подмножеств данного множества**

Допустимыми комбинациями являются все подмножества некоторого множества  $A$ . При этом число допустимых комбинаций равно мощности множества всех подмножеств данного множества:  $2^{|A|}$ .

Рассмотрим данную конфигурацию с точки зрения общих комбинаторных схем.

**Множество функций:** Рассмотрим множество  $X$ . Пусть  $|X| = m$ . Пусть множество  $Y = \{0, 1\}$ , тогда  $|Y| = 2$ . Число всех функций  $F: X \rightarrow Y$  равно  $2^m$ . (размещения с повторениями). С другой стороны, рассмотрим всевозможные подмножества  $M$  множества  $X$ :  $M \subseteq X$ , для которых рассмотрим *характеристические функции множеств*:

$$F_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$

Очевидно, что характеристическая функция любого подмножества множества  $X$  принадлежит множеству функций  $F: X \rightarrow Y$ . С другой стороны: любая функция, отображающая  $X$  в  $Y$ , является характеристической функцией некоторого подмножества  $X$ . Таким образом, множество функций  $F: X \rightarrow Y$  и множество характеристических функций подмножеств  $X$  совпадают, а поскольку существует взаимно-однозначное соответствие между подмножествами и их

характеристическими функциями, то число подмножеств равно числу функций. Следовательно, число подмножеств равно  $2^m$ .

Отметим, что данная комбинаторная конфигурация является частным случаем размещений с повторениями.

**Урновая схема:** Рассмотрим варианты раскладывания  $m$  предметов в 2 ящика: выберем некоторое подмножество из множества предметов и положим в первый ящик, остальные (дополнение к подмножеству) – во второй. Таким образом, число вариантов размещения предметов в двух ящиках равно числу подмножеств множества предметов:  $2^m$ .

### Размещения

Рассмотрим данную комбинаторную конфигурацию с точки зрения урновой схемы.

Пусть  $m \leq n$ . В каждый ящик кладем не более одного предмета, при этом все предметы и все ящики считаются различными.

**Решение.** Первый предмет положим любой из  $n$  ящиков. Это можно сделать  $n$  способами. Второй предмет можно положить любой из оставшихся ящиков, что можно сделать  $n-1$  способом. Третий предмет можно положить  $n-2$  способами и т.д. В итоге общее число способов размещения в  $n$  ящиках по одному предмету, выбранному из  $m$  предметов, равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Данная комбинаторная конфигурация называется *число размещений*.

Та же конфигурация с точки зрения **множества функций**:

Пусть  $m \leq n$ . Рассматривается множество инъективных функций  $F: X \rightarrow Y$ . Число таких функций равно  $A_n^m$ .

### Перестановки

При  $m=n$  число размещений  $A_n^m$  называется числом перестановок и обозначается  $P_n$ . Из формулы для числа размещений следует:

$$P_n = n!$$

### Сочетания

Рассмотрим данную комбинаторную конфигурацию с точки зрения урновой схемы.

Пусть  $m \leq n$ . В каждый ящик кладем не более одного предмета, при этом все предметы одинаковы, а все ящики считаются различными.

Для получения формулы числа сочетаний воспользуемся формулой числа размещений. Сначала будем считать все предметы различными. Тогда число их комбинаций равно  $A_n^m$ . Рассмотрим вместе с одной из комбинаций числа размещений все комбинации, когда предметы разложены в те же ящики, но в другом порядке. Число таких комбинаций равно числу перестановок из  $m$  элементов, т.е.  $m!$ . Данные комбинации различимы с точки зрения числа

размещений, но одинаковы с точки зрения числа сочетаний. Таким образом, из каждых  $m!$  размещений получаем одно сочетание. В результате получаем окончательную формулу для числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

**Замечание.** По определению считаем, что  $0!=1$ ,  $C_n^0 = 1$ .

Отметим также, что число сочетаний  $C_n^m$  равно числу подмножеств мощности  $m$  в множестве из  $n$  элементов.

Та же конфигурация с точки зрения **множества функций** интерпретируется следующим образом:

Пусть  $m < n$ . Рассматривается множество монотонных инъективных функций  $F: X \rightarrow Y$ . Число таких функций равно  $C_n^m$ .

### Сочетания с повторениями

**Пример 5.** На столе лежат яблоки, груши и апельсины. Нужно выбрать из них шесть фруктов любого вида. Сколько существует различных способов такого выбора?

**Решение.** Обозначим выбранные фрукты нулями. При этом часть нулей, расположенных слева, соответствует яблокам, в середине – грушам, справа – апельсинам. Отделять одни фрукты от других будем перегородками (единицами). Таким образом, каждой комбинации соответствует некоторая последовательность из 6 нулей и 2 единиц, например:

- 1) 00100100 – 2 яблока, 2 груши, 2 апельсина;
- 2) 01000100 – 1 яблоко, 3 груши, 2 апельсина;
- 3) 10100000 – 1 груша, 5 апельсинов;
- 4) 00000011 – 6 яблок

и т.п.

Таким образом, задача эквивалентна задаче определения числа различных последовательностей из 6 нулей и 2 единиц. Если же каждую такую последовательность рассматривать как таблицу значений характеристической функции некоторого множества, то она сводится к задаче определения числа подмножеств мощности 2 множества из 8 элементов. Решением последней задачи является число сочетаний из 8 по 2:  $C_8^2 = 28$ .

Теперь рассмотрим класс аналогичных задач в рамках **урновой схемы**.

Пусть имеется неограниченное число предметов  $m$  видов (предметы одного вида не различаются друг от друга). Нужно расположить предметы по одному в  $n$  ящиков, при этом число предметов каждого вида не ограничивается, а ящики между собой не различаются. Решение данного класса задач задается формулой:

$$V_n^m = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Если при этом допустить, что часть ящиков останется незаполненными (что эквивалентно добавлению еще одного вида «пустых» предметов), то получим следующую формулу:

$$V_n^m = C_{n-m+1}^m$$

Данная комбинаторная конфигурация называется *сочетания с повторениями*.

### Формула включений и исключений

Один из классов комбинаторных задач состоит в определении мощности объединения нескольких пересекающихся множеств. Решение таких задач осуществляется с помощью формулы включений и исключений.

Формула включений и исключений для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Формула включений и исключений для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Данные две формулы легко проверить непосредственно на диаграммах Венна.

Формула включений и исключений для  $n$  множеств:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ i_n \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Общее правило: мощности пересечений нечетного числа множеств берутся со знаком плюс, четного – со знаком минус.

**Пример 6.** В классе 25 учеников. 12 из них посещают спортивную секцию, 10 – музыкальную школу, 14 – кружки. 5 человек посещают секцию и музыкальную школу, 7 человек – музыкальную школу и кружки, 6 человек посещают спортивную секцию и кружки. 3 человека не ходят никуда. Сколько человек ходит одновременно в спортивную секцию, музыкальную школу и кружки?

**Решение.** Введем обозначения:  $U$  – множество учеников класса (универсальное множество);  $A$  – множество учеников, посещающих спортивную секцию;  $B$  – множество учеников, посещающих музыкальную школу;  $C$  – множество учеников, посещающих кружки. Из условий задачи имеем:

$$|U| = 25, |A| = 12, |B| = 10, |C| = 14, |A \cap B| = 5, |B \cap C| = 7, |A \cap C| = 6, |\overline{A \cup B \cup C}| = 3$$

Подставляя данные задачи в систему уравнений (первое уравнение – формула включений и исключений)

$$\begin{cases} |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C| \\ |A \cup B \cup C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| \end{cases}$$

и решая ее, получим:  $|A \cap B \cap C| = 4$ .

**Ответ.** 4.

### 3.3. Бином Ньютона

С комбинаторикой тесно связана известная формула бинома Ньютона:

$$(x + y)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m y^{n-m}.$$

Коэффициенты бинома  $C_n^m$  (число сочетаний из  $n$  по  $m$ ) называются также биномиальными коэффициентами.

**Доказательство:**  $(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y)\dots(x + y)}_{n \text{ раз}}$ . Пронумеруем скобки в

произведении, получим множество натуральных чисел от 1 до  $n$ :  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Рассмотрим множество  $P(A)$  всех подмножеств данного множества. Далее, раскрывая скобки в произведении, будем считать для любого  $X \in P(A)$  в соответствующих ему скобках мы выбираем сомножителем  $x$ , а для  $\bar{X}$  выбираем сомножителем  $y$ . Это не ограничивает общность формулы, так как рассматриваются *все* подмножества. В результате получаем:

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{X \in P(A)} x^{|X|} y^{n-|X|} = \sum_{m=0}^n \sum_{|X|=m} x^{|X|} y^{n-|X|} = \sum_{m=0}^n \sum_{|X|=m} x^m y^{n-m} = \\ &= \sum_{m=0}^n \left( \sum_{|X|=m} 1 \right) x^m y^{n-m} = \sum_{m=0}^n |\{X \in P(A), |X|=m\}| x^m y^{n-m} = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m y^{n-m} \end{aligned}$$

Последнее из равенств получается вследствие того, что мощность множества подмножеств, содержащих  $m$  элементов множества из  $n$  элементов равна числу сочетаний из  $n$  по  $m$  (см. выше).

Доказательство этой же формулы методом математической индукции приведено в [4].

**Треугольник Паскаля.** Биномиальные коэффициенты  $C_n^m$  часто представляют в виде треугольной таблицы, номер строки которой равен  $n$ , в строке  $m$  меняется от 0 до  $n$  слева направо:

					1									
					1		1							
				1		2		1						
			1		3		3		1					
		1		4		6		4		1				
	1		5		10		10		5		1			
	1	6		15		20		15		6		1		
1		7		21		35		35		21		7		1

и т.д. Треугольник Паскаля обладает одним замечательным свойством. Любое его число (кроме крайних) равно сумме двух соседних с ним чисел, стоящих выше него справа и слева:  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ .

Биномиальные коэффициенты часто встречаются в различных комбинаторных задачах. Для них известно большое число тождеств, доказательство ряда из которых предложено ниже в качестве упражнений.

### Задачи.

- 3.1. В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюда. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?
- 3.2. В магазине "Все для чая" есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюда и ложки?
- 3.3. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими, способами это можно сделать?
- 3.4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «МЕХМАТ»?
- 3.5. Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?
- 3.6. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?
- 3.7. Алфавит состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов можно составить?
- 3.8. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?
- 3.9. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?
- 3.10. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?
- 3.11. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «МАТЕМАТИКА»?
- 3.12. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний этой стране?
- 3.13. Сколько диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике?
- 3.14. Бусы - это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?
- 3.15. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?
- 3.16. Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?
- 3.17. Записаны числа от 1 до 1000000. Сколько цифр использовано в записи? Сколько при этом использовано цифр «0», «1», «2»?
- 3.18. Имеется шестигранная гайка и краска трех цветов. Сколько существует способов окрасить боковые грани гайки так, чтобы соседние грани были разных цветов? Две раскраски гайки не различаются, если одна из другой получается путем

поворота или переворачивания гайки. Рассмотреть два варианта: а) гайку можно только поворачивать б) гайку можно поворачивать и переворачивать.

3.19. Куб со стороной 10 см покрасили и распилили на 1000 кубиков со стороной 1 см. Сколько среди них кубиков: а) с 3 окрашенными гранями? б) с 2? в) с 1? г) неокрашенных?

3.20. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

3.21. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

3.22. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров, и каждое письма можно дать любому из курьеров?

3.23. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

3.24. Сколькими способами можно переставить буквы слова ЭПИГРАФ так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

3.25. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

3.26. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

3.27. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3.28. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

3.29. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

3.30. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

3.31. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

3.32. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по 5 человек в каждой?

3.33. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы: а) среди них был ровно один туз? б) среди них был хотя бы один туз?

3.34. Из 3 инженеров и 9 экономистов должна быть составлена комиссия из 7 человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить хотя бы один инженер?

3.35. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы 2 одинаковые цифры?

3.36. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

3.37. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторилась.

Сколькими способами он может это сделать?

3.38. 6 ящичков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящичкам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

3.39. 6 ящичков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящичкам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

3.40. Сколькими способами 12 пятак можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?

3.41. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, зеленый или синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

3.42. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем а) 12 открыток; б) 8 открыток; в) 8 различных открыток?

3.43. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

3.44. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?

3.45. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара можно разложить в 6 различных ящичков?

3.46. Сколько ожерелий можно составить из 5 одинаковых красных бусинок и двух одинаковых синих бусинок?

3.47. Сколько четных 4-значных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 5, 7 а) если каждая цифра может встречаться только один раз? б) если каждая цифра может встречаться несколько раз?

3.48. Сколько четных 5-значных чисел можно изобразить цифрами 2, 3, 4, 5, 9 а) если каждая цифра может встречаться только один раз? б) если каждая цифра может встречаться несколько раз?

3.49. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4, если а) каждая цифра может встречаться только один раз? б) каждая цифра может встречаться несколько раз?

3.50. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие 2 из которых не стоят рядом?

3.51. Сколько точек пересечения диагоналей внутри выпуклого n-угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

3.52. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

3.53. Сколько чисел, не делящихся на 3, 5, 7 в первой тысяче?

3.54. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 10 человек знают английский, 7 – немецкий, 6 – французский, 5 – английский и немецкий, 4 – английский и французский, 3 – немецкий и французский. А) сколько человек знают все 3 языка? Б) ровно 2 языка? В) только английский язык?

3.55. На каждой стороне треугольника ABC отмечены по 9 точек, разбивающих ее на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники



с вершинами в отмеченных точках, по одной на каждой стороне. Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам треугольника ABC?

3.56. Доказать следующие тождества:

$$\text{а) } \sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$$

$$\text{б) } \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m = 0$$

$$\text{в) } C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$\text{г) } C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$\text{д) } C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$$

$$\text{е) } \sum_{m=0}^n m C_n^m = n 2^{n-1}$$

$$\text{ж) } C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i}$$

## Глава 4. Алгебра логики

### 4.1. Функции алгебры логики

**Определение.** Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^2 \quad \forall x_i \in E^2, i = \overline{1, n}$ , где  $E^2 = \{0, 1\}$ , называется функцией алгебры логики или булевой функцией.

Упорядоченный набор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является элементом прямого произведения множества  $E^2$  на себя, взятого  $n$  раз:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \underbrace{E^2 \times E^2 \times \dots \times E^2}_n = (E^2)^n.$$

По теореме о мощности прямого произведения множеств:

$$\left| (E^2)^n \right| = |E^2|^n = 2^n.$$

Всякая булева функция  $n$  переменных может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все  $2^n$  наборов значений переменных, а в правой – значения функции на этих наборах:

	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$2^n$	0	0	...	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0, 0)$
	0	0	...	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$
	0	0	...	0	...	1	0	$f(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$
	0	0	...	0	...	1	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$
	0	0	...	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0, 0)$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	1	1	...	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1, 1)$

Для удобства употребляют стандартное расположение наборов, которое соответствует двоичному представлению чисел от 0 до  $2^n - 1$ .

Каждая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определяет отображение на  $E^2$ :

$$\underbrace{E^2 \times E^2 \times \dots \times E^2}_n \rightarrow E^2.$$

Обозначим множество всех булевых функций от любого числа переменных через  $P_2$ , множество всех булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, через  $P_2(n)$ :  $P_2(n) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ .

**Теорема.** Число булевых функций, зависящих от  $n$  переменных равно

$$|P_2(n)| = p_2(n) = 2^{2^n}.$$

## 4.2. Существенные и фиктивные переменные. Исключение и введение фиктивных переменных. Равенство функций

**Определение.** Функция  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  существенно зависит от переменной  $x_i$ , если существует такой набор значений  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , что

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

В этом случае переменная  $x_i$  называется существенной. Если переменная  $x_i$  не является существенной, то она называется несущественной или фиктивной.

**Определение.** Переменная  $x_i$  называется фиктивной, если для любого набора значений  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

Пусть для функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  переменная  $x_i$  является фиктивной. Тогда ее можно исключить и перейти к булевой функции  $g$ , у которой  $n-1$  переменная. Для этого в таблице функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вычеркиваем все строки, соответствующие  $x_i = 1$  (или  $x_i = 0$ ) и столбец для аргумента  $x_i$ . Полученная таблица будет определять функцию  $g$  от  $n-1$  переменных.

**Определение.** Функция  $g$  называется функцией, полученной из функции  $f$  исключением фиктивной переменной  $x_i$ .

**Определение.** Функция  $f$  называется функцией, полученной из функции  $g$  введением фиктивной переменной  $x_i$ .

**Определение.** Если одна функция получена из другой исключением или введением фиктивной переменной, то они называются равными:  $f = g$ .

Существуют два типа функций, которые не имеют существенных переменных:  $f_1 = 0$  и  $f_2 = 1$ .

**Замечание.** Если среди значений функции число 0 (1) нечетно, то фиктивных переменных нет. Обратное не верно.

**Пример.** Функция  $f(x, y)$  задана таблицей. Определить, существенными или фиктивными переменными являются  $x$  и  $y$ .

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Проверим, является ли существенной переменной  $x$ . То есть, по определению, нужно найти такое значение  $\alpha_2$  переменной  $y$ , при котором  $f(0, \alpha_2) \neq f(1, \alpha_2)$ . Сначала рассмотрим случай  $\alpha_2 = 0$ :  $f(0, 0) = f(1, 0) = 0$ . То есть условие из определения существенной переменной не выполняется. При

$\alpha_2 = 1$ :  $f(0,1) = f(1,1) = 1$ . Таким образом, при любом значении  $\alpha_2$  переменной  $y$  выполняется равенство  $f(0, \alpha_2) = f(1, \alpha_2)$ . Следовательно, по определению фиктивной переменной, переменная  $x$  является фиктивной.

Проверим переменную  $y$ . При  $\alpha_1 = 0$ :  $f(0,0) \neq f(0,1)$ . Следовательно, переменная  $y$  - существенная.

Фиктивную переменную  $x$  можно удалить из таблицы функции  $f(x, y)$ . Для этого вычеркнем из таблицы функции  $f(x, y)$  3 и 4 строки, в которых  $x = 1$ , и столбец с переменной  $x$ .

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

 $\Rightarrow$ 

$y$	$g(y)$
0	0
1	1

Функция  $g$  получена из функции  $f$  исключением фиктивной переменной  $x$ .

### 4.3. Формулы алгебры логики. Реализация функций формулами. Суперпозиция

Элементарные булевы функции от одной переменной  $f(x)$ :

$f(x) = x$  - тождественная функция,

$f(x) = \bar{x}$  - отрицание  $x$ ,

$f(x) = 0$  - константа 0,

$f(x) = 1$  - константа 1.

Значения элементарных булевых функций от одной переменной приведены в таблице.

$x$	$x$	$\bar{x}$	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Элементарные булевы функции от двух переменных  $f(x, y)$ :

$f(x, y) = x \vee y$  - дизъюнкция (логическое сложение),

$f(x, y) = x \& y$  - конъюнкция (логическое умножение),

$f(x, y) = x \oplus y$  - сложение по модулю 2,

$f(x, y) = x \rightarrow y$  - импликация (логическое следование),

$f(x, y) = x \sim y$  - эквивалентность,

$f(x, y) = x / y = \overline{x \& y}$  - штрих Шеффера,

$f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$  - стрелка Пирса.

Значения элементарных булевых функций от одной переменной приведены в таблице.

$x$	$y$	$x \vee y$	$x \& y$	$x \oplus y$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$	$x / y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

**Определение.** Суперпозицией функций  $f_1, \dots, f_m$  называется функция  $f$ , полученная с помощью подстановки этих функций друг в друга и переименованием переменных. Формулой называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Если функция  $f$  соответствует формуле  $A$ , то говорят, что формула  $A$  реализует функцию  $f$ .

Каждой формуле алгебры логики соответствуют функции, причем различным формулам могут соответствовать равные функции.

**Определение.** Функции называются равными, если на всех наборах значений переменных функции принимают равные значения.

**Определение.** Формула  $A$  эквивалентна формуле  $B$  ( $A = B$ ), если соответствующие им функции равны.

**Пример.** Записать формулу и построить таблицу для функции  $g(x, y, z) = g_4(g_3(g_2(x, y), z))$ . Здесь введены следующие обозначения:

$$g_1(x, y) = x \vee y; \quad g_2(x, y) = x \& y; \quad g_3(x, y) = x \rightarrow y; \quad g_4(x) = \bar{x}.$$

**Решение.** Формула для этой функции:  $g(x, y, z) = \overline{(x \& y) \rightarrow z}$ . Построим таблицу ее значений.

$x$	$y$	$z$	$x \& y$	$(x \& y) \rightarrow z$	$\overline{(x \& y) \rightarrow z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Среди значений функции число 1 нечетно, все ее переменные существенные.

## 4.4. Законы алгебры логики

### 1. Законы ассоциативности

1.1.  $(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$

- 1.2.  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- 1.3.  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- 1.4.  $(x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$
- 1.5.  $(x \rightarrow y) \rightarrow z \neq x \rightarrow (y \rightarrow z)$

## 2. Законы коммутативности

- 2.1.  $x \& y = y \& x$
- 2.2.  $x \vee y = y \vee x$
- 2.3.  $x \oplus y = y \oplus x$
- 2.4.  $x \sim y = y \sim x$
- 2.5.  $x \downarrow y = y \downarrow x$
- 2.6.  $x \rightarrow y \neq y \rightarrow x$

## 3. Законы дистрибутивности

- 3.1.  $(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z)$
- 3.2.  $(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$
- 3.3.  $(x \oplus y) \& z = (x \& z) \oplus (y \& z)$

## 4. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x$$

## 5. Законы де Моргана

- 5.1.  $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
- 5.2.  $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$

## 6. Свойства 0 и 1

- |                              |                                |                                   |                                 |   |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---|
| 6.1. $x \& x = x$            | 6.5. $x \vee x = x$            | 6.9. $x \oplus x = 0$             | 6.13. $x \sim x = 1$            | 6.17. $x \rightarrow x = 1$                       |
| 6.2. $x \& \overline{x} = 0$ | 6.6. $x \vee \overline{x} = 1$ | 6.10. $x \oplus \overline{x} = 1$ | 6.14. $x \sim \overline{x} = 0$ | 6.18. $x \rightarrow \overline{x} = \overline{x}$ |
| 6.3. $x \& 0 = 0$            | 6.7. $x \vee 0 = x$            | 6.11. $x \oplus 0 = x$            | 6.15. $x \sim 0 = \overline{x}$ | 6.19. $x \rightarrow 0 = \overline{x}$            |
| 6.4. $x \& 1 = x$            | 6.8. $x \vee 1 = 1$            | 6.12. $x \oplus 1 = x$            | 6.16. $x \sim 1 = x$            | 6.20. $x \rightarrow 1 = 1$                       |
|                              |                                |                                   |                                 | 6.21. $0 \rightarrow x = 1$                       |
|                              |                                |                                   |                                 | 6.22. $1 \sim x = x$                              |

## 7. Выражение для эквивалентности

$$x \sim y = x \oplus y = x \oplus y \oplus 1$$

## 8. Выражение для сложения по модулю 2

$$x \oplus y = x \& \overline{y} \vee \overline{x} \& y$$

## 9. Выражения для импликации

- 9.1.  $x \rightarrow y = \overline{y} \rightarrow \overline{x} = \overline{x} \vee y$
- 9.2.  $x \rightarrow \overline{y} = y \rightarrow \overline{x}$
- 9.3.  $x \rightarrow y = \overline{x \& \overline{y}} = \overline{x} \vee y = (x \oplus 1) \vee y$

## 10.

- 10.1.  $x \rightarrow (y \& z) = (x \rightarrow y) \& (x \rightarrow z)$
- 10.2.  $(x \& y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$

## 11. Законы поглощения

- 11.1.  $x \vee xy = x$
- 11.2.  $x \& (x \vee y) = x$
- 11.3.  $x \vee \bar{x}y = x \vee y$
- 11.4.  $\bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y$
- 11.5.  $x \& (\bar{x} \vee y) = xy$
- 11.6.  $\bar{x} \& (x \vee y) = \bar{x}y$

Для упрощения записи иногда опускают скобки. Если нет скобок, то очередность выполнения логических операций определяет следующий приоритет:

- 1.  $\bar{\quad}$
- 2.  $\&$
- 3.  $\vee$
- 4.  $\oplus$  или  $\sim$
- 5.  $\rightarrow$ .

#### 4.5. Функция, двойственная данной функции. Самодвойственная функция. Теорема двойственности. Принцип двойственности

**Определение.** Функция  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  называется двойственной функцией к функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Таблица для двойственной функции  $f^*$  при упорядоченном порядке наборов значений переменных получается из таблицы для функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  построением  $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (то есть заменой значений функции  $f$  0 на 1, 1 на 0) и переворачиванием столбца значений  $\bar{f}$ .

**Пример.**

x	y	z	$f(x, y, z)$	$\bar{f}(x, y, z)$	$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f^*(x, y, z)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

**Определение.** Если имеет место равенство  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется самодвойственной.

**Теорема двойственности.** Если

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), f_2(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mp_m})),$$

где  $x_1, \dots, x_n$  - различные переменные, входящие в наборы  $(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, (x_{m1}, \dots, x_{mp_m})$ . Тогда

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), f_2^*(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mp_m})).$$

**Принцип двойственности.** Если формула  $A = C[f_1, \dots, f_s]$  реализует функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , то формула  $C[f_1^*, \dots, f_s^*]$ , то есть формула, полученная из  $A$  заменой функций  $f_1, \dots, f_s$  соответственно на  $f_1^*, \dots, f_s^*$ , реализует функцию  $f^*(x_1, \dots, x_n)$ .

Эту формулу назовем формулой, двойственной к  $A$ , обозначим  $A^*$ .

Для формул над множеством  $P = \{0, 1, x, \bar{x}, x \& y, x \vee y\}$  принцип двойственности может быть сформулирован следующим образом: для получения формулы  $A^*$ , двойственной к формуле  $A$ , нужно в формуле  $A$  заменить 0 на 1, 1 на 0,  $x$  на  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}$  на  $x$ ,  $x \& y$  на  $x \vee y$  и  $x \vee y$  на  $x \& y$ .

#### 4.6. Разложение булевых функций по переменным. СДНФ. СКНФ

Введем обозначение:  $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$ , где  $\sigma$  - параметр, принимающий значение 0 или 1. Таким образом,

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1 \end{cases}$$

Другими словами,  $x^0 = \bar{x}$ ,  $x^1 = x$ .

Введем следующие обозначения:

$$\bigwedge_{i=1}^s x_i = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_s, \quad s \geq 1$$

$$\bigvee_{i=1}^s x_i = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_s, \quad s \geq 1$$

**Теорема о разложении функций по  $m$  переменным.** Каждую функцию алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  при любом  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \dots \sigma_m} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad \text{где}$$

дизъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных  $x_1, \dots, x_m$ .

**Следствие 1. Разложение по  $i$ -ой переменной**

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bar{x}_i \& f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i \& f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

**Следствие 2. Разложение по всем  $n$  переменным – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).**

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$$

**Теорема.** Каждая функция алгебры логики может быть выражена в виде



суперпозиции функций отрицание, дизъюнкция, конъюнкция.

Записав СДНФ для функции  $f^*$  и применив к ней принцип двойственности, получим **совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ)**:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} \left( x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \right).$$

Таким образом, в качестве средства для задания булевых функций наряду с таблицами можно использовать язык формул над множеством функций, состоящим из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

#### 4.7. Полнота системы функций. Замыкание множеств

**Определение.** Система функций  $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$  из  $P_2$  называется полной, если любая булева функция может быть записана в виде суперпозиции функций этой системы.

**Теорема, позволяющая сводить вопрос о полноте одних систем к вопросу о полноте других систем.** Пусть даны две системы функций из  $P_2$ :  $R = \{f_1, f_2, \dots\}$  и  $S = \{g_1, g_2, \dots\}$ , относительно которых известно, что система  $R$  полна, и каждая ее функция выражается в виде суперпозиции функций из  $S$ . Тогда система  $S$  является полной.

**Определение.** Пусть  $M$  - некоторое подмножество булевых функций. Замыканием  $M$  называется множество всех булевых функций, являющихся суперпозицией функций из  $M$ .

**Обозначение:**  $[M]$  - замыкание  $M$ .

**Определение.** Класс (множество)  $M$  называется замкнутым, если замыкание  $M$  равно  $M$ :  $[M] = M$ .

**Определение (второе определение полноты).**  $M$  - полная система, если  $[M] = P_2$ .

#### 4.8. Замкнутые классы: $T_0$ , $T_1$ , $S$

**Определение.**  $T_0$  - это класс всех булевых функций  $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \in P_2$ , сохраняющих константу 0, то есть функций, для которых выполняется равенство  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

**Определение.**  $T_1$  - это класс всех булевых функций  $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \in P_2$ , сохраняющих константу 1, то есть функций, для которых выполняется равенство  $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ .

**Определение.**  $S$  - класс всех самодвойственных функций.

Классы  $T_0$ ,  $T_1$  и  $S$  являются замкнутыми классами:  $[T_0] = T_0$ ,  $[T_1] = T_1$ ,  $[S] = S$ .

## 4.9. Класс монотонных функций

Введем обозначение:  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $f(\tilde{\alpha}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Определение.** Для двух наборов переменных  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  выполняется отношение предшествования  $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ , если  $\forall i \alpha_i \leq \beta_i$ .

**Определение.** Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется монотонной, если  $\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$  имеет место неравенство  $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ .

$M$  - класс всех монотонных функций. Класс  $M$  замкнут:  $[M] = M$ .

## 4.10. Полином Жегалкина. Класс линейных функций. Способы определения линейности функций

**Определение.** Полиномом Жегалкина от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется сумма по модулю 2 вида  $\sum_{(i_1 i_2 \dots i_s)} a_{i_1 i_2 \dots i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}$ . Коэффициент  $a_j = 0$  или 1.

Слагаемых в этой сумме столько, сколько подмножеств  $(i_1, \dots, i_s)$  в множестве из  $n$  чисел  $(1, 2, \dots, n)$ , то есть  $2^n$ .

Число полиномов Жегалкина от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равно  $2^{2^n}$ , то есть числу всех булевых функций от  $n$  переменных.

Полиномы Жегалкина от одной, двух и трех переменных имеют следующий вид:

$$ПЖ(x) = a_1 x \oplus a_0$$

$$ПЖ(x, y) = a_{12} xy \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_0$$

$$ПЖ(x, y, z) = a_{123} xyz \oplus a_{12} xy \oplus a_{23} yz \oplus a_{13} xz \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_0$$

**Теорема Жегалкина.** Каждая булева функция может быть выражена при помощи полинома Жегалкина, причем единственным образом.

Способы нахождения полинома Жегалкина:

- 1) законы алгебры логики;
- 2) СДНФ или СКНФ, где  $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$ ;
- 3) метод неопределенных коэффициентов.

**Определение.** Функция называется линейной, если ее можно представить в следующем виде:  $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_0$ .

**Следствие.** Функция будет линейной, если в полиноме Жегалкина нет конъюнкции.

## 4.11. Представление булевой функции в виде диаграммы

Для наглядности булеву функцию представляют в виде диаграммы. Диаграммы для констант 0 и 1 приведены на рисунке 4.1.



Рис. 4.1.

Диаграмма для функции одной переменной  $f(x)$  приведена на рисунке 4.2. Значения переменной на диаграмме приведены в скобках. Слева приведены значения функции.

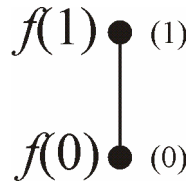


Рис. 4.2.

Диаграмма для функции двух переменных  $f(x, y)$  приведена на рисунке 4.3. Стрелками отмечено направление изменения (роста) соответствующих переменных.

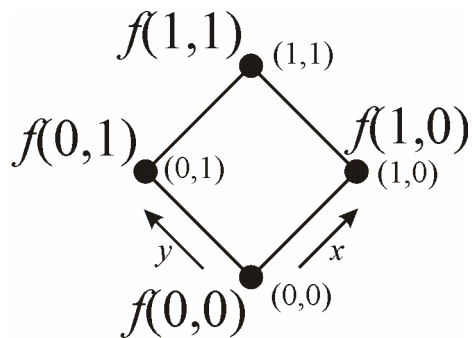


Рис. 4.3.

Диаграмма для функции трех переменных  $f(x, y, z)$  приведена на рисунке 4.4.

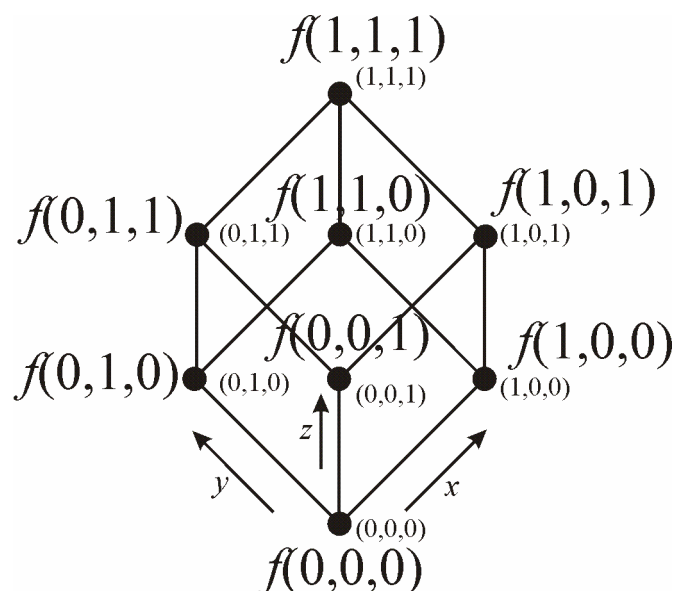


Рис. 4.4.

**Правило определения монотонности по диаграмме.** Функция является монотонной, если при прохождении диаграммы снизу вверх любыми путями не происходит нарушения монотонности.

**Правило определения линейности по диаграмме.** Чтобы определить линейность по диаграмме, необходимо сначала удалить все фиктивные переменные. Функция будет линейной, если на каждом ярусе значения одинаковые, а при переходе от яруса к ярусу значение меняется.

#### 4.12. Критерий Поста полноты системы функций. Базис полной системы функций алгебры логики

**Критерий полноты (теорема Поста).** Для того, чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась нив в одном из пяти замкнутых классов  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $L$ .

**Следствие 1.** Всякий замкнутый класс  $N$  функций из  $P_2$  такой, что он не совпадает с  $P_2$ , содержится, по крайней мере, в одном из построенных классов.

**Определение.** Класс  $R$  функций из  $P_2$  называется предполным, если  $R$  не является полным, а для любой функции  $f \in P_2$  класс  $R \cup \{f\}$  является полным. То есть предполный класс является замкнутым.

**Следствие 2.** В алгебре логики существует только пять предполных классов:  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $L$ .

**Теорема.** Из всякой полной в  $P_2$  системы функций  $P$  можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций.

**Определение.** Система функций  $\{f_1, \dots, f_s\}$  является базисом, если она полна, а всякая ее собственная система не полна.

**Теорема.** Любая полная система имеет базис, состоящий не более чем из

четырёх функций.

**Задачи.**

4.1. Функции заданы таблицей. Определить, какие переменные существенные, какие фиктивные. Удалить фиктивные переменные. Для каждой функции написать формулу, реализующую ее.

a)	x	y	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>4</sub>	б)
	0	0	1	1	1	1	x
	0	1	0	0	0	1	y
	1	0	1	1	0	0	z
	1	1	0	1	1	0	f <sub>5</sub>

	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>
	1	1
	0	0
	1	1
	0	0
	1	0
	0	1
	1	0
	0	1
	1	1
	0	0

4.2. Построить таблицу значений функций

a)  $(x \vee y) \rightarrow y$       б)  $(x \oplus y) \& (y \downarrow z)$

4.3. Записать формулу и построить таблицу для функции

a)  $g_1(x, y, z) = f_3(f_2(x, z), f_8(f_4(y, z)))$   
 б)  $g_2(x, y, z) = f_5(f_8(f_3(y, z)), f_2(z, f_1(x, y)))$

здесь введены следующие обозначения:

$f_1(x, y) = x \vee y$ ;     $f_2(x, y) = x \& y$ ;     $f_3(x, y) = x \oplus y$ ;     $f_4(x, y) = x \rightarrow y$ ;  
 $f_5(x, y) = x \sim y$ ;     $f_6(x, y) = x / y$ ;     $f_7(x, y) = x \downarrow y$ ;     $f_8(x) = \bar{x}$ .

4.4. Записать формулу и построить таблицу функции. Определить, какие переменные существенные, какие фиктивные. Фиктивные переменные удалить. Значения функций см. в задаче 4

a)  $g_1(x, y, z) = f_8(f_4(z, f_3(x, y)))$   
 б)  $g_2(x, y, z) = f_6(f_1(x, f_2(y, z)), f_8(f_4(z, x)))$

4.5. Алгебраическими преобразованиями упростить выражение

a)  $x \vee xy \vee yz \vee \bar{x}z$       б)  $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$

4.6. Выразить  $x \vee y$  через  $\&$  и  $\oplus$

4.7. Найти двойственные функции ко всем элементарным функциям.

4.8. Найти функции, двойственные данным функциям, используя принцип двойственности

$f_1 = x\bar{y} \oplus (z \vee y)$      $f_2 = \overline{(x \vee y) \oplus (x | z)}$      $f_3 = (x \sim \bar{z}) \vee (\bar{x} \oplus y)$   
 $f_4 = \overline{x \vee \bar{y}} \oplus z$      $f_5 = (x \rightarrow \bar{y}) \oplus z$      $f_6 = (z \rightarrow x) \rightarrow \bar{y}$   
 $f_7 = (x \oplus y) \rightarrow (z \rightarrow \bar{x})$      $f_8 = \overline{((x \sim y) \vee z) \rightarrow x}$   
 $f_9 = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x)$      $f_{10} = (x | y) \rightarrow (x \downarrow z)$   
 $f_{11} = ((x | y) \downarrow z) \rightarrow y$

4.9. Построить таблицу значений функций. Найти двойственные функции (по

таблице). Определить, принадлежат ли функции замкнутым классам  $T_0, T_1, S$ .  
Найти СДНФ, СКНФ

$$f_1 = xy \oplus z \quad f_2 = (x \oplus y) \sim z \quad f_3 = (x \rightarrow y) \& \bar{z}$$

$$f_4 = (x \sim \bar{z}) \oplus y \quad f_5 = (x \rightarrow \bar{y}) \& z \quad f_6 = (x \oplus z) \rightarrow \bar{y}$$

4.10. Заполнить таблицу для функций, используя диаграмму булевой функции.  
Записать полином Жегалкина (МНК).

x	y	z	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>9</sub>	f <sub>10</sub>	f <sub>11</sub>	f <sub>12</sub>
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
		$T_0$												
		$T_1$												
		S												
		M												
		L												

4.11. Дана система функций  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ . Построить таблицу функций  $f_i, (i=1, \dots, 5)$ . Определить:  $f_i \in T_0, T_1, S, M, L$ ? (с доказательством!!!).  
Заполнить таблицу Поста. Определить полноту системы функций по критерию Поста. Если система неполна, доопределить ее до полной системы одной функцией (зависящей не более, чем от двух переменных). Нельзя добавлять:  $x/y, x \downarrow y$ . Из полной системы выделить базисы

## Глава 5. Теория графов

### 5.1. Способы задания графа. Орграф. Полный граф. Дополнение графа. Надграф, подграф

Для описания строения различных систем, состоящих из взаимосвязанных элементов, часто используют графические системы, изображая элементы точками (кружками, прямоугольниками), а связи между ними – линиями, соединяющими точки. При этом получаются диаграммы вроде следующих:

В этих изображениях ни изображения точек, ни форма, ни длина линий не играют роли. Существенно лишь, какие пары точек соединены линиями. В частности, графы 6, 7, 8 изображают один и тот же граф, 3, 4, 5 – тоже.

Эти же структуры можно описать, не прибегая к графическому изображению. Для этого требуется, например, перечислить пары связанных между собой элементов. Для графа 3: (A, B), (B, E), (B, C), (C, D), (B, D), (D, E). При этом порядок элементов парах не имеет значения: (A, B) = (B, A). Такие пары называются неупорядоченными. Этот перечень пар представляет собой граф.

**Определение.** Графом называется пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  - непустое множество,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E$  - некоторое множество неупорядоченных пар элементов  $V$ ,  $E = \{\{v_i, v_j\}\}, i, j = \overline{1, n}$ .

**Определение.** Элементы множества  $V$  называются вершинами, элементы  $E$  - ребрами графа.

**Определение.** Если  $x = (u, v) \in E$ , то вершины  $u$  и  $v$  называются смежными вершинами в графе  $G$ . В этом случае вершина  $u$  и ребро  $x$  - инцидентны, так же и как вершина  $v$  и ребро  $x$ .

**Определение.** Если два различных ребра  $x, y \in E$  инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными.

**Определение.** Число вершин, смежных с данной вершиной  $u$ , называется степенью вершины  $u$ . Если степень вершины равна 0, то вершина называется изолированной. Если степень вершины равна 1, то вершина называется тупиковой.

**Определение.** Граф называется конечным, если множество  $V$  конечно.

Граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами называется  $(p, q)$ -граф.

$(1, 0)$ -граф – это тривиальный граф, изображается одной точкой.

**Определение.** Геометрическая интерпретация графа называется диаграммой.

Обычно граф представляют диаграммой и называют ее графом.

**Определение.** Граф называется помеченным или перенумерованным, если его вершины отличаются одна от другой какими-либо пометками.

#### Способы задания графа:

1. Определение графа:  $G = (V, E)$ .
2. Геометрическая интерпретация (диаграмма).
3. Матричный способ.

Граф  $G$  может быть полностью определен простым перечислением множеств  $V$  и  $E$ . Однако в большинстве случаев этот метод представления графов не позволяет быстро ответить на вопрос, обладает или не обладает граф различными свойствами. Можно также представить граф в виде в известном смысле произвольной картинке. Хотя визуальное представление иногда полезно при выявлении свойств заданного графа, оно неприменимо для больших графов и малопригодно при работе с вычислительными машинами.

**Определение.** Матрицей смежности  $A(G) = \|a_{ij}\|$ , где  $i, j = \overline{1, p}$ , помеченного графа  $G$  с  $p$  вершинами называется  $p \times p$  матрица, в которой  $a_{ij} = 1$ , если  $v_i$  и  $v_j$  смежные,  $a_{ij} = 0$ , если нет.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix}$$

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между помеченным графом  $G$  с  $p$  вершинами и симметричными бинарными  $p \times p$  матрицами с «0» на диагонали. Степень вершины  $v_i$  равна числу «1» в  $i$ -ой строке или в  $j$ -ом столбце.

**Определение.** Матрицей инцидентности  $I(G) = \|b_{ij}\|$ , где  $i = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , помеченного графа  $G$  с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами называется  $p \times q$  матрица, в которой  $b_{ij} = 1$ , если  $v_i$  и  $x_j$  смежные,  $b_{ij} = 0$ , если нет.

$$I(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \end{matrix}$$

Каждый столбец в  $I(G)$  содержит ровно две «1», и никакие два столбца не идентичны. Степень вершины  $v_i$  равна числу «1» в  $i$ -ой строке. Каждая строка равна сумме по модулю 2 всех остальных строк.

**Определение.** Вместо представления графа бинарными матрицами можно воспользоваться матрицей, в которой элементы соответствуют непосредственно меткам, приписанным вершинам графа  $G$ . В такой матрице  $i$ -ая строка содержит вектор, компонентами которого являются все вершины, смежные с вершиной  $v_i$ .



$$B(G) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**Определение.** Список ребер – это два вектора, в которых по  $q$  элементов:  $N(q)$  и  $K(q)$ .  $N_i$  - начало ребра,  $K_i$  - конец ребра. Так как ребра неориентированы, то обычно  $N_i < K_i, i = \overline{1, q}$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$N$	1	2	3	4	1	2	1
$K$	2	3	4	5	5	4	4

**Определение.** Граф называется полным, если любые две различные вершины соединены одним и только одним ребром.

В полном графе  $G$  каждая его вершина инцидентна одному и тому же числу ребер. Для задания полного графа достаточно знать число его вершин. Полный граф обозначается  $K_p$ .

Граф, не являющийся полным, можно преобразовать в полный с теми же вершинами, добавив недостающие ребра. Вершины графа  $G$  и ребра, которые были добавлены, тоже образуют граф. Такой граф называется дополнением графа  $G$  и обозначается  $\overline{G}$ .

**Определение.** Дополнением графа  $G$  называется граф  $\overline{G}$  с теми же вершинами, что и граф  $G$  и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу  $G$ , чтобы получить полный граф.

То есть две вершины в графе  $\overline{G}$  смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в графе  $\overline{G}$ .

**Определение.** Ориентированным графом (или орграфом) называется пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  - непустое множество,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E$  - некоторое множество упорядоченных пар элементов  $V$ ,  $E = \{(v_i, v_j)\}, i, j = \overline{1, n}$ .

## 5.2. Теорема о сумме степеней вершин графа. Число вершин с нечетными степенями

**Определение.** Степенью вершины  $v_i$  в графе  $G$  (обозначается  $\deg v_i = d_i$ ) называется число ребер, инцидентных  $v_i$  (или число вершин, смежных с данной вершиной  $v_i$ ). Так как каждое ребро инцидентно двум вершинам, то в

выражении  $\sum_{i=1}^p \deg v_i$  каждое ребро будет учитываться дважды. Таким образом,

приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

**Теорема.** Сумма степеней вершины графа  $G$  равна удвоенному числу ребер.

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q.$$

**Следствие.** В любом графе число вершин с нечетными степенями чётно.

5.3. Теорема о связности графа или его дополнения.  
Путь, цикл. Расстояние между вершинами. Связность.  
Матрица связности. Лемма о соотношении между числом ребер и вершин в связном графе

Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_k$  - вершины некоторого графа. При этом вершины  $v_i, v_{i+1}$  ( $i = \overline{0, k-1}$ ) являются смежными. В списке  $v_0, v_1, \dots, v_k$  вершина может встретиться несколько раз, так как выписана последовательность смежных вершин.

**Определение.** Последовательность ребер называется путем длины  $k$ , соединяющим вершины  $v_0$  и  $v_k$ , или маршрутом. Обозначается маршрут следующим образом:  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ .

**Определение.** Пусть называется простым (или цепью), если  $v_0, v_1, \dots, v_k$  - различны.

**Определение.** Циклом называется путь, в котором  $v_0 = v_k$ , и все ребра пути различны.

**Определение.** Если в цикле все вершины различны, то цикл называется простым.

**Лемма 1.** В каждом пути, соединяющем две различные вершины графа, содержится простой путь, соединяющий эти вершины.

**Лемма 2.** В каждом цикле, проходящем через некоторое ребро графа, содержится простой цикл, проходящий через это ребро.

**Лемма 3.** Если степень любой вершины графа больше или равна двум, то в нем имеется цикл.

**Определение.** Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить путем. Максимальный связный подграф графа  $G$  называется компонентой связности графа  $G$ .

Две вершины принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует соединяющий их простой путь. Таким образом, несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты связности.

**Определение.** Несвязный граф – это граф, у которого существуют, по крайней мере, две вершины, которые нельзя соединить путем.

**Утверждение (Лемма).** Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

**Теорема о числе маршрутов длины  $k$  от вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$  через матрицу смежности.** Пусть  $A$  - матрица смежности графа  $G$ , в котором  $p$  вершин. Тогда  $i, j$ -ый элемент матрицы  $A^k$  есть число маршрутов длины  $k$  от

вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$ .

**Следствие.** Маршрут от вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$  ( $i \neq j$ ) в графе  $G$  существует тогда и только тогда, когда  $D_{ij} \neq 0$ , где  $D$  - матрица порядка  $p \times p$

$$(p - \text{число вершин}): D = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1} A^k.$$

**Определение.** Матрицей связности  $C(G) = \|c_{ij}\|$ , где  $i, j = \overline{1, p}$ , помеченного графа  $G$  с  $p$  вершинами называется  $p \times p$  матрица, в которой  $c_{ij} = 1$ , если  $D_{ij} \neq 0$ ,  $c_{ij} = 0$ , если  $D_{ij} = 0$ .

**Теорема.** Граф  $G$  связный тогда и только тогда, когда  $\forall i, j, i, j = \overline{1, p}, c_{ij} = 1$ .

**Определение.** Расстоянием  $d(u, v)$  между двумя вершинами  $u$  и  $v$  графа  $G$  называется длина кратчайшего простого пути, соединяющего их.

Если  $u$  и  $v$  не соединены, то полагают, что  $d(u, v) = \infty$ . В связном графе расстояние является метрикой, то есть удовлетворяет следующим аксиомам метрики: для любых трех вершин

- 1)  $d(u, v) \geq 0$  и  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- 2)  $d(u, v) = d(v, u)$
- 3)  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

**Теорема.** Связный граф представляет собой замкнутый цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.

**Лемма 4.** Если в связном графе  $p$  вершин и  $q$  ребер, то  $q \geq p - 1$ , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда в графе нет циклов.

#### 5.4. Изоморфизм графов. Инварианты

**Определение.** Два графа  $G$  и  $H$  изоморфны ( $G \cong H$ ), если между их множествами вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

Другое **определение** изоморфных графов. Два графа  $G = (V, X)$  и  $H = (U, Y)$  изоморфны ( $G \cong H$ ), если существует взаимно-однозначное отображение  $\varphi$  множества  $V$  на множество  $U$  такое, что  $(\varphi(u), \varphi(v) \in Y)$  тогда и только тогда, когда  $u$  и  $v$  - смежные.

Отображение  $\varphi$  в этом случае называется изоморфным.

Изоморфизм – это отношение эквивалентности на графах.

**Определение.** Граф  $G$ , у которого выделена некоторая вершина  $v$ , называется корневым графом, а выделенная вершина – корнем графа.

При изоморфизме корневых графов корню должен сопоставляться корень.

Выяснить, изоморфны ли два произвольных графа, можно перебором всех взаимно-однозначных отображений множества вершин одного из них на множество вершин другого. Таких отображений  $p!$ . Даже при небольшом значении  $p$  их очень много, чтобы осуществить это практически. Для более

простой проверки на изоморфизм могут быть полезны инварианты, то есть такие характеристики графов, значения которых сохраняются при изоморфизме.

**Определение.** Инвариант графа  $G$  - это число, связанное с графом  $G$ , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном графу  $G$ .

Простейшими инвариантами графа являются число вершин, число ребер, число компонент связности, число циклов, длина циклов, спектр степеней вершин.

Полный набор инвариантов (или код графа) определяет граф с точностью до изоморфизма.

**Определение.** Подграфом графа  $G$  называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат графу  $G$ , то есть граф  $G_1 = (V_1, E_1)$  - подграф графа  $G = (V, E)$ , если  $V_1 \subseteq V$ ,  $E_1 \subseteq E$ .

**Определение.** Если граф  $G_1$  - подграф графа  $G$ , то  $G$  - надграф графа  $G_1$ .

**Определение.** Пусть  $u$  и  $v$  - две вершины графа  $G$ . Граф  $H$  - это граф  $G$  без этих двух вершин. К графу  $H$  добавляют новую вершину  $w$ , смежную с теми вершинами, с которыми были смежны вершины  $u$  и  $v$ . Построенный таким образом граф получен из графа  $G$  слиянием двух вершин.

**Определение.** Стягивание ребра  $(u, v)$  - это слияние смежных вершин  $u$  и  $v$ .

**Определение.** Граф  $G$  называется стягиваемым к графу  $H$ , если граф  $H$  получен из графа  $G$  в результате некоторой последовательности стягивания ребер.

## 5.5. Планарный граф. Грани. Теорема Эйлера о числе граней в плоском изображении графа. Следствия из теоремы Эйлера: Соотношение между числом вершин и ребер в связном планарном графе

**Определение.** Если в изображении графа нет пересечения ребер, то изображение называется правильным.

**Теорема.** Всякий конечный граф допускает правильное изображение в трехмерном евклидовом пространстве.

**Определение.** Правильное изображение графа на плоскости называется плоским изображением или плоской картой.

**Определение.** Граф, допускающий плоское изображение, называется планарным графом.

**Определение.** Всякая плоская карта определяет разбиение плоскости на связные области, называемые гранями.

**Утверждение.** Две точки принадлежать одной грани тогда и только тогда, когда их можно соединить непрерывной линией, не пересекающейся с ребрами.

**Теорема (формула Эйлера).** Пусть  $G$  - связный граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами. Число граней в любом плоском изображении графа  $r = q - p + 2$ .

**Следствие из теоремы Эйлера.** Если связный планарный граф  $G$  имеет  $p$  вершин  $p \geq 3$  и  $q$  ребер, то  $q \leq 3(p - 2)$ . Если в графе  $G$  не содержатся циклы

длины 3, то  $q \leq 2(p-2)$ .

## 5.6. Гомеоморфизм графов. Критерий Понтрягина-Куратовского планарности графа

**Определение.** Два графа называются гомеоморфными, если операцией подразделения ребер они могут быть превращены в изоморфные графы.

**Теорема (критерий Понтрягина-Куратовского планарности графа).** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

**Теорема.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

## 5.7. Дерево. Корневое дерево. Кодирование корневых деревьев

**Определение.** Дерево – это связный ациклический подграф.

Число ребер у дерева  $q = p - 1$ . Всякое дерево является планарным графом.

### План описания графа.

1. Ориентированный граф или нет?
2. Привести число вершин  $p$ , ребер  $q$ , спектр степеней вершин.
3. Является ли граф полным?
4. Существуют ли циклы длины 3 и 4? Если можно, то указать число таких циклов.
5. Связен ли граф? Если нет, то указать число компонент связности и указать вершины, принадлежащие этим компонентам связности.
6. Является ли он деревом?
7. Планарный ли граф? Если граф планарный, то привести плоскую карту. Если нет, то доказать.

**Пример 1.** Граф задан матрицей смежности. Построить диаграмму графа. На диаграмме вершины расположить по кругу, ребра нарисовать прямыми. Дать описание графа. Найти для него матрицу инцидентности, матрицу из векторов смежности и список ребер.

$A(G) =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1					1	1		1		
2				1			1		1	
3						1				1
4		1					1		1	
5	1							1		1
6	1		1							1
7		1		1					1	
8	1				1					

9		1		1			1			
10			1		1	1				

**Решение.** У графа 10 вершин. Граф является неориентированным, поскольку матрица смежности является симметричной. Диаграмма графа приведена на рисунке 5.1. Видно, что граф имеет две компоненты связности, они приведены на рисунке 5.2. Описывать граф удобнее всего по его плоской карте, которая и приведена на рисунке 5.3.

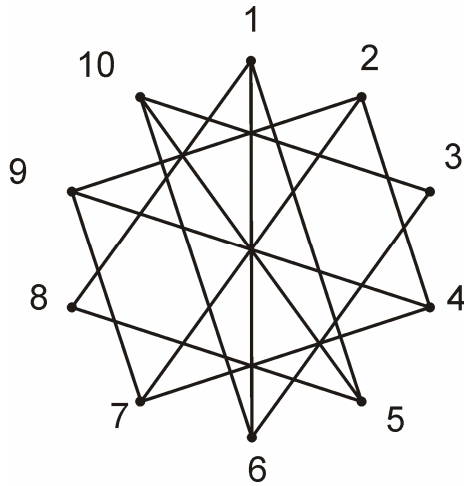


Рис. 5.1.

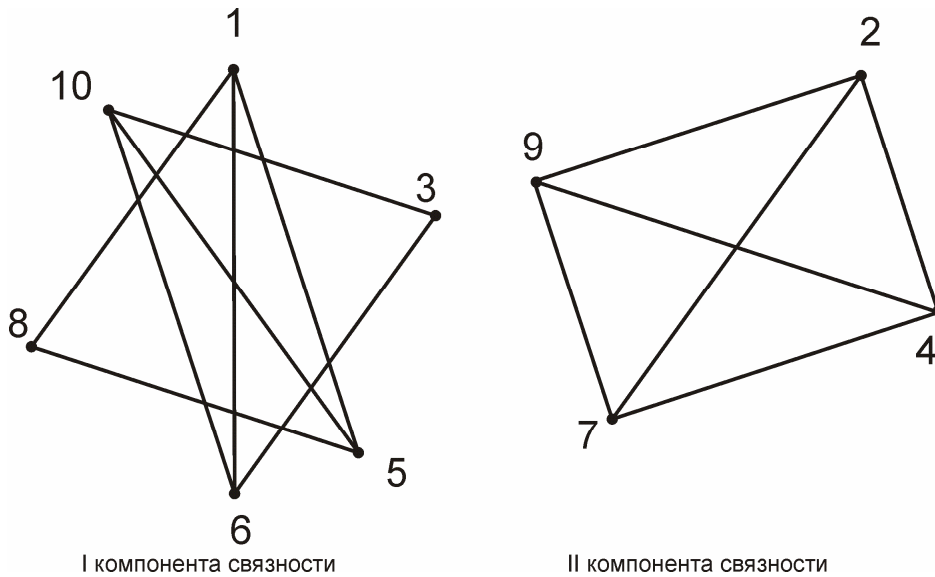


Рис. 5.2.

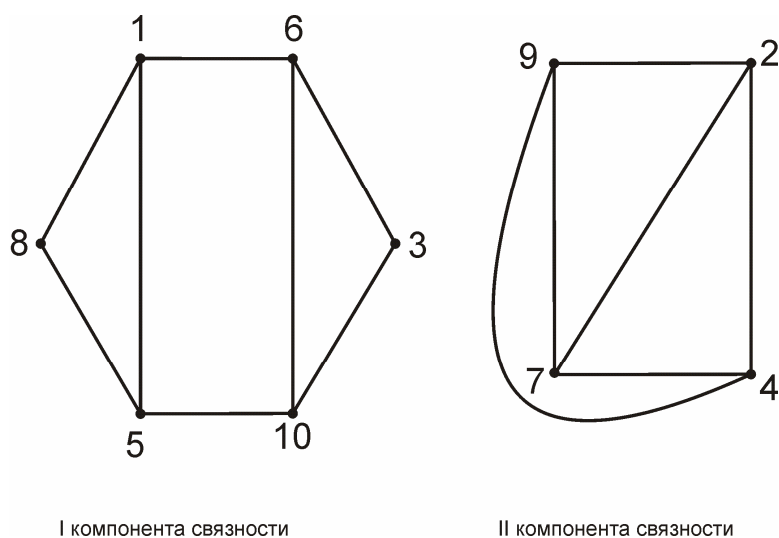


Рис. 5.3.

Дадим описание графа согласно плану.

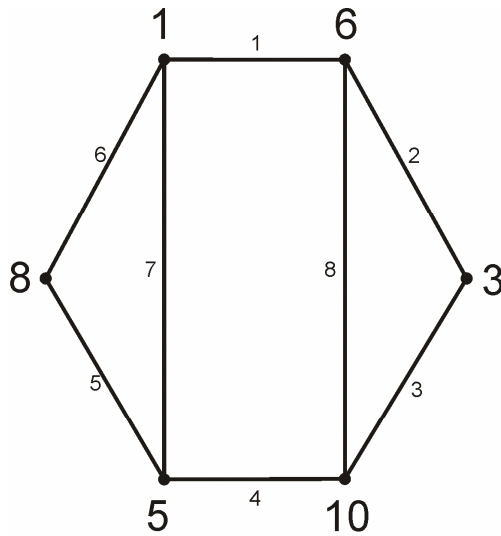
1. Граф не является ориентированным.
2. Число вершин  $p = 10$ , число ребер  $q = 14$ , спектр степеней вершин  $s = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$ .
3. Граф не является полным, т.к., например, вершины 1 и 2 не являются смежными.
4. У графа есть циклы длины 3 и 4. По плоской карте графа (рис. 3) легко определить их количество и перечислить. Циклов длины 3 в этом графе 6, они содержат вершины: (3, 6, 10), (1, 5, 8), (2, 4, 7), (2, 7, 9), (4, 7, 9), (2, 4, 9). Циклов длины 4 в этом графе 2, они содержат вершины: (1, 6, 5, 9), (2, 4, 9, 7).
5. Граф не является связным, у него две компоненты связности. Первая компонента связности содержит вершины 1, 3, 5, 6, 8, 10. Вторая компонента связности содержит вершины (2, 4, 9, 7).
6. Граф не является деревом, так как он не является связным и имеет циклы.
7. Граф является планарным, его плоская карта приведена на рисунке 3.

Далее составим для графа матрицу инцидентности. Для этого пронумеруем его ребра. Для наглядности номера ребер проставим на плоской карте графа, рисунок 5.4. Поскольку граф имеет  $p = 10$  вершин и  $q = 14$  ребер, то матрица инцидентности будет состоять из 10 строк и 14 столбцов.

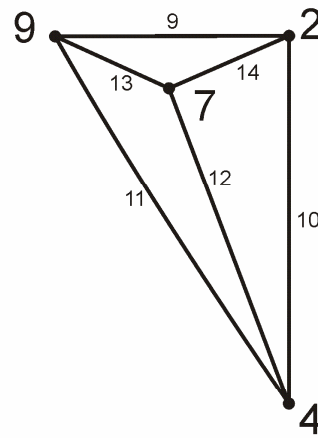
$$I(G) =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1					1	1							
2									1	1				1
3		1	1											
4										1	1	1		
5				1	1		1							
6	1	1						1						
7												1	1	1

8					1	1								
9									1		1		1	
10			1	1					1					



I компонента связности



II компонента связности

Рис. 5.4.

Составим матрицу из векторов смежности. Количество строк этой матрицы равно количеству вершин графа, то есть 10. Количество ее столбцов равно максимальной степени вершин графа, то есть 3.

$B(G) =$

1	5	6	8
2	4	7	9
3	6	10	0
4	2	7	9
5	1	8	10
6	1	3	10
7	2	4	9
8	1	5	0
9	2	4	7
10	3	5	6

Список ребер:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$N_i$	1	3	3	5	5	1	1	6	2	2	4	4	7	2
$K_i$	6	6	10	10	8	8	5	10	9	4	9	7	9	7



**Пример 2.** Даны два графа. Построить диаграммы графов. Определить, изоморфны ли графы. Если да – привести изоморфизм, если нет – привести инвариант. Определить, планарны ли графы. Если да – привести плоскую карту, если нет – доказать.

$I(G_1)$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1					-1	1		
2	-1	1						-1	
3		-1	1						-1
4			-1	1			-1		
5				-1	1				1
6					-1	1		1	

$A(G_2)$ :

	1	2	3	4	5	6
1			1			1
2						1
3		1				
4			1		1	
5	1	1				
6				1		

**Решение.** Матрица инцидентности графа  $G_1$  содержит «-1», то есть граф  $G_1$  является ориентированным. Число вершин  $p=6$ , число ребер  $q=9$ . Матрица смежности графа  $G_2$  не является симметричной, поэтому граф  $G_2$  также является орграфом. Число вершин  $p=6$ , число ребер равно суммарному количеству «1» в матрице смежности,  $q=9$ . Диаграммы графов  $G_1$  и  $G_2$  приведены на рисунке 5.5.

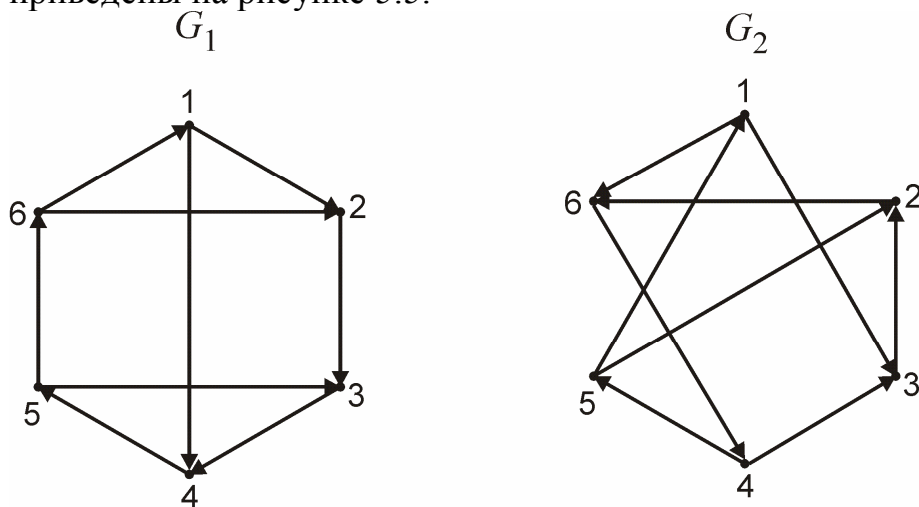


Рис. 5.5.

Граф  $G_1$  является планарным. Его плоская карта приведена на рисунке 5.6. Замечаем, что у графа  $G_1$  есть направленный цикл длины 6, содержащий вершины (1, 2, 3, 4, 5, 6). У графа  $G_2$  так же есть направленный цикл длины 6, его вершины: (1, 3, 2, 6, 4, 5). Построим диаграмму графа  $G_2$  таким образом, чтобы его вершины были расположены на окружности в том же порядке, что и в указанном цикле длины 6. Соответствующая диаграмма приведена на рисунке 5.7. Таким образом, граф  $G_2$  изоморфен графу  $K_{3,3}$ . Следовательно, граф  $G_2$  не планарен.

Графы  $G_1$  и  $G_2$  не изоморфны, так как  $G_1$  планарен, а  $G_2$  - нет. Изоморфизм – планарность.

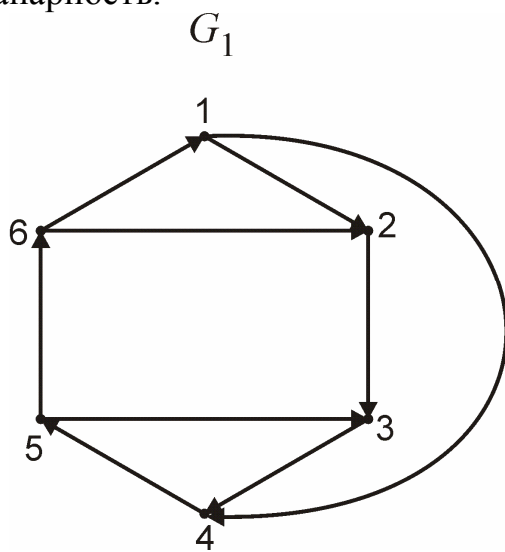


Рис. 5.6.

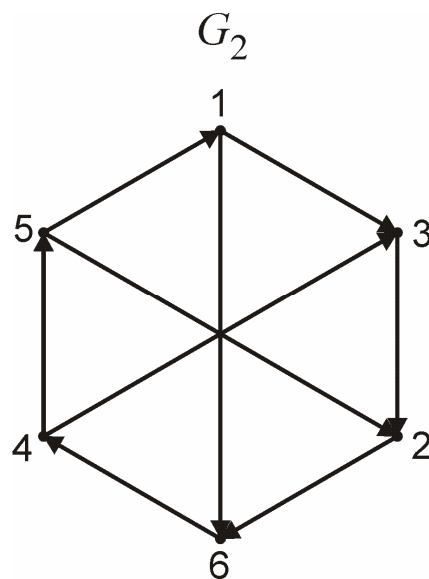


Рис. 5.7.

**Пример 3.** Связный неориентированный граф с  $p = 8$  задан списком ребер. Построить диаграмму графа. Планарный ли граф? Если да – привести плоскую карту, если нет – доказать.

Найти (построить диаграммы):

1.  $G_1$  - связный неостовный подграф.
2.  $G_2$  - подграф, порожденный множеством вершин  $S = \{1,2,3,4,5,7\}$ .
3.  $G_3$  - связный остовный подграф (не дерево).
4.  $G_4$  - остовное дерево. Для остовного дерева написать его код, выбрав в качестве корня вершину  $V = 8$ . Построить укладку дерева и найти его высоту.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$N_i$	1	4	5	1	4	1	2	3	2	2	3	6	2	3
$K_i$	4	5	8	8	8	5	8	5	3	7	6	7	6	7

**Решение.** Диаграмма графа приведена на рисунке 5.8, его плоская карта – на рисунке 5.9.

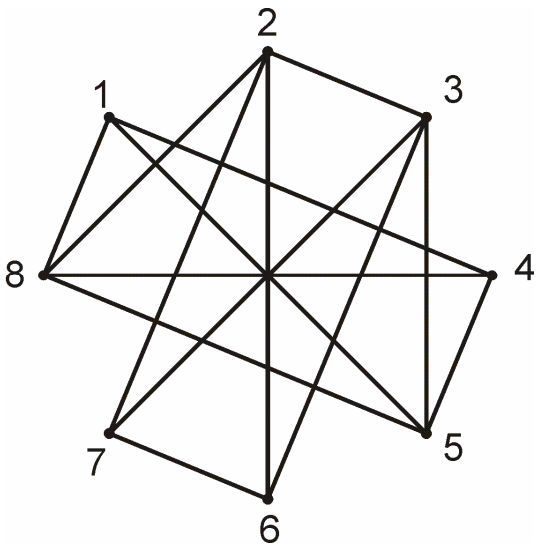


Рис. 5.8.

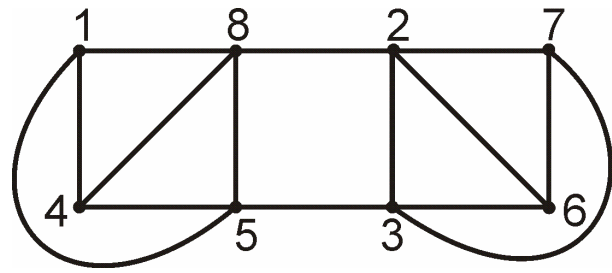


Рис. 5.9.

Построим диаграмму для связного неостовного подграфа  $G_1$ . Множества вершин и ребер подграфа  $G_1$  должны быть собственными подмножествами множеств вершин и ребер исходного графа. Например, если удалим вершину 8 и все ребра, инцидентные ей, то получим связный неостовный подграф, который приведен на рисунке 5.10. На рисунках 5.11 и 5.12 также приведены примеры связных неостовных подграфов.

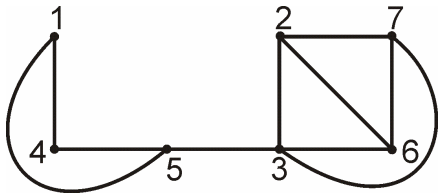


Рис. 5.10.

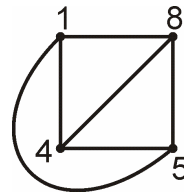


Рис. 5.11.

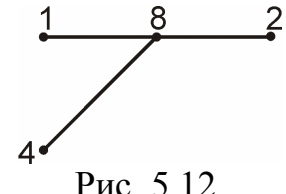


Рис. 5.12.

Построим диаграмму подграфа  $G_2$ , порожденного множеством вершин  $S = \{1,2,3,4,5,7\}$ . Для этого у графа удалим вершины 6 и 8 и все ребра, которые им инцидентны. Диаграмма подграфа  $G_2$  приведена на рисунке 5.13.

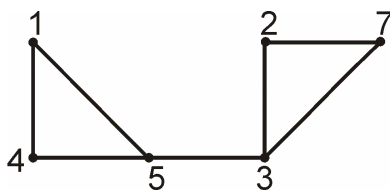


Рис. 5.13.

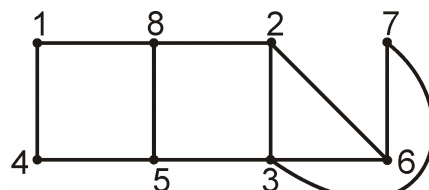


Рис. 5.14.

Связный остовный подграф (не дерево)  $G_3$  должен содержать все вершины исходного графа, а множество ребер подграфа  $G_3$  должно быть собственным подмножеством множества ребер исходного графа. При этом подграф  $G_3$  должен содержать циклы. Пример подграфа  $G_3$  приведен на рисунке 5.14.

Следующий подграф - остовное дерево  $G_4$ . Его можно получить из графа  $G_3$ , если удалить из него, например, ребра  $(4,5)$ ,  $(5,3)$ ,  $(3,7)$  и  $(3,6)$ . Диаграмма остовного дерева  $G_4$  приведена на рисунке 5.15. Его укладка с вершиной  $V = 8$  в качестве корня приведена на рисунке 5.16. Высота дерева равна 3. Код дерева: 00110100100111.

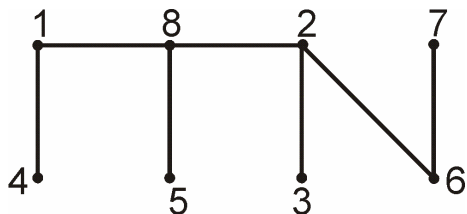


Рис. 5.15.

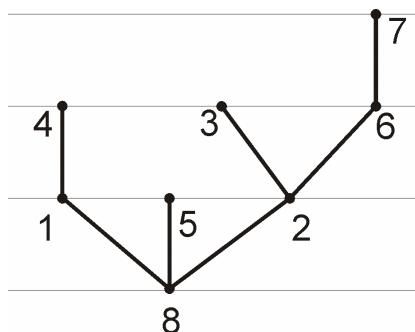


Рис. 5.16.

### Задачи

5.1. Задано множество  $M$  и отношение  $\rho$  между элементами множества. Задать граф. Построить его диаграмму. Дать его описание. Написать для него матрицы смежности, инцидентности, матрицу из векторов смежности, список ребер.

а)  $M = \{2,3,4,5,6,7,10\}$ ,  $a, b \in M$ ,  $a \rho b$ ,  $\rho$ : у  $a$  и  $b$  нет общих делителей;

б)  $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ,  $a, b \in M$ ,  $a \rho b$ ,  $\rho$ :  $a+b$  - четно,  $a \neq b$ ;

в)  $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ,  $a, b \in M$ ,  $a \rho b$ ,  $\rho$ :  $a+b$  - нечетно,  $a \neq b$ ;

г)  $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ,  $a, b \in M$ ,  $a \rho b$ ,  $\rho$ :  $a+b$  кратно 3,  $a \neq b$ .

5.2. Граф задан диаграммой (рисунки 5.17, 5.18). Построить другие диаграммы с другим указанным расположением вершин.

а)  $p = 5$

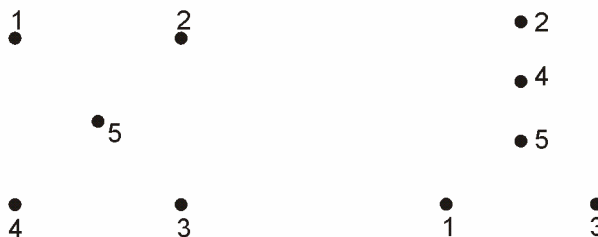
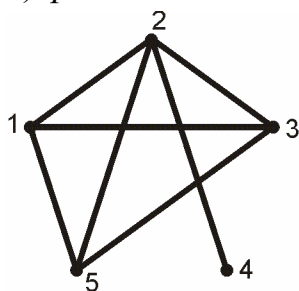


Рис. 5.17.

б)  $p = 6$

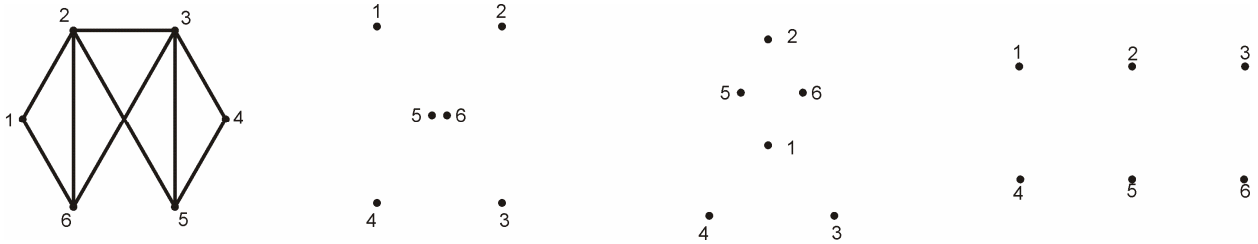


Рис. 5.18.

5.3. Граф задан матрицей инцидентности. Построить диаграмму и дать описание. Построить матрицу смежности, матрицу из векторов смежности, список ребер.

$$I(G) = \begin{array}{c|cccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & & & & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\ 2 & 1 & & & & & 1 & 1 & & 1 & & & \\ 3 & 1 & 1 & & & & & & & & 1 & 1 & \\ 4 & & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & & & & \\ 5 & & & 1 & 1 & & & & & & & 1 & 1 \\ 6 & & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & & \end{array}$$

5.4. Граф задан матрицей смежности. Построить диаграмму и дать описание. Построить матрицу инцидентности, матрицу из векторов смежности, список ребер.

$$A(G) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 1 & & & 1 & 1 \\ 2 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & & & 1 & 1 \\ 4 & & & & & & \\ 5 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & & 1 & \end{array}$$

5.5. Граф задан матрицей из векторов смежности. Построить диаграмму и дать описание. Построить матрицы смежности и инцидентности, список ребер.

$$B(G) = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 8 & 10 & 0 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}$$

8	2	6	10	0
9	1	4	5	7
10	2	6	8	0

5.6. Граф задан списком ребер. Построить диаграмму графа. Планарный ли граф? Если да – привести плоскую карту, если нет – доказать.

Найти (построить диаграммы):

1.  $G_1$  - связный неостовный подграф.
2.  $G_2$  - подграф, порожденный множеством вершин  $S = \{1,2,3,4,6\}$ .
3.  $G_3$  - связный остовный подграф (не дерево).
4.  $G_4$  - остовное дерево. Для остовного дерева написать его код, выбрав в качестве корня вершину  $V = 3$ . Построить укладку дерева и найти его высоту.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_i$	1	2	1	3	1	4	1	1	2
$K_i$	2	4	3	5	4	6	5	6	6

5.7. Найти число маршрутов длины 2 и 3 для графов  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  приведенных на рисунке 5.19. Найти для них матрицу  $C$  и матрицу связности  $D$ .

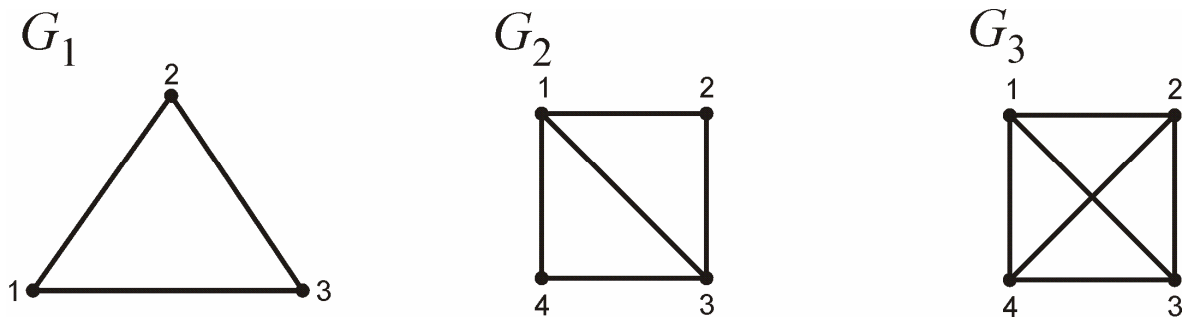


Рис. 5.19.

5.8. Для графов  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ , приведенных на рисунке 5.20, написать матрицы смежности, инцидентности, матрицу из векторов смежности, список дуг (ребер).

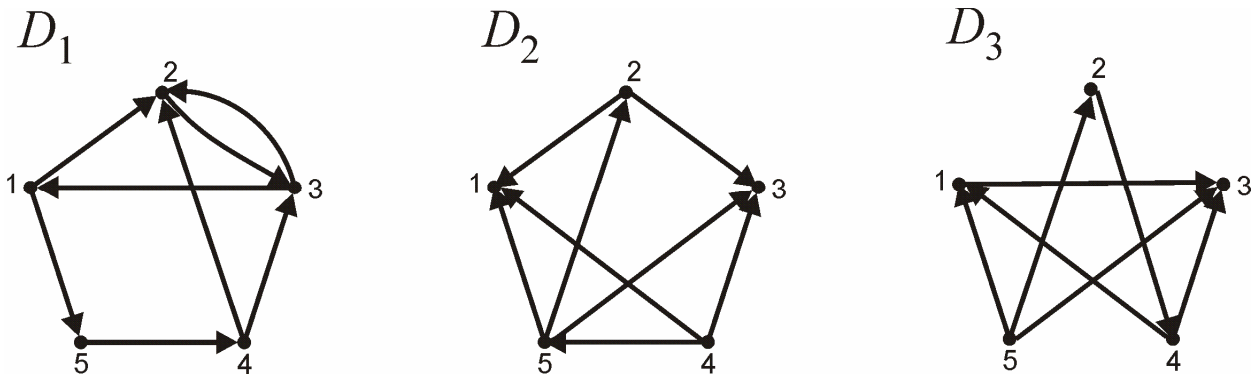


Рис. 5.20.

5.9. Даны два графа. Определить, изоморфны ли они.

а)

$A(D_1)$ :

	1	2	3	4	5
1		1			
2			1		
3	1			1	
4	1				1
5	1		1		

$I(D_2)$ :

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-1					
2		1	1	-1			
3				1	-1		1
4					1	-1	
5	-1		-1			1	-1

Построить орграф  $D_3$  из орграфа  $D_2$ , изменив направление дуги 3. Будут ли графы  $D_1$  и  $D_3$  изоморфны? Если да, написать изоморфизм.

б)

$A(D_1)$ :

	1	2	3	4	5
1		1		1	
2			1		1
3	1				
4		1			
5			1		

$I(D_2)$ :

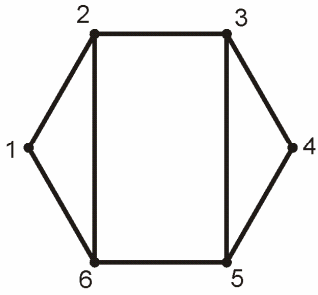
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-1	1				
2		1				-1	
3			-1	1		1	-1
4					-1		1
5	-1			-1	1		

Построить орграф  $D_3$  из орграфа  $D_2$ , изменив направление дуг 3 и 4. Будут ли графы  $D_1$  и  $D_3$  изоморфны? Если да, написать изоморфизм.

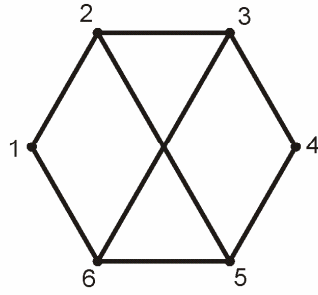
5.10. Исследовать графы на изоморфизм и планарность. Для изоморфных графов привести изоморфизм, для неизоморфных – инвариант. Для планарных графов привести плоскую карту, для непланарных – доказать.

a)

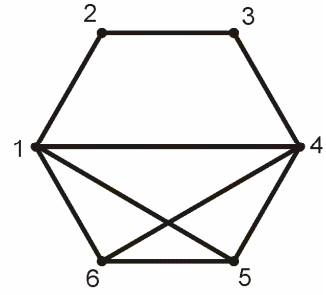
$G_1$



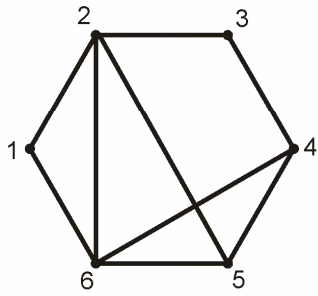
$G_2$



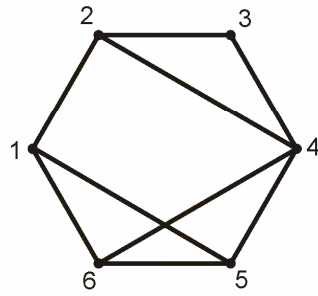
$G_3$



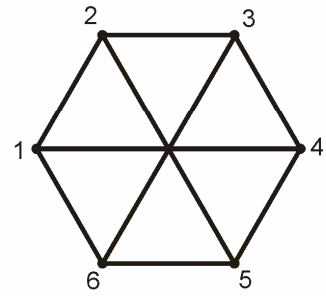
$G_4$



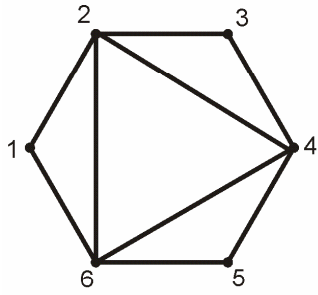
$G_5$



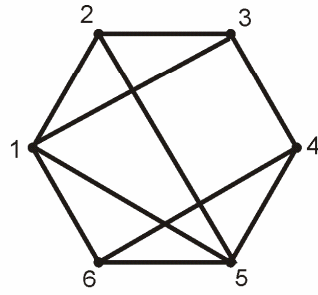
$G_6$



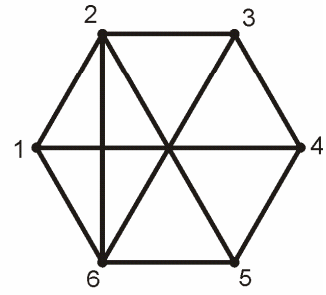
$G_7$



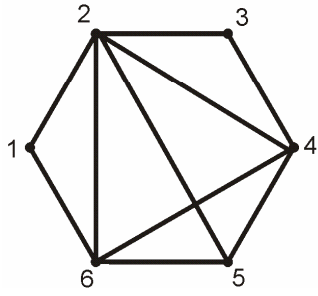
$G_8$



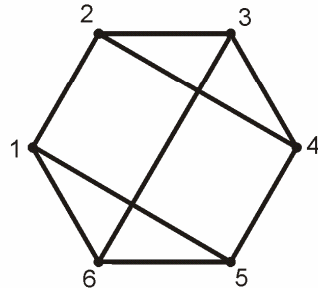
$G_9$



$G_{10}$



$G_{11}$



$G_{12}$

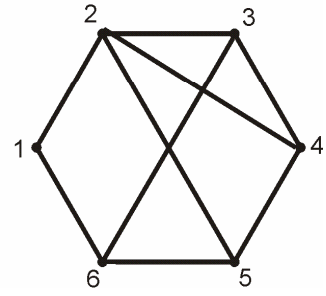
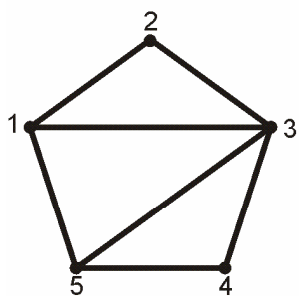


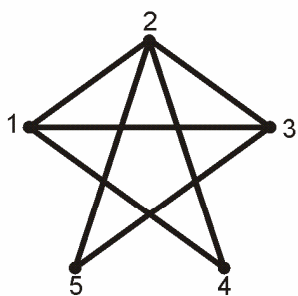
Рис. 5.21.



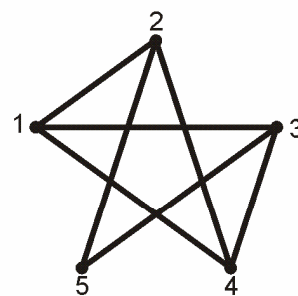
б)  $G_{13}$



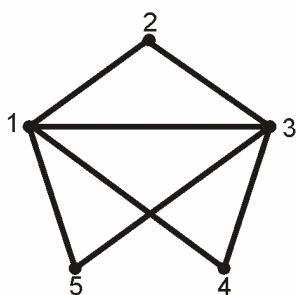
$G_{14}$



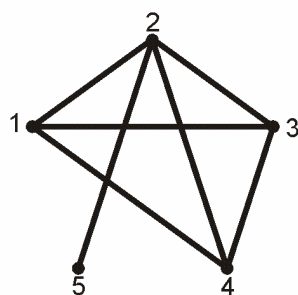
$G_{15}$



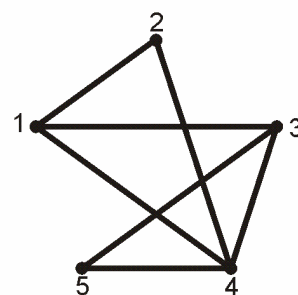
$G_{16}$



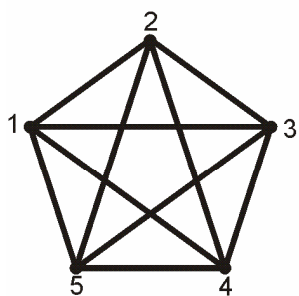
$G_{17}$



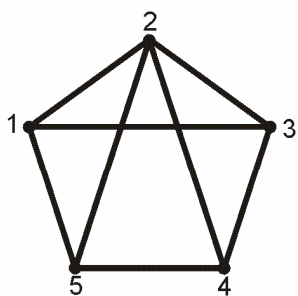
$G_{18}$



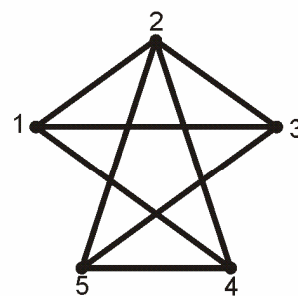
$G_{19}$



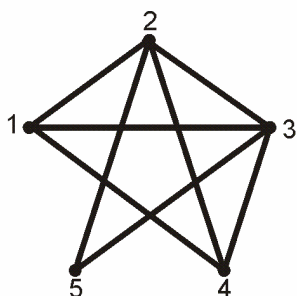
$G_{20}$



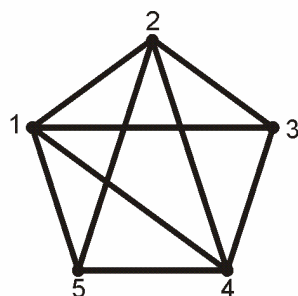
$G_{21}$



$G_{22}$



$G_{23}$



$G_{24}$

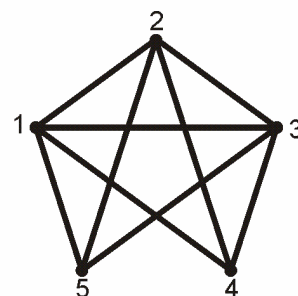
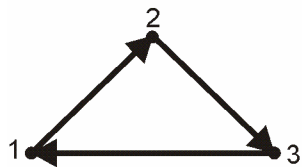
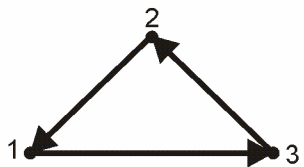


Рис. 5.22.

В)  
 $D_1$



$D_2$



$D_3$

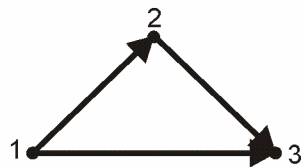


Рис. 5.23.

## Список литературы

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика // М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. Пособие.- 3-е изд., перераб.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 416 с.
3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров, изд-во «АСА», 1994. – 272 с.
4. Задания по дискретной математике. Теория множеств. Составители: В.С. Кротова, С.А. Пирогов, Д.Т. Чекмарев Практикум. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2008. – 19 с.
5. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. Пособие. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 3-е изд. М.: Физматлит, 1995.
7. Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной алгебры
8. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000, 304 с.
9. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М: Наука, 1977, 320 с.
10. Стол Р.Р. Множество. Логика. Аксиоматические теории // М.: Просвещение, 1968.
11. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики // М.:ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
12. Харари Ф. Теория графов. М. Мир, 1973.
13. Школа в "Кванте": Арифметика и алгебра: Сб. ст. Бюро "Квантум", 1994 г.
14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М: Наука, 1986.

Елена Владимировна **Павленкова**  
Дмитрий Тимофеевич **Чекмарев**

# **СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

*Электронное учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Нижегородский  
государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.