МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Необходимые требования к успешному освоению дисциплины «Алгебра» (минимально необходимый уровень)

Рекомендован методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям
010301 «Математика», 010302 «Прикладная математика и информатика»,
020301 «Математика и компьютерные науки»,
020302 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород 2019

Необходимые требования к успешному освоению дисциплины «Алгебра» (минимально необходимый уровень)
Составители: Любимцев О.В., Золотых Н.Ю. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. — 86 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Д.В. Баландин.**

Предлагаемое учебное пособие содержит необходимые теоретические сведения и набор типовых задач по началам алгебры. В основу положены материалы учебников и сборников задач, список которых приведен в конце пособия. Составлено в соответствии с программой курса алгебры, читаемого для студентов института информационных технологий, математики и механики.

Пособие издано в рамках развития НИУ «Разработка новых и модернизация существующих образовательных ресурсов».

УДК 512.54
ББК 22.144

Содержание

Введение

В данном учебно-методическом пособии приведены основные теоретические вопросы и типовые задачи по всему курсу алгебры, читаемому студентам ИИТММ. В результате изучения данного курса студент, как минимум, должен знать точные формулировки всех перечисленных в пособии основных понятий и утверждений, владеть навыками решения приведенных типовых задач. Пособие предназначено для преподавателей ИИТММ, ведущих дисциплину «Алгебра», и студентов 1–2 курсов ИИТММ, изучающих данную дисциплину. Оно может быть использовано как при подготовке к промежуточной аттестации, так и при проведении зачетов и экзаменов.

Приведем перечень основных теоретических вопросов, которые рассмотрены в данном пособии.

Первые 7 разделов представляют из себя материал первого семестра для всех направлений перечисленных выше специальностей.

Раздел 1. *Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.*

Приведен метод последовательного исключения неизвестных для систем линейных алгебраических уравнений. Рассматривается критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (в терминах ступенчатой матрицы). Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 2. *Подстановки.*

В этом разделе представлены перестановки и подстановки. Определяется группа подстановок. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 3. *Определители.*

Рассматриваются определители n-го порядка и их свойства, миноры и алгебраические дополнения, правило Крамера. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 4. *Алгебра матриц.*

Определяются операции над матрицами: сложение матриц, умножение матриц на число, умножение матриц. Вводится обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 5. *Линейная зависимость в линейных пространствах. Ранг матрицы.*

В этом разделе вводится понятие линейной зависимости векторов. Рассматриваются следующие вопросы: теорема о ранге матрицы, критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (в терминах рангов: теорема Кронекера–Капелли), однородные системы линейных уравнений и их фундаментальные системы решений. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 6. *Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.*

Приводится один из способов построения поля комплексных чисел. Рассмотрены алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, степень и извлечение корня из комплексного числа. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 7. *Кольцо многочленов от одной переменной.*

Рассмотрены следующие вопросы: определение кольца многочленов, делимость в кольце многочленов, факториальность кольца многочленов над полем, корни многочленов, многочлены с действительными коэффициентами, локализация корней (теорема Штурма). Приведен минимальный необходимый набор задач.

Разделы 8–11 представляют из себя материал второго семестра для всех направлений перечисленных выше специальностей.

Раздел 8. *Линейное (векторное пространство).*

Рассмотрены следующие вопросы: линейная зависимость, базис, размерность, подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, координаты, матрица перехода от одного базиса к другому. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 9. *Евклидовы пространства.*

Рассмотрены следующие темы: скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 10. *Унитарные пространства.*

Введеные в разделе 9 понятия переносятся на линейные пространства на полем $\mathbb{C}$. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 11. *Алгебра линейных операторов.*

В этом разделе рассматриваются линейные операторы, действия с ними, их матрицы. Определяются ядро, образ, ранг, дефект, собственные числа и векторы линейного оператора. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Раздел 12 относится к обязательной части направлений «Математика» и «Прикладная математика и информатика» в третьем семестре и предлагается в качестве специального курса для других специальностей из перечисленного выше списка.

Раздел 12. *Элементы теории групп.*

Рассмотрены следующие темы: определение группы, подгруппы, порядок элемента группы, циклические группы, теорема Лагранжа, гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Приведен минимальный необходимый набор задач.

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

В этом разделе приведен метод последовательного исключения неизвестных для систем линейных алгебраических уравнений. Рассматривается критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (в терминах ступенчатой матрицы). Приведен минимальный необходимый набор задач.

Рассмотрим произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in K$, K — произвольное поле. *Решением* системы линейных уравнений (СЛУ) называется строка n элементов поля K $(k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \in K$, такая, что при подстановке в i-е уравнение, $1 \leq i \leq m$, k_1 вместо x_1, k_2 вместо x_2,…, k_n вместо x_n получаем b_i (свободный член i-го уравнения), т. е. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i$. Таким образом, строка $(k_1, \ldots, k_n)$ является решением, если значения $k_1, \ldots, k_n$ соответственно для $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют всем m уравнениям системы.

Через X обозначим совокупность всех решений СЛУ и заметим, что $X \subseteq K^n$ (т. е. совокупность всех решений является подмножеством в множестве K^n всех строк длины n элементов из поля K). Если $X \neq \emptyset$ (т. е. система имеет решение), то система называется *совместной*. Например, однородная система линейных уравнений (ОСЛУ) всегда имеет нулевое решение, $(0, \ldots, 0) \in X \subseteq K^n$. Если система имеет только одно решение ($|X| = 1$), то система называется *определённой*. Если $|X| > 1$, то совместная система называется *неопределённой*. Основная задача исследования систем линейных уравнений заключается в описании (нахождении) множества решений $X \subseteq K^n$ (в частности, определения, к какому типу принадлежит система: несовместная, определённая, неопределённая). Две системы линейных уравнений от *одного* набора $x_1, \ldots, x_n$ неизвестных и соответственно из m и p уравнений называются эквивалентными, если их множества решений X_I и X_{II} совпадают (т. е. подмножества X_I и X_{II} в K^n совпадают, $X_I = X_{II}$).

План алгоритма, предложенного Гауссом, был весьма прост:

1) применять к системе линейных уравнений последовательно преобразования, не меняющие множество решений (таким образом мы сохраняем множество решений исходной системы), и перейти к эквивалентной системе, имеющей «простой вид» (так называемую ступенчатую форму);

2) для «простого вида» системы (со ступенчатой матрицей) описать множество решений, которое совпадает с множеством решений исходной системы.

Определение 1.1. (*элементарное преобразование* 1-*го типа*)
При $i \neq k$ к i-му уравнению системы прибавляется k-е уравнение, умноженное

на число $c \in K$ (обозначение: $(i)' = (i) + c(k)$, т. е. лишь одно i-е уравнение (i) заменяется на новое уравнение $(i)' = (i) + c(k)$). Новое i-е уравнение имеет вид

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + \ldots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k.$$

Определение 1.2. (*элементарное преобразование 2-го типа*)
При $i \neq k$ i-е и k-е уравнения меняются местами, остальные уравнения не изменяются (обозначение: $(i)' = (k)$, $(k)' = (i)$; для коэффициентов это означает следующее: для $j = 1, \ldots, n$ имеем $a'_{ij} = a_{kj}$, $b'_i = b_k$, $a'_{kj} = a_{ij}$, $b'_k = b_i$).

Для удобства в конкретных вычислениях можно применять элементарное преобразование 3-го типа: i-е уравнение умножается на ненулевое число $0 \neq c \in K$, $(i)' = c(i)$. Имеет место следующая

Теорема 1.1. *После последовательного применения конечного числа элементарных преобразований 1-го или 2-го типа к системе линейных уравнений получается система линейных уравнений, эквивалентная первоначальной.*

Определение 1.3. Под *ступенчатой системой* линейных уравнений понимается система линейных уравнений со *ступенчатой матрицей* коэффициентов, т. е.

1) все нулевые строки находятся в матрице ниже ненулевых строк;

2) если $(0, \ldots, a_{ik}, \ldots, a_{in})$, $a_{ik} \neq 0$ — первый ненулевой элемент в i-й строке (называемый лидером i-й строки), то $a_{rs} = 0$ для всех $i < r \leq m$, $1 \leq s \leq k$ (элементы $a_{rs} = 0$ для всех мест (r, s), расположенных в строчках, ниже i-й, и в столбцах $s = 1, 2, \ldots, k$). Другими словами, лидер строки с бо'льшим номером стоит строго правее.

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ступенчатый вид (выделены лидеры строк). В тоже время, матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является ступенчатой (лидер третьей строки находится не строго правее, чем лидер второй строки).

Замечание 1.1. Свойство быть ступенчатой матрицей алгоритмически (с помощью компьютера) распознаваемо.

Теорема 1.2 (Алгоритм Гаусса)**.** *Всякую систему линейных уравнений конечным числом элементарных преобразований 1-го и 2-го типов можно привести к ступенчатому виду (т. е. к системе линейных уравнений, матрица коэффициентов которой является ступенчатой матрицей).*

Следствие 1.1. *Каждую матрицу элементарными преобразованиями строк* 1*-го и* 2*-го типа можно привести к ступенчатому виду.*

Заметим теперь, что однородная система линейных уравнений всегда совместна (решением системы является нулевая строчка $(0, \ldots, 0) \in K^n$). Далее, если СЛУ содержит уравнение

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

(назовём его «экзотическим»), то система несовместна. По ненулевой ступенчатой матрице переменные $x_1, \ldots, x_n$ разобьём на две группы: главные $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$, «проходящие» через уголки ступенек (их r штук), и свободные — все остальные $n - r$ переменных (их может и не быть совсем при $r = n$).

Теорема 1.3 (критерий совместности СЛУ по её ступенчатому виду)**.**

1) *Система линейных уравнений* $(a_{ij} \mid b_i)$ *из* m *уравнений с неизвестными* $x_1, \ldots, x_n$ *совместна тогда и только тогда, когда в её ступенчатом виде нет «экзотических» уравнений (т. е. или* $r = m$*, или* $r < m$ *и свободные коэффициенты в уравнениях с* $r + 1$*-го по* m*-е равны нулю).*

2) *Для совместной системы свободным неизвестным можно придавать произвольные значения, при этом главные неизвестные однозначно определяются (при заданных значениях свободных неизвестных), тем самым мы получаем все решения СЛУ.*

Теорема 1.4 (критерий определённости СЛУ по её ступенчатому виду)**.** *Система линейных уравнений является определённой тогда и только тогда, когда в её ступенчатом виде:*

а) *нет «экзотических» уравнений (критерий совместности);*

б) $r = n$ *(т. е. все неизвестные главные, другими словами — отсутствуют свободные неизвестные).*

Следствие 1.2. *Над полем действительных чисел* $K = \mathbb{R}$ *(и над любым бесконечным полем) число решений системы линейных уравнений может быть равно 0 (несовместная система), 1 (определённая система) или* ∞ *(неопределённая система).*

Заметим при этом, что над конечным полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ из двух элементов система $x_1 + x_2 = 0$ имеет ровно два решения.

Пример 1.1.

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу коэффициентов (включая свободные):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3). К третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4). К четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-1). Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Из третьей строки вычтем вторую, затем поделим вторую строку на (-2). Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Переставим третью и четвертую строки. В результате получим матрицу ступенчатого вида, которая соответствует СЛУ, эквивалентной исходной:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В ступенчатом виде нет «экзотических» уравнений, следовательно, система совместна. По полученной ступенчатой матрице выпишем СЛУ и разобьём переменные на две группы: главные x_1, x_2, x_4, «проходящие» через уголки ступенек, и свободные x_3, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2, x_4 через x_3 и x_5:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + 3x_5, \\ x_2 = x_3 - 2x_5, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Таким образом, множество решений имеет вид

$$X = \left\{ (1 - x_3 + 3x_5,\ x_3 - 2x_5,\ x_3,\ -1,\ x_5) \mid x_3,\ x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Упражнения

1. Приведите с помощью элементарных преобразований строк данную матрицу с рациональными коэффициентами к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 \\ 6 & -12 & -3 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Матрицы в) и г) из упражнения 1 приведите к ступенчатому виду:
   а) над полем вычетов по модулю 2;
   б) над полем вычетов по модулю 3.

3. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

2. Подстановки

В этом разделе представлены перестановки и подстановки. Определяется группа подстановок. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Определение 2.1. Подстановкой степени n называется взаимно однозначное отображение множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Отображение $\varphi : M \to M$ можно рассматривать как бинарное отношение $\varphi \subseteq M \times M$, т. е. как некоторое множество упорядоченных пар, которое в данном случае удобно записывать следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

Множество всех подстановок множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ образуют группу S_n относительно произведения отображений (иногда называемой *симметрической группой*). В нижней строке $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$, поскольку φ —биекция, встречаются все элементы i, $1 \leq i \leq n$, при этом только по одному разу. Такие строчки элементов $(i_1, \dots, i_n)$, $1 \leq i_j \leq n$, где каждый элемент i_j, $1 \leq i_j \leq n$ встречается один и только один раз, называются *перестановками* элементов $1, 2, \dots, n$.

Пусть $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ — различные натуральные числа. Подстановка $\varphi \in S_n$ называется *циклом*, если $\varphi(i_1) = i_2, \varphi(i_2) = i_3, \dots, \varphi(i_k) = i_1$, а на остальных числах φ действует тождественно, т. е. $\varphi(j) = j$. Цикл φ обозначается $(i_1, \dots, i_k)$, число k называется длиной цикла φ, множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется орбитой цикла φ. Два цикла называются независимыми, если пересечение их орбит пусто. Любую подстановку можно представить в виде произведения попарно независимых циклов.

Заметим, что в S_n для $n \geq 3$ имеем

$$(12)(13) = (132) \neq (123) = (13)(12),$$

следовательно, группа S_n и любая группа S_n при $n \geq 3$ некоммутативны.

Говорят, что числа i и j в перестановке $(\dots, i, \dots, j, \dots)$ образуют инверсию, если число i расположено левее, чем j, но $i > j$. Чётность подстановки $\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right)$ определяется как чётность суммы числа инверсий в верхней строчке и числа инверсий в нижней строчке. Для определения четности произведения можно воспользоваться следующей таблицей:

σ	τ	$\sigma\tau$
ч	ч	ч
н	ч	н
ч	н	н
н	н	ч

Рассмотрим отображение $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$,

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ — четная подстановка;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечетная подстановка.} \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Если σ, $\tau \in S_n$, то:*

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

(т. е. $\sigma : S_n \to \{1, -1\}$ — гомоморфизм групп);

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}).$$

Лемма 2.2. *Если $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ — разложение подстановки $\sigma \in S_n$ в произведение транспозиций $\tau_1, \dots, \tau_k$, то $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.*

Теорема 2.1. *Чётные подстановки A_n являются группой (подгруппой в группе подстановок S_n, называемой знакопеременной группой); $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$ при $n \geq 2$.*

Пример 2.1.

Пусть

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 6 & 10 & 2 & 4 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти $(\delta\sigma)^{100}$.

Сначала находим

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 7 & 10 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (5\ 8)(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)$$

(разложение в произведение циклов с непересекающимися орбитами). Поэтому

$$(\delta\sigma)^{100} = (5\ 8)^{100}(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^{100}.$$

Так как $(5\ 8)^2$ и $(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^8$ являются тождественными подстановками, $100 = 12 \cdot 8 + 4$, то

$$(\delta\sigma)^{100} = (1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 7 & 10 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (4\ 6)(3\ 9)(2\ 10)(1\ 7).$$

Упражнения

1. Какие из следующих бинарных отношений являются подстановками:
   а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Какие из подстановок в предыдущем упражнении равны между собой? Запишите их в каноническом виде, т. е. чтобы верхняя строка была записана в порядке возрастания номеров.
3. Подберите i и j так, чтобы подстановка
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & i & 4 & 6 & j & 2 & 9 \end{pmatrix}$$
   оказалась: а) четной; б) нечетной.
4. Перемножьте подстановки σ и τ в прямом и обратном порядке. Найдите четность каждой подстановки и четность их произведения. Найдите обратные подстановки к σ и τ и разложите их на непересекающиеся циклы.
   а) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;
   б) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$. Подстановка $\tau\sigma\tau^{-1}$ называется подстановкой, *сопряжённой* с подстановкой σ (с помощью подстановки τ). Проверьте, что отношение сопряжённости является отношением эквивалентности. Соответствующее разбиение множества S_n на классы эквивалентных подстановок называется разбиением на классы сопряжённых элементов.
6. Вычислите:
   а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{11}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{101}$;
   в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{n}$.
7. Докажите, что для каждой подстановки σ степени n найдется такое целое положительное число $k \leq n!$, что $\sigma^k = e$, где e — тождественная подстановка. Наименьшее число с этим свойством называется порядком подстановки σ.
8. Вычислите порядок цикла длины k.
9. Вычислите порядок подстановки, если она разложена в произведение попарно независимых циклов длины $k_1, \ldots, k_m$.
10. Пусть $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ — попарно различные целые числа. Вычислите:
    а) $(i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)$; б) $(1 i_1)(1 i_k) \ldots (1 i_2)(1 i_1)$; в) $(i_1 i_k) \ldots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$.

3. Определители

Рассматриваются определители n-го порядка и их свойства, миноры и алгебраические дополнения, правило Крамера. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

— квадратная $(n \times n)$-матрица, $a_{ij} \in K$, где K — любое поле (например, $K = \mathbb{R}$).

При $n = 1$: $|a| = a \in K$.

При $n = 2$ мы имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. определитель (2×2)-матрицы является суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением элементов матрицы, взятых по одному (и только одному) из каждой строки (столбца), при этом знак определяется чётностью соответствующей подстановки индексов:

$$+a_{11}a_{22}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{— четная подстановка;}$$

$$-a_{12}a_{21}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{— нечетная подстановка.}$$

С этой «подсказкой» определим определитель квадратной матрицы A как

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)},$$

т. е. как сумму всех произведений элементов матрицы A, взятых по одному (и только одному) из каждой строки и каждого столбца ($a_{1\alpha(1)}$ — из 1-й строки и $\alpha(1)$-го столбца; $\dots$; $a_{n\alpha(n)}$ — из n-й строки и $\alpha(n)$-го столбца), т. е. тех произведений, индексы которых дают подстановку $\alpha \in S_n$, при этом эти произведения берутся со знаком плюс ($\epsilon(\alpha) = 1$), если подстановка α чётная, и со знаком минус ($\epsilon(\alpha) = -1$), если подстановка α нечётная.

Пример 3.1. Если $n = 3$, $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, то

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1°. *Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на* (-1).

2°. *Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.*

3°. *Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.*

Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов — на строки называется *транспонированием* матрицы. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то транспонированная с ней матрица

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

4°. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.*

5°. *Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.*

Определение определителя

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)},$$

как суммы $n!$ слагаемых-произведений плохо пригодно для реальных вычислений при больших n.

Определение 3.1. *(Дополнительные миноры и алгебраические дополнения)* Зафиксируем элемент a_{ij} квадратной $(n \times n)$-матрицы $A = (a_{ij})$. Вычёркивая в определителе $|A|$ i-ю строку и j-й столбец (проходящие через a_{ij}), получаем определитель M_{ij} матрицы порядка $(n-1) \times (n-1)$, называемый (дополнительным) минором элемента a_{ij}. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 3.1. *(Разложение определителя по i-й строке и по j-му столбцу, $1 \leq i, j \leq n$).*

$$1) \quad |A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \left(= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \right);$$

$$2) \quad |A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \right).$$

Пример 3.2. Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

а) По определению,

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -18.$$

б) Разлагая по первой строке, получаем

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

в) Используя элементарные преобразования строк, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

и мы пришли к треугольному виду. При этом мы применяли только преобразования 1-го типа, не меняющие определитель (свойство 5° определителя). Следовательно, $\Delta = -18$.

Теорема 3.2. *(Теорема Лапласа.) Если M — минор (т. е. определитель матрицы), проходящий через k строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, $k \geq 1$, то дополнительный минор $\overline{M}$ определяется как определитель, получаемый вычёркиванием строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Алгебраическое дополнение минора M определяется следующим образом:*

$$A(M) = (-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)}\overline{M}.$$

Если $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $1 \leq k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k$ — фиксированные номера k строк, то определитель $|A|$ равен сумме всех произведений $MA(M)$, где M пробегает все C_n^k миноров, проходящих через строки с номерами $i_1, \ldots, i_k$.

Частным случаем теоремы Лапласа является теорема о разложении по строке ($k = 1$).

Теорема 3.3. *(Правило Крамера.) Для квадратной системы линейных уравнений* $(a_{ij} \mid b_i)$ *с* $(n \times n)$*-матрицей* $A = (a_{ij})$ *имеем:*

1) *система является определённой тогда и только тогда, когда* $|A| \neq 0$*;*

2) *в этом случае (т. е. если* $|A| \neq 0$*) это единственное решение* $(k_1, \ldots, k_n)$ *имеет следующий вид для* $j = 1, \ldots, n$*:*

$$k_j = \frac{D_j}{D},$$

где

$$D = |A|, \quad D_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \mathbf{b_1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & \mathbf{b_n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь D_j *— определитель* n*-го порядка, получающийся из определителя* D *матрицы* A *коэффициентов системы заменой* j*-го столбца столбцом свободных членов.*

Следствие 3.1. *Если квадратная система линейных уравнений (*n *уравнений с* n *неизвестными) не имеет решения, то определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Следствие 3.2. *Если квадратная система линейных уравнений (*n *уравнений с* n *неизвестными) имеет более чем одно решение, то определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Следствие 3.3. *Однородная квадратная система линейных уравнений (*n *уравнений с* n *неизвестными) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Пример 3.3.

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Вычислим соответствующие определители:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

Применив формулу из пункта 2) теоремы 3.3, получаем:

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

Упражнения

1. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение
   а) $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус;
   б) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.
2. а) Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

   б) разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

4. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

а) $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

4. Алгебра матриц

Определяются операции над матрицами: сложение матриц, умножение матриц на число, умножение матриц. Вводится обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Через $M_{m,n}(K)$ обозначим совокупность всех прямоугольных матриц над полем K фиксированного размера $m \times n$ (для краткости обозначения, $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ — совокупность всех квадратных $(n \times n)$-матриц). Для $M_{m,n}(K)$ определены операции *сложения* матриц

$$C = A + B \qquad (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{для каждого места } (i,j))$$

и *умножения матрицы на число* $c \in K$

$$D = cA \qquad (d_{ij} = ca_{ij} \quad \text{для каждого места } (i,j)).$$

Отметим, что для $M_{m,n}(K)$ непосредственно проверяется выполнение всех аксиом линейного пространства (в частности, нейтральным элементом в $M_{m,n}(K)$ будет нулевая матрица 0 с нулями на всех местах, $-A = (-1)A$).

Если $A = (a_{ij}) \in M_{r,m}(K)$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ то мы определим их *произведение*

$$AB = U = (u_{ij}) \in M_{r,n}(K),$$

полагая

$$u_{is} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ks}$$

(т. е. элемент матрицы AB, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца получается «умножением» i-й строки (длины m) матрицы A на j-й столбец (длины m) матрицы B). Таким образом, условие возможности перемножить две прямоугольные матрицы A и B заключается в том, что *длина строк левого множителя A совпадает с длиной столбцов правого множителя B.*

Пример 4.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -8 \\ 1 & -5 & -2 \\ 9 & 15 & 22 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) $A + B = B + A$;

2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

3) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

4) $(AB)C = A(BC)$;

5) $A(B + C) = AB + AC$.

Определение 4.1. Пусть $A \in M_n(K)$ — квадратная матрица. Будем говорить, что матрица $B \in M_n(K)$ является *обратной* к A, если $AB = E = BA$, где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Теорема 4.1. *(об обратной матрице) Пусть $A \in M_n(K)$ — квадратная $(n \times n)$-матрица. Тогда*

1) *обратная матрица $B = (b_{ij}) = A^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$;*

2) *в этом случае $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$ (формула для элемента обратной матрицы);*

3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

возможна матричная запись $AX = B$, где $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$-матрица коэффициентов,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

— столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

— столбец свободных членов. Таким образом, строка $(k_1, \ldots, k_n)$ является решением системы линейных уравнений, если столбец

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

является решением матричного уравнения

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Вычислить произведение матриц:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$;

   в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

   г) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

   д) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

   е) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

   ж) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

   з) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

2. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

4. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$;

д) $X \cdot \begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$.

5. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A+B)^t = A^t + B^t$;
б) $(AB)^t = B^t A^t$;
в) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

6. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *ортогональной*, если $AA^t = E$, где E — единичная матрица. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

5. Линейная зависимость в линейных пространствах. Ранг матрицы

В этом разделе вводится понятие линейной зависимости векторов. Рассматриваются следующие вопросы: теорема о ранге матрицы, критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (в терминах рангов: теорема Кронекера-Капелли), однородные системы линейных уравнений и их фундаментальные системы решений. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Определение 5.1. Пусть V_K — линейное пространство над полем K. Система элементов $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ называется *линейно зависимой*, если найдутся элементы $k_1, \ldots, k_r \in K$ такие, что

а) не все k_i равны нулю (т. е. хотя бы один элемент k_i отличен от нуля);

б) $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$.

Система элементов $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой, из равенства $k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r = 0$, $k_1, \ldots, k_r \in K$, следует, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Пусть K — поле (например, $K = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел). Рассмотрим $K^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\}$ — совокупность всех упорядоченных строк $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длины n элементов α_i, $i = 1, \ldots, n$, поля K. На множестве K^n определены следующие операции.

1) *Сложение строк* (бинарная операция): если
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K^n,$$
то
$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

2) Для каждого элемента $\lambda \in K$ (унарная) операция *умножение строк на элемент* $\lambda \in K$: если
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n,$$
то
$$\lambda\alpha = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Теорема 5.1. *Множество K^n строк длины n элементов поля K с операцией сложения и с операциями умножения на элементы λ поля K является линейным пространством над полем K.*

Аналогично вводится линейное пространство столбцов $\hat{K}^n$ над полем K.

Система строк $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in K^n$, где

$$\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$

$$\ldots$$

$$\epsilon_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

линейно независима. Любая строка $\alpha = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$ является линейной комбинацией элементов $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, а именно, $\alpha = (k_1, \ldots, k_n) = k_1\epsilon_1 + \ldots + k_n\epsilon_n$. Для системы строк в K^n

$$\alpha_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}),$$

$$\ldots$$

$$\alpha_r = (a_{r1}, \ldots, a_{rn})$$

вопрос о её линейной зависимости равносилен существованию ненулевого решения $(k_1, \ldots, k_r)$ следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

с транспонированной матрицей A^t, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots\ldots & \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, метод Гаусса даёт нам в этом случае алгоритмическое решение задачи о линейной зависимости строк.

Пусть S — система векторов линейного пространства V_K. Подсистема $v_1, \ldots, v_r \in S$ называется *максимальной линейно независимой подсистемой* в S, если:

1) $v_1, \ldots, v_r$ — линейно независимая система;

2) $v_1, \ldots, v_r, v$ — линейно зависимая система для всякого $v \in S$,

   или, что эквивалентно,

2′) любой элемент $v \in S$ является линейной комбинацией элементов $v_1, \ldots, v_r$.

Максимальная линейно независимая подсистема $v_1, \ldots, v_r$ в $S = V_K$ (если в V_K существует такая конечная система) называется *базисом* линейного пространства V_K. Линейное пространство V_K с конечным базисом $v_1, \ldots, v_r$ называется *конечномерным* линейным пространством (при этом любой другой базис линейного пространства содержит то же самое число элементов).

Теорема 5.2. *Для системы $S \subseteq V_K$, где V_K — конечномерное линейное пространство, любые две (конечные) максимальные линейно независимые подсистемы содержат одинаковое число элементов $r(S)$, называемое рангом системы S.*

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ — прямоугольная $(m \times n)$-матрица с элементами $a_{ij} \in K$. Определитель $M_{i1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_k}$ квадратной $(k \times k)$-матрицы, состоящей из элементов на пересечении k строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, называется минором k-го порядка матрицы A. Наивысший порядок ненулевого минора матрицы A обозначим через $r(A)$.

Теорема 5.3. *(о ранге матрицы). Следующие четыре числовые характеристики матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ совпадают:*

1) $r(A_1, \ldots, A_m)$ *(ранг системы строк, в K^n);*

2) $r(\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_n)$ *(ранг системы столбцов, в $\hat{K}_n$);*

3) $r(A)$ *(наивысший порядок ненулевого минора);*

4) *число ненулевых строк r в ступенчатом виде $\overline{A}$ матрицы A.*

Это совпадающее число называется рангом матрицы A и обозначается через $r(A)$.

Ненулевая матрица $A \in M_{m,n}(K)$ имеет *главный ступенчатый вид*, если матрица A имеет ступенчатый вид, все лидеры ненулевых строк $a_{1s_1}, a_{2s_2}, \ldots, a_{rs_r}$ $(1 \leq s_1 < \ldots < s_r \leq n)$ равны 1 и для каждого j, $1 \leq j \leq r$, в s_j-м столбце матрицы A единственный ненулевой элемент — это $a_{js_j} = 1$. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет главный ступенчатый вид, а матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ступенчатый вид (выделены лидеры строк), но не главный ступенчатый вид. Любая ненулевая матрица $A \in M_{m,n}(K)$ с помощью элементарных преобразований строк 1-го, и 2-го типа (см. определения 1.1 и 1.2) может быть приведена к главному ступенчатому виду.

Пример 5.1. Найти какую-либо максимальную линейно независимую подсистему строк в системе $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$,

$$a_1 = (-1, 4, -3, -2), \quad a_2 = (3, -7, 5, 3),$$

$$a_3 = (3, -2, 1, 0), \quad a_4 = (-4, 1, 0, 1),$$

а остальные строки выразить как линейные комбинации строк этой подсистемы.

Записываем строки a_1, a_2, a_3, a_4 как столбцы и приводим полученную матрицу к главному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем номера столбцов в ступенчатом виде, проходящие через уголки ступенек: 1, 2. Поэтому $\{a_1, a_2\}$ является максимальной линейно независимой подсистемой. Кроме этого, $a_3 = 3a_1 + 2a_2, a_4 = -5a_1 - 3a_2$; ранг системы строк a_1, a_2, a_3, a_4 равен 2.

Теорема 5.4. *(Теорема Кронекера–Капелли: критерий совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц).*

Пусть $(a_{ij} \mid b_i)$ — система m линейных уравнений с n неизвестными, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ — матрица коэффициентов,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

— расширенная матрица системы линейных уравнений.

а) *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы $A' = (A, \hat{b})$, $r(A) = r(A')$.*

б) *Система линейных уравнений определённая тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A') = n$.*

Отметим теперь, что совокупность решений $X_{\text{одн}}$ однородной системы линейных уравнений с матрицей $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ является линейным пространством, подпространством в K^n.

Теорема 5.5. *Если $r = r(A) < n$, то $\dim X_{\text{одн}} = n - r$ (т. е. размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных). Таким образом, если $r(A) = n$, то система линейных уравнений имеет лишь нулевое решение.*

Любой базис линейного пространства решений $X_{\text{одн}}$ однородной системы линейных уравнений называется в ряде алгебраических текстов «фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений».

Пример 5.2. Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По полученной ступенчатой матрице выпишем ОСЛУ и разобьём переменные на две группы: главные x_1, x_2, x_4, «проходящие» через уголки ступенек, и свободные x_3, x_5. Таким образом, размерность пространства решений ОСЛУ равна двум.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2, x_4 через x_3 и x_5:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5, \\ x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5, \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5. \end{cases}$$

Таким образом, множество решений имеет вид

$$X = \left\{ (-x_3 + \frac{7}{6}x_5, x_3 + \frac{5}{6}x_5, x_3, \frac{1}{3}x_5, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Далее свободным переменным придаются любые, одновременно не равные нулю значений и из зависимости между свободными и главными переменными находятся значения остальных переменных. Придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_3 = 0, x_5 = 6$, получим первый вектор из ФСР: $\overline{x_1} = (7, 5, 0, 2, 6)$. Если $x_3 = 1, x_5 = 0$, то $\overline{x_2} = (-1, 1, 1, 0, 0)$. Эти два вектора образуют один из базисов пространства решений $X_{\text{одн}}$ заданной ОСЛУ.

Упражнения

1. Найти ранг следующих матриц с помощью окаймления миноров и элементарных преобразований:
   а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти значения λ, при которых матрица
   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
   имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?
3. Чему равен ранг матрицы
   $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$
   при различных значениях λ?
4. Найти вектор x из уравнения
   а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0$, где
   $$a_1 = (5, -8, -1, 2), \quad a_2 = (2, -1, 4, -3), \quad a_3 = (-3, 2, -5, 4).$$
   б) $3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x)$, где
   $$a_1 = (2, 5, 1, 3), \quad a_2 = (10, 1, 5, 10), \quad a_3 = (4, 1, -1, 1).$$
5. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:
   а) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$.
   б) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$.

6. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$:
а) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, \lambda)$.
б) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, 9, \lambda)$.
7. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:
а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$
8. С помощью теоремы Кронекера—Капелли исследовать системы линейных уравнений на совместность и определенность:
а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

6. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел

Приводится один из способов построения поля комплексных чисел. Рассмотрены алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, степень и извлечение корня из комплексного числа. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел (a, b). Два комплексных числа (a, b) и (c, d) *равны* тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$. На множестве всех комплексных чисел $\mathbb{C}$ определены операции сложения и умножения по правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1}$$

Относительно введенных операций множество $\mathbb{C}$ образует поле. В частности, операции обладают следующими свойствами:

- ассоциативность:

$$(a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big) = \big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f),$$
$$(a, b) \cdot \big((c, d) \cdot (e, f)\big) = \big((a, b) \cdot (c, d)\big) \cdot (e, f);$$

- коммутативность:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b);$$

- дистрибутивность:

$$(a, b) \cdot \big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$

Нулем называется такое комплексное число (x, y), что для произвольного числа (a, b) выполняется равенство

$$(a, b) + (x, y) = (a, b).$$

Из определения получаем $a + x = a$, $b + y = b$, откуда $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, нулем является пара $(0, 0)$ (и только она).

Числом *противоположным* к (a, b) называется такая пара (x, y), что

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0).$$

Противоположное число обозначается $-(a, b)$. Нетрудно видеть, что $-(a, b) = (-a, -b)$.

Разностью (или числом, полученным в результате *вычитания*) комплексных чисел (c, d) и (a, b) называется решение (x, y) уравнения

$$(a, b) + (x, y) = (c, d).$$

Разность обозначается $(c, d) - (a, b)$ и, очевидно, равна $(c - a, d - b)$. Легко видеть, что разность $(c, d) - (a, b)$ есть сумма (c, d) и числа, противоположного к (a, b), т. е. $(c, d) - (a, b) = (c, d) + [-(a, b)]$.

Единицей называется такое комплексное число (x, y), что для произвольного числа (a, b) выполняется равенство

$$(a, b)(x, y) = (a, b).$$

Из определения произведения получаем

$$\begin{cases} ax - by = a, \\ bx + ay = b. \end{cases}$$

В случае, если $a^2 + b^2 \neq 0$, т. е. $(a, b) \neq (0, 0)$, имеем единственное решение предыдущей системы: $x = 1$, $y = 0$. Таким образом, $(a, b)(1, 0) = (a, b)$ для любого (a, b) в том числе, как нетрудно проверить, и для $(a, b) = (0, 0)$. Следовательно, $(1, 0)$ — единица.

Числом *обратным* к (a, b) называется такая пара (x, y), что

$$(a, b)(x, y) = (1, 0).$$

Обратное число обозначается $(a, b)^{-1}$. Система

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

в случае, когда $(a, b) \neq (0, 0)$, имеет единственное решение

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \ -\frac{b}{a^2 + b^2} \right), \tag{2}$$

а в случае $(a, b) = (0, 0)$ — неразрешима.

Частным от деления (или числом, полученным в результате деления) комплексных чисел (c, d) и (a, b) называется решение (x, y) уравнения

$$(a, b)(x, y) = (c, d).$$

Частное обозначается $(c, d)/(a, b)$. Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases} \tag{3}$$

Домножая первое уравнение на a, второе — на b и складывая, получаем: $(a^2+b^2)x = ac+bd$, затем, домножая первое уравнение системы (3) на b, второе — на a и вычитая первое из второго, получаем: $(a^2 + b^2)y = ad - cb$. В случае $a^2 + b^2 \neq 0$ имеем:

$$\frac{(c, d)}{(a, b)} = \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \ \frac{ad - cb}{a^2 + b^2} \right), \tag{4}$$

если же $a^2 + b^2 = 0$, то результат деления, как легко видеть из (3), не определен. Сравнивая (2) и (4), получаем, что частное $(c, d)/(a, b)$ есть произведение (c, d) на величину, обратную к (a, b): $(c, d)/(a, b) = (c, d) \cdot (a, b)^{-1}$.

Отождествим комплексные числа вида $(a, 0)$ с действительными числами. А именно, положим $(a, 0) = a$. Из правил сложения и умножения комплексных чисел следует, что

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

для любых a, b. Таким образом, результаты выполнения арифметических операций над числами такого вида не зависят от того, как эти результаты были получены: по правилам сложения и умножения комплексных чисел, рассмотренным в данном разделе, или по законам действительных чисел. Обозначим $i = (0, 1)$. Число i называется *мнимой единицей*. Легко проверить, что $(0, b) = (b, 0) \cdot i = bi$ и, следовательно, $(a, b) = a + bi$.

Запись $a + bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа* (a, b). Ее использование освобождает нас от заучивания правил арифметических операций (1): легко проверить, что $i^2 = -1$, поэтому ***работать с комплексными числами можно как с алгебраическими двучленами, зависящими от символа*** i***, с заменой, где необходимо,*** i^2 ***на*** -1. Например, для нахождения произведения $(a+bi)(c+di)$ раскроем скобки и получим $ac+adi+bci+bdi^2$. Так как $i^2 = -1$, то

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad - bd)i.$$

Для нахождения частного $(c + di)/(a + bi)$ домножим числитель и знаменатель дроби на число $a - bi$, называемое *сопряженным* к $a + bi$, получим:

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$$

Результат согласуется с (4).

Пример 6.1.

1) $(4+i)(5+3i)+(3+i)(3-2i) = 4\cdot5+4\cdot3i+i\cdot5+i\cdot3i+3\cdot3+3\cdot(-2i)+i\cdot3+i\cdot(-2i) = 20+12i+5i+3i^2+9-6i+3i-2i^2 = 20+12i+5i-3+9-6i+3i+2 = 28+14i$;

2)

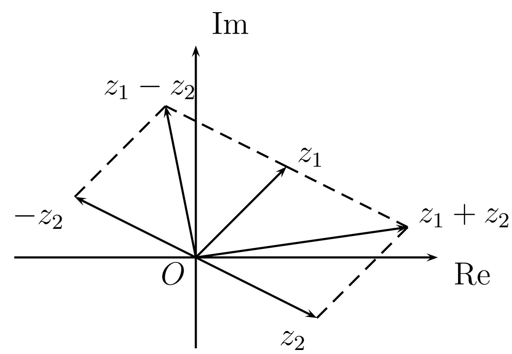
$$\begin{aligned}\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} &= \frac{35-30i+7i+6}{3+i} \\ &= \frac{41-23i}{3+i} = \frac{(41-23i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{123-41i-69i-23}{10} = \frac{100-110i}{10} = 10-11i.\end{aligned}$$

Обычно комплексное число обозначают одной буквой, например: $z = a + bi$, здесь a называется *действительной частью* числа z, b — *мнимой частью*. Используются обозначения: $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Например, $\operatorname{Re}(2-3i) = 2$, $\operatorname{Im}(2-3i) = -3$, $\operatorname{Re}(-3) = -3$, $\operatorname{Im}(-3) = 0$, $\operatorname{Re}(-2i) = 0$, $\operatorname{Im}(-2i) = -2$.

Еще раз обратим внимание, что поле действительных чисел является подполем поля комплексных чисел: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

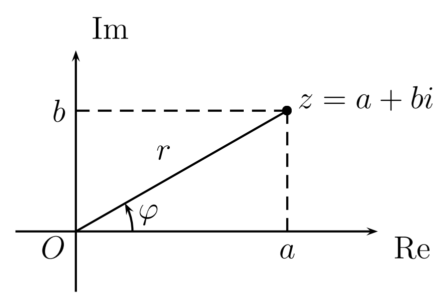
Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Тогда произвольному комплексному числу $(a, b) = a + bi$ можно сопоставить точку с координатами (a, b). Плоскость, точки которой проинтерпретированы таким образом, называется *комплексной плоскостью.* Ось абсцисс (называемая в данном случае *действительной осью* и обозначаемая Re) при такой интерпретации будет соответствовать множеству действительных чисел. Ось ординат (называемая в данном случае *мнимой осью* и обозначаемая Im) — множеству *чисто мнимых* чисел, т. е. чисел вида bi, где b — любое вещественное. Начало координат соответствует нулю.



Наглядную геометрическую интерпретацию приобретают в данном случае сложение и вычитание комплексных чисел — это просто сложение и вычитание их радиус-векторов по правилу параллелограмма.

Модулем, или *абсолютной величиной*, комплексного числа $z = a + bi$ называется расстояние r точки z до начала координат. Модуль числа обозначается $|z|$. Очевидно данное определение согласуется с определением модуля вещественных чисел. Далее, $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Аргументом числа z назовем угол φ, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки), между направлением оси Re и радиус-вектором точки z.



Аргумент обозначается $\arg z$. Арумент определен с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Число 0 аргумента не имеет.

Очевидно, по паре (r, φ) комплексное число z определяется однозначно. Пара $(r,\ \varphi)$ задает *полярные координаты* точки на плоскости.

Применяя теорему Пифагора и формулы тригонометрии, получаем

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

откуда

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа $a+bi$. Для числа 0 тригонометрической формы записи не существует.

Пример 6.2. Найдем тригонометрическую форму записи числа:

1) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$;
2) $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;
3) $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$;
4) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, действительно, $|1-i| = \sqrt{2}$, одним из решений системы
$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\varphi, \\ -1 = \sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$$
является $\varphi = -\pi/4$;
5) $-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$;
6) $\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$;
7) $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
8) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, если $\varphi \in [-\pi, \pi]$: воспользовавшись формулами двойного угла, получаем:
$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} + i2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Пример 6.3. Опишем множество точек комплексной плоскости, изображающих числа $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие уравнению $|z - z_0| = r$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
1 способ. Пусть $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, тогда исходное уравнение будет эквивалентно уравнению $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$. Множество точек, ему удовлетворяющих, есть *окружность радиуса* r *с центром в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$.
2 способ. Нетрудно видеть, что $|z - z_0|$ есть расстояние между точками z и z_0. Таким образом, речь идет о всех точках z, для которых расстояние до фиксированной точки z_0 есть постоянная величина r. Описанное геометрическое место точек — окружность.

Пример 6.4. Опишем множество точек комплексной плоскости, изображающих числа $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$, где $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$. Используя геометрическую интерпретацию для $|z - z_1|$ и $|z - z_2|$, получаем, что описанная уравнением $|z - z_1| = |z - z_2|$ совокупность есть множество точек, равноудаленных от z_1 и z_2, т. е. *серединный перпендикуляр* отрезка $[z_1, z_2]$.

Рассмотрим произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Применяя формулы для суммы и разности тригонометрических функций, получаем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r\rho(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)) \\ &= r\rho\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right). \end{aligned}$$

В конце полученной цепочки равенств имеем комплексное число, опять записанное в тригонометрической форме. Его модуль равен $r\rho$, аргумент равен $\varphi + \psi$. Иными словами,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

В геометрической интерпретации *произведению $z_1 z_2$ соответствует точка, радиус-вектор которой получен поворотом радиус-вектора точки z_1 на угол $\arg(z_2)$ и растяжением в $|z_2|$ раз.*

Нетрудно проверить, что, если $\rho \neq 0$, то

$$\big(\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\big)^{-1} = \rho^{-1}\left(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\right),$$

поэтому

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r}{\rho}\left(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right),$$

или

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

В геометрической интерпретации *частному z_1/z_2 соответствует точка, радиус-вектор которой получен поворотом радиус-вектора точки z_1 на угол $-\arg z_2$ и сжатием в $|z_2|$ раз.*

Пример 6.5. Выполним действия:

1)
$$\begin{aligned} &(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &\quad = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &\quad = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right)\right); \end{aligned}$$

2)

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)} = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).$$

Пример 6.6. Найдем тригонометрическую форму числа $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, если $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Данный пример уже был рассмотрен (пример 6.2 8). Приведем другой способ решения:

$$\begin{aligned}
&1+\cos\varphi+i\sin\varphi\\
&\quad=(\cos 0+i\sin 0)+(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\
&\quad=\left(\cos(-\frac{\varphi}{2})+i\sin(-\frac{\varphi}{2})\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\\
&\quad=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Пусть n — произвольное натуральное число. Как и для вещественных чисел, будем говорить, что ζ есть n-я степерь комплексного числа z и записывать $\zeta = z^n$, если

$$\zeta = \underbrace{z\cdot z\cdot\dots\cdot z}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Мы уже определили z^{-1} как число, обратное к $z\neq 0$. Для произвольного $z\neq 0$ определим $z^0=1$ и $z^{-n}=(z^{-1})^n$. Докажем, что

$$(z^{-1})^n = (z^n)^{-1}.$$

Действительно,

$$(z^{-1})^n z^n = z^{-1}\cdot\dots\cdot z^{-1}z\cdot\dots\cdot z = (z^{-1}\cdot\dots\cdot(z^{-1}z)\cdot\dots\cdot z) = 1.$$

Используя метод математической индукции, теперь легко доказать *формулу Муавра* (A. de Moivre, 1736):

$$\big(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\big),$$

справедливую для произвольного целого n.

Пример 6.7. Вычислим:

$$\begin{aligned}
(1+i\sqrt{3})^{150} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{150}\\
&=2^{150}\left(\cos\frac{150\pi}{3}+i\sin\frac{150\pi}{3}\right)\\
&=2^{150}\big(\cos(50\pi)+i\sin(50\pi)\big)\\
&=2^{150}(\cos 0+i\sin 0)=2^{150}.
\end{aligned}$$

Пример 6.8. Докажем, что если $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$, то

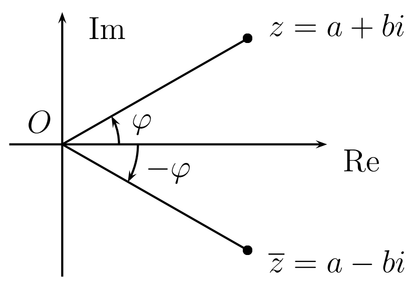
$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta. \tag{5}$$

Уравнение $z+\dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$ эквивалентно квадратному уравнению $z^2-2z\cos\theta+1 = 0$. Его корни[1]:

$$z_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Поэтому $z_{1,2}^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$, $z_{1,2}^{-n} = \cos n\theta \mp i\sin n\theta$, откуда сразу следует доказываемое равенство.

Напомним, что число $a - bi$ называется *(комплексно) сопряженным* к числу $a + bi$.



Для числа сопряженного к z используется обозначение $\bar{z}$. Нетрудно видеть, что $\overline{\overline{z}} = z$. Если z задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Таким образом, аргументы взаимно сопряженных чисел отличаются знаком, а модули совпадают: $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.

Выполняются следующие *свойства операции сопряжения:*

$$\begin{gathered}\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2,\\ z\bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z.\end{gathered} \tag{6}$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения операции комплексного сопряжения. Докажем, например, 1-е свойство. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, тогда $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$, с другой стороны, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i$. Левая и правая части доказываемого равенства совпадают.

[1] Обычные формулы для корней квадратного уравнения справедливы и для уравнений с комплексными коэффициентами.

Пример 6.9. Решим уравнение $\bar{z} = z^3$.
1 способ. Представим z в алгебраической форме: $z = x+iy$. Уравнение перепишется следующим образом:

$$x - iy = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем *совокупность* систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x^3 - 3xy^2, \\ -y = 3x^2y - y^3 \end{array} \right. \qquad \text{или} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0, \\ y(y^2 - 3x^2 - 1) = 0, \end{array} \right.$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y^2 - 3x^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y^2 - 3x^2 = 1, \end{array} \right.$$

т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y^2 - 3x^2 = 1. \end{array} \right.$$

Последняя система несовместна в $\mathbb{R}$. Действительно, умножая первое уравнение на 3 и складывая его со вторым, мы получаем $8y^2 = -4$, что невозможно для действительных y. Из первых трех систем получаем решения: 0, $\pm i$, ± 1 соответственно.
2 способ. Запишем z в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Уравнение примет вид:

$$r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} r = r^3, \\ -\varphi = 3\varphi + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}; \end{array} \right. \qquad \text{т. е.} \qquad \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \quad \text{или} \quad r = 1, \\ \varphi = \dfrac{\pi k}{2}, \;\; k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

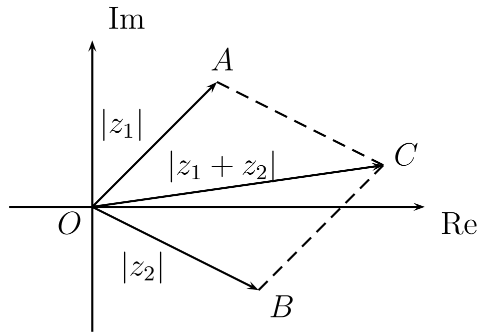
Последняя система дает решения: 0, $\pm i$, ± 1.

Предложение 6.1 (Неравенство треугольника)**.** *Для произвольных комплексных чисел z_1, z_2 выполняются неравенства*

$$|z_1| - |z_2| \leq \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Замечание 6.1. Дадим геометрическую интерпретацию неравенству $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. На рисунке ниже стороны треугольника OAC равны $OA = |z_1|$, $AC = OB = |z_2|$, $OC = |z_1 + z_2|$. Неравенство $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ выражает тот факт, что сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число z называется значением *корня n-й степени* из числа ζ, если $z^n = \zeta$. Легко видеть, что $\zeta = 0$ обладает единственным (нулевым) значением корня произвольной натуральной степени.



Пусть $\zeta \neq 0$, тогда, очевидно, $z \neq 0$.

Представим ζ в тригонометрической форме: $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Мы ищем такое $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, что $z^n = \zeta$. Воспользовавшись формулами Муавра, последнее равенство перепишем в виде

$$r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Так как для ненулевого комплексного числа модуль определен однозначно, а аргумент с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то $r^n = \rho$, а $n\varphi = \psi + 2\pi k$. Получаем:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}$$

(для вычисления r используется арифметическое значение корня $\sqrt[n]{\rho}$). Итак, для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ каждое из чисел

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) \tag{7}$$

является значением корня n-й степени из числа $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Выясним, есть ли среди чисел (7) совпадающие. Разделим произвольное $k \in \mathbb{Z}$ на n с остатком, т. е. представим k в виде $k = np+q$ (напомним, что в данном случае p называется *частным*, q — *остатком*, $0 \le q < n$). Подставляя это выражение для k в (7), получаем:

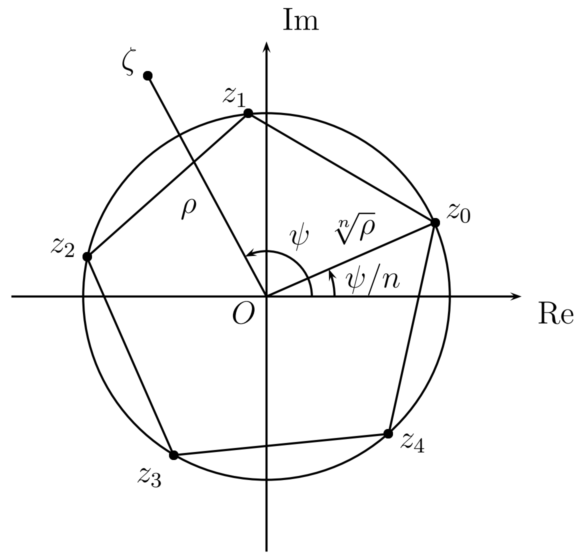
$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi(np+q)}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi(np+q)}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi q}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi q}{n}\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$ все числа в (7), различны: их аргументы различны и отличаются не более, чем на 2π.

Подводя итог, получаем, что *произвольное ненулевое комплексное число* $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ *обладает* n *различными значениями корня* n*-й степени; все эти значения можно получить по формуле:*

$$\sqrt[n]{\zeta} = \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right)\ (k = 0, 1, \ldots, n-1)\right\}. \tag{8}$$

Заметим, что значки радикалов, встречающиеся в (8), имеют разный смысл: в правой части $\sqrt[n]{\cdot}$ означает арифметическое значение корня из положительного (действительного) числа, в левой — множество *всевозможных* значений корня из комплексного числа.



Из (8) легко видеть, что на комплексной плоскости все значения корня находятся на одинаковом расстоянии ($\sqrt[n]{\rho}$) от точки 0, кроме того, угол с вершиной в 0 между направлениями на соседние значения корня постоянен и равен $2\pi/n$. Таким образом, *точки комплексной плоскости, соответствующие всем значениям корня степени* $n \geq 3$ *из одного и того же числа, находятся в вершинах правильного* n*-угольника.*

Пример 6.10. Найдем все значения $\sqrt[3]{-8}$. Заметим, что одно (вещественное) значение корня $\sqrt[3]{-8}$ нам известно. Это -2. Представим -8 в тригонометрической форме: $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. По формуле (8) имеем:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

Итак, $\sqrt[3]{-8}$ имеет следующие значения:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_1 &= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2, \\ z_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Квадратным корнем из комплексного числа $z = a + bi$ является такое число $x + iy$, что $(x + iy)^2 = a + bi$. Пусть $z \neq 0$, тогда $a + bi = x^2 + 2xyi - y^2$, или

$$\left\{ \begin{array}{l} a = x^2 - y^2, \\ b = 2xy. \end{array} \right. \tag{9}$$

Решим полученнную систему. Возведем оба уравнения системы в квадрат и прибавим к первому второе: $a^2 + b^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^2$, отсюда $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2$. Так как $x^2 + y^2 > 0$, то $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Рассмотрим это уравнение вместе с первым уравнением системы (9):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 = a. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}(\quad a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ y^2 &= \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Каждое из этих двух соотношений дает два разных значения для x и y. Комбинируя их, мы можем получить четыре различных комплексных числа, однако не все они удовлетворяют системе (9): как видно из второго уравнения, *знаки x и y должны совпадать, если $b > 0$, и различаться, если $b < 0$.* Если $b = 0$, т. е. число z — вещественное, то либо x, либо y равно нулю. Так как корень n-й степени из произвольного ненулевого комплексного числа имеет ровно n значений, то образом, для $n = 2$ эти значения получаются по формулам (10), скомбинированным с приведенным правилом выбора знака.

Пример 6.11. Найдем все значения $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$. Сначала найдем все значения корня квадратного из $2 - i\sqrt{12}$. Из (10) имеем $x^2 = 3$, $y^2 = 1$. Так как мнимая часть подкоренного числа отрицательна, то $\sqrt{2 - i\sqrt{12}} = \pm(\sqrt{3} - i)$. Вычислим теперь $\sqrt{\sqrt{3} - i}$. Получаем $x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)$, $y^2 = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3} + 2)$. Отсюда

$$\sqrt{\sqrt{3} - i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}} - i\sqrt{\frac{-\sqrt{3} + 2}{2}}\right) = \pm\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i\right).$$

Теперь необходимо найти $\sqrt{-\sqrt{3} + i}$. По утверждению **??** оба значения этого корня отличаются от соответствующих значений $\sqrt{\sqrt{3} - i}$ множителем i. Итак, значениями корня являются

$$\pm\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i\right), \qquad \pm\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i\right).$$

Упражнения

1. Вычислить
   1) $\dfrac{(5 + i)(3 + 5i)}{2i}$; 2) $\dfrac{(2 + i)(4 - i)}{1 + i}$; 3) $\dfrac{(1 - 2i)(2 + 5i)}{-3 + 4i}$.

2. Изобразить на комплексной плоскости и найти тригонометрическую форму числа:
   1) $-1-i$; 2) $1-i\sqrt{3}$; 3) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.
3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих числам z, таким, что:
   1) $|z+1+3i|=4$; 2) $|z+2|\leq 3$; 3) $1\leq|z-2+i|<2$; 4) $|\arg z|<\pi/4$; 5) $\operatorname{Im} z=3$.
4. Доказать, что
$$(z^m)^n=z^{mn}, \quad z^m z^n=z^{m+n}, \quad z_1^n z_2^n=(z_1 z_2)^n$$
   для произвольных целых m, n.
5. Чему равно i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}, i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3}, $(-i)^2$, $(-i)^3$, $(-i)^4$, $(-i)^5$, $(-i)^6$, $(-i)^{-1}$, $(-i)^{-2}$, $(-i)^{4k}$, $(-i)^{4k+1}$, $(-i)^{4k+2}$, $(-i)^{4k+3}$, где $k\in\mathbb{Z}$?
6. Вычислить:
   1) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$; 2) $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$.
7. Доказать оставшиеся свойства (6).
8. Решить уравнения:
   1) $|z|+z=8+4i$;
   2) $\bar{z}=z^2$;
   3) $|z|-iz=1-2i$;
   4) $z^2=\bar{z}^3$;
   5) $z^2+z|z|+|z^2|=0$.
9. Найти все значения корня указанной степени:
   1) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$;
   2) $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i}-5\dfrac{1+2i}{2-i}+2}$;
   3) $\sqrt[3]{-1+i}$.
10. Найти 1) $\sqrt{-8i}$; 2) $\sqrt{3-4i}$.
11. Решить уравнения:
    1) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;
    2) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.
12. Решить уравнения:
    1) $x^4-3x^2+4=0$;
    2) $x^4-30x^2+289=0$.

7. Кольцо многочленов от одной переменной

Рассмотрены следующие вопросы: определение кольца многочленов, делимость в кольце многочленов, факториальность кольца многочленов над полем, корни многочленов, многочлены с действительными коэффициентами, локализация корней (теорема Штурма). Приведен минимальный необходимый набор задач.

Пусть K — произвольное поле. Под многочленом (ненулевым) от одной переменной x с коэффициентами из поля K будем понимать формальное выражение вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

(иногда удобнее записывать эту сумму одночленов a_ix_i в другом порядке: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$), $a_i \in K$, $a_n \neq 0$ — старший коэффициент (a_nx^n — старший член многочлена $f(x)$), a_0 — свободный член, $n = \deg f(x)$ — степень ненулевого многочлена $f(x)$ (нулевой многочлен — это $f(x) = a_0 = 0$).

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными*, если равны соответствующие коэффициенты при каждой степени x^k переменной x.

Через $K[x]$ обозначим множество всех многочленов $f(x)$ с коэффициентами из поля K.

На множестве K[x] введём операции сложения и умножения, для

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{s} b_ix^i$$

полагая

$$f(x) + g(x) = \sum_{i\geq 0} d_ix^i, \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i\geq 0} t_ix^i,$$

где

$$d_i = a_i + b_i, \quad t_i = \sum_{\substack{k+l=i \\ 0\leq k,l\leq i}} a_kb_l.$$

Заметим, что если $0 \neq f(x)$, $0 \neq g(x)$, то

$$\deg(f(x) + g(x)) \leq max(\deg f(x), \deg g(x));$$

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Теорема 7.1. *Множество $K[x]$ с операциями сложения и умножения — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля.*

Теорема 7.2. *(Алгоритм деления с остатком в кольце многочленов)*

Для любых многочленов $f(x)$, $g(x) \in K[x]$, $g(x) \neq 0$, существуют (и притом единственные) многочлены $q(x)$, $r(x) \in K[x]$ такие, что:

1) $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$;

2) *либо* $r(x) = 0$, *либо* $r(x) \neq 0$, $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Определение 7.1. Пусть $f(x)$, $\varphi(x) \in K[x]$, $\varphi(x) \neq 0$. Будем говорить, что многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, если $f(x) = \varphi(x)q(x)$ (т. е. остаток $r(x)$ при делении на $\varphi(x)$ равен нулю).

Отметим ряд свойств делимости многочленов.

1) Если $f(x)$ делится на $g(x)$, $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$.

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $h(x)$, то $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ делятся на $h(x)$.

3) Если многочлен $f(x)$ делится на $h(x)$, $g(x) \in K[x]$, то $f(x)g(x)$ делится на $h(x)$.

4) Если $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ делятся на $h(x)$, $g_1(x), \ldots, g_k(x) \in K[x]$, то $f_1(x)g_1(x) + \ldots + f_k(x)g_k(x)$ делится на $h(x)$.

5) Если $0 \neq c \in K$, то любой многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на c.

6) Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$ и $0 \neq c \in K$, то $f(x)$ делится на $c\varphi(x)$.

7) Многочлены вида $cf(x)$, $0 \neq c \in K$, и только они являются делителями многочлена $f(x)$, имеющими степень $\deg f(x)$.

8) Многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$ и $g(x)$ делится на $f(x)$ тогда и только тогда, когда $g(x) = cf(x)$, $0 \neq c \in K$.

9) Многочлены $f(x)$ и $cf(x)$, $0 \neq c \in K$, обладают одинаковым запасом делителей в кольце $K[x]$.

Определение 7.2. Пусть $f(x), g(x) \in K[x]$. Многочлен $d(x) \in K[x]$ *называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$, если:

1) $d(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ (т. е. $f(x) = d(x)q(x)$, $g(x) = d(x)\tilde{q}(x)$);

2) для любого общего делителя $d'(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ многочлен $d(x)$ делится на $d'(x)$.

Обозначение: $d(x) = \text{НОД}(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

Теорема 7.3. *(алгоритм Евклида).*
Для любых $f(x), g(x) \in K[x]$*:*

1) *существует наибольший общий делитель* $d(x)$ *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$*;*

2) *$d(x)$ =НОД$(f(x), g(x))$ находится по процедуре последовательного деления, восходящей к Евклиду;*

3) *наибольший делитель $d(x)$ определён однозначно с точностью до ненулевой константы $0 \neq c \in K$.*

Доказательство.

1), 2) Рассмотрим процедуру Евклида:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), && \deg r_1(x) < \deg g(x);\\
&g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), && \deg r_2(x) < \deg r_1(x);\\
&r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), && \deg r_3(x) < \deg r_2(x);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), && \deg r_{k-1}(x) < \deg r_{k-2}(x);\\
&r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), && \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x);\\
&r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned}
$$

а) Поднимаясь последовательно вверх, мы видим, что $r_k(x)$ — общий делитель многочленов $g(x)$ и $f(x)$.

б) Если $d'(x)$ — общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то, опускаясь последовательно вниз, мы видим, что $d'(x)$ — делитель многочлена $d(x)$.

3) Если $d(x)$ и $d'(x)$ — два наибольших общих делителя, то они делятся друг на друга, и поэтому $d'(x) = cd(x)$, $0 \neq c \in K$. Ясно, что если $d(x)$ — наибольший общий делитель и $0 \neq c \in K$, то $cd(x)$ — также наибольший общий делитель.

Теорема 7.4. *(О выражении наибольшего общего делителя через исходные многочлены).*

Если $f(x), g(x) \in K[x]$ и $d(x) =$ НОД$(f(x), g(x))$, то существуют многочлены $u(x)$, $v(x) \in K[x]$ такие, что

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

Многочлены $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ из кольца многочленов $K[x]$ над полем K называются *взаимно простыми*, если их наибольший делитель $d(x)$ равен 1 (т. е. их общие делители — это лишь ненулевые многочлены нулевой степени $0 \neq c \in K$).

Теорема 7.5. *Многочлены $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены $u(x)$, $v(x) \in K[x]$, что*

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

Теорема 7.6. *(Основные свойства взаимно простых многочленов).*
Пусть $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in K[x]$.

1) *Если НОД$(f, \varphi) = 1$, НОД$(f, \psi) = 1$, то НОД $(f, \varphi\psi) = 1$.*

2) *Если fg делится на φ и НОД$(f, \varphi) = 1$, то g делится на φ.*

3) *Если f делится на φ и делится на ψ, НОД$(\varphi, \psi) = 1$, то f делится на $\varphi\psi$.*

Определив наибольший общий делитель

$$d(x) = \text{НОД}(f_1(x), \ldots, f_s(x))$$

многочленов $f_1(x), \ldots, f_s(x) \in K[x]$, $s \geq 1$, как такой делитель этих многочленов $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ который делится на любой их общий делитель, получаем, проводя индукцию по s, что

$$d(x) = \text{НОД}(f_s(x), \text{НОД}(f_1(x), \ldots, f_{s-1}(x))).$$

Пример 7.1. Найти НОД$(f(x), g(x))$, где

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1,$$

$$g(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 2.$$

Решение. $3f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, где $q_1(x) = 2$, $r_1(x) = 6x^3 - x^2 - x - 7$. Делим $2g(x)$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{c|c}
6x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 2x + 4 & 6x^3 - x^2 - x - 7 \\
6x^4 - x^3 - x^2 - 7x & \\
\hline
x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & x\vdots 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
6x^3 + 30x^2 + 30x + 24 & \\
6x^3 - x^2 - x - 7 & \\
\hline
31x^2 + 31x + 31 &
\end{array}$$

Многоточием $\ldots$ отмечено место, в котором мы произвели домножение на 6 (соответственно многоточие $\vdots$ показывает, что мы не находим точные коэффициенты для $q_2(x)$). Таким образом,

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$

где с точностью до ненулевого множителя $r_2(x) = x^2 + x + 1$. Далее,

$$\begin{array}{c|c}
6x^3 - 4x^2 - x - 7 & x^2 + x + 1 \\
6x^3 - 4x^2 - x - 7 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} -7x^2-7x-7 \\ \underline{-7x^2-7x-7} \\ 0 \end{array}$$

То есть $r_1(x)$ делится нацело на $r_2(x)$. Итак,

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = x^2 + x + 1.$$

Пример 7.2. Наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ и $g(x) = 3x^5 + 5x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 1$ представить в виде $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — многочлены степеней, меньших чем степени многочленов $g(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Решение. Сначала с помощью алгоритма Евклида находим $d(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$, при этом

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{d(x)} = x^2 - 2x + 1,$$

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{d(x)} = x^2 + x - 1.$$

Ищем многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что

$$1 = f_1(x)u(x) + g_1(x)v(x). \tag{$*$}$$

Так как степени многочленов $u(x)$ и $v(x)$ должны быть меньше двух, то $u(x) = ax + b$, $v(x) = cx + d$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Приравнивая в (*) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем систему линейных уравнений для a, b, c, d. Решая эту систему, получаем, что $a = 3, b = 5, c = -3, d = 4$. Итак,

$$d(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = f(x)(3x + 5) + g(x)(-3x + 4).$$

Определение 7.3. Пусть K — поле, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in K[x]$, $a_n, \ldots, a_0 \in K$. Если $c \in K$, то элемент $f(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1c + a_0 \in K$ назовём *значением многочлена* $f(x)$ при $x = c$. Таким образом, получаем отображения: $f : K \to K$, $c \mapsto f(c)$ (полиномиальная функция, определяемая многочленом $f(x)$); $K[x] \to K$, $f(x) \mapsto f(c)$ (ясно, что если $f(x) = g(x)$ в $K[x]$, то $f(c) = g(c)$ для всех $c \in K$).

Определение 7.4. Элемент $c \in K$ называется корнем многочлена $f(x) \in K[x]$, если $f(c) = 0$.

Теорема 7.7. *(Безу)*

Пусть $c \in K$. Остаток от делениям многочлена $f(x)$ в кольце $K[x]$ на множитель $x - c$ равен значению $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$.

Из теоремы Безу сразу следует, что элемент $c \in K$ является корнем многочлена $f(x) \in K[x]$ тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ делится на $x - c$.

Замечание 7.1. *(Схема (алгоритм) Горнера деления многочлена $f(x) \in K[x]$ на линейный многочлен $x - c$, $c \in K$)* Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$,

$$f(x) = (x-c)q(x) + r, \quad r \in K,$$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in K[x].$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$, соответственно получаем

$$\begin{gathered}
a_n = b_{n-1}; \\
a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}; \\
a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_k = b_{k-1} - cb_k; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 = b_0 - cb_1; \\
a_0 = r - cb_0.
\end{gathered}$$

Пересчитывая, получаем

$$\begin{gathered}
b_{n-1} = a_n; \\
b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}; \\
b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{k-1} = cb_k + a_k; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_0 = cb_1 + a_1; \\
r = cb_0 + a_0.
\end{gathered}$$

Таким образом, коэффициенты частного $b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ и остаток $r = f(c)$ последовательно вычисляются по коэффициентам $a_n, \ldots, a_1, a_0$ и элементу c, если использовать однотипную процедуру:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_{k+1}	a_k	$\ldots$	a_1	a_0
c	$\Vert$ b_{n-1}	$b_{n-2} =$ $cb_{n-1} + a_{n-1}$	$\ldots$ $\ldots$	$b_k =$ $cb_{k+1} + a_{k+1}$	$b_{k-1} =$ $cb_k + a_k$	$\ldots$ $\ldots$	$b_0 =$ $cb_1 + a_1$	$r =$ $cb_0 + a_0$

Пример 7.3. Пусть $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 2$, $c = -2$. Тогда

	2	0	-1	3	-2
-2	2	-4	7	-11	20

и $f(x) = (x+2)q(x) + 20$, где $q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 11$.

Замечание 7.2.

1) Схема Горнера даёт быстрый алгоритм вычисления значения $r = f(c)$ многочлена $f(x) \in K[x]$ в точке c (минимизируя число умножений).

2) Последовательное применение схемы Горнера позволяет построить эффективный алгоритм записи многочлена $f(x)$ в виде формулы Тейлора по степеням $(x-c)$. А именно, при первом применении схемы Горнера крайний правый коэффициент равен $f(c)$, при втором применении крайний справа коэффициент равен $f'(c)$, при третьем $\dfrac{f''(c)}{2!}$, и так далее. Таким образом, если $\deg f(x) = n$, то
$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$
(формула Тейлора).

Пример 7.1. Для
$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$
и $c = 5$ имеем

	1	-6	-2	5	-4
5	1	-1	-7	-30	$-154 = f(5)$
5	1	4	13	$35 = \dfrac{f'(5)}{1!}$	
5	1	9	$58 = \dfrac{f''(5)}{2!}$		
5	1	$14 = \dfrac{f^{(3)}(5)}{3!}$			
	$1 = \dfrac{f^{(4)}(5)}{4!}$				

Таким образом,
$$f(x) = (x-5)^4 + 14(x-5)^3 + 58(x-5)^2 + 35(x-5) - 154.$$

Определение 7.5. Пусть $f(x) \in K[x]$, $c \in K$, и c — корень многочлена $f(x)$, т. е. $f(c) = 0$. По теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $x - c$. Возможно, многочлен $f(x)$ делится на более высокие степени многочлена $x - c$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — такое натуральное число, что $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$, поэтому
$$f(x) = (x-c)^k \varphi(x),$$
многочлен $\varphi(x) \in K[x]$ уже не делится на $x-c$ (это равносильно тому, что $\varphi(c) \neq 0$). В этом случае число k назовём кратностью корня c многочлена $f(x)$, а сам корень c — k-кратным корнем многочлена $f(x)$. Если $k = 1$, то корень c называется простым корнем многочлена $f(x)$.

В началах вещественного анализа мы видели, что в кратных нулях многочлена его производная обращается в нуль. В случае произвольного поля K производные многочленов также полезны для исследования кратных корней. В случае любых полей K (например, конечных полей) использование пределов для введения производной не представляется возможным. Для многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ определим *производную* $f'(x)$ формально:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1 \in K[x].$$

Лемма 7.1. *Пусть K — поле, $f = f(x) \in K[x]$ и $f' = 0$. Тогда*

1) *если $charK = 0$, то $f = const$ ($f = a_0 \in K$);*

2) *если $charK = p \neq 0$, то $f = g(x^p)$ для некоторого $g(x) \in K[x]$.*

Определение 7.6. Многочлен $f(x) \in K[x]$ над полем K называется *неприводимым*, если $f(x)$ нельзя представить в виде $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, где $1 \leq \deg \varphi(x)$, $1 \leq \deg \psi(x)$.

Теорема 7.8. *(Свойства неприводимых многочленов)*

1) *Если $p(x) \in K[x]$ неприводим и $0 \neq c \in K$, то $cp(x)$ — неприводим;*

2) *если $f(x), p(x) \in K[x]$ и $p(x)$ — неприводим, то либо $f(x)$ делится на $p(x)$, либо $d(x) = (f(x), p(x)) = 1$;*

3) *если $f(x)g(x) = p(x)q(x)$, где $p(x)$— неприводим, то либо $f(x) = p(x)\tilde{q}(x)$, либо $g(x) = p(x)\hat{q}(x)$. В случае когда $f(x)$ не делится на $p(x)$, имеем $(f(x), p(x)) = 1$ и $g(x)$ делится на $p(x)$.*

Теорема 7.9. *Любой многочлен $f(x) \in K[x]$, $\deg f(x) \geq 1$ разложим единственным образом (с точностью до многочленов нулевой степени) в произведение неприводимых многочленов.*

Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это в точности многочлены первой степени.

Теорема 7.10. *Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ — это в точности многочлены первой степени и многочлены второй степени без действительных корней. Каждый многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x) \geq 1$ представляется (и притом однозначно, с точностью до порядка сомножителей), в виде произведения константы $\alpha \in \mathbb{R}$, многочленов вида $(x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и многочленов вида $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$, где $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, соответствующих паре сопряженных корней α и $\overline{\alpha}$.*

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Одно из достижений компьютерной алгебры — теорема Штурма (1829), дающая алгоритм для вычисления числа действительных корней многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (случай $a = -\infty$, $b = \infty$ для расширенной прямой дает число всех вещественных корней многочлена $f(x)$). Ясно, что достаточно эту задачу решить для многочлена без кратных корней (общий случай сводится к этому переходом от $f(x)$ к $f(x)/(f(x), f'(x))$ имеющему те же корни, что и $f(x)$, но кратности 1). В этом случае НОД$(f(x), f'(x)) = c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

На основе алгоритма Евклида нахождения НОД построим *каноническую систему многочленов Штурма* для многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Пусть $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$. Далее используем модификацию алгоритма Евклида (остатки от последующих делений берем с противоположным знаком):

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x)q_1(x) - f_2(x), \\ &\dots \\ f_{k-1}(x) &= f_k(x)q_k(x) - f_{k+1}(x), \\ &\dots \\ f_{s-2}(x) &= f_{s-1}(x)q_{s-1}(x) - f_s(x), \\ f_{s-1}(x) &= f_s(x)q_s(x) - 0, \end{aligned}$$

здесь $f_s(x) =$НОД$(f(x), f'(x)) = c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Каноническая система многочленов Штурма для $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ без кратных корней:

$$f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x), f_2(x), \dots, f_s(x) = c \neq 0.$$

Теорема 7.11. *(Свойства системы $f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$)*

1) *Соседние многочлены $f_k(x)$ и $f_{k+1}(x)$ не имеют общих корней;*

2) *последний многочлен $f_s(x) = c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ не имеет действительных корней;*

3) *если $1 \leq k \leq s-1$ и $f_k(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ то*

$$f_{k-1}(\alpha)f_{k+1}(\alpha) < 0$$

(т. е. действительные ненулевые числа $f_{k-1}(\alpha)$ и $f_{k+1}(\alpha)$ имеют противоположные знаки);

4) *если $f(\alpha) = 0$ для $\alpha \in \mathbb{R}$, то многочлен $f_0(x)f_1(x)$ при переходе через $x = \alpha$ меняет знак с $-$ на $+$.*

Если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $(f(x), f'(x)) = 1$, $f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ — система многочленов Штурма для многочлена $f(x)$, $c \in \mathbb{R}$, то в ряду действительных чисел

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$$

выбросим нулевые значения и подсчитаем число перемен знаков $W(c)$ в оставшемся ряду ненулевых действительных чисел.

Теорема 7.12. *(Теорема Штурма)*

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *без кратных корней (т. е. НОД*$(f(x), f'(x)) = 1$*),* $f_0(x) = f(x)$*,* $f_1(x) = f'(x), \ldots, f_s(x)$ *— его система Штурма,* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *(возможно* $a = -\infty$*,* $b = \infty$*),* $f(a) \neq 0$*,* $f(b) \neq 0$*. Тогда*

1) $W(a) > W(b)$*;*

2) *разность* $W(a) - W(b)$ *равна числу действительных корней между* a *и* b *(т. е. в интервале* (a, b)*).*

Пример 7.4. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$. Тогда $f_1(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$. Ясно, что НОД$(f(x), f'(x)) = 1$ Далее, по алгоритму Евклида $f_2(x) = 2x + 1$, $f_3(x) = 1$. Следовательно,

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$x = -\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x = +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

т. е. $f(x)$ имеет три действительных корня.

Более того, теорема Штурма является эффективным средством (в комбинации с определением границ корней) для решения проблемы локализации — указания интервалов, содержащих ровно один действительный корень; это позволяет к этому интервалу применять алгоритмы нахождения корня. Например, в нашем случае, т.к. $x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3) > 1$ при $x \geq 1$ и для $x = -z$ многочлен $-f(z) = z^3 - 3z^2 - 1$ при $z \geq 4$ не имеет корней ($z^2(z - 3) > 1$ при $z \geq 4$), то все действительные корни $f(x)$ принадлежат интервалу $(-4; 1)$. Более точно,

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$-$	0	$+$	$+$	1
1	$+$	$+$	$+$	$+$	0

т. е. интервалы $(-3; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ содержат в точности по одному действительному корню.

Упражнения

1. Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на многочлен $g(x)$:
$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \qquad g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

2. Найти наибольший общий делитель многочленов:
$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \qquad \text{и} \qquad g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

3. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \qquad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

4. Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на $x - x_0$ и вычислить значение $f(x_0)$:
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \qquad x_0 = 1.$$

5. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x - x_0$ и найти значения его производных в точке x_0:
$$f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \qquad x_0 = 2.$$

6. Чему равен показатель кратности корня -2 для полинорма $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

7. Найти наибольший общий делитель полинома $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3)$ и его производной.

8. Отделить кратные множители полинома $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

9. Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

10. Составить ряд Штурма и отделить корни полинома $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$.

8. Линейное (векторное) пространство

В этом разделе вводятся основные понятия линейных пространств: аксиоматика, линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты вектора, матрица перехода от одного базиса к другому.

Пусть K — поле (например, $K = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел). Многочисленные конкретные примеры линейных пространств, с которыми мы уже столкнулись (линейные пространства строк K^n, столбцов $\hat{K}^n$, пространства прямоугольных и квадратных матриц $M_{m,n}(K)$ и $M_n(K)$, пространство многочленов $K[x]$, пространство непрерывных вещественных функций $C[0,1]$ на отрезке $[0,1]$ и т.д.), оправдывают введение и рассмотрение понятия абстрактного линейного пространства V_K над полем K как множества V с операцией сложения ($V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a{+}b$) и операциями умножения на элементы $c \in K$ ($K{\times}V \to V$, $(c,v) \mapsto cv$), удовлетворяющими следующим условиям:

(I.1) ассоциативность сложения (т. е. $(u{+}v){+}w = u{+}(v{+}w)$ для всех $u, v, w \in V$);

(I.2) коммутативность сложения (т. е. $u + v = v + u$ для всех $u, v \in V$);

(I.3) существование нейтрального элемента 0 для операции сложения (т. е. $v{+}0 = v$ для всех $v \in V$);

(I.4) существование противоположного элемента $-v$ для всякого $v \in V$ (т. е. $v + (-v) = 0$);

(II.1) $1 \cdot v = v$ для всех $v \in V$;

(II.2) $(rs)v = r(sv)$ для всех $r, s \in K$, $v \in V$;

(III.1) $r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$ для всех $r \in K$, v_1, $v_2 \in V$;

(III.2) $(r + s)v = rv + sv$ для всех $r, s \in K$, $v \in V$.

Заметим, что располагая любым набором скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ и векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ можно составить выражение

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

называемое *линейной комбинацией* векторов v_i с коэффициентами λ_i.

В общем случае, если I — какое-то семейство индексов (возможно бесконечное) и $\{v_i \in V \mid i \in I\}$ — подмножество векторов в V, то правомерно рассмотреть линейные комбинации $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ с любыми коэффициентами $\lambda_i \in K$, среди которых, только конечное число отличных от нуля. *Линейной оболочкой* системы векторов $\{v_i \in V \mid i \in I\}$ называется множество всех линейных комбинаций векторов этой системы. Для линейной оболочки используется обозначение $\langle v_i \mid i \in I\rangle$ или $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ в случае конечной системы.

Определение 8.1. Пусть V_K — линейное пространство над полем K. Система элементов $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ называется *линейно зависимой*, если найдутся элементы $k_1, \ldots, k_r \in K$ такие, что

а) не все k_i равны нулю (т. е. хотя бы один элемент k_i отличен от нуля);

б) $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$.

Система элементов $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой, из равенства $k_1v_1 + \ldots + k_rv_r = 0$, $k_1, \ldots, k_r \in K$, следует, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Пример 8.1.

1) Если в системе элементов $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ есть нулевой элемент, скажем, $v_i = 0$, то система $v_1, \ldots, v_r$ линейно зависима.

   Действительно, $0v_1 + \ldots + 1v_i + \ldots + 0v_r = 0$.

2) Если $v_i = v_j$ для $i \neq j$, то система $v_1, \ldots, v_r \in V_K$ линейно зависима.

   Действительно, $0v_1 + \ldots + 1v_i + \ldots + (-1)v_j + \ldots + 0v_r = 0$.

Теорема 8.1. *(Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем)*

1) *Если в системе есть линейно зависимая подсистема, то и вся система линейно зависима;*

2) *если один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы, то система линейно зависима;*

3) *если система линейно зависима, то один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы;*

4) *если к системе добавить вектор, который является линейной комбинацией векторов системы, то получится линейно зависимая система;*

5) *если к линейно независимой системе добавить вектор, не являющийся линейной комбинацией векторов системы, то получится линейно независимая система.*

Теорема 8.2. *(Основная теорема о линейной зависимости)*

Если в пространстве V любой из векторов линейно независимой системы $\{e_1, \ldots, e_s\}$ является линейной комбинацией векторов системы $\{f_1, \ldots, f_t\}$, то $s \leq t$.

Пусть S — система векторов линейного пространства V_K. Подсистема $v_1, \dots, v_r \in S$ называется *максимальной линейно независимой подсистемой* в S, если:

1) $v_1, \dots, v_r$ — линейно независимая система;

2) $v_1, \dots, v_r, v$ — линейно зависимая система для всякого $v \in S$, или, что эквивалентно,

2′) любой элемент $v \in S$ является линейной комбинацией элементов $v_1, \dots, v_r$.

Максимальная линейно независимая подсистема $v_1, \dots, v_r$ в $S = V_K$ (если в V_K существует такая конечная система) называется *базисом* линейного пространства V_K. Линейное пространство V_K с конечным базисом $v_1, \dots, v_r$ называется *конечномерным* линейным пространством (при этом любой другой базис линейного пространства содержит то же самое число элементов). Число векторов в базисе называется *размерностью* линейного пространства и обозначается $\dim_K V$.

Теорема 8.3. *Пусть V — линейное пространство над K с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *любой вектор $v \in V$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов $e_1, \dots, e_n$;*

2) *любую систему из $s \leq n$ линейно независимых векторов пространства можно дополнить до базиса. В частности, любой вектор $v \neq 0$ можно включить в базис.*

Определение 8.2. Подмножество $W \subset V$ линейного пространства V_K называется *подпространством*, если для любых векторов $u, v \in W$ и скаляра $\lambda \in K$ имеем $u + v \in W$ и $\lambda u \in W$. Другими словами, W — подпространство, если само W является линейным пространством относительно операций, заданных в V.

Нетрудно видеть, что пересечение подпространств и линейная оболочка векторов является подпространством.

Определение 8.3. Суммой $V_1 + V_2$ подпространств V_1 и V_2 пространства V_K есть множество: $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

Очевидно, что $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$, т. е. $V_1 + V_2$ — подпространство.

Теорема 8.4 (Формула Грассмана)**.** *Для любых подпространств V_1 и V_2 линейного пространства V_K имеет место равенство:*

$$\dim_K V_1 + \dim_K V_2 = \dim_K (V_1 + V_2) + \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

Определение 8.4. Сумма $V_1 + V_2$ подпространств пространства V_K называется *прямой* (обозначение $V_1 \oplus V_2$), если для любого вектора $v \in V_1 + V_2$ представление $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ единственно.

Теорема 8.5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *сумма* $V_1 + V_2$ *— прямая;*

б) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$*;*

в) *если* $0 = v_1 + v_2$*,* $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$*, то* $v_1 = v_2 = 0$*;*

г) $\dim_K V_1 + \dim_K V_2 = \dim_K(V_1 + V_2)$.

Определение 8.5. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства V над K. Скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, входящие в разложение вектора $v = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$ называются *координатами* вектора $v \in V$ в данном базисе.

Если $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$, то

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n,$$

т. е. при сложении двух векторов их координаты складываются. Так как, далее, $\lambda x = \lambda\alpha_1 e_1 + \ldots + \lambda\alpha_n e_n$, то при умножении x на скаляр $\lambda \in K$ координаты вектора x умножаются на тот же скаляр. Вектор, координаты которого равны нулю, совпадает с нулевым вектором.

В $V_K = \mathbb{R}^n$ координатами вектора $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ относительно базиса $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Однако в $\mathbb{R}^n$ имеется бесконечное множество других базисов, в которых координатами того же вектора будут новые системы чисел.

Рассмотрим эту ситуацию в общем случае. Пусть V — n-мерное линейное пространство над K и $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — какие-то два его базиса. Векторы одного базиса выражаются через векторы другого:

$$\begin{gathered}
e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\
e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n
\end{gathered}$$

Коэффициенты $a_{ij} \in K$ определяют матрицу

$$T = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей перехода* от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Следует подчеркнуть, что координатами вектора e'_j относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ служат элементы j-го столбца матрицы T.

Теорема 8.6. *При переходе от базиса* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *пространства* V *к базису* $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, *определяемом матрицей* T *координаты вектора в новом базисе выражаются через старые координаты при помощи обратимого линейного преобразования с матрицей* T^{-1}. *Точнее, если* $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *— столбец координат вектора* $x \in V$ *в базисе* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $(X') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ *— столбец координат вектора* x *в базисе* $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, *то*

$$(X') = T^{-1}(X)$$

Пример 8.2. Векторы $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ и $x = (6, 9, 14)$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 сами образуют базис и найти координаты x в этом базисе.

Так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Далее, имеем: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Откуда $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, и

$$(X') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом вектор x имеет координаты $(1, 2, 3)$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Упражнения

1. Вывести ряд следствий из аксиом линейного пространства:
   а) Уравнение $u + x = v$ для $u, v \in V$ имеет, причём единственное, решение
   $$x = (-u) + v.$$
   б) Если $x + x = x$ для $x \in V$, то $x = 0$.
   в) $0v = 0$ для любого $v \in V$, $0 \in K$.
   г) $r0 = 0$ для любого $r \in K$, $0 \in V$.
   д) $(-1)v = -v$ для всех $v \in V$.
   е) $rv = 0$ для $r \in K$, $v \in V$ тогда и только тогда, когда либо $r = 0$, либо $v = 0$.
   ж) $r(u - v) = ru - rv$ для всех $r \in K$, $u, v \in V$.
   з) $-(-v) = v$ для всех $v \in V$.

2. Выяснить, являются ли линейно независимыми векторы $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$.
3. Найти размерность и базис линейного подпространства, натянутого на векторы $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$.
4. Являются ли подпространством все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$?
5. Доказать, что векторы $a_1 = (2, 2, 7, -1)$, $a_2 = (3, -1, 2, 4)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$ линейно независимыми и дополнить их до базиса строк.
6. Найти базисы суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов:
   $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$;
   $b_1 = (1, 0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 2, 1, 1)$, $b_3 = (1, 2, 1, 2)$.
7. Векторы $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$, $e_3 = (1, -1, 1)$ и $x = (6, 2, -7)$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 сами образуют базис и найти координаты x в этом базисе.
8. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:
   $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 2, 1)$, $e_4 = (1, 3, 2, 3)$;
   $e'_1 = (1, 0, 3, 3)$, $e'_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $e'_3 = (2, 2, 5, 4)$, $e'_4 = (-2, -3, -4, -4)$.

9. Евклидовы пространства

Рассмотрены следующие темы: скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Определение 9.1. Линейное пространство $V_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если задано отображение $V \times V \to \mathbb{R}$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых x, y, z из V и α из $\mathbb{R}$. Свойства 1)–4) называются *аксиомами евклидова пространства.*

Пример 9.1. Рассмотрим несколько примеров евклидовых пространств:

1) пространства геометрических векторов на плоскости или в трехмерном пространстве со стандартным скалярным произведением $(x, y) = |x||y| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами x и y;

2) пространство $\mathbb{R}^n$, если скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

3) пространство многочленов $\mathbb{R}[t]$, если скалярное произвдение вычисляется по формуле:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$

Приведенные функции будем называть *стандартными скалярными произведениями* в соответствующих пространствах.

Определение 9.2. *Матрицей Грама*, построенной по системе векторов $a_1, \dots, a_k$ называется матрица

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}.$$

Замечание 9.1. Пусть $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Рассмотрим столбцы $a_1, \dots, a_k$ матрицы A как систему векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Легко видеть, что

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^t A.$$

Предложение 9.1. (Выражение скалярного произведения через координаты векторов.) *Если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства, то*

$$(x, y) = (X)^t \Gamma(e_1, \dots, e_n)(Y),$$

где (X), (Y) — координатные столбцы векторов x и y.

Определение 9.3. Величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ называется *длиной* или *нормой* вектора x.

Часто для норм векторов используют обозначение $\|x\|$. Из 4-й аксиомы евклидова пространства следует, что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Предложение 9.2 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство*

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Пример 9.2. Рассмотрим неравенство Коши–Буняковского в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}(a, b)$, с введенными в них стандартными скалярными произведениями:

1. $|(a, b)| \leq |a||b|$ в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ следует также из определения $(a, b) = |a||b| \cos \varphi$;

2. в пространстве $\mathbb{R}^n$:
$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2;$$

3. в пространстве $\mathbb{R}(a,b)$:
$$\left(\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int\limits_a^b f^2(t)\,dt \int\limits_a^b g^2(t)\,dt.$$

Неравенство Коши–Буняковского позволяет ввести следующее

Определение 9.4. Углом между векторами a, b называется вещественное число
$$\varphi = \arccos\frac{(a,b)}{|a||b|}.$$

Данное определение согласуется с понятием угла в геометрических пространствах.

Предложение 9.3 (Неравенство треугольника)**.** *Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство*
$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{11}$$

Определение 9.5. Векторы a, b называются *ортогональными* или *перпендикулярными*), если $(a,b)=0$. Обозначение: $a \perp b$.

Определение 9.6. Система векторов $a_1,\ldots,a_k$ называется *ортогональной*, если $a_i \perp a_j$ при $i \neq j$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,k$.

Система векторов $a_1,\ldots,a_k$ называется *ортонормированной*, если
$$(a_i,a_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \quad (\text{т. е. } a_i \perp a_j), \\ 1 & \text{при } i = j \quad (\text{т. е. } |a_i| = 1). \end{cases}$$

Предложение 9.4 (Теорема Пифагора)**.** *Если $a \perp b$, то*
$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Предложение 9.5. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Ортонормированная система линейно независима.*

Определение 9.7. Базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ называется *ортогональным* (*ортонормированным*), если он представляет собой ортогональную (соответственно ортонормированную) систему.

Замечание 9.2. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная:
$$\Gamma(e_1,\ldots,e_n) = \operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n),$$
поэтому
$$(x,y) = (X)^t\Gamma(e_1,\ldots,e_n)(Y) = d_1x_1y_1 + \cdots + d_nx_ny_n,$$
где $(X) = (x_1,\ldots,x_n)^t$, $(Y) = (y_1,\ldots,y_n)^t$ — координатные столбцы векторов x и y соответственно. В ортонормированном базисе матрица Грама единичная, поэтому
$$(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Пример 9.3. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартное скалярное произведение. Очевидно, что векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$ ортогональны. Дополним систему a_1, a_2 до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$. Вектор $a_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ определим из условий $(a_1, a_3) = 0$, $(a_2, a_3) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_3 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_3 = (1, 1, -1, -1)$. Вектор $a_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ определим из условий $(a_1, a_4) = 0$, $(a_2, a_4) = 0$, $(a_3, a_4) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_4 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_4 = (1, -1, -1, 1)$. Построенная система a_1, a_2, a_3, a_4 образует ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^4$.

Упражнение 9.1. Систему векторов

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

дополнить до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^3$. Найти все способы, какими это можно сделать. Скалярное произведение стандартное.

Определение 9.8. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если $A^t = A^{-1}$, т. е. $AA^t = A^tA = E$.

Предложение 9.6. *Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства. Для того чтобы система векторов $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода к нему была ортогональной.*

Определение 9.9. Множества S и T векторов евклидова пространства V называются *ортогональными*, если $(a, b) = 0$ для любых $a \in S$, $b \in T$. Обозначение: $S \perp T$.

Условие $\{a\} \perp T$ будем записывать $a \perp T$.

Предложение 9.7. *Для того, чтобы $a \perp \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, необходимо и достаточно выполнения условий $a \perp a_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Определение 9.10. Сумму попарно ортогональных подпространств W_i $(i = 1, \ldots, k)$ назовем *ортогональной* $(k \geq 2)$.

Предложение 9.8. *Ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.*

Определение 9.11. *Ортогональным дополнением* подпространства $W \subseteq V$ называется множество $W^{\perp}$ всех векторов из V, ортогональных с каждым вектором из W:

$$W^{\perp} = \{x \in V : \ x \perp W\}.$$

Теорема 9.1. *Для любого подпространства W евклидова пространства V ортогональное дополнение $W^{\perp}$ является подпространством и $V = W + W^{\perp}$.*

Следствие 9.1. *Пусть W — подпространство евклидова пространства V, тогда $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.*

Следствие 9.2. *Пусть W — произвольное подпространство евклидова пространства V. Любой вектор a из V однозначно можно представить в виде*

$$a = b + c, \quad \textit{где} \quad b \in W, \quad c \in W^{\perp}. \tag{12}$$

Определение 9.12. Вектор b в (12) называется *ортогональной проекцией* вектора a на подпространство W, вектор c называется *перпендикуляром*, или *ортогональной составляющей*, вектора a на подпространство W. Обозначения: $b = \operatorname{pr}_W a$, $c = \operatorname{ort}_W a$.

Замечание 9.3. Из определения следует, что

$$\operatorname{ort}_W a = \operatorname{pr}_{W^{\perp}} a, \quad \operatorname{pr}_W a = \operatorname{ort}_{W^{\perp}} a.$$

Упражнение 9.2. Пусть W, W_1, W_2 — подпространства евклидова пространства V. Доказать утверждения

1. $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$,
2. $V^{\perp} = \{o\}$,
3. $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$,
4. $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$,
5. $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

Опишем процедуру нахождения ортогонального базиса $b_1, \ldots, b_k$ подпространства W по заданному произвольно заданному базису $a_1, \ldots, a_k$ (*Процесс ортогонализации Грама–Шмидта*). Положим

$$W_i = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle \quad (i = 1, \ldots, k)$$

и построим векторы

$$\begin{aligned} &b_1 = a_1, \\ &b_i = \operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i, \quad (i = 2, \dots, k). \end{aligned} \tag{13}$$

Имеем $W_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ и поэтому, учитывая замечание **??**, $b_i = \operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i$ можно вычислять по формуле

$$b_i = a_i - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \dots - \frac{(a, a_{i-1})}{(a_{i-1}, a_{i-1})} a_{i-1}. \tag{14}$$

Построение ортогонального базиса подпространства W по формулам (14) называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта.* Чтобы найти ортонормированный базис достаточно каждый вектор ортогонального базиса нормировать, т. е. поделить на его длину.

Замечание 9.4. Описанная процедура годится и для случая, когда $W = \langle a_1, \dots a_k \rangle$, но векторы $a_1, \dots a_k$ не обязательно являются линейно независимыми. По замечанию **??**, b_i в (14) равен нулю тогда и только тогда, когда $a_i \in W_i$.

Пример 9.4. Найдем какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки L системы векторов $(97, 60, 29, -29)$, $(36, 36, -17, 17)$, $(-48, -11, 20, -20)$ пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

Прежде чем применять процесс ортогонализации найдем эквивалентную систему векторов «попроще» (две системы векторов называются эквивалентными, если их линейные оболочки совпадают). Для удобства запишем компоненты векторов в матрицу по строкам:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ -48 & -11 & 20 & -20 \end{pmatrix},$$

с которой будем осуществлять элементарные преобразования строк. Прибавим к 3-й строке 1-ю и разделим 3-ю на 49. Получим:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ко 2-й строке прибавим 3-ю, умноженную на 17, и разделим 2-ю строку на 53:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из 1-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 31, и 3-ю, умноженную на 29. Разделим 1-ю строку на 37:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система векторов $a_1 = (1,0,0,0)$, $a_2 = (1,1,0,0)$, $a_3 = (1,1,1,-1)$ эквивалентна исходной системе. Применяя к векторам a_1, a_2, a_3 процесс ортогонализации, по формулам (14) получим

$$b_1 = a_1 = (1,0,0,0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} \cdot b_1 = (0,1,0,0),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} \cdot b_1 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} \cdot b_2 = (0,0,1,-1).$$

Векторы b_1, b_2, b_3 составляют ортогональный базис подпространства L. Для нахождения ортонормированного базиса нормируем эти векторы:

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0,0,1,-1).$$

Упражнения

1. Докажите, что (11) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = \alpha b$ или $b = \alpha a$ для некоторого $\alpha \geq 0$ (в геометрических пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ векторы a и b коллинеарны и сонаправлены).
2. Докажите следующие свойства нормы вектора. Пусть a, b — произвольные векторы евклидова пространства V, α — произвольное вещественное число, тогда

   1) $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$;

   2) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$;

   3) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ (*равенство параллелограмма* — дайте геометрическую интерпретацию).

3. (Теорема, обратная к теореме Пифагора) Докажите, что если $|a+b|^2 = |a|^2+|b|^2$, то $a \perp b$.
4. (Обобщение теоремы Пифагора Докажите, что если система $a_1, \ldots, a_k$ ортогональна, то
$$|a_1 + \cdots + a_k|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_k|^2.$$
5. Докажите, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса.
6. Докажите, что строки (столбцы) ортогональной матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему.
7. Докажите, что определитель ортогональной матрицы по модулю равен 1.

8. Какие из следующих функций можно взять в качестве скалярного произведения в соответствующих линейных пространствах?
 1) $f(x, y) = x_1y_1$ в $\mathbb{R}^1$;
 2) $f(x, y) = x_1y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
 3) $f(x, y) = x_1y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
 4) $f(x, y) = x_1 + y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
 5) $f(x, y) = x_1^2 + y_2^2$ в $\mathbb{R}^2$;
 6) $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
 7) $f(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
 8) $f(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ в $\mathbb{R}^2$.
9. Доказать, что для любых векторов x, y евклидова пространства выполнено *равенство параллелограмма*: $|x+y|^2+|x-y|^2 = 2\big(|x|^2+|y|^2\big)$. Дать геометрическую интерпретацию этому равенству.
10. Векторы a и b заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе. Найти длины векторов и угол между ними.
 1) $(4,\ -3,\ 0,\ -5)$, $(2,\ 1,\ 3,\ -2)$; 2) $(1,\ -4,\ 1,\ 0)$, $(-1,\ 2,\ 0,\ 1)$;
 3) $(3,\ 5,\ 2,\ 2)$, $(-1,\ -2,\ -4,\ 0)$; 4) $(-1,\ 2,\ 5,\ 1)$, $(-4,\ 2,\ 2,\ -5)$;
 5) $(3,\ 3,\ -2,\ 3)$, $(4,\ -3,\ 0,\ -1)$; 6) $(1,\ 3,\ 1,\ -1)$, $(-1,\ -3,\ -1,\ 1)$.
11. В пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ векторов x и y. Записать матрицу Грама а) в стандартном базисе; б) в базисе $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Записать выражение скалярного произведения векторов x, y через их координаты в базисе $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$.
 1) $3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, $e'_1 = (1, -3)$, $e'_2 = (-2, 1)$;
 2) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, $e'_1 = (3, 4)$, $e'_2 = (-1, 1)$.
12. Найти какой-либо ненулевой вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
 1) $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$;
 2) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$.
13. Проверить, что заданные векторы образуют ортогональную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства.
 1) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, -3)$;
 2) $(1, 1, 1, -3)$, $(1, 2, 3, 2)$.
14. Проверить, что заданные векторы образуют ортонормированную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства.
 1) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.
15. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки данной системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $(1,1,1)$, $(1,2,-2)$, $(1,3,1)$;
2) $(2,1,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(1,-4,-5,8)$;
3) $(0,1,-1,1)$, $(1,1,-3,2)$, $(1,-1,-1,0)$, $(2,1,3,1)$.

16. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую проекции вектора b на линейную оболочку векторов $a_1, \ldots, a_m$ (скалярное произведение стандартное).
1) $b = (1,\ 1,\ 1)$, $a_1 = (1,\ 2,\ 3)$;
2) $b = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$;
3) $b = (2\ -3,\ 2,\ 2)$, $a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 2,\ -1,\ 0)$;
4) $b = (3,\ -6,\ -4,\ 3)$, $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 1)$, $a_2 = (5,\ 3,\ 0,\ 1)$.

10. Унитарные пространства

Введеные в разделе 9 понятия переносятся на линейные пространства на полем $\mathbb{C}$. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Определение 10.1. Линейное пространство $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *унитарным*, если задано отображение $V \times V \to \mathbb{C}$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $(x, y) \in \mathbb{C}$, называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых x, y, z из V и α из $\mathbb{C}$. Свойства 1)–4) называются *аксиомами унитарного пространства.*

Замечание 10.1. Если 1-ю аксиому унитарного пространства заменить на $(x, y) = (y, x)$, то выполнение 4-й аксиомы не будет возможно. Действительно, в этом случае, если $(x, x) > 0$, то $(ix, ix) = i^2(x, x) = -(x, x) < 0$.

Пример 10.1. Арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением (называемым *стандартным*)

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, образует унитарное пространство.

Унитарные пространства обладают многими общими свойствами с евклидовыми пространствами.

На случай унитарных пространств переносится понятие *матрицы Грама.* Формула выражения скалярного произведения через координаты векторов примет вид:

$$(x, y) = (X)^t \Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n)(Y).$$

На случай унитарных пространств переносится понятие нормы вектора, ортогональности векторов и систем векторов, сохраняется неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника, теорема Пифагора.

В унитарных пространствах вводятся понятия ортогонального и ортонормированного базисов. В ортонормированном базисе скалярное произведение выражается через координаты векторов по формуле:

$$(x, y) = x_1 \overline{y}_1 + \dots + x_n \overline{y}_n.$$

Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной*, если $\overline{A}^t = A^{-1}$, т. е. $\overline{A}A^t = A^t\overline{A} = E$. Легко показать, что строки (столбцы) унитарной матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — ортонормированый базис унитарного пространства. Для того, чтобы система векторов $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода к этому базису была унитарной.

В унитарных пространствах вводится понятие *ортогонального дополнения*, справедлива теорема 9.1 о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Вводятся понятия *ортогональной проекции* и *перпендикуляра*. Сохраняется процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

Упражнения

1. Какие из следующих функций можно взять в качестве скалярного произведения в соответствующих линейных пространствах:
   1) $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   2) $f(x,y) = \overline{x}_1y_1 + \overline{x}_2y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   3) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   4) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^1$;
   5) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^2$;
   6) $f(x,y) = x_1\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   7) $f(x,y) = x_1 + \overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^2$;
   8) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   9) $f(x,y) = 3x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-2i)x_2\overline{y}_1 + 6x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   10) $f(x,y) = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
   11) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + (1-i)x_1\overline{y}_2 + (1+i)x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$?
2. Доказать, что в унитарном пространстве для любых векторов x, y
$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(|x+y| - |x-y| + |x+iy| - i|x-iy|\Big).$$
3. Доказать, что в 2-мерном комплексном линейном пространстве функцию
$$f(x,y) = a_{11}x_1\overline{y}_1 + a_{12}x_1\overline{y}_2 + a_{21}x_2\overline{y}_1 + a_{22}x_2\overline{y}_2$$
   можно выбрать в качестве скалярного произведения тогда и только тогда, когда a_{11}, a_{22} — вещественные положительные и $a_{12} = \overline{a}_{21}$, $a_{11}a_{22} > |a_{12}|^2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты векторов x и y в некотором базисе.
4. Привести пример, показывающий, что утверждение, обратное к теореме Пифагора, в унитарном пространстве неверно.
5. В пространстве $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ векторов x и y. Записать матрицу Грама а) в стандартном

базисе; б) в базисе $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Записать выражение скалярного произведения векторов x, y через их координаты в базисе $\{e'_1, \dots, e'_n\}$.

1) $2x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$, $e'_1 = (1, i)^t$, $e'_2 = (1, -i)^t$;

2) $2x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + 2x_3\overline{y}_3 - ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_3 + ix_3\overline{y}_2$, $e'_1 = (-2+2i, 0, 2-2i)^t$, $e'_2 = (3, 1+2i, 1+i)^t$, $e'_3 = (1+2i, -2+3i, -2)^t$.

6. Найти какой-либо ненулевой вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $(-1,\ 1+i,\ 0)$, $(0,\ 1,\ i)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, если $(x, y) = 2x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + 2x_3\overline{y}_3 + ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1 + ix_2\overline{y}_3 - ix_3\overline{y}_2$.

7. Проверить, что заданные векторы образуют ортогональную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства.

1) $(1+i,\ 1-i)$;

2) $(1,\ 2i,\ 1)$, $\quad (i,\ 1,\ i)$.

8. Проверить, что заданные векторы образуют ортонормированную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства.

1) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$, $\quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(i,\ -i,\ 0\big)$, $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\big(i,\ i,\ -1\big)$;

3) $(1,\ 1,\ 1)$, $\quad \left(1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

9. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки данной системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $(1, 1)$, $(1, i)$;

2) $(1,\ 1,\ i)$, $(2i,\ 1,\ 1+i)$;

3) $(1,\ 1,\ i)$, $(1+i,\ 1,\ 1+i)$, $(i,\ -1,\ 1)$;

4) $(1-2i,\ -1-3i,\ -1-3i)$, $(-i,\ 3+i,\ 3+i)$, $(1-2i,\ -3+2i,\ -3+2i)$.

10. Найти ортонормированный базис пространства решений указанной системы линейных уравнений, если скалярное произведение стандартное:

1) $x_1 + ix_2 - ix_3 = 0$; $\quad$ 2) $\begin{cases} x_1 + \ \ ix_2 + ix_3 = 0, \\ x_1 + 3ix_2 - ix_3 = 0. \end{cases}$

11. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую проекции вектора b на линейную оболочку векторов $a_1, \dots, a_m$ (скалярное произведение стандартное).

1) $b = (1,\ 0)$, $a_1 = (1,\ i)$;

2) $b = (i,\ 1,\ -1)$, $a_1 = (-1+i,\ 2-i,\ -1+2i)$;

3) $b = (1,\ 1+i,\ 1+i)$, $a_1 = (1,\ -1,\ i)$, $a_2 = (0,\ 1+i,\ 1-i)$.

11. Алгебра линейных операторов

В этом разделе рассматриваются линейные операторы, действия с ними, их матрицы. Определяются ядро, образ, ранг, дефект, собственные числа и векторы линейного оператора.

Определение 11.1. Пусть V, W — линейные пространства над одним полем K. Отображение $f : V \to W$ называется *линейным*, если

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для всех $x, y \in V$, $\lambda \in K$ или

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Если $V = W$, то линейное отображение называется *линейным оператором* или *линейным преобразованием*.

С любым линейным оператором ассоциируются два подпространства — его *ядро* $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ и *образ* $\operatorname{Im} f = \{w \in V \mid w = f(v)$ для некоторого $v \in V\}$. Размерность $\operatorname{Im} f$ подпространства называется *рангом* оператора f.

Пусть f — линейный оператор пространства V, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V. Тогда f определяется действием на базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$: для любого $v \in V$ положим

$$f(v) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n).$$

Далее, разложим образы базисных векторов по базису $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n$$

$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Матрица

$$A_f = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *матрицей линейного оператора в базисе* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Обратно, если $A \in M_n(K)$, то можно определить линейный оператор f действием на базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n$$

$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n$$

и продолжить его по линейности на все пространство V.

Теорема 11.1. *Пусть V_K — линейное пространство с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Тогда*

1) *существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами $f : V \to V$ и матрицами из пространства $M_n(K)$;*

2) *любой системе векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ отвечает единственный линейный оператор $f : V \to V$, $f(e_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$;*

3) *ранги линейного оператора f и отвечающей ему матрицы A_f при любом выборе базиса в пространстве V_K совпадают.*

Пример 11.1.

1) Тождественный оператор id переводит любой вектор пространства V_K в себя. Матрицей id является единичная матрица $E \in M_n(K)$. Обратно, если матрица линейного оператора $A_f = E$, то $f = id$.

2) Рассмотрим оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве многочленов $K_2[x]$ степени не выше 2 с базисом $\{1, x, x^2\}$. Тогда $\frac{d}{dx}(1) = 0$, $\frac{d}{dx}(x) = 1$ и $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Таким образом, матрицей линейного оператора $\frac{d}{dx}$ в базисе $\{1, x, x^2\}$ является матрица $A_{\frac{d}{dx}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 11.2. *(Закон изменения матрицы линейного оператора при смене базиса)*

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ — 2 базиса линейного пространства V_K. Если A — матрица линейного оператора в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, A' — матрица того же оператора в базисе $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, то

$$A' = T^{-1}AT,$$

где T — матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$.

Линейный оператор f называется *невырожденным*, если $\mid A_f \mid\neq 0$.

Теорема 11.3. *Для линейного оператора f эквивалентно:*

1) *оператор f невырожден;*

2) *оператор f обратим, т. е. существует оператор $f^{-1} : V \to V$, такой что $ff^{-1} = id$;*

3) $\operatorname{Im} f = V$;

4) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Невырожденные операторы в V_K образуют (неабелеву) группу относительно композиции. Она называется *полной линейной группой* и обозначается $GL(V)$. Если $\dim_K V = n$, то группа $GL(V)$ изоморфна группе $GL_n(K)$ невырожденных квадратных матриц порядка n с элементами из поля K.

Определение 11.2. Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор пространства V_K. Элемент $\lambda \in K$ называется собственным значением f, если существует ненулевой вектор $v \in V_K$, такой что $f(v) = \lambda v$. При этом вектор v называют собственным вектором, отвечающим собственному значению λ.

Если V_λ — подмножество в V_K, состоящее из собственных векторов f, отвечающих собственному значению λ и нулевого вектора, то V_λ — подпространство в V_K. Если $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — собственные вектора, отвечающие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Определение 11.3. Пусть A — матрица линейного оператора f. Тогда многочлен $F(\lambda) = \mid A - \lambda E \mid$ называется характеристическим многочленом линейного оператора f.

Заметим, что определение характеристического многочлена не зависит от выбора базиса, относительно которого записана матрица A.

Теорема 11.4. *Пусть f — линейный оператор и $F(\lambda)$ — его характеристический многочлен. Собственный вектор с собственным значением λ существует тогда, и только тогда, когда λ — корень $F(\lambda)$.*

Линейный оператор f называется *диагонализируемым*, если существует базис пространства, относительно которого матрица A линейного оператора f имеет диагональный вид. Нетрудно видеть, что оператор f диагонализируем в точности тогда, когда существует базис из собственных векторов оператора f.

Пример 11.2.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Является ли диагонализируемым оператор f?

1) Составляем характеристический многочлен

$$F(\lambda) = \mid A - \lambda E \mid = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2$$

и находим его корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$, которые являются собственными значениями оператора f.

2) Решая однородные системы линейных уравнений, находим подпространства собственных векторов, отвечающих $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_3 = 1$.

$\underline{\lambda_{1,2} = 0.}$
Решая матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим общее решение $\{(\frac{1}{3}x_3, \frac{2}{3}x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$ — подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$. ФСР этой системы дает нам базис этого подпространства:

$$V_{\lambda=0} = \langle (1,2,3) \rangle.$$

$\underline{\lambda_{1,2} = 1.}$
Решая матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим общее решение $\{(x_3, x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$ — подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$. ФСР этой системы дает нам базис этого подпространства:

$$V_{\lambda=1} = \langle (1,1,1) \rangle.$$

Отметим, что оператор f не является диагонализируемым, т.к. векторы $(1,2,3)$ и $(1,1,1)$ не образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Упражнения

1. Проверить, что $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ и $\operatorname{Im} f = \{w \in V \mid w = f(v)$ для некоторого $v \in V\}$ — подпространства в V_K.
2. Выяснить, является ли отображение f, заданное путем определения координат вектора $f(x)$ как функция координат вектора x, линейным оператором, и если да, то найти его матрицу в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $f(x)$:
$$f(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3).$$
3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ в векторы $u_1 = (4, 4, 5)$, $u_2 = (5, 3, 4)$, $u_3 = (3, 5, 3)$, соответственно.
4. Линейный оператор f задан в базисе $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$: $f(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 2a_1v_1 + 2a_2v_2 - 2a_3v_3$, где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$. Найти матрицу оператора f в базисе $\{u_1, u_2, u_3\}$ и значение оператора f на векторе $u = u_1 + 2u_2 + u_3$, где $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$.
5. Найти базис ядра и образа оператора, заданного в стандартном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Является ли диагонализируемым линейный оператор над $\mathbb{R}$, заданный в стандартном базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

12. Элементы теории групп

Рассмотрены следующие темы: определение группы, подгруппы, порядок элемента группы, циклические группы, теорема Лагранжа, гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Приведен минимальный необходимый набор задач.

Одним из основных общематематических понятий является понятие группы.

Определение 12.1. Непустое множество G с бинарной операцией $*\colon G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a * b \in G$ для $a, b \in G$, называется *группой*, если:

1) операция ассоциативна (т. е. $(a * b) * c = a * (b * c)$ для всех $a, b, c \in G$);

2) существует нейтральный элемент $e \in G$ (т. е. $g * e = g = e * g$ для всех $g \in G$);

3) для каждого элемента $g \in G$ существует обратный элемент $g^{-1} \in G$ (т. е. $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$).

Напомним, что нейтральный элемент (при мультипликативной записи называемый единицей группы) единственный. Обратный элемент g^{-1} для элемента $g \in G$ определён однозначно. Коммутативная группа часто называется абелевой группой. Мощность группы G называется порядком группы и обозначается $|\, G \,|$.

Пример 12.1. (Примеры групп)

1) Целые числа $\mathbb{Z}$, рациональные числа $\mathbb{Q}$, действительные числа $\mathbb{R}$ с операцией сложения. Заметим, что:

   а) натуральные числа $\mathbb{N}$ с операцией сложения группой не являются (отсутствует нейтральный элемент);

   б) натуральные числа с нулём также не являются группой (обратный элемент (в аддитивной записи обычно называемый противоположным элементом) существует только для 0; таким образом, например, 1 уже не имеет обратного элемента).

2) Группа вычетов $(\mathbb{Z}_n, +)$ по модулю n. Пусть $(\mathbb{Z}, +)$ — группа целых чисел по сложению, $1 < n \in \mathbb{N}$. Для $k \in \mathbb{Z}$ пусть

$$C_k = k + n\mathbb{Z} = \{k + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

(сдвиг подгруппы $n\mathbb{Z}$ на элемент k). Ясно, что $C_k = C_l$, $l \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $k - l = nq$, $q \in \mathbb{Z}$. Так как

$$k = nq + r, \quad \text{где} \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le r < n,$$

то $C_k = C_r$. Таким образом, множество различных сдвигов

$$\mathbb{Z}_n = \{C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}\}$$

находится в биективном соответствии с множеством остатков $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ при делении на число n.

Определим операцию сложения на множестве $\mathbb{Z}_n$, полагая

$$C_k + C_l = C_{k+l} = C_s, \quad \text{где} \quad k + l = n\overline{q} + s, 0 \leq s \leq n - 1, \quad \overline{q} \in \mathbb{Z}.$$

Проверим корректность этой операции. Если $C_k = C_{k'}$, $C_l = C_{l'}$, то $k' = k + nu$, $l' = l + nv$, $u, v \in \mathbb{Z}$, следовательно,

$$k' + l' = (k + nu) + (l + nv) = (k + l) + n(u + v),$$

и поэтому $C_{k'+l'} = C_{k+l}$. Так как для $k, l, m \in \mathbb{Z}$

$$(C_k + C_l) + C_m = C_{(k+l)+m} = C_{k+(l+m)} = C_k + (C_l + C_m),$$

$$C_k + C_l = C_{k+l} = C_{l+k} = C_l + C_k,$$

то эта операция ассоциативна и коммутативна. Ясно, что C_0 является нейтральным элементом в $(\mathbb{Z}_n, +)$, а элемент C_{-k} является противоположным элементом для C_k.

Итак, $(\mathbb{Z}_n, +)$ — коммутативная группа, называемая группой вычетов по модулю n (операция сложения — это в точности операция сложения остатков при делении на n по модулю числа n: сначала надо сложить остатки как целые числа, а затем взять остаток от деления этой суммы на n). Мы отметили, что $\mid \mathbb{Z}_n \mid = n$.

3) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ относительно умножения являются группами (называемыми мультипликативными группами соответствующих полей).

4) $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ с операциями умножения являются группами.

5) $G = \{1, -1\}$ с операцией умножения является группой.

Определение 12.2. Пусть G — группа, $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ — целое число. Положим

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}, & \text{если} \quad n > 0 \\ e, \text{если} \quad n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{m=-n}, & \text{если} \quad n < 0, \quad \text{где} \quad m = -n > 0 \end{cases}$$

Теорема 12.1. *Пусть G — группа, $a \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$ — целые числа. Тогда*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Следствие 12.1. $(a^m)^n = a^{mn}$ *для всех* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим целые степени элемента a группы G

$$\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \ldots$$

Возможны два случая.

Случай 1. Все элементы в этом ряду различны (т. е. $a^k \neq a^l$ для всех целых чисел $k \neq l$). В этом случае будем говорить, что *порядок элемента* a бесконечный (обозначение: $O(a) = \infty$).

Случай 2. В этом ряду $a^k = a^l$ для некоторых $k \neq l$. Пусть $k > l$. Тогда $a^{k-l} = e$, где $k - l > 0$, т. е. встретилась натуральная степень элемента a, равная e. Рассмотрим множество $T = \{t \in \mathbb{Z} \mid t > 0, a^t = e\}$. Это непустое подмножество натуральных чисел. Следовательно, в T существует наименьший элемент n, который мы назовём *порядком элемента элемента* a и обозначим через $O(a)$.

Таким образом:

1) $a^n = e$, $n > 0$;

2) если $a^k = e$, $k > 0$, то $k \geq n$.

Пример 12.2. $G = \{1, -1\}$, $a = -1$. Тогда $a^1 = -1$, $a^2 = 1$, т. е. $O(a) = 2$.

Лемма 12.1. *Если $O(a) = n < \infty$, то:*

1) *все элементы $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ различны;*

2) *для любого $k \in \mathbb{Z}$ элемент a^k совпадает с одним из $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$;*

3) $O(a^k) = \frac{O(a)}{(k, O(a))}$;

4) *$a^k = e$ в том, и только в том случае, когда $k = nq$.*

Лемма 12.2. *Для непустого подмножества H группы G следующие условия эквивалентны:*

1) *H является группой относительно исходной операции в группе G;*

2) *подмножество H удовлетворяет следующим двум условиям:*

   а) *если $h_1, h_2 \in H$, то $h_1 h_2 \in H$;*

   б) *если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$.*

Подмножество H группы G, удовлетворяющее эквивалентным условиям 1) и 2), называется *подгруппой* группы G.

Пример 12.3. (Примеры подгрупп)

1) Чётные числа $2\mathbb{Z}$ — подгруппа в группе целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$.

2) $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{Q}, +)$, $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, +)$, $\mathbb{R} \subset (\mathbb{C}, +)$ — подгруппы.

3) В любой группе G имеем наименьшую подгруппу $H = \{e\}$ (и наибольшую подгруппу $H = G$).

Пусть a — элемент группы G. Рассмотрим в G следующее подмножество:

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

(т. е. совокупность всех целых степеней элемента a).

Нетрудно видеть, что $\langle a \rangle$ является коммутативной подгруппой группы G и $|\langle a \rangle| = O(a)$ (т. е. число элементов в подгруппе $\langle a \rangle$ равно порядку элемента a).

Группа G называется *циклической*, если найдётся такой элемент $a \in G$, что $\langle a \rangle = G$, т. е. все элементы группы G являются (целыми) степенями этого элемента a, называемого в этом случае *образующим* группы G. Если $O(a) = n < \infty$, то $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа из n элементов; если же $O(a) = \infty$, то $G = \langle a \rangle$ — бесконечная(счётная!) циклическая группа. Любая циклическая группа $G = \langle a \rangle$ является конечной или счётной коммутативной группой. Поэтому любая некоммутативная группа не является циклической и любая несчётная группа не является циклической группой.

Пример 12.4.

1) $(\mathbb{Z}, +) = (1) = (-1)$ (это показывает, что образующих может быть много!).

2) Группа действительных чисел $(\mathbb{R}, +)$ не является счётной, поэтому она не является циклической.

3) Показать, что счётная группа $(\mathbb{Q}, +)$ рациональных чисел не является циклической.

Предложение 12.1. *Элемент a^k является образующим в группе $\langle a \rangle \Leftrightarrow k$ взаимно просто с $O(a)$. Количество натуральных чисел не превосходящих n и взаимно простых с n равно значению функции Эйлера $\varphi(n)$. Следовательно, количество образующих в циклической группе порядка n равно $\varphi(n)$.*

Теорема 12.2. *Любая подгруппа циклической группы сама является циклической группой. Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между всеми подгруппами циклической группы и всеми делителями порядка группы.*

Теорема 12.3. *(Теорема Лагранжа) Пусть G — конечная группа, H — подгруппа в G. Тогда порядок подгруппы H делит порядок группы G. В частности, порядок каждого элемента делит порядок группы.*

Пусть G и G' — группы. Отображение $f : G \to G'$, для которого $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех элементов $a, b \in G$, называется *гомоморфизмом.*

Пример 12.5.

Пусть $G = \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ с операцией умножения, $G' = (\mathbb{R}, +)$ с операцией сложения. Так как для отображения $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ имеем $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ для всех $a, b \in R^+$, то ln — гомоморфизм групп.

Для гомоморфизма $f : G \to G'$ определим:

$$\operatorname{Im} f = \{g' \in G \mid g' = f(g), \quad \text{для некоторого} \quad g \in G\}$$

(*образ* гомоморфизма f);

$$\operatorname{Ker} f = \{g \in G \mid f(g) = e\},$$

где e — нейтральный элемент группы G (*ядро* гомоморфизма f).

Теорема 12.4. *(свойства гомоморфизма групп)*

Пусть G и G' — группы, e и e' соответственно — их нейтральные элементы, $f : G \to G'$ — гомоморфизм групп. Тогда:

1) $f(e) = e'$*;*

2) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ *для всех* $x \in G$*;*

3) $H = \operatorname{Im} f$ *— подгруппа группы* G*;*

4) *если* $G = \langle a \rangle$ *— циклическая группа, то* $\operatorname{Im} f = \langle f(a) \rangle$ *также циклическая группа;*

5) $\operatorname{Ker} f$ *— подгруппа группы* G*, при этом* $g^{-1}(\operatorname{Ker} f)g \subseteq \operatorname{Ker} f$ *для всех элементов* $g \in G$*.*

Определение 12.3. Пусть G, G' — группы. Отображение $f : G \to G'$ назовём *изоморфизмом групп*, если:

1) f — гомоморфизм;

2) f — биекция.

Группы G и G' называются *изоморфными*, если существует какой-либо изоморфизм $f : G \to G'$ (обозначение $G \cong G'$).

Пример 12.6. Следующие отображения — изоморфизмы групп:

1) $(\mathbb{R}^+, \cdot) = (\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}, \cdot) \xrightarrow{ln} (\mathbb{R}, +)$;

2) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$;

3) все циклические группы одного порядка изоморфны.

Упражнения

1. Пусть G — группа, $a, b \in G$. Доказать следующие утверждения:
   а) уравнение $ax = b$ имеет, и только одно, решение $x = a^{-1}b$;
   б) уравнение $ya = b$ имеет, и только одно, решение $y = ba^{-1}$;
   с) если $ab = ac$, то $b = c$; если $ba = ca$, то $b = c$;
   д) если $x^2 = x$, то $x = e$;
   е) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$; $(a_1 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$; $(a^{-1})^{-1} = a$.
2. Является ли группой множество целых чисел относительно операции вычитания?
3. Пусть G — группа, $\{H_i \mid i \in I\}$ — любое семейство подгрупп группы G. Доказать, что их пересечение $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ также является подгруппой.
4. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 6 & 10 & 2 & 4 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$.
5. Найти порядки всех элементов в $\mathbb{Z}_6$.
6. Найти все подгруппы в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$ и все образующие элементы групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$.
7. В циклической группе порядка 20 найти все элементы a, такие что $a^4 = e$ и все элементы порядка 4.
8. Проверить, что отображение $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(x) = 2^x$ является гомоморфизмом групп, найти его ядро и образ. Является ли это отображение изоморфизмом?
9. Доказать, что если G, G', G'' — группы, $f : G \to G'$, $g : G' \to G''$ — гомоморфизмы, то $gf : G \to G''$ — гомоморфизм.
10. Пусть G, G' — группы, $f : G \to G'$ — гомоморфизм групп. Доказать:
    а) f — инъекция в том и только в том случае, когда $\operatorname{Ker} f = \{e\}$;
    б) f — биекция в том и только в том случае, когда $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, $\operatorname{Im} f = G$.
11. Доказать, что отношение $G \cong G'$ является отношением эквивалентности на классе групп.

Список литературы

[1] Михалев А.А., Михалев А.В., Начала алгебры, часть I. — Учебное пособие. — М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2005. — 144 с.

[2] Курош А.Г., Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975. — 432 с.

[3] Кострикин А.И., Введение в алгебру. Ч.I, II, III. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2000. — 272 с.

[4] Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре. — изд. 3-е, испр., дополн. — М.: Наука, 1967. — 384 с.

[5] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А., Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.

[6] Сборник задач по алгебре: Учебн. пособие /Под ред. А.И. Кострикина/ — М.: Факториал, 1995. — 454 с.

Необходимые требования к успешному освоению дисциплины «Алгебра» (минимально необходимый уровень)

Составители:
Олег Владимирович Любимцев
Николай Юрьевич Золотых

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23