

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**А.В. Жидков**  
**А.К. Любимов**

# **ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

*Учебно-методическое пособие*

Рекомендовано методической комиссией  
института информационных технологий, математики и механики  
для студентов ННГУ, обучающихся по специальности 01.05.01  
«Фундаментальная математика и механика», направлению подготовки  
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород  
2019

УДК 539.3  
ББК 22.251  
Ж69

Ж69 Жидков А.В., Любимов А.К. ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 38 с.

Рецензент: д.т.н., профессор **А.А. Миронов**

В учебно-методическом пособии приводятся основные теоретические сведения, дифференциальные постановки плоских задач теории упругости в декартовых и полярных координатах, различные подходы к решению плоских задач. В качестве примера рассмотрена задача об одноосном растяжении пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша). В работе приведено описание задания для самостоятельной работы, ориентированное на освоение как аналитического метода решения так и численного решения с использованием современного программного комплекса. В приложении приводятся краткие биографические сведения об учёных, упоминаемых в работе и внёсших вклад в развитие математики, механики, численных методов.

Содержание работы направлено на совершенствование профессиональной подготовки студентов института информационных технологий, математики и механики, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования в механике деформируемого твёрдого тела.

УДК 539.3  
ББК 22.251

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2019

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Краткие теоретические сведения.....</b>	<b>6</b>
1.1. Механическая постановка плоской задачи теории упругости.....	6
1.1.1. Плоская деформация .....	6
1.1.2. Плоское напряженное состояние.....	7
1.1.3. Обобщенное плоское напряженное состояние .....	7
1.2. Дифференциальная постановка .....	8
1.2.1. Плоская задача в декартовых координатах.....	8
1.2.2. Функция напряжений .....	10
1.2.3. Плоская задача в полярных координатах.....	10
1.3. Теорема Леви-Мичелла.....	12
1.4. Вариационная постановка .....	12
1.5. Методы решения .....	14
1.5.1. Решение в полиномах.....	14
1.5.2. Решение с помощью тригонометрических рядов.....	15
1.5.3. Решение с помощью функций комплексного переменного.....	16
1.5.4. Численные методы решения.....	21
1.5.5. Общее представление о методе конечных элементов .....	21
<b>2. Задача Кирша .....</b>	<b>23</b>
<b>3. Задание для самостоятельной работы .....</b>	<b>29</b>
<b>Вопросы для проверки .....</b>	<b>32</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>33</b>
<b>Приложение .....</b>	<b>34</b>

## Введение

Математическое и компьютерное моделирование сегодня является одним из основных методов научного исследования объектов и процессов, изучаемых в различных областях естествознания. При создании современной техники возникает необходимость теоретического анализа явлений, происходящих в деформируемых телах и средах. Механика и другие разделы физики, накопившие за более чем двух с половиной тысячелетний период своего развития богатейший опыт по моделированию поведения природных объектов и процессов, представляют теоретическую и методологическую основу построения большинства математических моделей. Универсальность математических моделей и их инвариантность по отношению к моделируемым объектам и процессам различной природы играют решающую роль при создании принципиально новых и совершенствовании существующих устройств и технологий. Изучение и анализ математической модели с привлечением современных численных методов, информационных и компьютерных технологий рассматривается как проведение вычислительного эксперимента в первую очередь для тех явлений, для которых натурный эксперимент либо невозможен, либо не может быть проведён в необходимом объёме.

В общем случае конструкция, изготовленная из реального материала, находящаяся под действием внешних нагрузок, может иметь много особенностей, включающих в себя несовершенство формы, несплошность и неоднородность свойств материала, особенности в характере внешнего нагружения и т.п. В практических расчетах учесть все имеющиеся особенности конструкции, материала и нагружения невозможно. Конечно, привлечение современных компьютеров расширило возможности учета некоторых из перечисленных выше особенностей, но как бы ни были велики мощности современных ЭВМ, их быстродействие и объем памяти – не безграничны. Поэтому, приступая к практическим расчетам, приходится подменять реальные тела некоторыми идеализированными объектами – «механическими моделями» [1].

Так, например, для описания поведения твердых тел сведения об их атомной структуре не нужны. Реальное твердое тело заменяется воображаемой (модельной) сплошной средой. Среда называется сплошной, если любой объем, выделенный из нее, содержит вещество. Такое представление о сплошной среде противоречит представлению об атомном строении вещества, однако оно чрезвычайно упрощает математическое описание поведения твердых тел под воздействием приложенной нагрузки [1].

Еще одной идеализацией реального твердого тела является присвоение ему свойств однородности. Среда называется однородной, если свойства выделенных из нее малых объемов одинаковы. Естественно, здесь речь идет о тех свойствах, которые определяются посредством механического эксперимента. Известно, что обычный металл или сплав состоит из кристаллических зерен, ориентированных случайным образом. Очевидно, что свойства этих объемов могут быть различными, т.к. металл неоднороден в пределах зерна. Но наличие этих неоднородностей не влияет на поведение металла в изделии, поскольку размеры этих зерен малы по сравнению с размерами изделия, и подобный металл рассматривается как однородная сплошная среда [1].

Определенной идеализации подвергается также и понятие «внешней силы». В механике предполагается, что сила полностью определена, если задан соответствующий

щий вектор, при этом сила рассматривается как результат взаимодействия двух твердых тел. С этой точки зрения вектор силы, действующей на поверхность тела, означает сосредоточенную силу, т.е. силу, приложенную в точке. Однако, в действительности, «сосредоточенных» сил не существует [1].

Идеализированное понятие о точечном контакте двух твердых тел неразрывно связано с идеализацией твердого тела как абсолютно жесткого. При контакте реальные твердые тела деформируются, образуя площадку контакта конечных размеров, по которой давление распределяется непрерывно и неравномерно. Однако у достаточно прочных материалов размеры площадки контакта значительно меньше остальных размеров конструкции, поэтому при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкции вдали от площадки контакта введение идеализированной сосредоточенной силы вполне оправдано. Но при расчете НДС вблизи этой площадки замена распределенного давления сосредоточенной силой приводит к значительным погрешностям [1].

Таким образом, физическая (механическая) модель может быть наделена лишь частью свойств реальной конструкции, а поэтому – проще математическое описание. От того, насколько удачно выбрана физическая модель конструкции, зависит, в конечном итоге, трудоемкость расчета и точность его результатов. Здесь многое зависит от опыта расчетчика, его понимания работы конструкции, умения выделить те характеристики, которые, в основном, и определяют ее работу [1].

При математическом описании поведения конструкции часто приходится вводить дополнительные упрощающие предположения о характере отдельных свойств модели. Этим объясняется, в частности, существование для одной и той же физической модели нескольких математических моделей [1]. Так, например, техническая теория (теория [Бернулли-Эйлера](#) или [Кирхгофа-Клебша](#)) и теория [Сен-Венана](#) (в приложении приведены краткие биографические сведения об учёных, упоминаемых в пособии) для расчета балок на изгиб. Гипотеза плоских сечений, используемая в технической теории, позволяет описывать деформированное состояние балки при помощи меньшего числа параметров. Однако, полученные на ее основе результаты весьма точны для балок, длина которых много больше размеров ее поперечного сечения.

Таким образом, при разработке (построении) моделей приходится идти на компромисс между достаточно полным и адекватным описанием рассматриваемого явления и доступностью (трудоемкостью) расчетов на основе принятых моделей [1].

При расчетах используются как аналитические, так и численные методы. Практическое использование аналитических методов ограничено достаточно простыми геометрическими формами тел и схемами нагружения. Часто обойтись без численных решений практически невозможно. В тоже время построенные численные алгоритмы и программы проверяются на известных точных (аналитических) решениях.

# 1. Краткие теоретические сведения

## 1.1. Механическая постановка плоской задачи теории упругости

На практике приходится встречаться с довольно обширным и очень важным классом задач, в которых на форму тела и на приложенные к нему внешние силы можно наложить определенные ограничения, приводящие к так называемой плоской задаче теории упругости.

Плоская задача теории упругости включает в себя задачи плоской деформации, плоского напряженного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния. Эти задачи, отличающиеся по своей физической сущности, объединяются идентичной математической формулировкой, что позволяет решать их одинаковыми методами [2].

### 1.1.1. Плоская деформация

Рассматривается длинное цилиндрическое или призматическое тело с основаниями (торцами), нормальными к его оси и закрепленными так, что их точки могут свободно (без трения) перемещаться в своей плоскости и не могут перемещаться в направлении оси тела. Внешние силы, приложенные нормально к боковой поверхности тела, равномерно распределены по его длине. Эти поверхностные силы вместе с массовыми силами (если приходится с ними считаться) должны быть самоуравновешенными (статически эквивалентны нулю).

При этих ограничениях в отношении формы тела и воздействий на него, все сечения, перпендикулярные оси (поперечные сечения), остаются плоскими. Перемещения произвольной точки определяются только её координатами в плоскости поперечного сечения и не зависят от положения этого сечения по длине тела. Такая деформация, когда перемещения всех его точек параллельны одной и той же плоскости (плоскости деформации), называется плоской деформацией. Принимая за плоскость деформации плоскость  $(x_1, x_2)$ , перемещения  $u_1$  и  $u_2$  будут функциями  $x_1, x_2$ , а перемещение  $u_3$  будет равно нулю.

На основании этих соображений плоское деформированное состояние характеризуется перемещениями (по сути дела, применяется полуобратный метод Сен-Венана):

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \quad (1.1)$$

Считая систему координат декартовой прямоугольной системой координат, координаты линейного тензора деформаций – дифференциальные зависимости [Коши](#) (деформации-перемещения):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \theta &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \equiv \theta_1, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\ \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соответственно координаты тензора напряжений однородного изотропного линейно упругого тела (закон [Гука](#))

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta_1 = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{31} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия на торцах тела определяются их закреплением, которое приводит к возникновению на торцах тела и в его поперечных сечениях напряжений  $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2)$ . Наличие этих напряжений обуславливает плоское деформированное состояние (плоскую деформацию) тела [2].

### 1.1.2. Плоское напряженное состояние

Аналогично плоской деформации рассматривается длинное призматическое тело, находящееся под действием самоуравновешенных внешних поверхностных и массовых сил. Причем поверхностные силы приложены нормально к боковой поверхности тела. В отличие от плоской деформации торцы тела – свободны по всем направлениям.

По определению [2], тело будет находиться в плоском напряженном состоянии, если во всех его поперечных сечениях

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0. \quad (1.4)$$

В данном случае в отличие от плоской деформации перемещения  $u_1, u_2, u_3$ , а следовательно и  $\sigma_{kn}$  ( $k, n = 1, 2$ ) зависят от всех трех координат  $x_1, x_2, x_3$ , т.е. задача о плоском напряженном состоянии является трехмерной [2].

### 1.1.3. Обобщенное плоское напряженное состояние

Рассматривается тонкая пластинка толщиной  $2h$ , нагруженную только по ее толщине нормальными поверхностными силами, симметричными относительно срединной плоскости пластины, с которой совмещена координатная плоскость  $Ox_1x_2$ . При таком нагружении пластины в ее внутренних точках все компоненты тензора напряжений, вообще говоря, будут отличны от нуля.

Как показал [Файлон](#), малость толщины пластины по сравнению с ее размерами приводит к тому, что зависимость напряжений от третьей координаты  $x_3$  можно считать несущественной. Это позволяет сделать важное обобщение задачи о плоском напряженном состоянии, приводящее в случае тонкой пластины к двумерной задаче. Основная идея Файлона состоит в том, что знание средних значений компонент тензора напряжений и вектора перемещений по малой толщине пластины равноценно знанию их действительных значений в каждой точке [2].

Учитывая условия отсутствия нагружения на торцевых плоскостях пластины

$$\sigma_{31}|_{x_3=\pm h} = \sigma_{32}|_{x_3=\pm h} = \sigma_{33}|_{x_3=\pm h} = 0, \quad (1.5)$$

а так же учитывая симметричность относительно срединной плоскости нагружения по толщине пластины и заменяя компоненты тензора напряжений  $\sigma_{kn}$  их средними значениями  $\hat{\sigma}_{kn}$

$$\hat{\sigma}_{kn} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{kn} dx_3, \quad (1.6)$$

получим, что отличными от нуля и независимыми от третьей координаты  $x_3$  будут только компоненты  $\sigma_{kn}$  ( $k, n = 1, 2$ ).

Таким образом, при осреднении компонент тензора напряжений рассматриваемая пластина приближенно будет находиться в плоском напряженном состоянии, которое принято называть обобщенным плоским напряженным состоянием [2].

## 1.2. Дифференциальная постановка

### 1.2.1. Плоская задача в декартовых координатах

Исходя из определений, данных для плоской деформации, плоского напряженного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния, приведем основные дифференциальные соотношения плоской задачи теории упругости. В таблице 1.1 (см. стр. **Ошибка! Залка не определена.**) приведены соотношения, различающиеся в зависимости от вида плоской задачи, далее по тексту – соотношения, имеющие одинаковый вид. Также, используются обозначения:  $\theta_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ ,  $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ ,  $\hat{\theta}_1 = \hat{\varepsilon}_{11} + \hat{\varepsilon}_{22}$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные [Ламе](#),  $\nu$  – коэффициент [Пуассона](#) (коэффициент поперечной деформации).

Обратные соотношения закона Гука для однородного изотропного тела, определяющие деформации по координатам тензора напряжений, могут быть представлены единообразными формулами для всех видов плоских задач теории упругости:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12}, \quad (1.7)$$

где  $\nu$  необходимо заменить на  $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$  для плоского и обобщенного плоского напряженного состояния, а также для обобщенного плоского напряженного состояния  $\varepsilon_{kn}$ ,  $\sigma_{kn}$ , ( $k, n = 1, 2$ ) считать осредненными величинами  $(\varepsilon, \sigma) \equiv (\hat{\varepsilon}, \hat{\sigma})$ .

Учитывая (1.11), дифференциальные уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1^V = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^V = 0, \quad (1.8)$$

где  $f_1^V$ ,  $f_2^V$  – координаты вектора объёмной силы,  $(f_1^V, f_2^V) \equiv (\hat{f}_1^V, \hat{f}_2^V)$  – для обобщенного плоского напряженного состояния.



Таблица 1.1.  
Соотношения, зависящие от вида плоской задачи

Плоская деформация	Плоское напряженное состояние	Обобщенное плоское напряженное состояние	
Координаты вектора перемещений			
$u_1 = u_1(x_1, x_2),$ $u_2 = u_2(x_1, x_2),$ $u_3 \equiv 0,$	$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3),$ $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3),$ $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3),$	$\hat{u}_1 = \hat{u}_1(x_1, x_2),$ $\hat{u}_2 = \hat{u}_2(x_1, x_2),$ $\hat{u}_3 \equiv 0,$	(1.9)
Координаты линейного тензора деформации			
$\varepsilon_{11} = u_{1,1},$ $\varepsilon_{22} = u_{2,2},$ $\varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0,$ $2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1},$ $2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0,$ $2\varepsilon_{31} = u_{3,1} + u_{1,3} = 0,$	$\varepsilon_{11} = u_{1,1},$ $\varepsilon_{22} = u_{2,2},$ $\varepsilon_{33} = u_{3,3} = -\theta_1 \lambda^* / (2\mu),$ $2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1},$ $2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0,$ $2\varepsilon_{31} = u_{3,1} + u_{1,3} = 0,$	$\hat{\varepsilon}_{11} = \hat{u}_{1,1},$ $\hat{\varepsilon}_{22} = \hat{u}_{2,2},$ $\hat{\varepsilon}_{33} = -\hat{\theta}_1 \lambda^* / (2\mu),$ $2\hat{\varepsilon}_{12} = \hat{u}_{1,2} + \hat{u}_{2,1},$ $2\hat{\varepsilon}_{23} = 0,$ $2\hat{\varepsilon}_{31} = 0,$	(1.10)
Закон Гука для однородного изотропного тела (соотношения, определяющие компоненты тензора напряжений по деформациям)			
$\sigma_{11} = \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{11},$ $\sigma_{22} = \lambda\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{22},$ $\sigma_{33} = \lambda\theta_1 =$ $\quad = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$ $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$ $\sigma_{23} = 0,$ $\sigma_{31} = 0,$	$\sigma_{11} = \lambda^*\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{11},$ $\sigma_{22} = \lambda^*\theta_1 + 2\mu\varepsilon_{22},$ $\sigma_{33} \equiv 0,$ $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$ $\sigma_{23} \equiv 0,$ $\sigma_{31} \equiv 0,$		(1.11)
		$(\sigma, \varepsilon, \theta) \equiv (\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\theta})$	

Статические граничные условия на боковой поверхности рассматриваемого тела сводятся к условиям на контуре  $L$  его поперечного сечения (срединной плоскости)

$$n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} = f_1^S, \quad n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} = f_2^S, \quad (1.12)$$

где  $n_1, n_2$  – координаты вектора внешней нормали к контуру  $L$ ;  $f_1^S, f_2^S$  – координаты вектора поверхностной силы,  $(f_1^S, f_2^S) \equiv (\hat{f}_1^S, \hat{f}_2^S)$  – для обобщенного плоского напряженного состояния.

В случае отсутствия массовых сил решение плоской задачи теории упругости в напряжениях сводится к определению функций  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ , которые должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (1.13)$$

а так же граничным условиям и условиям совместности (уравнениям [Бельтрами](#)) [2].

Если массовые силы соизмеримы с поверхностными силами и их необходимо учитывать, то эту, более общую, задачу можно свести также к однородным уравнениям равновесия (1.13), используя частное решение неоднородных уравнений равновесия (1.8). Частное решение при обычно встречающихся на практике массовых силах (собственный вес, силы инерции) находится весьма просто [2].

### 1.2.2. Функция напряжений

Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях для трех неизвестных функций  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия (1.13), сводится к решению задачи для одной функции  $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ , которая связана с напряжениями соотношениями

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.14)$$

Непосредственной подстановкой соотношений (1.14) легко убедиться, что уравнения (1.13) удовлетворяются тождественно.

Введенная таким образом функция  $\Phi$  называется функцией напряжений или функцией [Эри](#).

Чтобы функции  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  были не только статически возможными, но и реализуемыми в линейно-упругом теле, они кроме уравнений равновесия должны еще удовлетворять условиям совместности в форме однородных уравнений Бельтрами, из которых вытекает следующее уравнение для функции напряжений:

$$\Delta \Delta \Phi \equiv \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0, \quad (1.15)$$

которое называется бигармоническим уравнением, а удовлетворяющая ему функция  $\Phi$  – бигармонической функцией ( $\Delta$  – оператор [Лапласа](#)).

Граничные условия для функции напряжений  $\Phi$  на контуре  $L$  могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = f_1^S, \quad -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = f_2^S, \quad (1.16)$$

где  $s$  – длина дуги контура  $L$ .

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к определению бигармонической функции напряжений, которая должна удовлетворять условиям (1.16) на контуре  $L$ .

### 1.2.3. Плоская задача в полярных координатах

В некоторых случаях при решении плоских задач выгодно использовать полярные координаты:  $r$  – расстояние от полюса до точки полярной плоскости,  $\varphi$  – угол между полярной осью и направлением из полюса на точку полярной

плоскости (положительный против часовой стрелки относительно нормали к полярной плоскости). Считая плоскость  $Ox_1x_2$  полярной плоскостью, совмещая полюс с началом декартовой прямоугольной системой координат, а полярную ось – с осью  $Ox_1$ , полярные координаты будут связаны с декартовыми координатами равенствами:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi. \quad (1.17)$$

Зависимости между координатами тензора напряжений в декартовых координатах и в полярных координатах определяются равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{r\varphi} \cos 2\varphi + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Обратные зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{12} \cos 2\varphi - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Принимая объёмные силы равными нулю, дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Зависимости между координатами тензора деформации и координатами вектора перемещения в полярных координатах:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \quad (1.21)$$

Уравнения закона Гука в ортогональных криволинейных координатах имеют такой же вид, как и в декартовых координатах. Поэтому в случае плоской деформации в соответствии с (1.7):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}], \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2\mu} [(1 - \nu)\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}], \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

а в случае плоского и обобщённого плоского напряжённого состояния  $\nu$  необходимо заменить на  $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$ , также для обобщенного плоского напряжённого состояния  $(\varepsilon, \sigma)$  считать осреднёнными величинами  $(\varepsilon, \sigma) \equiv (\hat{\varepsilon}, \hat{\sigma})$ .

Через функцию напряжений Эри координаты тензора напряжений в полярных координатах определяются по формулам:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \quad (1.23)$$

где  $\Phi = \Phi(r, \varphi)$  – функция Эри в полярных координатах.

Чтобы функции определяющие напряжения удовлетворяли условиям совместности Бельтрами, функция Эри должна подчиняться бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta \Phi(r, \varphi) = 0. \quad (1.24)$$

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta \Phi(r, \varphi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Phi, \quad (1.25)$$

поэтому бигармоническое уравнение можно записать так:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (1.26)$$

### 1.3. Теорема Леви-Мичелла

Напряжения в плоской задаче, когда на контуре  $L$  заданы внешние силы, определяются формулами (1.14) в зависимости от функции Эри, которая должна удовлетворять бигармоническому уравнению (1.15) и граничным условиям (1.16). Во все эти уравнения не входят упругие постоянные материала. Это обстоятельство позволило [Морису Леви](#) сформулировать следующую теорему: *распределение напряжений в плоской задаче при данном нагружении на контуре является одинаковым для всех изотропных материалов.*

Эта теорема, как показал [Дж. Мичелл](#), справедлива для односвязных областей, а в случае многосвязных областей она имеет место лишь тогда, когда *главные векторы внешних сил, приложенных к каждому отдельному контуру, равны нулю.*

Теорема Леви-Мичелла является основой оптического метода исследования напряжений, так как согласно этой теореме вместо изучения напряжений в изотропных металлических телах можно изучать напряжения в прозрачных изотропных телах, оптически чувствительных к возникающим в них напряжениям.

### 1.4. Вариационная постановка

Обычно дифференциальные уравнения в частных производных интегрируются в конечном виде лишь в исключительных случаях. Поэтому от диффе-

ренциальной постановки задачи бывает удобно перейти к вариационной постановке, в которой требуется определить экстремум некоторого функционала. Такие задачи называются вариационными задачами.

Решение вариационной задачи эквивалентно решению граничной задачи для дифференциального уравнения, которое в этом случае является уравнением Эйлера для данного функционала [2].

В теории упругости рассматриваются преимущественно две вариационных постановки, основанные на принципе минимума потенциальной энергии и принципе минимума дополнительной работы.

Принцип минимума потенциальной энергии называют принципом [Лагранжа](#). При его использовании для линейно-упругого тела функционал Лагранжа имеет вид

$$J_L(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) = \iiint_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V \mathbf{f}^V \cdot \mathbf{u} dV - \iint_{S_f} \mathbf{f}^S \cdot \mathbf{u} dS \quad (1.27)$$

и представляет собой функционал, зависящий от компонент вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и их производных. Здесь  $V$  – объем, занимаемый телом;  $S_f$  – часть внешней поверхности тела, на которой заданы статические граничные условия;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций;  $\mathbf{f}^V$  – объёмные воздействия;  $\mathbf{f}^S$  – поверхностные воздействия;  $\cdot$  – скалярное умножение;  $\cdot\cdot$  – двойное скалярное умножение.

Величина  $J_L$  равна разности потенциальной энергии деформации линейно-упругого тела и работы приложенных к нему консервативных внешних сил на кинематически возможных перемещениях и называется потенциальной энергией системы [2].

Принцип минимума потенциальной энергии утверждает, что из всех кинематически возможных перемещений, т.е. удовлетворяющих условию сплошности тела и принимающих заданные значения на части внешней поверхности тела  $S_u = \partial V \setminus S_f$ , действительными будут те, при которых функционал  $J_L$  имеет минимум.

Уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , реализующего минимум функционала  $J_L$ , являются уравнения равновесия в перемещениях и статические граничные условия на поверхности  $S_f$  [2].

При использовании принципа минимума дополнительной работы, который называют принципом [Кастильяно](#), для линейно-упругого тела функционал Кастильяно имеет вид

$$J_C(\boldsymbol{\sigma}) = \iiint_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iint_{S_u} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} dS \quad (1.28)$$

и представляет собой функционал, зависящий от компонент тензора напряжений  $\sigma$ ,  $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \sigma$  – вектор напряжений;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности. Здесь  $V$  – объем, занимаемый телом,  $S_u$  – часть внешней поверхности тела, на которой заданы кинематические граничные условия.

Принцип минимума дополнительной работы утверждает, что из всех статически возможных напряженных состояний тела при заданных внешних силах в действительности реализуется то напряженное состояние, для которого функционал  $J_C$  над тензором напряжений  $\sigma$ , называемый дополнительной работой, имеет минимум.

Уравнениями Эйлера для функционала  $J_C$  являются уравнения равновесия в напряжениях (уравнения Бельтрами-Мичелла), а также кинематические граничные условия на части  $S_u$  поверхности тела, как естественные граничные условия [2].

## 1.5. Методы решения

Для решения плоской задачи теории упругости требуется найти такую функцию  $\Phi(x_1, x_2)$ , которая во всех точках внутри тела удовлетворяет бигармоническому уравнению (1.15), а на границе тела – условиям на поверхности (1.16).

Для нахождения функции напряжений Эри  $\Phi(x_1, x_2)$  можно воспользоваться полуобратным методом Сен-Венана, который заключается в следующем: задаётся аналитический вид функции напряжений с произвольными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются из условий на поверхности.

При решении "плоской задачи для прямоугольных пластин и длинных прямоугольных полос естественно использовать прямоугольные координатные оси, направленные параллельно сторонам пластины. В этом случае граничные условия на прямоугольном контуре существенно упрощаются.

Однако отыскание бигармонической функции Эри, удовлетворяющей даже простым граничным условиям обычно вызывает затруднения. Поэтому иногда обращаются к решениям обратной задачи. Задаваясь различными бигармоническими функциями, определяют, какому виду нагружения они соответствуют. Имея набор таких решений, путем их линейного комбинирования можно установить вид функции Эри, соответствующей данному конкретному нагружению пластины.

### 1.5.1. Решение в полиномах

Для простых (прямоугольных) контуров, если условия на краях могут быть представлены целыми алгебраическими функциями, функцию напряжений можно брать в виде полиномов. В 1901 г. [Менаже](#) предложил в этом случае задаваться функцией Эри в виде полиномов различных степеней. Это позволило получить решения для некоторых практически важных задач.

Возьмём для функции Эри полином второй степени

$$\Phi(x, y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{cy^2}{2}. \quad (1.29)$$

Функция такого вида удовлетворяет бигармоническому уравнению тождественно, а соответствующие напряжения

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = c, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = a, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -b. \quad (1.30)$$

тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия.

Так как коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  совершенно произвольны, то можно подобрать их так, чтобы получить простое растяжение или сжатие в направлении осей  $x$  или  $y$ , а также чистый сдвиг в плоскости  $(x, y)$ .

Полиномы до третьего порядка включительно удовлетворяют бигармоническому уравнению тождественно. Начиная с полинома четвёртой степени, бигармоническое уравнение накладывает некоторое условие на произвольные коэффициенты, входящие в представление функции напряжений Эри. Это условие и условия на границе области необходимы для определения произвольных коэффициентов.

С помощью такого подхода решены задачи: изгиб консоли силой, приложенной к свободному концу [2, 3]; изгиб двухопорной балки равномерно распределённой нагрузкой [2, 3]; изгиб консоли равномерно распределённой нагрузкой [2]; о напряжённом состоянии треугольной подпорной стенки [3]; и др.

### 1.5.2. Решение с помощью тригонометрических рядов

Рассмотренное Менаже решение плоской задачи для прямоугольной полосы при помощи функции Эри в вида алгебраических полиномов имеет ограниченные возможности. Оно применимо для случаев непрерывной нагрузки на кромках полосы и практически при сравнительно простом законе ее изменения.

Произвольное распределение поверхностных сил  $\varphi(x)$ , заданное в промежутке  $(-l, +l)$ , на кромках  $(y = \pm h/2)$  полосы  $(|y| \leq h/2)$  можно представить разложением в тригонометрический ряд. Тогда, очевидно, и функцию Эри следует разыскивать в виде тригонометрических рядов.

Первые исследования в этом направлении были предприняты [Рибьером](#) (1898) и получили дальнейшее развитие в работах Файлона (1903).

Общее выражение для функции Эри представляется в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n^{(1)}(y) \cos \lambda_n x + f_n^{(2)}(y) \sin \lambda_n x \right]. \quad (1.31)$$

где  $\lambda_n = n\pi/l$ ,  $n$  – любое целое число,  $f_n^{(1)}(y)$ ,  $f_n^{(2)}(y)$  – функции только координаты  $y$ . Рибьер предложил находить функцию Эри в виде ряда по  $\cos$ , Файлон – по  $\sin$ .

Подставив выражение (1.31) в бигармоническое уравнение, для определения функций  $f_n^{(1)}(y)$ ,  $f_n^{(2)}(y)$ , получим обыкновенные дифференциальные уравнения следующего вида:

$$\frac{d^4 g}{dy^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 g}{dy^2} + \lambda^2 g = 0, \quad (1.32)$$

где функция  $g(y)$  представляет либо  $f_n^{(1)}(y)$ , либо  $f_n^{(2)}(y)$ ;  $\lambda = \lambda_n$ . Общее решение этого уравнения известно и имеет следующий вид:

$$g(y) = (C_1 + C_2 y)e^{\lambda y} + (C_3 + C_4 y)e^{-\lambda y}. \quad (1.33)$$

Если выразить показательные функции через гиперболические, то (1.33) примет вид

$$g(y) = A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y + y(C \operatorname{ch} y + D \operatorname{sh} y). \quad (1.34)$$

Неизвестные функции в (1.31) принимают вид

$$f_n^{(i)}(y) = A_n^{(i)} \operatorname{ch} y + B_n^{(i)} \operatorname{sh} y + y(C_n^{(i)} \operatorname{ch} y + D_n^{(i)} \operatorname{sh} y). \quad (1.35)$$

где  $A_n^{(i)}$ ,  $B_n^{(i)}$ ,  $C_n^{(i)}$ ,  $D_n^{(i)}$  – произвольные постоянные, ( $i = 1, 2$ ;  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ).

Напряжения, соответствующие функции (1.31), на основании (1.14)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 f_n^{(1)}}{dy^2} \cos \lambda_n x + \frac{d^2 f_n^{(2)}}{dy^2} \sin \lambda_n x \right], \\ \sigma_{22} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left[ f_n^{(1)}(y) \cos \lambda_n x + f_n^{(2)}(y) \sin \lambda_n x \right], \\ \sigma_{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[ \frac{df_n^{(1)}}{dy} \sin \lambda_n x - \frac{df_n^{(2)}}{dy} \cos \lambda_n x \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Постоянные  $A_n^{(i)}$ ,  $B_n^{(i)}$ ,  $C_n^{(i)}$ ,  $D_n^{(i)}$ , содержащиеся в выражениях напряжений (1.36), определяются из граничных условий.

Примеры, поясняющие применение этого решения, содержатся в работах [2, 3].

### 1.5.3. Решение с помощью функций комплексного переменного

Многие плоские задачи теории упругости предпочтительно решать, используя функции комплексного переменного [2, 4].

Вместо декартовых координат  $x$ ,  $y$  за независимые переменные принимаются комплексные переменные:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (1.37)$$

Тогда функцию напряжений  $\Phi$  можно рассматривать как сложную функцию от независимых переменных  $x$ ,  $y$ . По правилам дифференцирования сложных функций имеем:



$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Phi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \Phi\end{aligned}\quad (1.38)$$

Производные второго порядка определяются равенствами

$$\begin{aligned}\Phi_{,xx} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \Phi, \\ \Phi_{,yy} &= - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \Phi, \\ \Phi_{,xy} &= i \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \Phi.\end{aligned}\quad (1.39)$$

Тогда двумерный оператор Лапласа

$$\Delta \Phi = \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (1.40)$$

и бигармоническое уравнение представляется следующим образом:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0. \quad (1.41)$$

Общий интеграл бигармонического уравнения (1.15) и соответственно уравнения (1.41) представляется через три гармонические функции:

$$\Phi(x, y) = xp + yq + p_1. \quad (1.42)$$

где  $p$  и  $q$  – гармонические сопряжённые<sup>1</sup> функции и

$$\varphi(z) = p + iq \quad (1.43)$$

будет аналитической функцией комплексного переменного (действительная и мнимая части подчиняются условиям Коши-Римана). В представлении (1.42) функции Эри гармоническую функцию  $p_1$  можно рассматривать как действительную часть аналитической функции комплексного переменного

$$\chi(z) = p_1 + iq_1. \quad (1.44)$$

Очевидно, что действительная часть комплекснозначной функции

$$(x - iy)(p + iq) + p_1 + iq_1 \quad (1.45)$$

совпадает с правой частью равенства (1.42), т.е. функцию напряжений можно представить в виде

$$\Phi(z, \bar{z}) = \text{Re}[\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)]. \quad (1.46)$$

Известно, что некоторой аналитической функции  $\omega(z)$  соответствует ей сопряжённая функция  $\overline{\omega(z)}$ , которая получается из функции  $\omega(z)$  в результате

<sup>1</sup> Функции  $p$  и  $q$  называются сопряжёнными, если они удовлетворяют условиям Коши-Римана:  $p_{,x} = q_{,y}$ ,  $p_{,y} = -q_{,x}$ .

замены  $z$  на  $\bar{z}$ , а также замены всех постоянных коэффициентов сопряжёнными им величинами; другими словами,  $\overline{\omega(z)}$  получается из  $\omega(z)$ , если всюду  $i$  заменить на  $-i$ . Используются еще и такие обозначения;  $\bar{\omega}(z)$  и  $\omega(\bar{z})$ , имеющие следующий смысл; функция  $\bar{\omega}(z)$  получается из  $\omega(z)$  заменой только коэффициентов на сопряженные, а функция  $\omega(\bar{z})$  – путем замены только  $z$  на  $\bar{z}$ .

По определению

$$\overline{\omega(z)} = \bar{\omega}(\bar{z}). \quad (1.47)$$

Очевидно, что

$$\omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z}) = 2 \operatorname{Re} \omega(z). \quad (1.48)$$

Для функции  $[\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)]$  ей сопряжённая функция будет  $[z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z})]$  и, следовательно, на основании (1.48) равенство (1.46) может быть представлено так:

$$2 \Phi(z, \bar{z}) = \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}). \quad (1.49)$$

Равенство (1.49), которое называется формулой [Гурса](#), являясь общим интегралом уравнения (1.41), выражает собой представление функции напряжений через две аналитические функции комплексного переменного  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$ .

В соответствии с (1.14), (1.40) и (1.49)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = \Delta \Phi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} = \\ &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z). \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= \Phi_{,yy} - \Phi_{,xx} - 2i\Phi_{,xy} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \\ &= 2[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Отделив действительную и мнимую части в (1.51) можно получить выражения для  $(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$  и  $2\sigma_{xy}$ , которые вместе с равенством (1.50) позволяют определить напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \operatorname{Re}[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)], \\ \sigma_{yy} &= 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) + \operatorname{Re}[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)], \\ \sigma_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

В случае плоской деформации перемещения определяются через те же две аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  [2]:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re}[\kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})], \\ u_y &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im}[\kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

где коэффициент  $\kappa = 3 - 4\nu$ .

В случае плоского и обобщённого плоского напряжённых состояний в формулах (1.53) вместо  $(3 - 4\nu)$  нужно принять  $(3 - 4\nu^*)$ , где  $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$ .

Формулы (1.50), (1.51), (1.53) получены [Г.В. Колосовым](#).

Поскольку в формулы Колосова входят только первая и вторая производные функции  $\chi(z)$ , удобно ввести обозначение

$$\chi'(z) = \psi(z). \quad (1.54)$$

и записать эти формулы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \operatorname{Re}[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)], \\ \sigma_{yy} &= 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) + \operatorname{Re}[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)], \\ \sigma_{xy} &= \operatorname{Im}[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re}[\kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \bar{\psi}(z)], \\ u_y &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im}[\kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \bar{\psi}(z)]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Аналитические комплексные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , через которые представляются напряжения и перемещения, называют функциями Колосова-Мусхелишвили.

Для конечной многосвязной области с наружным контуром  $L_0$  и внутренними контурами  $L_k$  установлено [2], что аналитические комплексные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{P_{1k} + iP_{2k}}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z - z_k) + \varphi_1(z), \\ \psi(z) &= \kappa \frac{P_{1k} - iP_{2k}}{2\pi(1 + \kappa)} \ln(z - z_k) + \psi_1(z), \end{aligned} \quad (1.57)$$

где  $P_{1k}, P_{2k}$  – координаты главного вектора внешних сил, приложенных к контуру  $L_k$ ;  $z_k$  – произвольная точка внутри контура  $L_k$ ;  $\varphi_1(z), \psi_1(z)$  – голоморфные, т.е. однозначные аналитические функции. Если к другим внутренним контурам приложены также неуравновешенные силы, то соответствующие логарифмические члены суммируются.

В случае бесконечной многосвязной области, которую можно рассматривать как предельный случай конечной многосвязной области, наружный контур  $L_0$  которой целиком уходит в бесконечность, формулы, полученные для конечной многосвязной области, будут справедливы для любой конечной части рассматриваемой области и поведение функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  будет отличаться только в окрестности бесконечно удаленной точки. Выяснение этих особенностей приводит к следующему виду функций

$$\varphi(z) = -\frac{P_1 + iP_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \varphi^*(z), \quad (1.58)$$

$$\psi(z) = \kappa \frac{P_1 - iP_2}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \psi^*(z),$$

где  $P_1, P_2$  – координаты главного вектора всех внешних сил, приложенных к контурам  $L_k$ ;  $\varphi^*(z), \psi^*(z)$  – функции, голоморфные вне окружности  $L$ , охватывающей все внутренние контуры  $L_k$ . Следовательно, функции  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$  можно представить в кольце  $L < z < L_0$  ( $L_0$  – бесконечно большая окружность) сходящимися рядами Лорана:

$$\varphi^*(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \psi^*(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n z^n. \quad (1.59)$$

Требование, чтобы компоненты тензора напряжений на бесконечности были ограниченными, приводит к следующему виду функций

$$\varphi^*(z) = a_1 z + \varphi_0(z), \quad \psi^*(z) = b_1 z + \psi_0(z), \quad (1.60)$$

где  $a_1 = \alpha_0 + i\alpha_1, b_1 = \beta_0 + i\beta_1$  – постоянные, а функции

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad \psi_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{-n} z^{-n} \quad (1.61)$$

являются голоморфными вне окружности  $L$ , включая бесконечную точку.

Не изменяя тензора напряжений, можно принять  $\alpha_1 = 0$ .

При таком представлении функций Колосова-Мусхелишвили распределение напряжений в бесконечно удалённых областях будет равномерным:

$$\sigma_{xx}^\infty = 2\alpha_0 - \beta_0, \quad \sigma_{yy}^\infty = 2\alpha_0 + \beta_0, \quad \sigma_{xy}^\infty = \beta_1. \quad (1.62)$$

Перемещения на бесконечности будут равны нулю при условии, главный вектор сил, приложенных к контурам области, равен нулю и напряжения на бесконечности равны нулю.

Примеры решения плоских задач приведены в работе [2]: плоскость с круговым отверстием, к контуру которого приложено равномерное давление; действие на плоскость сосредоточенного момента; действие на плоскость сосредоточенной силы; одностороннее растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача [Кирша](#)); пластина с малым круговым отверстием при нагружении в двух направлениях. Также в [2] с использованием конформных отображений приведены решения задач: круг с заданными воздействиями по контуру; круглая пластина, нагруженная по контуру совокупностью сосредоточенных сил; бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием и заданными воздействиями по контуру отверстия; одноосное растяжение пластины с эллиптическим отверстием; всестороннее растяжение пластины с эллиптическим отверстием.

Теория и методы аналитического решения «двумерных» задач теории упругости методами функций комплексного переменного изложены в учебном пособии [4]. В работе [5] приведено решение задачи одноосного растяжения бесконечной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием; приведены за-

дания для самостоятельного освоения методов теории функций комплексного переменного в теории упругости.

#### **1.5.4. Численные методы решения**

Аналитические методы, базирующиеся на математических методах решения краевых задач, обычно сложных и трудоемких, а также классические приближенные методы: [Ритца](#), [Канторовича](#), [Бубнова-Галеркина](#) и т.д. – позволяют найти решение лишь для сравнительно простых областей (геометрических форм тел) и схем нагружения. Существенно более универсальными, более гибкими, в частности в отношении геометрии области, являются метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов. Однако эти методы требуют выполнения большого числа однотипных арифметических операций. Возникающие при этом трудности преодолеваются с помощью компьютеров и совершенствованием вычислительных алгоритмов [2].

В отличие от метода конечных разностей, представляющего собой приближенный метод, который аппроксимирует дифференциальные уравнения рассматриваемой задачи разностными уравнениями, МКЭ связан с приближенной минимизацией функционала той же задачи в вариационной постановке.

Для решения вариационных задач используются как классические вариационные методы, так и численные методы, такие как вариационно-разностный метод и метод конечных элементов (МКЭ).

#### **1.5.5. Общее представление о методе конечных элементов**

МКЭ возник (1950) как метод решения задач строительной механики и теории упругости, а уже потом был обоснован математиками, которые часто называют данный метод вариационно-разностным. Существенный толчок в своем развитии МКЭ получил после того, как было доказано (1963), что этот метод можно рассматривать как один из вариантов известного в строительной механике метода Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений [1].

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать кусочно-непрерывными функциями, которые строятся на значениях рассматриваемой непрерывной величины в конечном числе точек (узлов) небольших частей (элементов) области определения непрерывной величины.

Применительно к задачам механики деформируемого твердого тела, МКЭ в общих чертах состоит в следующем:

1. Область, занимаемая рассматриваемым телом, мысленно разделяется на ряд простых по форме конечных подобластей, которые называются конечными элементами. В случае плоской задачи за конечные элементы

(КЭ) чаще всего принимают треугольники или четырехугольники, а в случае пространственной задачи – тетраэдры или гексаэдры. Эти элементы имеют общие узловые точки (узлы) и в совокупности аппроксимируют форму области.

2. Предполагается, что КЭ взаимодействуют между собой лишь в узлах, т.е. в вершинах многоугольников или многогранников.
3. За основные неизвестные принимаются перемещения узлов.
4. Выбирается система функций, однозначно определяющая перемещения в пределах рассматриваемого КЭ в зависимости от перемещений его узлов. Аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Для каждого элемента можно выбрать свою систему функций, но они выбираются таким образом, чтобы сохранить непрерывность рассматриваемой величины вдоль границ элементов. Эти функции называют «функциями формы».
5. Зная перемещения любой точки внутри КЭ, на основании дифференциальных зависимостей Коши (деформации-перемещения) и закона Гука (напряжения-деформации) можно получить выражения для компонент тензора деформации и тензора напряжений.
6. Возникающее напряженно-деформированное состояние элемента рассматривается как результат действия узловых сил, которые должны быть статически эквивалентны напряжениям на границе элемента.
7. Внешние воздействия (распределенную по границе области нагрузку, сосредоточенные силы) заменяются статически эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными к граничным узлам.
8. Применяя принцип возможных перемещений, приходим к соотношениям, представляющим собой определение минимума (в случае линейно-упругого тела) потенциальной энергии системы среди возможных перемещений заданной формы внутри конечных элементов

В такой постановке МКЭ имеет сходство с методом Ритца. Разница состоит в способе выбора координатных функций. В методе Ритца они задаются определенными во всей области через некоторые параметры, а в МКЭ – в пределах элемента через узловые перемещения. Если в методе Ритца изменение любой из координатных функций вызывает изменение перемещений по всей области тела, то в МКЭ изменение любого из узловых перемещений сказывается на перемещениях лишь внутри конечных элементов, сходящихся в этом узле. В частности, поэтому применение метода Ритца ограничивается относительно простыми формами расчетной области, а в МКЭ простую геометрию должны иметь лишь конечные элементы [2].

## 2. Задача Кирша

Прямоугольная пластина значительных размеров (длина  $2l$ , ширина  $2h$ ) с малым круговым отверстием радиуса  $a$  в её центральной части подвергается равномерному растяжению нагрузкой интенсивностью  $p$  в направлении оси  $Ox$ . Воздействия на контуре отверстия отсутствуют.

Начало координат расположим в центре пластины, координата  $x$  изменяется от  $-l$  до  $l$ , координата  $y$  – от  $-h$  до  $h$ .

При отсутствии отверстия во всех точках пластины появились бы напряжения

$$\sigma_{xx} = p, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (2.1)$$

Этим напряжениям соответствует функция напряжений

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} p y^2. \quad (2.2)$$

Наличие малого отверстия меняет распределение напряжений в точках, расположенных вблизи отверстия и почти не влияет на напряжения в точках удалённых от него. Местные напряжения быстро затухают, а следовательно, в точках, расстояние которых от отверстия велико по сравнению с  $a$ , изменения будут незначительными. Проведя окружность достаточно большого радиуса  $R$ , можно считать, что напряжения в точках вне этой окружности не изменяются от наличия отверстия.

Учитывая, что основные изменения напряжённого состояния происходят внутри кольца ( $a \leq x^2 + y^2 \leq R$ ), удобно рассмотреть задачу в полярных координатах, связанных с декартовыми координатами соотношениями (1.17)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Функция напряжений (2.2) в полярных координатах принимает вид:

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{2} p r^2 \sin^2 \varphi. \quad (2.4)$$

"Это представление может быть преобразовано к следующему виду:

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{4} p r^2 (1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{4} p r^2 + \frac{1}{4} p r^2 \cos 2\varphi. \quad (2.5)$$

Напряжения в сплошной пластине в полярных координатах будут иметь вид:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p \cos 2\varphi, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} p \cos 2\varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{2} p \sin 2\varphi. \quad (2.6)$$

На основании изложенного и применяя полуобратный метод Сен-Венана, для пластинки с отверстием рассмотрим функцию напряжений Эри следующего вида:

$$\Phi(r, \varphi) = f(r) + g(r) \cos 2\varphi, \quad (2.7)$$

где  $f(r)$ ,  $g(r)$  – произвольные функции, зависящие только от координаты  $r$ .

Бигармоническое уравнение (1.26), которому должна удовлетворять функция Эри, приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r) + \\ & + \left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) g(r) \right] \cos 2\varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

которое будет выполняться тождественно при произвольном  $\varphi$ , если функции  $f(r)$  и  $g(r)$  будут являться решениями соответствующих уравнений:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r) = 0, \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) g(r) = 0. \quad (2.10)$$

Это обыкновенные однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера.

Общее решение уравнения (2.9)

$$f(r) = (A + B \ln r) + (C + D \ln r)r^2. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.10)

$$g(r) = \frac{E}{r^2} + F + Gr^2 + Hr^4. \quad (2.12)$$

Функция напряжений Эри будет иметь вид:

$$\Phi(r, \varphi) = (A + B \ln r) + (C + D \ln r)r^2 + \left( \frac{E}{r^2} + F + Gr^2 + Hr^4 \right) \cos 2\varphi. \quad (2.13)$$

Напряжения определяются по формулам (1.23):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{B}{r} + 2Cr + D(2r \ln r + r) + \left( -\frac{2E}{r^3} + 2Gr + 4Hr^3 \right) \cos 2\varphi \right] - \\ & \quad - \frac{4}{r^2} \left( \frac{E}{r^2} + F + Gr^2 + Hr^4 \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \\ &= -\frac{B}{r^2} + 2C + D(2 \ln r + 3) + \left( \frac{6E}{r^4} + 2G + 12Hr^2 \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \left( -\frac{3E}{r^4} - \frac{F}{r^2} + G + 3Hr^2 \right) 2 \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (2.14)$$



Как уже отмечалось, при достаточно больших значениях  $r$  напряжения в пластинке с отверстием (2.14) должны быть близки к напряжениям в сплошной пластинке (2.6).

В выражениях напряжений (2.14) слагаемые, содержащие  $D \ln r$  и  $Hr^2$ , дают вклад, который неограниченно возрастающий с ростом  $r$ . Поэтому необходимо положить

$$D = 0, \quad H = 0. \quad (2.15)$$

Чтобы на достаточном удалении от отверстия напряжения в пластинке с отверстием и пластинке без отверстия мало отличались друг от друга, необходимо выполнение условий:

$$C = \frac{1}{4}p, \quad G = -\frac{1}{4}p. \quad (2.16)$$

Остальные слагаемые в (2.14) с ростом  $r$  стремятся к нулю.

Для определения оставшихся констант  $B$ ,  $E$ ,  $F$  воспользуемся граничными условиями на контуре отверстия. Т.к. контур отверстия свободен от внешних воздействий, при  $r = a$ , должны выполняться следующие условия:

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (2.17)$$

Из этих условий следует:

$$\begin{aligned} \frac{B}{a^2} + \frac{1}{2}p + \left( -\frac{6E}{a^4} - \frac{4F}{a^2} + \frac{1}{2}p \right) \cos 2\varphi &= 0, \\ \left( -\frac{3E}{a^4} - \frac{F}{a^2} - \frac{1}{4}p \right) 2 \sin 2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эти равенства должны выполняться при любом  $\varphi$  и как следствие получаем систему трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными  $B$ ,  $E$ ,  $F$ :

$$\frac{B}{a^2} + \frac{1}{2}p = 0, \quad -\frac{6E}{a^4} - \frac{4F}{a^2} + \frac{1}{2}p = 0, \quad -\frac{3E}{a^4} - \frac{F}{a^2} - \frac{1}{4}p = 0, \quad (2.19)$$

решением которой являются

$$B = -\frac{1}{2}pa^2, \quad E = -\frac{1}{4}pa^4, \quad F = \frac{1}{2}pa^2. \quad (2.20)$$

Окончательно напряжения в пластинке с отверстием:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{2}p \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}p \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{1}{2}p \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В точках контура отверстия ( $r = a$ ) имеем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = p(1 - 2 \cos 2\varphi). \quad (2.22)$$

На рис. 2.1 приведена эпюра напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  в точках контура отверстия, откуда видно, что в точках, в которых эпюра расположена вне окружности, имеют место напряжения растяжения  $(\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} = 3p$ , а в точках, в которых эпюра расположена внутри окружности, – напряжения сжатия  $(\sigma_{\varphi\varphi})_{\min} = -p$ . На рис. 2.2 приведены также эпюры напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  в точках осей  $Ox$  и  $Oy$ .

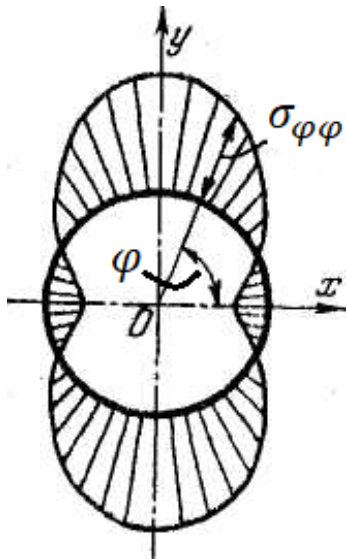


Рис. 2.1. Эпюра  $\sigma_{\varphi\varphi}$  по контуру отверстия

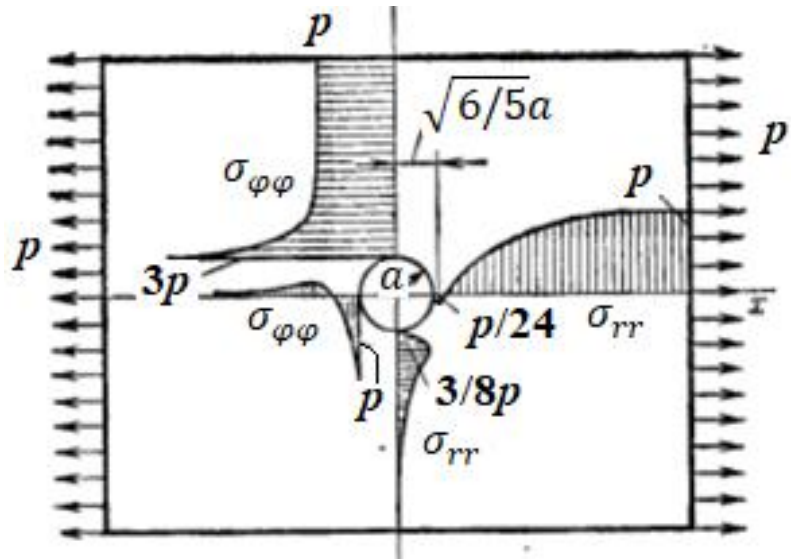


Рис. 2.2. Эпюры  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  по осям координат

Любопытно, что в точке оси  $Ox$  на расстоянии  $r = \sqrt{6/5}a$  имеет место сжимающее напряжение  $\sigma_{rr} = -p/24$ . В этой же точке напряжение  $\sigma_{\varphi\varphi}$  также сжимающее, т. е. эта точка вблизи отверстия (она не единственная) находится в условиях двухосного сжатия.

Эпюры напряжений наглядно показывают, что влияние малого отверстия на распределение напряжений носит локальный характер. С удалением от отверстия в точках оси  $Oy$  напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  быстро приближаются к  $p$ .

Задача Кирша (1898) является характерным примером того, что наличие резких изменений формы тела (различного рода надрезов: малые отверстия, выточки, канавки и др.) приводит к значительным местным напряжениям, быстро затухающим по мере удаления от этих геометрических концентраторов напряжений. Обычно местные напряжения характеризуют **коэффициентом концентрации напряжений**  $k$ , представляющим собой *отношение наибольшего местного напряжения к номинальному напряжению, т.е. к напряжению, вычисленному в предположении отсутствия концентратора* [2]. В рассматриваемом случае  $k = (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max}/p = 3$ .

Наличие концентраторов напряжений не только ведет к повышению напряжений вблизи них, но и изменяет характер напряженного состояния.

Для определения перемещений необходимо выразить по формулам (1.7) координаты тензора деформаций через полученные напряжения в соответствии с видом плоского состояния. Так для случая плоского напряжённого состояния

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}], \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{rr}], \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{r\varphi}, \quad (2.23)$$

подставив напряжения (2.21), получим выражений для деформаций как функций  $r$  и  $\varphi$ .

Рассматривая теперь соотношения Коши в полярных координатах (1.21) как систему дифференциальных уравнений относительно координат вектора перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \varepsilon_{rr} &= \frac{1 + \nu}{2E} p \left\{ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} - \frac{a^2}{r^2} + \left[ 1 - \frac{4a^2}{(1 + \nu)r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\varphi \right\}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} &= \varepsilon_{\varphi\varphi} = \\ &= \frac{1 + \nu}{2E} p \left\{ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{a^2}{r^2} - \left[ 1 - \frac{4\nu a^2}{(1 + \nu)r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2\varepsilon_{r\varphi} = -p \frac{1 + \nu}{E} \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi.$$

Интегрируем первое уравнение по  $r$ , получим

$$u_r = \frac{1 + \nu}{2E} p \left\{ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} r + \frac{a^2}{r} + \left[ r + \frac{4a^2}{(1 + \nu)r} - \frac{a^4}{r^3} \right] \cos 2\varphi \right\} + X(\varphi). \quad (2.25)$$

Подставляем найденное перемещение (2.25) во второе уравнение (2.24) и интегрируем по  $\varphi$

$$u_\varphi = -\frac{1 + \nu}{2E} p \left( r + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{2a^2}{r} + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 2\varphi - \int X(\varphi) d\varphi + Y(r). \quad (2.26)$$

Для определения произвольных функций  $X(\varphi)$  и  $Y(r)$  подставим найденные перемещения (2.25) и (2.26) в третье уравнение (2.24). Предварительно введём обозначение

$$Z(\varphi) \equiv \int X(\varphi) d\varphi, \quad (2.27)$$

тогда

$$X(\varphi) = Z'(\varphi), \quad (2.28)$$

и подстановка (2.25) и (2.26) в (2.24) приводит к равенству

$$Z''(\varphi) + r Y'(r) + Z(\varphi) - Y(r) = 0, \quad (2.29)$$

которое может быть представлено в виде следующего равенства:

$$r Y'(r) - Y(r) = Z''(\varphi) + Z(\varphi). \quad (2.30)$$

Левая часть равенства (2.30) представляет собой функцию только координаты  $r$ , а правая часть – функцию только координаты  $\varphi$ . Такое равенство возможно только в том случае, когда и правая и левая части равны константе, которую обозначим  $\Upsilon$ . Приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для неизвестных функций  $Y(r)$  и  $Z(\varphi)$ :

$$r Y'(r) - Y(r) = \Upsilon, \quad (2.31)$$

$$Z''(\varphi) + Z(\varphi) = \Upsilon. \quad (2.32)$$

Общие решения этих уравнений представляются в следующем виде:

$$Y(r) = \Lambda r + \Upsilon, \quad (2.33)$$

$$Z(\varphi) = \Xi \cos \varphi + \Theta \sin \varphi + \Upsilon. \quad (2.34)$$

Очевидно, что эти функции дают вклад в перемещения, представляющий собой смещения абсолютно твёрдого тела. Считая, что у рассматриваемой пластины смещения жёсткого тела отсутствуют, вкладом этих функций можно пренебречь.

Окончательно перемещения определяются по формулам:

$$u_r = \frac{p}{4\mu} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} r + \frac{a^2}{r} + \left[ r + \frac{4a^2}{(1+\nu)r} - \frac{a^4}{r^3} \right] \cos 2\varphi \right\}, \quad (2.35)$$

$$u_\varphi = -\frac{p}{4\mu} \left( r + 2 \frac{1-\nu a^2}{1+\nu r} + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 2\varphi. \quad (2.36)$$

Поскольку с удалением от отверстия напряжения быстро приближаются к  $p$ , приведенное решение применимо к пластине конечной ширины  $h \geq 5a$  [2].

Если диаметр отверстия оказывается соизмеримым с шириной пластины, то распределение напряжений отличается от того, что дают формулы (2.21).

### 3. Задание для самостоятельной работы

#### Постановка задачи

Пластинка (ширина  $2h$ , длина  $2l$ ) с центральным отверстием радиуса  $r = a$  подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $\alpha p$  в направлении оси  $Ox$  и интенсивностью  $\beta p$  в направлении оси  $Oy$  (рис. 3.1). Пластинка выполнена из однородного линейно упругого материала.

#### Задание

1. Выбрать исходные данные в соответствии с номером варианта (табл. 3.1).

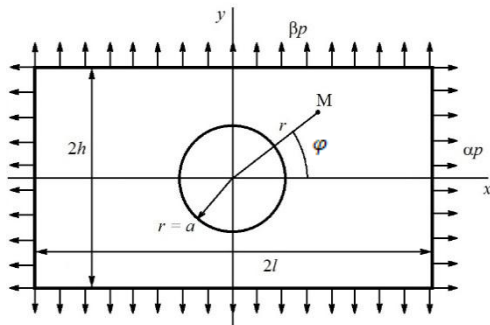


Рис. 3.1. Схема нагружения пластины

Таблица 3.1.  
Варианты заданий

Номер варианта	$a$ , мм	$h$	$l$	$\alpha$	$\beta$
6.	3	$2a$	$10a$	1	-0,2
7.	3	$3a$	$10a$	1	-0,4
8.	3	$4a$	$10a$	1	-0,6
9.	3	$5a$	$10a$	1	-0,8
10.	3	$6a$	$10a$	1	-1,0
11.	3	$2a$	$10a$	-1	0,2
12.	3	$3a$	$10a$	-1	0,4
13.	3	$4a$	$10a$	-1	0,6
14.	3	$5a$	$10a$	-1	0,8
15.	3	$6a$	$10a$	-1	1,0
16.	3	$2a$	$10a$	-1	-0,2
17.	3	$3a$	$10a$	-1	-0,4
18.	3	$4a$	$10a$	-1	-0,6
19.	3	$5a$	$10a$	-1	-0,8
20.	3	$6a$	$10a$	-1	-1,0

Таблица 3.1.  
Варианты заданий

Номер варианта	$a$ , мм	$h$	$l$	$\alpha$	$\beta$
1.	3	$2a$	$10a$	1	0,2
2.	3	$3a$	$10a$	1	0,4
3.	3	$4a$	$10a$	1	0,6
4.	3	$5a$	$10a$	1	0,8
5.	3	$6a$	$10a$	1	1,0

2. Сформулировать граничные условия для рассматриваемой краевой задачи.
3. Используя принцип суперпозиции и известное аналитическое решение задачи о растяжении пластинки значительной ширины с малым отверстием равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $\sigma$  в направлении оси  $Ox$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left( 1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

найти решение для выбранного варианта.

4. Построить эпюру напряжения  $\sigma_{xx}$  в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$ .
5. Построить эпюру напряжения  $\sigma_{yy}$  в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$ .

6. Построить эпюру напряжения  $\sigma_{xy}$  в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$ .
7. Построить эпюру напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}$  по контуру отверстия.
8. Построить эпюру интенсивности напряжений  $\sigma_i$  по контуру отверстия.
9. Рассчитать коэффициент концентрации напряжений. Сравнить его с коэффициентом концентрации напряжений при  $\beta = 0$ , получаемым из аналитического решения (см. п. 3). Коэффициент концентрации напряжений определяется как отношение максимального напряжения в области концентратора к номинальному напряжению (вычисленному в предположении отсутствия концентратора).
10. Определить величину  $p$  из условия  $\max \sigma_i = [\sigma]$ , где допустимое напряжение  $[\sigma]$  равно пределу текучести материала Ст3.
11. Для величины интенсивности нагрузки, полученной в п. 10 используя систему ANSYS найти численное решение сформулированной краевой задачи. Обосновать выбор параметров конечно-элементной сетки исходя из сходимости численного решения при сгущении сетки.

Для обоснования расчётных параметров сетки необходимо получить несколько численных решений задачи (если отсутствует априорная информация о точном решении). Это можно сделать выполнив сгущение сетки за счёт увеличения количества разбиений по отдельным частям расчётной области и/или использования возможностей ANSYS по сгущению сетки к отдельным геометрическим объектам (точкам, линиям, поверхностям).

Для рассматриваемой задачи обоснование можно провести, например, по следующей схеме. Пусть  $N_1$  – количество элементов на четверти окружности отверстия;  $N_2$  – количество элементов на отрезке  $a \leq x \leq l, y = 0$ ;  $N_3$  – количество элементов на отрезке  $x = l, 0 \leq y \leq h$ ;  $N_4$  – количество элементов на отрезке  $0 \leq x \leq l, y = h$ ;  $N_5$  – количество элементов на отрезке  $x = 0, a \leq y \leq h$ . Первое решение получаем при для следующих значений параметров  $N_1 = 4, N_2 = 20, N_3 = 6, N_4 = 20, N_5 = 2h/a$  (для различных вариантов заданий). Второе решение – увеличиваем все параметры разбиения в два раза ( $N_1 = 8, N_2 = 40, N_3 = 12, N_4 = 40, N_5 = 4h/a$ ). Третье решение – удваиваем параметры разбиения предыдущего решения ( $N_1 = 16, N_2 = 80, N_3 = 24, N_4 = 80, N_5 = 8h/a$ ). Четвёртое решение – с параметрами разбиения предыдущего решения сгущаем разбиение к отверстию с коэффициентом сгущения (отношение длины элемента в конце линии разбиения к длине элемента в начале) равным 2 для отрезков с параметрами  $N_2$  и  $N_5$ . Для каждого из четырёх решений находим коэффициент концентрации напряжений (п. 9), вычисляем относительное изменение предыдущего коэффициента концентрации напряжений по отношению к текущему (в процентах). Строим графики коэффициентов концентрации напряжений (4 точки) и

относительных изменений (3 точки). Если относительное изменение – убывающая функция, то численное решение сходится.

12. Для последнего численного решения построить эпюры напряжений в соответствии с указаниями п. 4-8. Сравнить результаты аналитического и численного решений.

13. Подготовить отчёт.

## Вопросы для проверки

1. Чем отличаются условия реализации плоского деформированного состояния и плоского напряжённого состояния?
2. Сколько из шести уравнений совместности для плоского деформированного состояния выполняется тождественно?
3. Сколько из шести уравнений совместности для плоского напряжённого состояния выполняется тождественно?
4. С какой целью вводится функция напряжений Эри?
5. Какому уравнению удовлетворяет функция напряжений Эри?
6. Каким условиям должна удовлетворять функция напряжений Эри?
7. При каких условиях полный полином четвёртой степени удовлетворяет бигармоническому уравнению?
8. В чём заключается преимущество применения функции Эри в виде тригонометрических рядов по сравнению с полиномами при решении плоских задач теории упругости?
9. Для каких задач удобно использовать полярную систему координат?
10. К определению какого количества функций комплексного переменного сводится решение плоской задачи теории упругости?



## Список литературы

1. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
2. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
3. Марков А.Н. Краткий курс теории упругости. – Горький: Гос. ун-т, 1960. – 212 с.
4. Угодчиков А.Г. Решение задач теории упругости методами функций комплексного переменного: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 2001. – 396 с.
5. Расчетно-графические работы по спецкурсу «Методы теории функций комплексного переменного в теории упругости»: Составители: Соболева В.А., Угодчиков А.Г. / Автор предисловия: Любимов А.К. Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2009. – 32 с.

## Приложение

**Якоб Бернулли** (нем. *Jakob Bernoulli*; 27.12.1654 – 16.08.1705) – швейцарский математик, профессор математики Базельского университета (с 1687 года). Впервые рассмотрел задачу о равновесии нерастяжимой нити в конце XVII века и показал (1691), что уравнения равновесия нити выражаются посредством обыкновенных дифференциальных уравнений. Это были первые дифференциальные уравнения с обыкновенными производными в истории науки.



**Леонард Эйлер** (нем. *Leonhard Euler*; 04(15).04.1707 – 07(18).09.1783) – российский, немецкий и швейцарский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском.



**Густав Роберт Кирхгоф** (нем. *Gustav Robert Kirchhoff*; 12.03.1824 – 17.10.1887) – один из великих физиков XIX века. Будучи прекрасным знатоком математики, обладал в то же время редким умением плодотворно прилагать эти знания к труднейшим вопросам математической физики, в области которой преимущественно работал. Одновременно обнаружил ряд замечательных работ по механике, относящихся главным образом к теории деформации, равновесия и движения упругих тел, течения жидкостей. Свои взгляды на основные принципы механики изложил в весьма известных лекциях по механике, содержащих и решение множества трудных вопросов теорий упругости и течения жидкости; в этом сочинении он старался отрешиться от необходимости введения в основу механики понятий о массе и силе в причинной связи с движением. Ему принадлежат следующие работы по механике: вывод в 1858 г. дифференциальных уравнений равновесия пространственного кривого стержня, теория изгиба пластин на основе предложенных им гипотез об отсутствии нормальных напряжений в площадках, параллельных срединной плоскости, о том, что точки, лежащие на прямой, перпендикулярной срединной плоскости, после деформации снова образуют прямую, нормальную к деформированной поверхности, испытания в 1859 г., на совместный изгиб и кручение круглых латунных стержней для определения коэффициента Пуассона.



**Рудольф Фридрих Альфред Клебш** (нем. *Rudolf Friedrich Alfred Clebsch*; 19.01.1833 – 07.11.1872) – немецкий математик и механик. Первые исследования относятся к математической физике, теории упругости и гидродинамике; позже он стал известен как чистый математик. Основные исследования посвящены теории упругости, вариационному исчислению, геометрии. В работе «Теория упругости твёрдых тел» (1862) уделил значительное внимание построению математических методов решения задач, рассмотрел двумерные задачи, теорию деформации тонких стержней и тонких пластинок. В ней указан способ интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси для балки с несколькими участками. В книге много места уделено гибким пластинам, выведены уравнения, описывающие деформирование пространственного кривого стержня, методами теории упругости исследовано совместное растяжение, кручение и изгиб стержня, решена задача радиальных колебаний полого шара.



**Сен-Венан, Барре де Сен-Венан Адемар Жан Клод** (фр. *Barré de Saint-Venant Adhémar Jean Claude*, 23.08.1797 – 06.01.1886) – французский математик, механик и инженер. Основные математические труды по векторному исчислению и дифференциальной геометрии, где ввёл (1846) понятие бинормали. Наиболее известны труды по теории упругости, сопротивлению материалов, гидравлике, гидродинамике. Ввёл полуобратный метод решения задач в теории упругости, сформулировал принцип смягчения граничных условий (принцип Сен-Венана) и построил общую теорию кручения и изгиба призматических стержней (1855). Исследовал соударения упругих стержней. Заложил основы теории пластичности идеально пластичного тела. Изучал также истечение газов из отверстий и движение жидкостей в открытых руслах.



**Огюстен Луи Коши** (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 21.08.1789 – 23.05.1857) – великий французский математик. Написал свыше 800 работ. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики. Впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа – пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т.д. Ввёл понятие радиуса сходимости ряда. Его курсы анализа, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. Много работал в области комплексного анализа, в частности, создал теорию интегральных вычетов. В математической физике глубоко



изучил краевую задачу с начальными условиями, которая с тех пор называется «задача Коши». Ему принадлежат также исследования по геометрии (о многогранниках), по теории чисел, алгебре. В работах по оптике дал математическую разработку волновой теории света и теории дисперсии. Заложил основы математической теории упругости. Рассматривал тело как сплошную среду и вывел систему уравнений для напряжений и деформаций в каждой точке.

**Роберт Гук** (англ. *Robert Hooke*, 18.07.1635 – 03.03.1703) – английский естествоиспытатель, учёный-энциклопедист. Его можно назвать одним из отцов физики, в особенности экспериментальной, но и во многих других науках ему принадлежат зачастую одни из первых основополагающих работ и множество открытий. Наиболее известное из этих открытий – открытие пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией (закон Гука). Как утверждает он сам в сочинении, опубликованном в 1678, сделано им за 18 лет до этого времени, а в 1676 было помещено в другой его книге под видом анаграммы «ceiinnosssttuv», означающей «*Ut tensio sic vis*» («какова сила, таково перемещение»). Правильная формулировка закона всемирного тяготения, интерференция света, волновая теория света, акустика, сущность теплоты, закон Бойля, живая клетка – вот далеко неполный список областей, в которые он внес свой вклад.



**Луис Наполеон Джордж Файлон** (*Louis Napoleon George Filon* 22.11.1875 – 29.12.1937) – английский математик и механик (родился во Франции в Сен-Клу близ Парижа, в 1878 году вместе с родителями переехал в Англию). Основные работы посвящены классической механике и механике непрерывных сред. Исследовал и разрабатывал оптический метод изучения напряжений, теорию рядов и применение математических методов в теории упругости. Изучал вопросы упругого равновесия и теорию обобщенного плоского напряжения. Ряд работ по теории течения вязкой жидкости.



**Габриель Ламе** (фр. *Gabriel Lamé* 22.07.1795 – 01.05.1870) – французский математик, физик и инженер. В 1820-1832 работал в России (в Институте корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге). Основные труды по математической физике и теории упругости. Разработал (1833) общую теорию криволинейных координат, ввёл (1859) названные в его честь коэффициенты Ламе и специальный класс функций (1839, функции Ламе). Также в честь него названы параметры Ламе в теории упругости.



**Симеон Дени Пуассон** (фр. *Siméon Denis Poisson*, 21.06.1781 – 25.04.1840) – знаменитый французский математик, физик, механик. Число учёных трудов превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики, дал решения многих задач электростатики и магнитостатики. В его исследованиях прикладного характера важное место занимают работы по внешней баллистике и гидродинамике. В теории упругости дал общие методы интегрирования уравнений теории упругости, построил уравнение движения при произвольных начальных данных, ввел константу, которая теперь носит его имя.



**Эудженио Бельтрами** (итал. *Eugenio Beltrami*, 16.11.1835 – 18.02.1900) – итальянский математик, сыгравший значительную роль в утверждении неевклидовой геометрии. Изучал кинематику жидкости, теорию потенциала, теорию теплопроводности. Принял за критерий возникновения пластических деформаций при неодносном напряженном состоянии потенциальную энергию деформации.



**Сэр Джордж Бидделл Эри** (**Джордж Биддель Эйри**, англ. *Sir George Biddell Airy*, 27.07.1801 – 02.01.1892) – английский астроном, физик, механик и изобретатель. Основные научные работы относятся к небесной механике, теории регулирования, практической астрономии и оптике.



**Пьер-Симон, маркиз де Лаплас** (фр. *Pierre-Simon de Laplace*; 23.03.1749 – 05.03.1827) – французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Состоял членом шести академий наук и королевских обществ, в том числе Петербургской Академии (1802). При решении прикладных задач разработал методы математической физики, широко используемые и в наше время. Особенно важные результаты относятся к теории потенциала и специальным функциям. Его именем названо преобразование Лапласа и уравнение Лапласа. Дал продвинул линейную алгебру; в частности, дал разложение определителя по минорам. Развил также теорию ошибок и приближений методом наименьших квадратов.



**Морис Леві** (фр. *Maurice Lévy*; 28.02.1838 – 30.09.1910) – французский математик, механик и инженер. Опубликовал много работ в разных областях чистой и прикладной математики (включая аналитическую геометрию). Его работы по механике относятся к графической статике, кинематике твёрдого тела, гидродинамике и гидравлике, теории упругости и теории пластичности.



**Джон Генри Мичелл** (англ. *John Henry Michell*, 26.10.1863 – 03.02.1940) – австралийский математик и механик. Работы в области математики, физики, гидравлики и теории упругости. Установил (1899) дифференциальные зависимости между составляющими напряжения. Дал (1899) решение двумерной задачи теории упругости. Исследования о волновом сопротивлении корабля (1898) начали использоваться только 30 лет спустя.



**Жозеф Луи Лагранж** (фр. *Joseph Louis Lagrange*, итал. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 25.01.1736 – 10.04.1813) – французский математик и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером – лучший математик XVIII века. В предисловии к “Аналитической механике” Лагранж заявил о том, что он преобразовал механику в раздел математики.



**Карло Альберто Кастильяно** (*Carlo Alberto Castigliano*, 09.11.1847 – 25.10.1884) – итальянский механик и инженер. В дипломной работе, защищенной в 1873г. и посвященной расчету статически неопределимых ферм, доказал теорему об определении прогибов шарнирных ферм (вторую теорему Кастильяно). Начав инженерную деятельность, он продолжал развивать идеи своей дипломной работы и в 1875 г. опубликовал два мемуара, в первом из которых доказывает свою вторую теорему, а во втором первую и приводит многочисленные примеры их применения. Считал, что принцип наименьшей работы является следствием его второй теоремы. Скончался в расцвете творческих сил в возрасте 37 лет, простудившись и заболев воспалением легких.



**Огюстен-Шарль-Мари Менаже** (*Augustin Charles Marie Mesnager*, 11.06.1862 – 06.02.1933) – французский инженер, профессор и директор (1900-1922) Национальной школы мостов и дорог, генеральный инспектор мостов и дорог. Известны исследования по сопротивлению материалов, теории упругости, фотоупругости, расчету пластин, сопротивления железобетонных конструкций, разработке устройства для измерения упругих деформаций.



**Шарль Анри Рибьер** (*Charles, Henri Ribièrre*, 26.05.1854 – 10.10.1921) – французский физик. Исследования по упругости, вибрации материалов и оптике.



**Георг Фридрих Бэрнхард Рیمان** (иногда **Бернгард**, нем. *Georg Friedrich Bernhard Riemann*; 17.09.1826 – 20.07.1866) – немецкий математик, механик и физик. Член Берлинской и Парижской академии наук, Лондонского королевского общества (1859—1860). За свою короткую жизнь (всего десять лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики, в том числе математический анализ, комплексный анализ, дифференциальную геометрию, математическую физику и арифметику, внёс вклад в создание топологии.



**Эдуар Жан-Батист Гурса́** (фр. *Édouard Jean-Baptiste Goursat*; 21 мая 1858 – 25 ноября 1936) – французский математик, член Французской академии наук (1919), профессор Парижского университета (1897), президент Французского математического общества. Основные труды относятся к области дифференциальных уравнений с частными производными и теории аналитических функций. Автор широко известного курса математического анализа, переведенного на многие языки мира. Одним из важнейших достижений является классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, основанная на природе их характеристик. В теории дифференциальных уравнений с частными производными имеется понятие «задача Гурса», которая состоит в решении гиперболического уравнения и системы второго порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух характеристических кривых, выходящих из одной точки. Был первым математиком, заметившим, что теорема Стокса допускает обобщенную запись в форме  $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} \omega$ , где  $d\omega$  обозначает внешний дифференциал формы  $\omega$ .



**Гурий Васильевич Колосов** (12 [24].08.1867 – 07.11.1936) – российский (советский) математик, механик, член-корреспондент АН СССР (1931). К основным научным результатам относят метод решения плоской задачи теории упругости с применением аналитических функций комплексного переменного. Он является автором трудов по теории машин и механизмов, металлорежущим станкам. Учеником Колосова считают Н.И. Мухелишвили. В теории упругости известны аналитические функции (потенциалы) Колосова-Мухелишвили.



**Никола́й Ива́нович Мухелишви́ли** (*Николоз Мухелишвили*; груз. ნიკოლოზ ივანეს ძე მუხელიშვილი; 04(16).02.1891 – 15.07.1976) – советский учёный, математик и механик, действительный член АН СССР (1939) и АН Грузинской ССР (1941). Герой Социалистического Труда. Научные исследования относятся к разделам математики и механики – теория упругости, интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и др. Большая часть научных трудов посвящена задачам плоской статической теории упругости, где были решены все главнейшие проблемы. Созданные методы, основанные на аппарате теории функций комплексного переменного, нашли применение и в ряде других задач математической физики и теории дифференциальных уравнений в частных производных.



**Эрнст Густав Кирш** (*Ernst Gustav Kirsch*, 13.09.1841 – 08.01. 1901) – немецкий инженер. Получил образование в Сорбонне, в Цюрихе и в Берлине. Он был профессором с 1874 года в Хемницком технологическом университете (Германия). Прежде всего известен уравнениями Кирша, описывающими упругое напряженное состояние вокруг отверстия.



Figure 2. Ernst Gustav Kirsch in 1875 (reproduced from Luthke 2003).

**Вальтер Ритц** (нем. *Walter Ritz*, 22.02.1878 – 07.07.1909) – швейцарский физик-теоретик и математик. Скончался в возрасте 31 года от туберкулеза и активно работал в науке лишь с 1902 по 1909 гг. (притом с трехлетним перерывом из-за болезни). Пик научной активности Ритца приходится на два последние года его жизни – в течение 1908-1909 гг. было опубликовано 18 его работ, общим объемом около 400 страниц, посвященных трем направлениям его исследований: спектроскопии, новому методу решения задач вариационного исчисления, попытке радикально реконструировать электродинамику на базе альтернативного максвелловскому бесполевого подхода.



**Леони́д Вита́льевич Канторо́вич** (06 (19).01.1912 – 07.04.1986) – советский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Разделял и развивал взгляды на математику как на единую дисциплину, все разделы которой взаимосвязаны, взаимозависимы и играют особую роль в развитии науки, техники, технологии и производства. Канторович выдвигал тезис взаимопроникновения математики и экономики и стремился к синтезу гуманитарных и точных технологий знания. Один из создателей линейного программирования. Развил общую теорию приближённых методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений (в том числе метод наискорейшего спуска и метод Ньютона для таких уравнений).



**Ива́н Григо́рьевич Бу́бнов** (06 (18).01.1872 – 13.03.1919) – российский корабельный инженер и математик. Впервые указал методы расчёта пластин, работающих в составе корпуса судна. Математически объяснил вопросы местной и общей прочности судов. Основоположник строительной механики корабля. Работы по теории подводного плавания и расчету прочности подводных лодок легли в основу русского подводного судостроения. Разработал метод нахождения приближенного решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы, который применил к решению ряда задач теории упругости. Разрабатывал приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости. Родился в Нижнем Новгороде, скончался в Петрограде от тифа. В центре Нижнего Новгорода на бывшем здании реального училища, которое он закончил в 1887 году, установлена мемориальная доска.



**Бори́с Григо́рьевич Гале́ркин** (20.02(04.03).1871 – 12.07.1945) – российский и советский инженер, механик и математик, академик АН СССР (с 1935, член-корреспондент с 1928), инженер-генерал-лейтенант. Труды, относящиеся к проблемам строительной механики и теории упругости, способствовали внедрению современных методов математического анализа в исследования работы сооружений, конструкций и машин. Разработал эффективные методы точного и приближённого интегрирования уравнений теории упругости. Один из создателей теории изгиба пластинок. Исследовал влияние формы пластинки на распределение в ней усилий, эффект распределения местного давления, влияние упругости опорного контура. Предложенная им в 1930 форма решения уравнений упругого равновесия, содержащая три бигармонические функции, позволила эффективно решить многие важные пространственные задачи теории упругости. В работах по теории оболочек он отказался от общепринятых гипотез относительно характера изменения смещений по толщине и ввёл другие допущения, обеспечивающие большую точность и возможность распространить теорию на оболочки средней толщины.



Александр Васильевич **Жидков**  
Александр Константинович **Любимов**

## **ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.