МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

М.И. Болотов
Е.В. Губина

ЗАДАЧИ ДЛЯ КУРСА «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ»

Практикум

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Нижний Новгород

2022

УДК 519.85; 519.853.3

ББК 183.4

Б79

Б79 Болотов М.И., Губина Е.В. ЗАДАЧИ ДЛЯ КУРСА «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ»: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 38 с.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н. **Е.В. Круглов**

В настоящей учебно-методической разработке приводятся задачи по семи разделам курса «Концепции современного естествознания». В начале каждого раздела приводится разбор типовых и наиболее важных задач.

Учебно-методическая разработка (практикум) предназначена для студентов ИИТММ ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 прикладная математика и информатика

УДК 519.85; 519.853.3

ББК 183.4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Простейшие математические модели

Задача 1.1. В сосуд, содержащий 20 л воды, со скоростью 5 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг соли. В сосуде раствор перемешивается, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 4 минуты?

Задача 1.2. В баке находится 100 литров раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается 5 литров чистой воды в минуту и смесь с той же скоростью вытекает во второй бак вместимостью 100 литров, заполненный чистой водой. Избыток жидкости из него вытекает с той же скоростью 5 литров в минуту. В баках имеет место полное перемешивание. Когда количество соли во втором баке будет максимальным и чему оно равно?

Решение. Возьмем в качестве состояния процесса:

$x(t)$ – количество соли в первом баке в момент t,

$y(t)$ – количество соли во втором баке в момент t.

В момент t в каждом литре раствора содержится $\frac{x(t)}{100}$ кг соли, за одну минуту вытекает $5 \cdot \frac{x(t)}{100}$ кг соли, а за промежуток времени Δt вытекает $5\frac{x(t)}{100}\Delta t$ кг соли.

Поэтому можем записать:

$$x(t+\Delta t) = x(t) - 5\frac{x(t)}{100}\Delta t \rightarrow$$

$$\frac{x(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}) - x(\mathrm{t})}{\Delta\mathrm{t}} = -0{,}05x(\mathrm{t}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -0{,}05x(t) \rightarrow \frac{dx}{x} = -0{,}05dt \rightarrow \int\frac{dx}{x} = -0{,}05\int dt \rightarrow$$

$$ln|x| = -0{,}05t + ln|C| \to x = Ce^{-0{,}05t}.$$

Вспомним начальные условия: $x(0) = 10 \to x(\mathrm{t}) = 10 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$.

Во второй бак поступает жидкость из первого бака в объеме 5 литров в минуту, содержащая $0{,}05\, x(\mathrm{t})$ кг соли, а за $\Delta\mathrm{t}$ поступает $0{,}05\, x(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}$ кг соли.

Из второго бака за время $\Delta\mathrm{t}$ вытекает $5\frac{\mathrm{y(t)}}{100}\Delta\mathrm{t}$ кг соли, тогда приходим к дифференциальному уравнению:

$$y(t + \Delta t) = y(t) - 5\frac{y(t)}{100}\Delta t + 0{,}05\, x(t)\Delta t \to$$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -0{,}05y(t) + 0{,}05\, x(t) \to$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}05y(t) + 0{,}5 \cdot e^{-0{,}05t}$$

Начальные условия $y(0) = 0$

Решаем линейное дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной.

Сначала решаем линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{y} = -0{,}05 \cdot dt \to ln|y| = -0{,}05 \cdot t + ln|C| \to y = C \cdot e^{-0{,}05t}.$$

Теперь «подключаем» правую часть (метод вариации):

$$y = C(t) \cdot e^{-0{,}05t} \to y' = C'^{(t)e^{-0{,}05t}} + C(t)(-0{,}05)e^{-0{,}05t}$$

Подставим эту производную в дифференциальное уравнение:

$$C'^{(t)e^{-0{,}05t}} + C(t)(-0{,}05)e^{-0{,}05t} = -0{,}05 \cdot C(t) \cdot e^{-0{,}05t} + 0{,}5 \cdot e^{-0{,}05t};$$

$$C'^{(t)e^{-0{,}05t}} = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}05t} \to C(t) = 0{,}5t + C_1;$$

$$y(t) = (0{,}5t + C_1) \cdot e^{-0{,}05t}.$$

Используем начальные условия: $y(0) = C_1 \cdot e^0 = 0 \to C_1 = 0$

$$y(t) = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}05t}.$$

Найдем максимальное количество соли. Для этого вычислим производную:

$$y'(t) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}05t} + 0{,}5t(-0{,}05)e^{-0{,}05t} = 0{,}5e^{-0{,}05t}(1 - 0{,}05t) = 0$$

$$t = \frac{1}{0{,}05} = \frac{100}{5} = 20 -$$

(убедитесь, что это точка максимума, а не минимума).

Получили, что через 20 минут во втором баке будет максимальное количество соли. Этот максимум равен:

$$y(20) = 0{,}5 \cdot 20 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 20} = 10 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3{,}7.$$

Задача 1.3. После удара футболиста мяч летит вертикально вверх со скоростью V_0. На какую максимальную высоту H он поднимется и за какое время? Рассмотреть случаи, когда трение отсутствует и когда есть трение, пропорциональное скорости.

Задача 1.4. В баке находится 100 литров раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается 5 литров чистой воды в минуту и смесь с той же скоростью вытекает во второй бак вместимостью 100 литров, заполненный чистой водой. Избыток жидкости из него вытекает с той же скоростью 5 литров в минуту в третий бак вместимостью 100 литров, заполненный чистой водой. В баках имеет место полное перемешивание. Когда количество соли в третьем баке будет максимальным и чему оно равно? Обобщить и решить эту задачу на случай n баков.

Задача 1.5. После удара футболиста мяч летит вертикально вверх со скоростью $V_0 = 30\,{}^{\text{м}}/_{\text{сек}}$ и поднимается на максимальную высоту $H = 25$ м. С какой скоростью мяч упадет на землю? Рассмотреть случай с трением, пропорциональным скорости ($m\ddot{x} = -mg - k\dot{x}$).

Задача 1.6. Два жидких химических вещества A и B массой соответственно M и N вступают в реакцию, образуя вещество C. Скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций веществ A и B (закон действующих масс). Какое количество вещества C будет образовано по окончании реакции, если вещества A и B входят в состав C в пропорции 2:1?

Решение. Предположим, что состояние процесса химической реакции задается тремя функциями:

$x(t) -$ количество вещества А в момент t;

$y(t) -$ количество вещества В в момент t;

$z(t) -$ количество вещества С в момент t;

В соответствии с условием задачи о скорости протекания реакции запишем дифференциальное уравнение:

$$\dot{z} = \alpha \cdot x(t)y(t).$$

Вспомним пропорции, в которых вещества А и В входят в вещество С.

Тогда

$$\frac{2}{3}z(t) = M - x(t), \quad \frac{1}{3}z(t) = N - y(t);$$

Таким образом

$$x(t) = M - \frac{2}{3}z(t);\ y(t) = N - \frac{1}{3}z(t);$$

И тогда получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно $z(t)$:

$$\dot{z} = \alpha \cdot \left(M - \frac{2}{3}z(t)\right) \cdot \left(N - \frac{1}{3}z(t)\right).$$

Теперь надо решить это ДУ с начальными условиями: $z(0) = 0$.

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

После разделения:

$$\frac{dz}{\left(M-\frac{2}{3}z(t)\right)\cdot\left(N-\frac{1}{3}z(t)\right)}=\alpha\cdot dt$$

Вычислим интеграл:

$$\int\frac{dz}{\left(M-\frac{2}{3}z(t)\right)\cdot\left(N-\frac{1}{3}z(t)\right)}=I$$

Для этого разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{\left(M-\frac{2}{3}z(t)\right)\cdot\left(N-\frac{1}{3}z(t)\right)}=\frac{A_1}{\left(M-\frac{2}{3}z(t)\right)}+\frac{B_1}{\left(N-\frac{1}{3}z(t)\right)};$$

Вычислим коэффициенты, получим:

$$A_1=\frac{-2}{M-2N};\ B_1=\frac{1}{M-2N};$$

Продолжаем решать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int\frac{-2dz}{\left(M-\frac{2}{3}z(t)\right)}+\int\frac{dz}{\left(N-\frac{1}{3}z(t)\right)}=\ (M-2N)\alpha dt$$

После интегрирования и упрощения получаем:

$$\ln\frac{M-\frac{2}{3}z}{N-\frac{1}{3}z}=ln\left(e^{\frac{M-2N}{3}\cdot\alpha t}\right)+lnC\rightarrow$$

$$\frac{M-\frac{2}{3}z}{N-\frac{1}{3}z}=C\cdot e^{\frac{M-2N}{3}\cdot\alpha t}.$$

Используем начальные условия, получим $\mathrm{C}=\frac{M}{N}$.

Подставим найденное $C = \frac{M}{N}$, получим:

$$M - \frac{2}{3}z = \frac{M}{N} \cdot e^{\frac{M-2N}{3} \cdot \alpha t} \cdot \left(N - \frac{1}{3}z\right);$$

Из этого равенства выразим

$$z = \frac{3MN\left(e^{\frac{\alpha(M-2N)t}{3}} - 1\right)}{M \cdot e^{\frac{\alpha(M-2N)t}{3}} - 2N}.$$

Пусть $M \neq 2N$, найдем предел $z(t)$ при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}M, \text{если } M - 2N < 0 \\ 3N, \text{если } M - 2N > 0 \end{cases};$$

Разберем подробнее: если $M - 2N < 0$, то $e^{\frac{\alpha(M-2N)t}{3}} \to 0$ при $t \to \infty$

$$\text{если } M - 2N > 0, \text{то } e^{\frac{\alpha(M-2N)t}{3}} \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

и при вычислении предела надо разделить числитель и знаменатель дроби на $e^{\frac{\alpha(M-2N)t}{3}}$.

При условии $M = 2N$ решение будет другим

$$z = \frac{6aN^2t}{3 + 2aNt} \to \lim_{t\to\infty} z(t) = 3N = \frac{3}{2}M;$$

Задача 1.8. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчета и имела скорость V_0=20 м/сек. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 секунд после начала движения.

Задача 1.9. Кусок металла с температурой $\boldsymbol{a}$ градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от $\boldsymbol{a}$ градусов до $\boldsymbol{b}$ **градусов.** При разности температур печи и металла в $\boldsymbol{T}$ градусов металл нагревается со скоростью $\boldsymbol{kT}$ градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Задача 1.10. В воздухе комнаты объемом 200 м^3 содержится 0,15 % углекислого газа (CO_2). Вентиляция подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04 % CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

2. Экспоненциальные процессы

Задача 2.1. Определить численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству и зная, что население России в 2010 году составляло 142 млн. человек, а прирост населения за 2010 год равен $\alpha\%$. Вычислить при $\alpha = 2\%, \alpha = -1\%$.

Решение. Обозначим численность населения России в момент времени t через $N = N(t)$. Дифференциальное уравнение исследуемого процесса (скорость прироста численности населения) имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

где $k -$ коэффициент пропорциональности.

$$\frac{dN}{N} = kdt \to \int \frac{dN}{N} = k\int dt \to \ln N = kt + C_1$$

$$\to \ln N = \ln(e^{kt}) + lnC \to \ln N = \ln C \cdot e^{kt}$$

$$N(t) = C \cdot e^{kt} -$$

общее решение дифференциального уравнения.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (н.у.): $N(0) = 142$.

Из начальных условий находим C: $\to N(0) = 142 = C$.

Тогда

$$N(t) = 142 \cdot e^{kt} = N_0 \cdot e^{kt}.$$

Теперь найдем k, используя: при $t = 1$ (в конце 2010 года)

$$N = N_0 + 0{,}02N_0 = N_0 \cdot 1{,}02 = N_0 \cdot e^k$$

$$1{,}02 = e^k \to ln(1{,}02) = k \to k = ln(1{,}02).$$

Вернемся к решению: $N(t) = 142e^{kt} \to N(t) = 142\ e^{ln(1{,}02)t}$=142 $(1{,}02)^t$.

Применили основное логарифмическое тождество: $a^{log_a b} = b; e^{lnb} = b$.

$$N(t) = 142\ (1{,}02)^t.$$

Если $t = 20$, то $N(20) = 142 \cdot (1{,}02)^{20}$.

Задача 2.2. За 30 дней распалось 50 % первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1 % от первоначального количества (скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества)?

Задача 2.3. Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадается половина имеющегося количества радия?

Задача 2.4. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

Задача 2.5. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/сек, а ее скорость через 4 сек. равна 1 м/сек. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/сек? Какой путь может пройти лодка до остановки?

Задача 2.6. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2 м?

Задача 2.7. Тело охладилось за 10 мин. от 100^0 до 60^0. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20^0. Когда тело остынет до 25^0? Принять, что скорость остывания или нагревания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Задача 2.8. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20^0 , опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75^0. Через минуту вода нагрелась на 2^0. Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на 1^0? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

3. Исследование скалярных динамических систем

Рассмотрим динамическую систему, заданную скалярным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{x} = f(x) = x(x-3)(x+2)(x-1)^2 \qquad (3.1)$$

Множеством всех ее состояний, т.е. фазовым пространством (если нет дополнительных ограничений, как например $x \geq 0$) является вся действительная ось R.

Точки $x = -2, x = 0, x = 1, x = 3$ в которых производная $\dot{x}$ обращается в ноль, являются состояниями равновесия динамической системы. Характер этих состояний равновесия определяется знаком функции $f(x)$, стоящей в правой части ДУ (рис.3.1.)

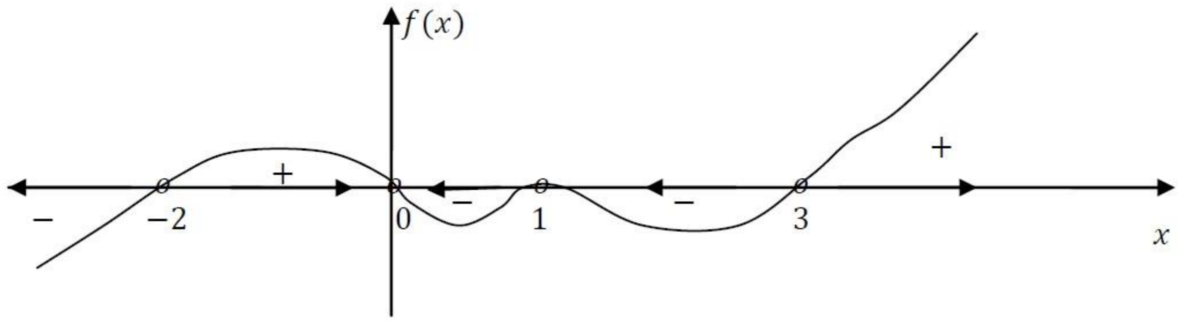

Рис.3.1.

На интервале $-2 < x < 0$ функция $f(x)$ положительна, т.е. $\dot{x} > 0$, поэтому фазовая точка на этом интервале движется слева направо, т.е. x возрастает.

На интервале $0 < x < 1$ функция $f(x)$ отрицательна, т.е. $\dot{x} < 0$, фазовая точка на этом интервале движется справа налево.

На интервале $1 < x < 3$ функция $f(x)$ также отрицательна, т.е. $\dot{x} < 0$, фазовая точка на этом интервале движется справа налево.

При $x > 3$ функция $f(x)$ положительна, т.е. $\dot{x} > 0$, фазовая точка на этом интервале движется слева направо.

Итак, точка «ноль» является **устойчивым** состоянием равновесия.

Точки $x = -2, x = 3$ являются **неустойчивыми** состояниями равновесия.

Точка 1 является **полуустойчивым** состоянием равновесия.

Всего динамическая система имеет 9 фазовых траекторий (включая состояния равновесия), которые формируют ее фазовый портрет.

Таким образом, задание дифференциального уравнения определяет оператор динамической системы. Обратное имеет место только в случае дифференцируемости оператора динамической системы, что не всегда выполняется.

Решим задачу 7 из раздела 1 с помощью построения фазового портрета.

Вспомним ДУ процесса образования вещества.

$$\dot{z} = \alpha \cdot \left(M - \frac{2}{3}z(t)\right) \cdot \left(N - \frac{1}{3}z(t)\right). \qquad (3.2)$$

Рассмотрим случай $M - 2N < 0 \rightarrow M < 2N$.

Точки, в которых производная обращается в ноль:

$$z_1 = \frac{3}{2}M, z_2 = 3N, z_1 < z_2.$$

Фазовый портрет будет иметь вид:

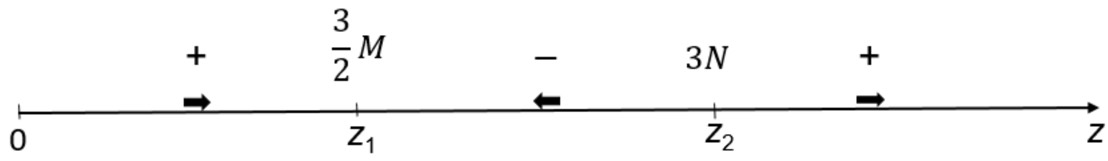

Рис.3.2. Фазовый портрет системы (3.2)

Производная $\frac{dz}{dt}$ положительна на интервалах: $\left(0, \frac{3}{2}M\right)$ и $(3N, +\infty)$;

Производная отрицательна на интервале: $\left(\frac{3}{2}M,\ 3N\right)$

Таким образом, $z_1 = \frac{3}{2}M -$ устойчивое состояние равновесия,

$z_2 = 3N -$ неустойчивое состояние равновесия.

Тот же результат мы получили при первом аналитическом способе решения задачи:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \frac{3}{2}M.$$

Самостоятельно разберите случай $M - 2N < 0$.

Задача 3.1. Сколько фазовых траекторий содержит фазовая прямая x, если оператор динамической системы задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = x^2 + 5x + 4$? Построить фазовый портрет

Задача 3.2. Сколько фазовых траекторий содержит фазовая прямая x, если оператор динамической системы задается дифференциальным уравнением $\dot{x} = x^3 + 3x^2 - 4$? Построить фазовый портрет

Задача 3.3. Сколько устойчивых состояний равновесия содержит фазовая прямая x, если оператор динамической системы задается дифференциальным уравнением $\dot{x} = 2 - 3x^2 - x^3$?

Задача 3.4. Оператор динамической системы задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна и задана графиком (рис.3.3). Построить фазовый портрет.

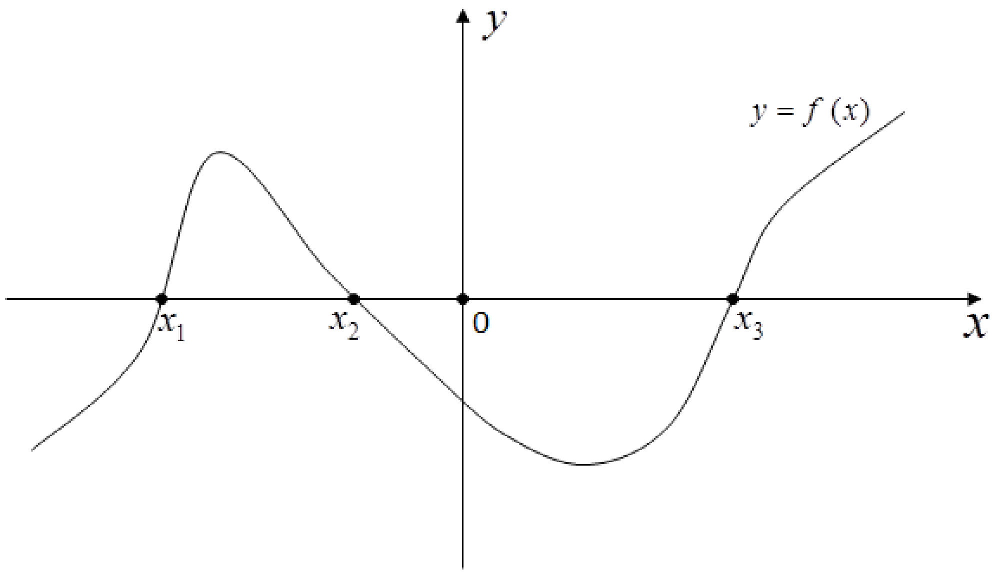

Рис.3.3.

Задача 3.5 Оператор динамической системы задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = -x(x+3)(x-2)(x+5)^2$. Построить фазовый портрет.

Задача 3.6. Оператор динамической системы задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = f_1(x) - f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и заданы графиками (рис. 3.4) Построить фазовый портрет системы.

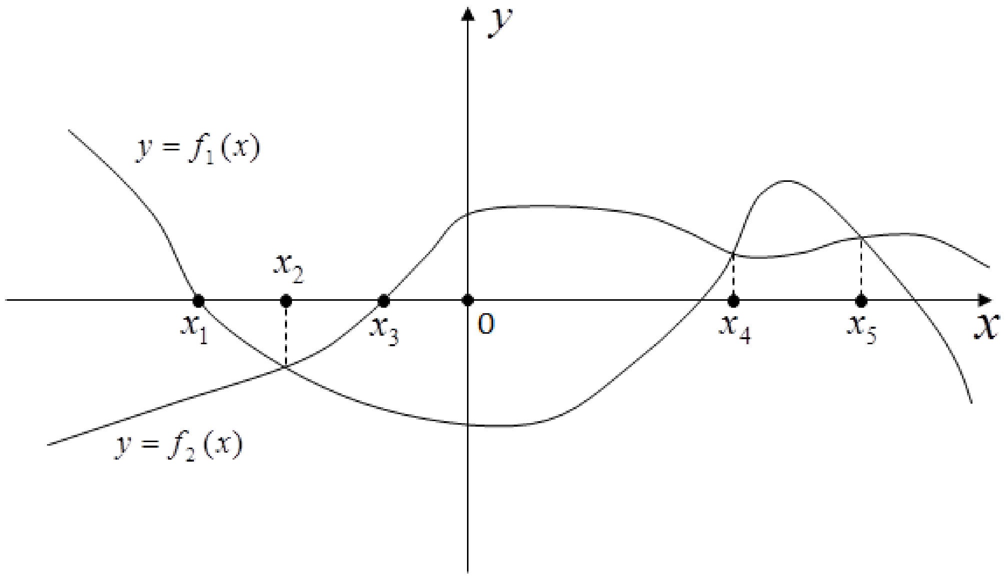

Рис. 3.4.

Задача 3.7. Оператор динамической системы задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = f_1(x) - f_2(x)$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и заданы графиками (рис.3.5). Построить фазовый портрет системы.

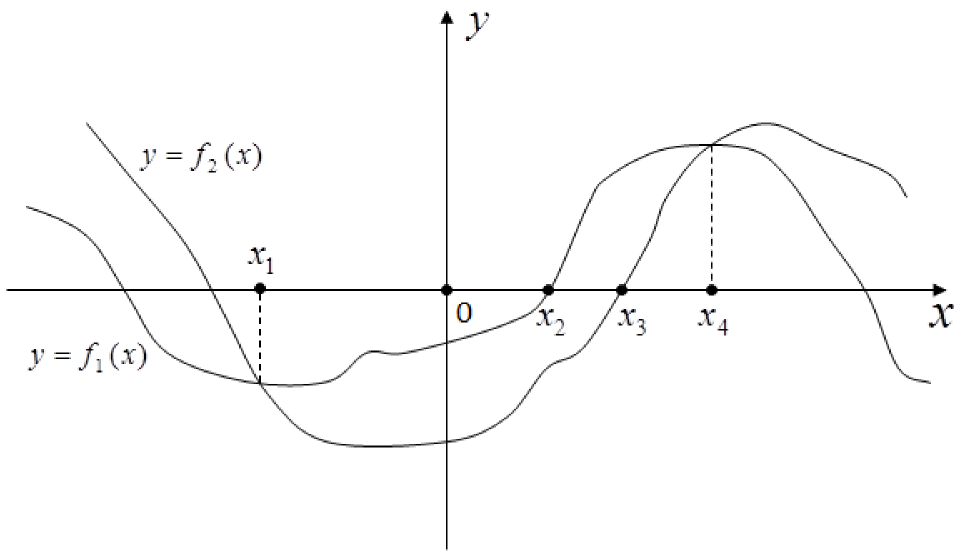

Рис.3.5.

4. Модели истечения жидкости из сосуда

Задача 4.1. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического сосуда с диаметром $2R = 1.8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в нижней части сосуда диаметром $2r = 6$ см (ось цилиндра горизонтальна)?

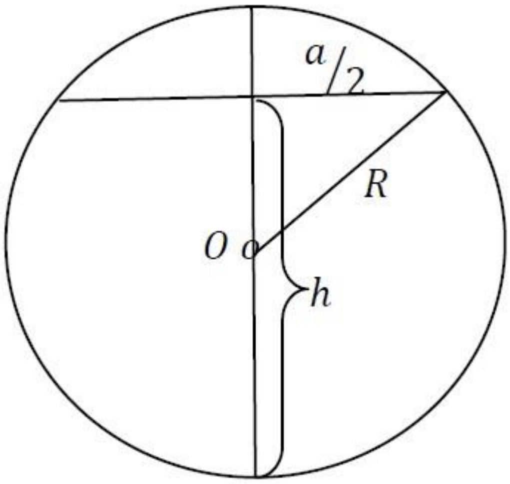

Рис.4.1

Решение. Поскольку в задаче отношение $\frac{\sigma}{S}$ много меньше единицы, можно записать модель Торичелли:

$$S(h) \cdot \dot{h} = -\sigma\sqrt{2gh}. \qquad (4.1)$$

Сечение цилиндрического сосуда, когда его ось горизонтальна, представляет собой прямоугольник, одна сторона которого известна и равна H.

Вторую сторону a найдем, используя рисунок 4.1

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2hR - h^2 \to a = 2\sqrt{2hR - h^2};$$

Решим дифференциальное уравнение (4.1)

$$2H\sqrt{h(2R - h)} \cdot \dot{h} = -\sigma\sqrt{2gh}; \to$$

$$\frac{\sqrt{h(2R-h)}dh}{\sqrt{h}\,dt} = -\sigma\frac{\sqrt{2g}}{2H};\rightarrow \int\sqrt{2R-h}\ dh = -\sigma\int\frac{\sqrt{2g}}{2H}dt;\rightarrow$$

$$-\frac{2}{3}(2R-h)^{3/2} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{2H}t + C.$$

Постоянную C находим из условия $h(0) = 2R \rightarrow C = 0.$

Время полного вытекания находим из условия $h(T) = 0$

$$-\frac{2}{3}(2R)^{3/2} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{2H}T \rightarrow$$

$$T = \frac{2\cdot\sqrt{2R}\cdot 2R\cdot 2H}{3\cdot\sigma\sqrt{2g}} = \frac{8RH}{3\pi r^2}\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Подставим данные задачи и получим

$$T = \frac{8\cdot 2{,}45\cdot 1{,}8\sqrt{1{,}8}}{3\cdot 3{,}14\cdot 9\cdot 10^{-4}\sqrt{9{,}8}} \cong 1800\text{ сек} = 30\text{мин}$$

Задача 4.2. За какое время вытечет вся вода из бака высотой H и сечением S, если у него в дне и в боковой стенке на высоте H_1 имеется по одному отверстию с эффективным сечением $\sigma \ll S$?

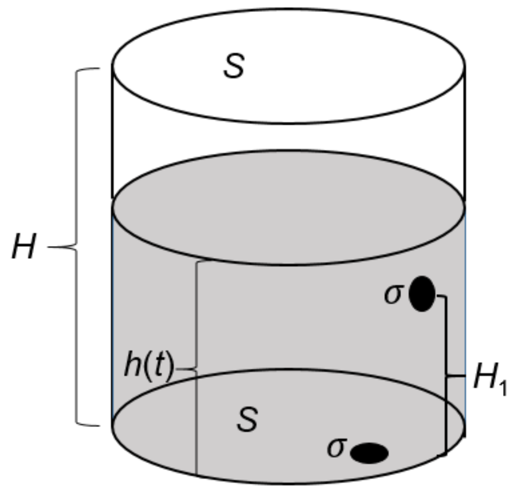

Рис. 4.2.

Решение. Полное время истечения воды будет складываться из времени T_1 понижения уровня воды от H до H_1, когда вода выливается через две дырки, и времени T_2 полного истечения воды из сосуда с начальным уровнем воды H_1.

Для нахождения времени T_1 используем уравнение:

$$S \cdot \dot{h} = -\sigma\sqrt{2gh} - \sigma\sqrt{2g(h - H_1)}.$$

Решим это уравнение, для этого разделим переменные:

$$\frac{Sdh}{\sqrt{h} + \sqrt{h - H_1}} = -\sigma\sqrt{2g} \cdot dt.$$

Интегрируем

$$\int \frac{Sdh}{\sqrt{h} + \sqrt{h - H_1}} = -\,\sigma\sqrt{2g}\int dt \rightarrow$$

Для интегрирования первого интеграла умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное числителю выражение: $\sqrt{h} - \sqrt{h - H_1}$

$$\int \frac{S\left(\sqrt{h} - \sqrt{h - H_1}\right)}{H_1} dh = -\,\sigma\sqrt{2g}\int dt \rightarrow$$

$$\frac{2S}{3H_1}\left(h^{\frac{3}{2}} - (h - H_1)^{\frac{3}{2}}\right) = -\sigma\sqrt{2g} \cdot t + C.$$

Постоянную C находим из условия $h(0) = H$:

$$C = \frac{2S}{3H_1}\left(H^{\frac{3}{2}} - (H - H_1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Время T_1 находим из условия: $h(T_1) = H_1$:

$$\frac{2S}{3H_1}\left(H_1^{\frac{3}{2}}\right) = -\sigma\sqrt{2g} \cdot T_1 + \frac{2S}{3H_1}\left(H^{\frac{3}{2}} - (H - H_1)^{\frac{3}{2}}\right) \rightarrow$$

$$T_1 = \frac{2S}{3\sigma\sqrt{2g} \cdot H_1}\left(H^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} - (H - H_1)^{\frac{3}{2}}\right);$$

Для нахождения времени T_2 используем уравнение:

$$S \cdot \dot{h} = -\sigma\sqrt{2gh}.$$

Решим дифференциальное уравнение, разделим переменные:

$$\frac{Sdh}{\sqrt{h}} = -\sigma\sqrt{2g} \cdot dt \to \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g} \int dt \to 2\sqrt{h} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g} \cdot t + C.$$

Постоянную C находим из начальных условий $h(0) = H \to \mathrm{C} = 2\sqrt{H}$.

Время вытекания T_2 находим из условия $h = 0$:

$$-\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g} \cdot T_2 + 2\sqrt{H} = 0 \to T_2 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

Время полного вытекания: $T = T_1 + T_2$:

$$T = \frac{2S}{3\sigma\sqrt{2g} \cdot H_1}\left(H^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} - (H - H_1)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

Задача 4.3. В прямоугольный бак размером $1\,\text{м} \times 1{,}5\,\text{м} \times 1\,\text{м}$ поступает 4 литра воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 3 см^2. За какое время наполнится бак?

Задача 4.4. В бак с сечением S поступает вода интенсивностью P. Через отверстие в дне эффективным сечением $\sigma \ll S$ она поступает во второй бак емкостью V. Когда наполнится второй бак, если в начале первый бак был полным, а второй пустым.

Задача 4.5. За какое время вытечет вся вода из сосуда высотой H и сечением S, если у него в боковой стенке имеется узкая вертикальная щель шириной σ?

Задача 4.6. Вода из первого бака размерами $S \times H$ через отверстие в дне эффективным сечением $\sigma \ll S$ поступает во второй бак тех же размеров и с дыркой в дне с эффективным сечением σ. Когда количество воды во втором баке будет максимальным?

Задача 4.7. Воронка имеет форму конуса радиуса $R = 0.5$ м и высоты $H = 1$ м, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие радиуса 2 см, сделанное в вершине конуса?

Задача 4.8. В бак сечением S поступает вода интенсивностью P. Через отверстие в дне эффективным сечением $\sigma \ll S$ она поступает во второй бак емкостью V. Когда наполнится второй бак, если вначале оба бака были пустыми.

Задача 4.9. Вода из первого бака размерами $S \times H$ через отверстие в дне эффективным сечением $\sigma \ll S$ поступает во второй бак тех же размеров и с дыркой в дне с эффективным сечением σ. Когда второй бак будет пустым?

Задача 4.10. За какое время вытечет вся вода из сферического сосуда радиуса R, если у него внизу имеется дырка эффективным сечением σ?

Задача 4.11. При каком соотношении параметров цилиндрического сосуда диаметром $2R$ и высотой H быстрее вытечет вся вода через отверстие в нижней части сосуда диаметром $2r$ в случае, когда ось цилиндра вертикальна по сравнению со случаем, когда ось цилиндра горизонтальна.

5. Гравитационные модели

Задача 5.1. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/сек. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Задача 5.2. Два парашютиста прыгают с высоты 1,5 км один за другим с интервалом времени 3 минуты. Первый сразу раскрывает парашют, а второй сначала летит без парашюта, а затем на высоте 0,5 км раскрывает парашют. Который из них раньше приземлится, если предельная скорость падения без парашюта 50 м/сек., а с парашютом 5 м/сек.? Построить фазовый портрет.

Задача 5.3. На какую дальность улетит снаряд, выпущенный из пушки со скоростью v_0 под углом φ к горизонту? При каком угле φ дальность полета будет наибольшей в случае отсутствия атмосферы?

Решение.

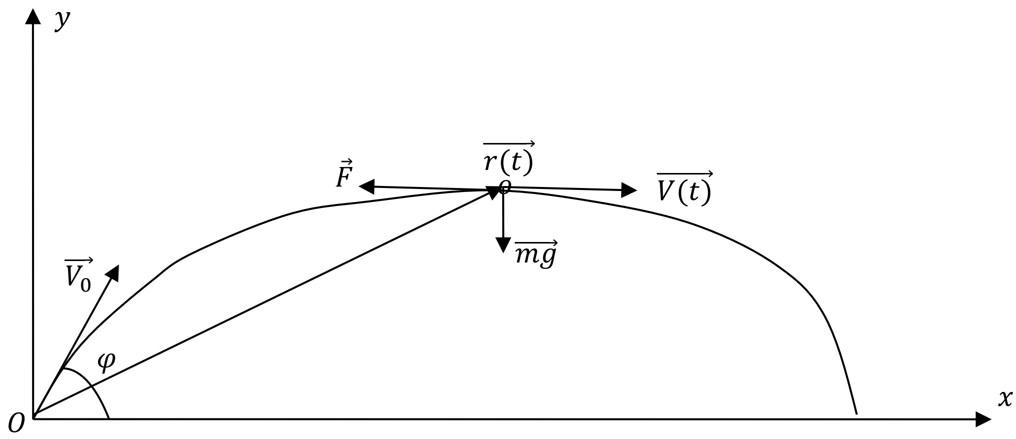

Рис. 5.1

Положение снаряда в момент времени t определяется двумерным вектором $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, скорость $\overrightarrow{V(t)}$ определяется соотношением $\vec{V}(t)$ $=\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath}$, а ускорение – соотношением $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{\imath} + \ddot{y}(t)\vec{\jmath}$.

Рассмотрим полет снаряда без учета силы $\vec{F}$ вязкого сопротивления воздуха. В этом случае уравнение движения $m\vec{a} = m\vec{g}$ в проекциях на оси координат запишутся в виде простой системы:

$$\ddot{x} = 0,$$
$$\ddot{y} = -g.$$

Решаем эту систему с начальными условиями:

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = V_0 cos\varphi, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = V_0 sin\varphi$

$$\dot{x}(t) = C \to \dot{x}(t) = V_0 cos\varphi \to x(t) = V_0 cos\varphi \cdot t + C_1 \to C_1 = 0.$$

Тогда легко находится:

$$x(t) = tV_0 cos\varphi;$$

$$\dot{y}(t) = -gt + C_2 \to C_2 = V_0 sin\varphi;\ \dot{y}(t) = -gt + V_0 sin\varphi;$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 sin\varphi \cdot t + C_3 \to C_3 = 0;$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + tV_0 sin\varphi.$$

Итак, решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t) = tV_0 cos\varphi;$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + tV_0 sin\varphi.$$

(5.1)

Время полета определяем из условия

$$y(T) = 0, y(T) = -\frac{gT^2}{2} + TV_0 sin\varphi \to T\left(-\frac{gT}{2} + V_0 sin\varphi\right) = 0 \to$$

$$T = \frac{2V_0 sin\varphi}{g},$$

после чего находим дальность полета

$$D = x(T) = \frac{V_0^2 sin2\varphi}{g} \tag{5.2}$$

Как видим, дальность полета зависит от выбора угла φ, и принимает свое максимальное значение

$$D_{max} = \frac{V_0^2}{g} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 5.4. На какую дальность улетит снаряд, выпущенный из пушки со скоростью v_0 под углом φ к горизонту? При каком угле φ дальность полета будет наибольшей в случае наличия атмосферы?

Задача 5.5. Космический аппарат спускается вертикально вниз на планету. На какой высоте H_1 надо включить тормозную установку, развивающую постоянную ситу тяги, чтобы посадка аппарата была мягкой, если начальная скорость спуска v_0? Рассмотреть случай посадки с малой высоты при отсутствии и наличии атмосферы: $H_1 \ll R, R -$ радиус планеты.

Построить фазовый портрет системы.

Решение: Модель посадки аппарата с малой высоты при отсутствии атмосферы – на рис.5.2.

В этом случае на первом этапе свободного падения уравнение движения в проекции на ось h имеет вид:

$$m\ddot{h} = -mg,$$

где $g -$ ускорение свободного падения.

Запишем дифференциальное уравнение второго порядка сначала в виде системы

$$\dot{h} = v,$$
$$\dot{v} = -g, \tag{5.3}$$

а затем в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{g}{v},$$

Получили решение:

$$\frac{v^2}{2} = -gh + \frac{V_0^2}{2} + gH_0$$

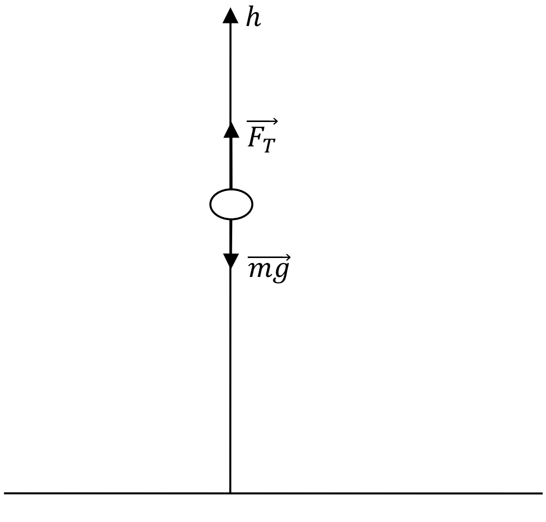

Рис. 5.2.

Схема вертикального спуска космического аппарата с малой высоты.

На некоторой высоте H_1 включается тормозное устройство, развивающее силу тяги F_T. Таким образом, начальная высота H_1 и начальная скорость V_1 для второго этапа спуска будут удовлетворять соотношению:

$$\frac{{V_1}^2}{2} = -gH_1 + \frac{V_0^2}{2} + gH_0 \tag{5.4}$$

На втором этапе уравнение движения в проекции на ось h будет иметь вид

$$m\ddot{h} = -mg + F_T$$

Запишем это дифференциальное уравнение в виде системы

$$\dot{h} = v, \\ \dot{v} = -g + f, \tag{5.5}$$

а затем в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv}{dh} = \frac{f - g}{v}$$

Решим это дифференциальное уравнение, а затем найдем частное решение с начальными условиями $v(H_1) = V_1$. Тогда получим:

$$\frac{v^2}{2} = (f - g)h + \frac{V_1^2}{2} - (f - g)H_1 - \tag{5.6}$$

уравнение движения на втором этапе

Из условия мягкой посадки $h = 0, v = 0$ следует, что величины V_1 и H_1 должны удовлетворять соотношению:

$$\frac{V_1^2}{2} - (f - g)H_1 = 0 \tag{5.7}$$

Исключая величину V_1 из соотношений (5.4) и (5.6), получаем формулу для высоты H_1:

$$H_1 = \frac{V_0^2}{2f} + \frac{g}{f}H_0$$

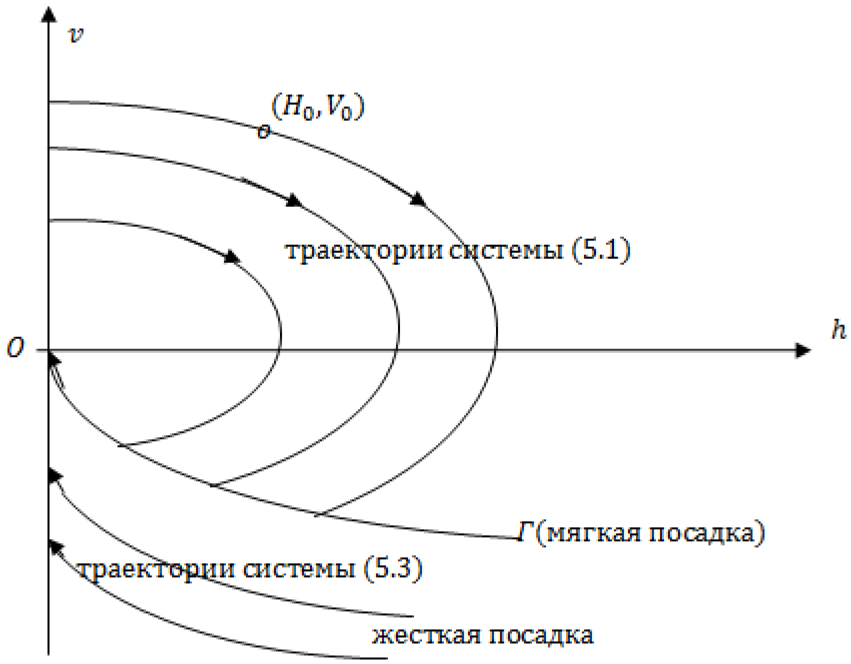

Рис. 5.2. Иллюстрация возможности и невозможности мягкой посадки

Отметим, что необходимым условием мягкой посадки является неравенство $f > g$. Но это условие может оказаться недостаточным при начальной большой скорости V_0. Эта ситуация проиллюстрирована на комбинированном фазовом портрете систем (5.3.) (5.5) . Если начальная фазовая точка (H_0, V_0) расположена выше кривой Γ, то мягкая посадка возможна. Если же начальная точка расположена ниже кривой Γ, то посадка произойдет уже не с нулевой скоростью.

Задача 5.6. Космический аппарат спускается вертикально вниз на планету. На какой высоте H_1 надо включить тормозную установку, развивающую постоянную ситу тяги, чтобы посадка аппарата была мягкой, если начальная скорость спуска v_0? Рассмотреть случай посадки с большой высоты при отсутствии и наличии атмосферы: $H_1 \sim R, R -$ радиус планеты.

Построить фазовый портрет системы.

6. Модели линейного осциллятора. АФЧХ

Задача 6.1. Груз массы m, прикрепленный к точке опоры с помощью нерастяжимой нити длины l, находится в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g. Построить математическую модель. Определить частоту малых затухающих колебаний груза. Силу трения считать пропорциональной скорости груза.

Задача 6.2. Через блок радиуса r с моментом инерции J и горизонтальной осью вращения переброшена гибкая нерастяжимая нить. Один конец ее удерживается пружиной жесткости k, а на другом подвешена масса m. Написать математическую модель движения массы, найти частоту ее колебаний и нарисовать фазовый портрет.

Задача 6.3. Две массы m_1 и m_2, соединенные пружиной жесткости k, движутся вдоль горизонтальной оси, испытывая вязкое трение. К массе m_1 приложена гармоническая сила $Fe^{i\omega t}$ (рис.6.1). Составить уравнения движения, найти вынужденные колебания массы m_2 и АФЧХ.

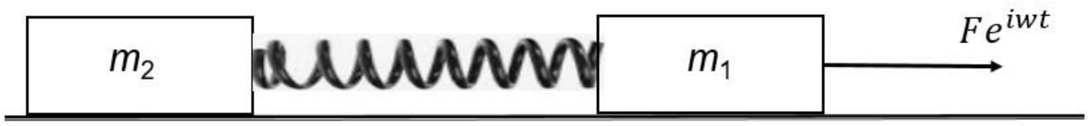

Рис. 6.1

Решение:

Запишем дифференциальные уравнения для масс m_1 и m_2

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(x-y) + Fe^{i\omega t} \\ m_2\ddot{y} = -\alpha\dot{y} + k(x-y) \end{cases}$$

Выразим x из второго уравнения:

$$x = y + \frac{\alpha}{k}\dot{y} + \frac{m_2}{k}\ddot{y},$$

Подставим в первое уравнение:

$$m_1\left(\ddot{y}+\frac{\alpha}{k}y^{(3)}+\frac{m_2}{k}y^{(4)}\right)$$
$$=-\alpha\left(\dot{y}+\frac{\alpha}{k}\ddot{y}+\frac{m_2}{k}y^{(3)}\right)-k\left(\frac{\alpha}{k}\dot{y}+\frac{m_2}{k}\ddot{y}\right)+Fe^{i\omega t};$$

Получим:

$$y^{(4)}\frac{m_1m_2}{k}+y^{(3)}\frac{\alpha}{k}(m_1+m_2)+\ddot{y}\left(m_1+m_2+\frac{\alpha^2}{k}\right)+2\alpha\dot{y}=Fe^{i\omega t}.$$

Будем искать решение в виде: $y=Ae^{i\omega t}\rightarrow$ тогда

$$\dot{y}=Ai\omega e^{i\omega t},\ddot{y}=-A\omega^2e^{i\omega t},y^{(3)}=-Ai\omega^3e^{i\omega t},y^{(4)}=A\omega^4e^{i\omega t}$$

Подставим в дифференциальное уравнение четвертого порядка (сократим на $e^{i\omega t}$):

$$A\left(\omega^4\frac{m_1m_2}{k}-i\omega^3\frac{\alpha}{k}(m_1+m_2)-\omega^2\left(m_1+m_2+\frac{\alpha^2}{k}\right)+2\alpha i\omega\right)=F\rightarrow$$

$$A=\frac{F}{\left(\omega^4\frac{m_1m_2}{k}-\omega^2\left(m_1+m_2+\frac{\alpha^2}{k}\right)-i\alpha\omega\left(\frac{\omega^2}{k}(m_1+m_2)-2\right)\right)};$$

$$\text{АФЧХ}=\frac{\left(\omega^4\frac{m_1m_2}{k}-\omega^2\left(m_1+m_2+\frac{\alpha^2}{k}\right)+i\alpha\omega\left(\frac{\omega^2}{k}(m_1+m_2)-2\right)\right)}{\left(\omega^4\frac{m_1m_2}{k}-\omega^2\left(m_1+m_2+\frac{\alpha^2}{k}\right)\right)^2+\alpha^2\omega^2\left(\frac{\omega^2}{k}(m_1+m_2)-2\right)^2}.$$

Задача 6.4. Через блок радиуса r с моментом инерции J и горизонтальной осью вращения переброшена гибкая нерастяжимая нить. Один конец ее удерживается пружиной жесткости k, а на другом подвешена масса m. Вращению блока препятствует вязкое трение. Написать математическую модель движения массы, найти частоту ее колебаний и нарисовать фазовый портрет.

Задача 6.5. К свободно лежащему на горизонтальной плоскости грузу массы m через пружину жесткости k прикреплен груз массы M. К этому грузу прикладывается сила $F = A\sin\omega t$ (рис. 6.2). Найти условия, при которых груз массы m оторвется от опоры, на которой он лежал. Как изменятся эти условия, если помимо упругости пружина обладает еще и вязким трением?

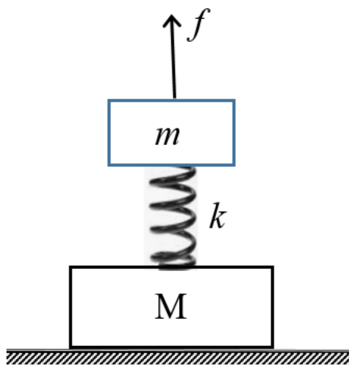

Рис.6.2

Задача 6.6. Исследовать горизонтальные движения бруска массы M, соединенного с двумя неподвижными стенками пружинами жесткости k, к центру которого подвешен маятник массы m и длины нити l.

7. Модели сосуществования биологических популяций

Задача 7.1. Исследовать модель сосуществования двух популяций типа «хищник - жертва» с учетом насыщения хищника:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{xy}{1+\frac{1}{5}x} - \frac{1}{5}x^2 \\ \dot{y} = -2y + \frac{2xy}{1+\frac{1}{5}x} \end{cases} \tag{7.1}$$

Состояния равновесия найдем из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x\left(1 - \dfrac{y}{1+\frac{1}{5}x} - \dfrac{1}{5}x\right) \\ y\left(-2 + \dfrac{2x}{1+\frac{1}{5}x}\right) = 0 \end{cases}$$

Состояния равновесия системы:

$$(0,0);\ (5,0);\ \left(\frac{5}{4},\frac{15}{16}\right)$$

Последнее состояние равновесия находится из системы уравнений

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{y}{1+\frac{1}{5}x} - \dfrac{1}{5}x = 0 \\ -2 + \dfrac{2x}{1+\frac{1}{5}x} = 0 \end{cases}$$

Для линеаризации системы (7.1) в окрестности состояний равновесия найдем производные:

$$P(x,y) = x - \frac{xy}{1+\frac{1}{5}x} - \frac{1}{5}x^2;\ \ Q(x,y) = -2y + \frac{2xy}{1+\frac{1}{5}x}$$

$$P'_x = 1 - \frac{y}{\left(1+\frac{1}{5}x\right)^2} - \frac{2}{5}x; \quad P'_y = \frac{-x}{1+\frac{1}{5}x}$$

$$Q'_x = \frac{2y}{\left(1+\frac{1}{5}x\right)^2};\ Q'_y = -2 + \frac{2x}{1+\frac{1}{5}x}$$

Найдем собственные значения для каждого состояния равновесия:

Для состояния равновесия (0,0):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \to \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Состояние равновесия (0,0) – седло.

Для состояния равновесия (5,0):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \to \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

Состояние равновесия (5,0) – седло.

Для состояния равновесия $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$

$$\begin{vmatrix} -0{,}1-\lambda & -1 \\ 1{,}2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda(0{,}1+\lambda) + 1{,}2 = 0 \to 10\lambda^2 + \lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 120}}{20}$$

Собственные значения - комплексно-сопряженные числа с отрицательной действительной частью. Состояние равновесия $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$ –устойчивый фокус.

Фазовый портрет системы приведен на рисунке (6.1)

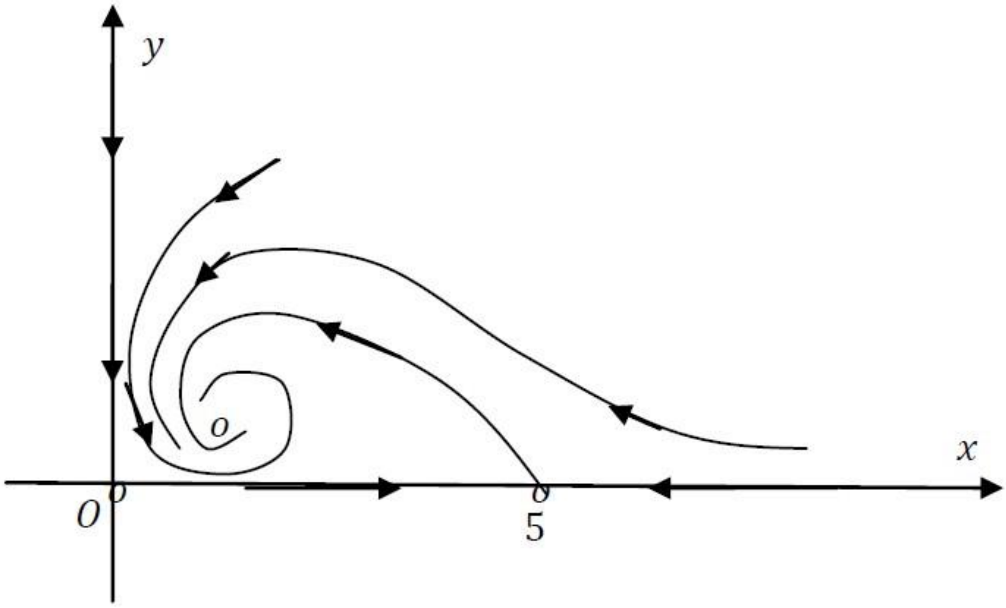

Рис. 7.1 Фазовый портрет системы (7.1)

Задача 7.2. Исследовать модель сосуществования двух популяций типа «хищник – жертва» с учетом насыщения хищника и конкуренции жертвы за источники питания и жизни:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \dfrac{xy}{1 + \frac{1}{2}x} - x^2 \\ \dot{y} = -2y + \dfrac{2xy}{1 + \frac{1}{2}x} \end{cases}$$

Задача 7.3. Исследовать модель типа Лотки – Вольтерра «хищник – жертва» с учетом конкуренции хищника за жертву

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \dfrac{2xy}{1 + y} \\ \dot{y} = -2y + \dfrac{2xy}{1 + y} \end{cases}$$

Задача 7.4. Исследовать модель сосуществования двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - xy \end{cases}$$

Задача 7.5. Исследовать модель сосуществования двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - xy \end{cases}$$

Задача 7.6. Исследовать модель сосуществования двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - 5xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - xy \end{cases}$$

Задача 7.7. Исследовать модель сосуществования двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - 3xy \end{cases}$$

Задача 7.8. Исследовать модель симбиоза двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \dfrac{2xy}{1+y} - x^2 \\ \dot{y} = -2y + \dfrac{2xy}{1+2x} - y^2 \end{cases}$$

Задача 7.9. Исследовать модель симбиоза двух популяций.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \dfrac{4xy}{1+y} - 2x^2 \\ \dot{y} = -2y + \dfrac{2xy}{1+2x} - y^2 \end{cases}$$

Задача 7.10. Написать ДУ типа Лотки-Вольтерра «хищник-жертва» для случая, когда хищник питается двумя видами жертв, одна из которых имеет укрытие. Найти состояния равновесия и выяснить их устойчивость.

Задача 7.11. Написать и исследовать ДУ типа Лотки-Вольтерра «хищник-жертва» для случая, когда хищник подвержен промыслу в постоянном объеме, если количество хищника превышает некоторый заданный уровень.

Задача 7.12. Исследовать ДУ типа Лотки-Вольтерра «хищник-жертва» для случая, когда скорость прироста численности хищника ограничена:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + \min\{dxy, P\} \end{cases}$$

Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике: Учебник. – Н. Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 401 с.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.
3. Комаров М.А., Крюков А.К., Осипов Г.В., Петров В.С. Конкурентная динамика живых систем: Учебно–методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 60с.

Максим Ильич **Болотов**

Елена Васильевна **Губина**

ЗАДАЧИ ДЛЯ КУРСА «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ»

Учебно-методическая разработка

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23