**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Кувыкина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Часть 2

Практикум

Рекомендовано методической комиссией Института информационных
технологий, математики и механики для студентов ННГУ,
обучающихся по направлениям подготовки
39.03.01 «Социология»

Нижний Новгород
2022

УДК 519.21
ББК В171
К88

К88 Кувыкина Е.В. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА». Часть 2. Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 16 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **В.И. Ерофеев**

Настоящий практикум содержит основные формулы, примеры решения задач и рекомендации по решению задач по темам: «Условная вероятность», «Теорема сложения вероятностей», «Теоремы умножения вероятностей». Приведены также задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов факультета социальных наук ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 39.03.01 «Социология».

УДК 519.21
ББК В171

Оглавление

Введение

Данный практикум соответствует учебной программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов факультета социальных наук ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 39.03.01 «Социология». Он представляет собой сборник задач по темам: «Условные вероятности случайных событий», «Независимость случайных событий», «Теоремы сложения и умножения событий». Практикум содержит основные математические формулы, примеры решения типовых задач , методические рекомендации для решения задач, а также задачи для самостоятельного решения по указанным темам.

1. Основные формулы.

1.1. Определение условной вероятности события.

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло обозначается как $P(A\,|\,B)$ и определяется следующим образом

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\quad B)}{P(B)},P(B)>0 \qquad (1)$$

1.2. Определение независимости случайных событий.

Случайные события A и B полагаются независимыми, если

$$P(A\quad B)=P(A)\quad P(B) \qquad (2)$$

1.3. Теорема сложения для двух событий.

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A\quad B) \qquad (3)$$

1.4. Теорема умножения для двух событий.

$$P(A\quad B)=P(A)\quad P(B\,|\,A)=P(B)\quad P(A\,|\,B) \qquad (4)$$

1.5. Терема умножения для n событий $A_1,A_2,...,A_n$, таких что $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}A_i)>0$,

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)\quad P(A_2\,|\,A_1)\quad P(A_3\,|\,A_1\quad A_2)\quad ...\quad P(A_n\,|\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i) \qquad (5)$$

2. Примеры решения задач

Задача 2.1.

Из урны, содержащей 5 белых и 3 красных шара, по схеме выбора без возвращения извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что первый шар белый, если известно, что второй белый.

Решение.

Решение данной задачи включает следующие этапы:

этап 1: Определение основной формулы, которую следует применить;

этап 2. Вычисление вероятностей событий, которые входят в основную формулу.

Этап 1. Определим случайные события, которые рассматриваются в данной задаче: A = « первый шар белый», B = « второй шар белый».

Следовательно, в задаче требуется найти $P(A\,|\,B)$, т.е. условную вероятность события A при условии, что событие В произошло. Согласно (1)

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A \quad B)}{P(B)}, P(B)>0\,.$$

Таким образом, для вычисления искомой условной вероятности надо найти $P(A\,|\,B)$, $P(B)$.

Этап 2. Вероятности $P(A\,|\,B)$, $P(B)$ могут быть найдены с помощью классического подхода к определению вероятности. Перенумеруем шарики в урне: пусть белые шары имеют номера $\{1,2,...,5\}$, красные - $\{6,7,8\}$. Тогда элементарный исход ω_i эксперимента можно представить как упорядоченную пару (x,y), где x- номер первого извлеченного шара, а y - номер второго , и

$$\Omega=\left\{w_i=(x,y): x,y \quad \{1,2,...,8\}, x \quad y, i=\overline{1,8 \quad 7}\right\},$$

$$B=\{\omega_i=(x,y): y \quad \{1,2,...,5\}\}$$

$$A\bigcap B=\{\omega_i=(x,y): x,y \quad \{1,2,...,5\}\}$$

Найдем число элементарных исходов, благоприятствующих каждому событию, |Ω |=56, |В |=7×5=35, $|\,A\bigcap B\,|$=5×4=20 и искомые вероятности $P(B)$=| B |/|Ω |=35/56, $P(A \quad B)$ =| $A\bigcap B$ |/|Ω |=20/56. Подставим полученные значения в основную формулу (1)

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A \quad B)}{P(B)}=\frac{20 \quad 56}{35 \quad 56}=\frac{4}{7}\,.$$

Задача 2.2.

Из колоды карт в 36 листов случайным образом извлекается одна карта. Пусть событие A - « извлечена карта бубновой масти», событие B - « извлечен туз». Проверить зависимы или нет события A и B .

Решение.

Для того, чтобы определить зависимы события A и B или нет, надо проверить выполняется ли для A и B равенство (2)

$$P(A \quad B)=P(A) \quad P(B)\,.$$

Следовательно, необходимо вычислить $P(A \quad B)$, $P(A)$, $P(B)$. Воспользуемся для этого классическим подходом к определению вероятности и построим пространство Ω элементарных исходов. Перенумеруем карты так, что номера 1 - 9 будут иметь карты бубновой масти, номер 1 соответствует бубновому тузу и остальные тузы имеют номера 10, 19, 28, тогда

$$\Omega = \left\{ w_i = i : i = \overline{1,36} \right\} \qquad \rightarrow \qquad |\,\Omega\,| = 36$$
$$A = \{\omega_i \quad \Omega : i \quad \{1,2,...,9\} \qquad \rightarrow \qquad |\,A\,| = 9$$
$$B = \{\omega_i \quad \Omega : i \quad \{1,10,19,28\}\,\} \qquad \rightarrow \qquad |\,B\,| = 4$$
$$A \bigcap B = \{\omega_i \quad \Omega : i = 1\} \qquad \rightarrow \qquad |\,A \bigcap B\,| = 1.$$

Найдем искомые вероятности

$$P(A) = 9/36\,, \quad P(B) = 4/36 \qquad \rightarrow \qquad P(A) \quad P(B) = 1/36$$
$$P(A \quad B) = 1/36 \qquad \rightarrow \qquad P(A \quad B) = P(A) \quad P(B)$$

Таким образом, равенство (2) выполняется, и события А и В независимы.

Задача 2.3.

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго 0.8. Каждый стрелок делает по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишени будет только одна пробоина.

Решение.

В задаче заданы события A_1 - «попал первый стрелок», его вероятность Р(A_1)=0.7 и A_2 - «попал второй стрелок», Р(A_2)=0.8. Эти события являются независимыми, т.к. попадание или промах первого стрелка никак не влияют на результаты стрельбы второго. Требуется найти вероятность события A - « в мишени только одна пробоина». Запишем событие A через события A_i, i=1,2, используя основные теоретико-множественные операции,

$$A = A_1 \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \quad A_2 .$$

Перейдем от равенства в событиях к равенству в вероятностях

$$P(A) = P(A_1 \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \quad A_2) .$$

События $A_1 \quad \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \quad A_2$ несовместны, т.е. $(A_1 \quad \overline{A_2}) \quad (\overline{A_1} \quad A_2) =$. Тогда

$$P(A)=P(A_1\quad\overline{A_2}\quad\overline{A_1}\quad A_2)=P(A_1\quad\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\quad A_2)=P(A_1)\quad P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})\quad P(A_2)$$

в силу независимости событий A_1 и A_2. Вычислим искомую вероятность

$P(A)$=0.7 (1-0.8)+(1-0.7) 0.8=0.38

Задача 2.4.

В урне 5 белых, 2 красных и 3 зеленых шара. По схеме выбора без возвращения наудачу вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что первый шар белый, второй зеленый, а третий красный.

Решение.

Обозначим через A событие, вероятность которого надо найти. Введем вспомогательные события A_i - i-ый извлеченный шар белый, B_i - i-ый извлеченный шар красный, C_i - i-ый извлеченный шар зеленый, i=1,2,3. Тогда событие

$$A=A_1\quad C_2\quad B_3.$$

От равенства в событиях перейдем к равенству в вероятностях

$$P(A)=P(A_1\quad C_2\quad B_3).$$

Для того, чтобы найти вероятность от пересечения событий, надо знать зависимы они или нет. В данном случае события A_1,C_2,B_3 зависимы, т.к. выбор шаров производится без возвращения. Следовательно, для вычисления $P(A)$ применим формулу (5)

$$P(A)=P(A_1)\quad P(C_2\mid A_1)\quad P(B_3\mid A_1\quad C_2).$$

В этом выражении все вероятности, включая условные, легко находятся по условию задачи. Действительно, перед первым извлечением в урне находится 10 шаров и белых среди них 5, тогда $P(A_1)$=5/10=1/2. После того, как извлекли белый шар, в урне осталось 9 шаров, среди них 3 зеленых, следовательно, $P(C_2\mid A_1)$ =3/9=1/3. После извлечения белого и зеленого шаров в урне осталось 8 шаров, из которых 2 красных, тогда $P(B_3\mid A_1\quad C_2)$ =2/8=1/4. Таким образом, $P(A)=1/2\quad 1/3\quad 1/4$

Задача 2.5.

Из полного набора костей домино (28 штук) наудачу выбирают одну. Найти вероятность того, что извлеченная кость дубль или содержит 6 очков.

Решение.

Введем следующие обозначения: событие A - «извлечен дубль», B - «извлеченная кость содержит 6 очков». Требуется найти $P(A \quad B)$. События A и B совместны, т.к. $A \quad B$ - событие, которое заключается в том, что извлечен дубль с двумя 6. Следовательно,

$$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \quad B).$$

Для того, чтобы вычислить искомую вероятность $P(A \quad B)$, надо найти $P(A)$, $P(B)$, $P(A \quad B)$. Применим классическое определение вероятности. Перенумеруем все кости домино так, что кости, содержащие 6 очков будут иметь номера с 1 по 7, причем, кость номер 7 - это дубль (6,6) , номера 8 - 13 имеют остальные дубли, оставшиеся кости могу быть пронумерованы в произвольном порядке. Тогда

$$\Omega = \{w_i = i : i = \overline{1,28}\} \quad \rightarrow \quad |\Omega| = 28$$
$$A = \{\omega_i \quad \Omega : i \quad \{7,8,\ldots,13\} \quad \rightarrow \quad |A| = 7$$
$$B = \{\omega_i \quad \Omega : i \quad \{1,\ldots,7\}\} \quad \rightarrow \quad |B| = 7$$
$$A \cap B = \{\omega_i \quad \Omega : i = 7\} \quad \rightarrow \quad |A \cap B| = 1.$$

Тогда $P(A)$=7/28= 1/4, $P(B)$=7/28= 1/4, $P(A \quad B)$=1/28 и

$$P(A \quad B) = 1/4+1/4-1/28=13/28$$

3. Задачи с рекомендациями к решению

Задача 3.1.

В одном ящике 7 белых и 8 красных шаров, в другом – 9 белых и 4 красных. Найти вероятность того, что в выборке будет один белый шар, если из каждого ящика берут наудачу по одному шару.

Рекомендации.

Определим события A_1 - «из первого ящика достали белый шар», A_2 - «из второго ящика достали белый шар», A - «в выборке один белый шар». Тогда,

$$A = A_1 \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \quad A_2$$

Заметим, что A_1 и A_2 независимые события.

Задача 3.2.

Один раз подбрасывают правильную симметричную игральную кость. Найти вероятность того, что выпадет простое число очков, если известно, что число выпавших очков нечетно.

Рекомендации.

Определим случайные события, о которых идет речь в задаче: A - «на кости выпало простое число очков», B - «на кости выпало нечетное число очков». Требуется найти условную вероятность $P(A\,|\,B)$. Воспользуйтесь формулой (1).

Задача 3.3.

В урне находится 6 белых и 3 красных шара. Случайным образом извлекаются сразу 2 шара. Найти вероятность того, что шары будут разного цвета.

Рекомендации.

Пусть событие A - «извлечены шары разного цвета», A_1 - «первый извлеченный шар белый», A_2 - «второй шар белый». Тогда,

$$A = A_1 \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_1} \quad A_2 .$$

Заметим, что A_1 и A_2 зависимы.

Задача 3.4.

Для данного стрелка вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Сколько выстрелов он должен произвести, чтобы поразить цель хотя бы 1 раз с вероятность не меньшей, чем 0.9, если запас патронов не ограничен.

Рекомендации.

Рассмотрим условия задачи: даны события A_i - «стрелок попал при i-ом выстреле», $P(A_i)$ =0.7 , i ≥1,...,n , A - «в серии из n выстрелов стрелок поразил цель хотя бы один раз», $P(A)$ ≥ 0.9, требуется найти такое значение n, для которого будет справедливо данное неравенство. Нетрудно видеть, что

$$A = A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n .$$

Однако, события A_i , 1≤ i ≤ n, совместны, и применение данной формулы не является рациональным подходом к решению. В данном случае следует рассмотреть событие $\overline{A}$, противоположное A . Тогда, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ $\geq$ 0.9 и, следовательно, $P(\overline{A}) \leq$ 0.1. Запишите событие $\overline{A}$ через A_i ,1≤ i ≤ n, и, используя полученное неравенство, найдите ограничение для n.

Задача 3.5.

Двенадцать спортсменов, среди которых 3 мастера спорта, делятся случайным образом на 3 команды по 4 человека в каждой. Найти вероятность того, что в каждой команде будет мастер спорта.

Рекомендации.

Обозначим через $A_{i,j}$ событие, которое заключается в том, что i-ую команду попало j мастеров спорта, I=1,2,3, j∊{1,…,4}, через A событие, состоящее в том, что в каждой команде будет мастер спорта. Нетрудно видеть, что

$$A = A_{1,1} \quad A_{2,1} \quad A_{3,1} .$$

События $A_{1,1}, A_{2,1}, A_{3,1}$ зависимы, следовательно,

$$P(A) = P(A_{1,1}) \quad P(A_{2,1} \mid A_{1,1}) \quad P(A_{3,1} \mid A_{1,1} \quad A_{2,1}) .$$

Для вычисления вероятностей используйте гипергеометрическую формулу.

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает равна 0.95 для первого и 0.9 для второго сигнализатора. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

2. Один раз подбрасывают правильную симметричную игральную кость. Найти вероятность того, что число выпавших очков четно, если известно, что выпало простое число очков .

3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0.38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле из первого орудия, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0.8.

4. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что

из двух проверенных изделий только одно стандартно.

5. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведено три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущена ошибка.

6. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведено три независимых измерения. Найти вероятность того, что ошибки были допущены при двух измерениях.

7. Два стрелка стреляют по мишени, делая одновременно по одному выстрелу. Для первого стрелка вероятность попадания при одном выстреле равна 0.7, а для второго – 0.8. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в цель.

8. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется высшего сорта, равна 0.8. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 3-х изделий только два высшего сорта.

9. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется высшего сорта, равна 0.8. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 3-х изделий по крайней мере одно будет высшего сорта.

10. В партии из 20 изделий 16 имеют высший сорт. Товаровед отбирает наудачу 3 изделия для контроля качества. Найти вероятность того, что среди этих 3-х изделий по крайней мере одно не имеет высшего сорта.

11. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы в течение времени t для них равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что за время t выйдет из строя третий элемент.

12. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы для них равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8.

Найти вероятность того, что отказал один элемент, а два другие - исправны.

13. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы в течение времени t для них равны соответственно 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятность того, что за время t откажет первый элемент и еще один из двух оставшихся

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для трех стрелков равны соответственно 0.8, 0.75, 0.6. Найти вероятность того, что при одном залпе по крайней мере один стрелок попадет в цель.

15. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо. Вероятности отказа каждого из элементов равны соответственно 0.1, 0.15, 0.2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

16. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

17. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу вынимают 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одного цвета?

18. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух игральных кубиков хотя бы на одном выпадет 6 очков, если известно,что на обоих кубиках выпали грани с четным числом очков.

19. На 10 карточках написаны первые 10 букв русского алфавита. Три человека по очереди берут без возвращения по 2 карточки. Найти вероятность того, что каждому достанется одна карточка с гласной буквой.

20. Три исследователя, независимо друг от друга, производят измерения некоторой физической величины. Вероятности ошибки для них равны соответственно 0.1, 0.2, 0.3. Найти вероятность того, что при однократном измерении двое исследователей допустят ошибку.

21. Два спортсмена соревнуются в выполнении упражнения. Вероятности выполнения упражнения для каждого из них равны 0.5 и 0.8 соответственно. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, делая по две попытки каждый. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза первым спортсменом.

22. В ящике лежат 10 красных, 6 зеленых и 4 синих шара. Наудачу без возвращения достают 2 шара. Найти вероятность того, что выбраны шары разного цвета при условии, что не выбран синий шар.

23. В урне 6 красных, 2 белых и 3 зеленых шара. Наудачу без возвращения извлекают 2 шара. Найти вероятность того, что красный или зеленый цвет не будет представлен в выборке.

24. Колода игральных карт в 36 листов делится случайным образом на 4 пачки по 9 карт в каждой. Найти вероятность того, что в каждой пачке будет туз.

25. Группа в составе 12 человек, среди которых трое не умеют плавать, садится в 3 лодки, по 4 человека в каждую. Найти вероятность того, что люди, не умеющие плавать, окажутся в разных лодках.

Список литературы

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Уч. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1994. – 112 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М., Радио и связь. 1983. – 416 с.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М. ЮНИТИ-ДАНА. 2000. – 543 с.
4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 632 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3.Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов. – М. Наука. 1990. – 428 с.
6. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. – М.: Высшая школа. 2006. – 368 с.

Елена Вадимовна **Кувыкина**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Часть 2

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.