Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Д.В. Хомицкий

Избранные асимптотические методы для физиков

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией физического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2022

УДК 517.15
ББК 22.161.1
Х 76

Рецензент: К.ф.-м.н. доцент кафедры прикладной математики
ИИТММ ННГУ **И.Ю. Ястребова**

Хомицкий Д.В.
Х 76 **Избранные асимптотические методы для физиков**:
учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2022 – 62 с.

В учебно-методическом пособии излагаются избранные методы асимптотического анализа, используемые при решении задач математической физики, которые предлагаются студентам третьего курса физического факультета Нижегородского государственного университета в рамках специального курса «Дополнительные главы математической физики». Излагаются основные принципы асимптотических оценок, метод Лапласа и метод стационарной фазы, а также метод перевала. Рассматриваются асимптотические оценки и приближённые методы решения для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений, включая метод ВКБ, метод последовательных приближений и метод Ван-дер-Поля. Каждый раздел содержит краткое теоретическое введение, примеры решения задач, и задачи для самостоятельной работы обучающихся.

Для студентов физического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии физического факультета ННГУ,
к. ф.-м. н., доцент **А.А. Перов**

УДК 517.15
ББК 22.161.1

Содержание

Предисловие

Асимптотические методы представляют собой важный инструмент решения задач математического анализа и математической физики, в которых исследуется зависимость в асимптотическом пределе, т.е. в области больших значений параметра (или параметров). Для безразмерных параметров, рассматриваемых в физике и математике, их большая величина обычно подразумевает большое значение по сравнению с единицей, хотя при формальном решении задач подразумевается переход к пределу, равному бесконечности. Несмотря на бурное развитие компьютерных методов аналитических вычислений, позволяющих выполнять в интерактивном режиме многие действия и целые этапы решения задач, которые ранее выполнялись только «на бумаге», владение основами асимптотических методов по-прежнему составляет неотъемлемую часть базовых математических навыков специалистов, обучаемых по физическим направлениям подготовки и специализирующихся по теоретической и математической физике.

По асимптотическим методам имеется превосходная литература (см., например, книги [1–6] в списке литературы к данному пособию). Она включает как классические учебники, зарекомендовавшие себя на протяжении десятков лет, так и сравнительно новые учебные пособия. Большинство этих книг, однако, предполагают достаточно высокий уровень математической подготовки обучаемых и, что ещё более важно, значительное количество часов, отводимых на изучение данных разделов математики. Кроме того, многие книги по асимптотическим методам уже стали библиографической редкостью, а упоминаемые в них задачи зачастую приведены без подробных указаний к решению, что затрудняет их использование на первоначальном уровне знакомства с предметом. В связи с этим возникла необходимость составления пособия, содержащего только минимальное теоретическое введение в избранные асимптотические методы и ориентированное прежде всего на примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения студентами. Таким образом, пособие призвано не заменить собой основную литературу [1–6] по асимптотическим методам, а лишь дополнить её, прежде всего в части развития у студентов навыков решения основных типов задач.

Данное пособие отражает опыт преподавания избранных асимптотических методов в рамках специального курса «Дополнительные главы математической физики» на физическом факультете Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ). Этот специальный курс предназначен для студентов третьего курса, изучивших общий курс «Методы математической физики», который включает основы теории функций комплексной переменной. Владение основными сведениями и навыками из данного курса математической физики подразумевается при изучении асимптотических методов, рассматриваемыми в данном пособии.

Пособие состоит из пяти глав. В первой главе рассматриваются основные понятия асимптотического подхода к задачам анализа, приводятся методы оценки некоторых интегралов и сумм в асимптотическом пределе. Во второй главе представлен метод Лапласа для оценки интегралов от вещественной переменной с вещественной функцией в аргументе экспоненты, содержащем большой параметр. В третьей главе излагаются основные идеи метода стационарной фазы, предназначенного для оценки интегралов от вещественной переменной с экспонентой от мнимой функции, содержащей большой параметр. В четвёртой главе даётся введение в метод перевала, предназначенный для оценки интегралов от комплексной переменной и содержащих экспоненциальную функцию с большим параметром и комплексной функцией-аргументом, имеющую одну или несколько стационарных точек в области вблизи контура интегрирования. В пятой главе рассматриваются методы получения асимптотических оценок и несколько родственных им методов приближённого решения для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений, широко используемых в физике. Обсуждается метод ВКБ, метод последовательных приближений и метод Ван-дер-Поля. Каждая глава содержит краткое теоретическое введение, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены ответы и указания для построения решения наиболее сложных задач. Большинство примеров и задач читатель сможет отыскать в упомянутых книгах по асимптотическим методам, однако решения многих из них в этих книгах отсутствуют.

Автор хотел бы отметить, что на формирование данного раздела специального курса «Дополнительные главы математической физики», посвящённого асимптотическим методам, решающее влияние оказали лекции профессора Г.А. Вугальтера. Большинство приведённых примеров и задач составляло практическую часть занятий в рамках данной дисциплины, проводимых со студентами, специализирующимися на кафедре теоретической физики физического факультета ННГУ. Содержание данного пособия также обсуждалось с преподавателями кафедры теоретической физики. Всем им, в особенности В.А. Бурдову и А.А. Перову, а также рецензенту настоящего пособия И.Ю. Ястребовой автор выражает глубокую благодарность за ценные замечания.

1. Асимптотические оценки интегралов и сумм

1.1. Введение

При решении многих математических задач возникают ситуации, когда получение точного ответа для функции $S(x)$, например, при интегрировании или суммировании для всех значений независимой переменной затруднительно, однако в пределе $x \to +\infty$ возможно получить правильную оценку для $S(x)$. Здесь и далее под пределом $x \to +\infty$ мы будем понимать либо стремление вещественной переменной x к бесконечности в области положительных значений аргумента, либо предел $\mathrm{Re}\, x \to +\infty$, если переменная x является комплексным числом. Такого рода оценки называются *асимптотическими*. Зачастую получаемый при этом ряд может оказаться расходящимся в строгом математическом смысле, однако предельный случай при $x \to +\infty$ по-прежнему будет описываться корректно.

В качестве примера рассмотрим пример, исследованный Л. Эйлером [7]. Требуется вычислить интеграл, зависящий от вещественной переменной z:

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{z+t}, \tag{1.1}$$

оценив поведение $f(z)$ в пределе $z \to +\infty$. В элементарных функциях интеграл (1.1) не вычисляется, поэтому попробуем разложить функцию $1/(z+t)$ в ряд по переменной t:

$$\frac{1}{z+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{z^{n+1}}. \tag{1.2}$$

Ряд в правой части (1.2) сходится равномерно лишь при $-|z| \le t \le |z|$, но мы попробуем вслед за Эйлером подставить его в (1.1) и проинтегрировать по всей полуоси $0 < t < \infty$:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt. \tag{1.3}$$

Интеграл в правой части (1.3) равен $\Gamma(n+1) = n!$, поэтому

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}. \tag{1.4}$$

Ряд в правой части (1.4) расходится при любом значении z. Тем не менее, частичные суммы ряда

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} \tag{1.5}$$

являются хорошим приближением для исходной функции (1.1) в том смысле, что разность между ними и $f(z)$ мала в пределе $z \to +\infty$. Можно показать [7], что справедлива оценка

$$\left|f(z)-S_m(z)\right| \le \frac{m!}{|z|^{m+1}}. \qquad (1.6)$$

Оценка (1.6) является типичной для асимптотических методов: количество членов m в сумме (1.5), при которых разность между точной $f(z)$ и частичной суммой $S_m(z)$ мала, согласно (1.6) зависит от значения независимой переменной z. Устремлять m в бесконечность и суммировать ряд (1.4) точно не имеет смысла, поскольку он расходится, о чём говорит и оценка (1.6) при $m \to \infty$. Тем не менее, для любого большого, но фиксированного m частичная сумма (1.5) является хорошим приближением для $f(z)$ в пределе $z \to +\infty$. Действительно, оценка (1.6) говорит о том, что для любого m найдётся такое достаточно большое значение z, что разность (1.6) будет меньше любого наперёд заданного числа. Если функция $S_m(z)$ приближает функцию $f(z)$ в асимптотическом пределе $z \to +\infty$, то подобное асимптотическое равенство записывают как

$$f(z) \sim S(z) \text{ при } z \to +\infty. \qquad (1.7)$$

В некоторых случаях асимптотическую оценку интеграла можно получить, производя последовательные интегрирования по частям. Рассмотрим интеграл, описывающий функцию ошибок [7]

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2)\,dt. \qquad (1.8)$$

Очевидно, что при $x \to +\infty$ $\mathrm{Erf}(x) \to 0$, но какова при этом её зависимость от x? Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = \int_x^\infty \exp(x^2 - t^2)\,dt. \qquad (1.9)$$

Очевидно, что $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(x) \cdot \exp(-x^2)$. Проинтегрируем правую часть (1.9) по частям:

$$\int_x^\infty \exp(x^2 - t^2)\,dt = -\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{1}{t}\,d\left(\exp(x^2 - t^2)\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \exp(x^2 - t^2)\frac{dt}{t^2}. \qquad (1.10)$$

Первое слагаемое в правой части (1.10) является первым приближением для функции $f(x)$, а интеграл во втором слагаемом является поправкой к нему. Чтобы уточнить эту поправку, вновь проинтегрируем по частям. Повторяя этот процесс, получим последовательность всё более точных в пределе $x \to +\infty$ оценок:

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} + r_n(x), \qquad (1.11)$$

где остаточный член $r_n(x)$ имеет порядок не выше, чем $1/x^{2n}$. Возвращаясь с помощью (1.9) и (1.8) к исходной функции $\mathrm{Erf}(x)$, получим асимптотическое разложение в форме

$$\mathrm{Erf}(x) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \ldots \right) \tag{1.12}$$

Точность оценки (1.12) растёт с ростом аргумента *x*.

1.1.1. Символы *O* и *o*. Асимптотические ряды

Начало систематического применения асимптотических рядов в прикладных задачах анализа [1-5] связывают с работами А. Пуанкаре в области небесной механики. Для обозначения относительного порядка малости входящих в такие ряды функций употребляются следующие символы:

1) символ $g(z) = O(f(z))$ при $z \to z_0$ означает, что

$$|g(z)| \le C \cdot |f(z)| \text{ при } z \to z_0 \text{ и } C < \infty; \tag{1.13}$$

2) символ $g(z) = o(f(z))$ при $z \to z_0$ означает, что

$$\frac{g(z)}{f(z)} \to 0 \text{ при } z \to z_0 . \tag{1.14}$$

Обращаем внимание, что оценка (1.14) не говорит о том, как быстро $g(z)/f(z)$ стремится к нулю как функция $z - z_0$, а лишь устанавливает факт такого стремления.

3) Дополнительно к символам *O* и *o* вводится знак асимптотического равенства «~», уже встречавшийся у нас в выражении (1.7). Запись $g(z) \sim f(z)$ означает, что

$$\frac{g(z)}{f(z)} \to 1 \text{ при } z \to z_0 . \tag{1.15}$$

Пусть теперь мы имеем последовательность функций $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots$, вообще говоря, комплексного аргумента *z*, для которых при $\mathrm{Re}\, z \to +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = o(\varphi_0(z)) \\ \varphi_2(z) = o(\varphi_1(z)) \\ \qquad \ldots. \end{cases} \tag{1.16}$$

Если для некоторой функции $f(z)$, зависящей, вообще говоря, от комплексного переменного z, справедливо асимптотическое представление, при котором для $\operatorname{Re} z \to +\infty$ имеется последовательность оценок

$$\begin{cases} f(z) = c_0\varphi_0(z) + O(\varphi_1(z)), \\ f(z) = c_0\varphi_0(z) + c_1\varphi_1(z) + O(\varphi_2(z)), \\ \quad .... \end{cases} \tag{1.17}$$

то функции $f(z)$ может быть сопоставлен следующий ряд:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(z), \tag{1.17}$$

который называется *асимптотическим рядом* для функции $f(z)$. Для данной функции $f(z)$ и данной последовательности функций (1.16) коэффициенты асимптотического ряда (1.17) определяются единственным образом. В самом деле, при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ мы можем разделить первое из равенств (1.17) на $\varphi_0(z)$, откуда из соотношений (1.16)

$$\frac{f(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{c_0\varphi_0(z) + O(\varphi_1(z))}{\varphi_0(z)} \to c_0 . \tag{1.18}$$

Аналогично при $\operatorname{Re} z \to +\infty$

$$\frac{f(z) - c_0\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)} \to c_1 \tag{1.19}$$

и так далее, что позволяет однозначно определить коэффициенты асимптотического ряда.

Отметим, что полезность асимптотического ряда существенно зависит как от функции $f(z)$, так и от последовательности функций $\varphi_n(z)$, для которой он записывается. Если, например, $f(z) = \exp(-z)$, т.е. стремится к нулю при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ быстрее любой степени $1/z^n$, то разложение (1.17) будет мало полезно, поскольку все коэффициенты такого ряда будут равны нулю:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \quad c_0 = \lim_{z\to+\infty} \frac{e^{-z}}{1} = 0, \quad c_1 = \lim_{z\to+\infty} \frac{e^{-z} - 0\cdot 1}{1/z} = 0, \ldots, \quad c_n = 0 . \tag{1.20}$$

Результаты (1.20) означают, что асимптотический ряд сходится, но он сходится к функции $S(z) \equiv 0$, т.е. не к той функции $f(z) = \exp(-z)$, для которой он был построен. В этом состоит ещё одно отличие асимптотических рядов от обычных числовых или функциональных рядов.

1.1.2. Оценка некоторых сумм

Зачастую необходимо оценить сумму $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$, точное значение которой затруднительно вычислить, лишь в асимптотическом пределе $n \to +\infty$. С точки зрения аналитических методов расчёта бывает проще вычислить интеграл, приближающий данную сумму. Если суммируемая функция $f(x)$ является непрерывной, монотонной и положительной, то для оценки S_n можно воспользоваться следующим равенством [1]:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)dx + O(f(n+1)) + O(1). \tag{1.21}$$

Справедливость равенства (1.21) легко установить, например, для монотонно возрастающей функции, записав последовательность оценок

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k) \le \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx. \tag{1.22}$$

Суммируя каждый член в неравенствах (1.22) по k от 1 до n, мы получим оценку (1.21) [1].

Отметим, что обычно одно из слагаемых в правой части (1.21) является главным, т.е. наибольшим в асимптотическом пределе $n \to +\infty$. Для монотонно возрастающих функций это чаще всего первое слагаемое, т.е. интегральная оценка суммы, а для монотонно убывающих функций это может быть любое из трёх слагаемых. Если ряд, являющийся пределом суммы S_n при $n \to +\infty$, является сходящимся, то оценка (1.21) часто является мало полезной, поскольку может установить только факт сходимости ряда, но не точное значение его суммы. Так, для суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \tag{1.23}$$

применение оценки (1.21) приводит к результату

$$S_n = -\frac{1}{n} + 1 + O(1) = O(1) \quad \text{при } n \to +\infty, \tag{1.24}$$

что просто устанавливает факт сходимости ряда (1.23) в пределе при $n \to +\infty$, но не может дать более точной информации о значении его суммы. Если же в пределе $n \to +\infty$ ряд является расходящимся, то оценка (1.21) может быть полезной. Рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{1.25}$$

В пределе $n \to +\infty$ этот ряд является расходящимся. Функция $f(k) = 1/k$ удовлетворяет условиями применимости оценки (1.21): она непрерывная (для непрерывного аргумента k=x, положительная и монотонно убывающая). Применяя оценку (1.21), мы получим, что

$$S_n = \ln n + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + O(1). \tag{1.26}$$

В пределе $n \to +\infty$ наибольшим слагаемым в (1.26) является первое слагаемое, поэтому можно записать асимптотическое равенство: при $n \to +\infty$ $S_n \sim \ln n$.

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.1 [2]

Показать, что при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = ex^x + O\left(x^{x-1}\right). \tag{1.1.1}$$

Выделим в левой части (1.1.1) самый большой при $x \to +\infty$ множитель и преобразуем показательную функцию:

$$\left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = x^x\left(1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^x = x^x \cdot \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right). \tag{1.1.2}$$

При $x \to +\infty$ можно разложить аргумент логарифма по малому параметру $1/x << 1$ до членов второго порядка по $1/x$, откуда получим:

$$\exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \exp\left(x \cdot \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \exp\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \tag{1.1.3}$$

В (1.1.3) разложим экспоненту до первого порядка малости по $1/x$, что даст

$$\exp\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \tag{1.1.4}$$

Подставляя (1.1.4) в (1.1.3) и далее в (1.1.2), мы получим асимптотическое выражение

$$x^x \cdot e \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = ex^x + O\left(x^{x-1}\right),$$

т.е. соотношение (1.1.1) доказано.

Пример 1.2 [2]

Показать, что при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = ex - \frac{1}{2} e \ln x + O(1)\,. \qquad (1.2.1)$$

Решение

Представим подынтегральную функцию следующим образом:

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \exp\left(t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right). \qquad (1.2.2)$$

В интеграле (1.2.1) при $x \to +\infty$ основной вклад вносят большие значения *t*, поэтому в (1.2.2) можно разложить аргумент логарифма по малому параметру $1/t \ll 1$. Записывая разложение до третьего члена, мы получим:

$$\exp\left(t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) \approx \exp\left(t \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3}\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2}\right). \qquad (1.2.3)$$

Вновь выполняя разложение в ряд по малому параметру $1/t \ll 1$ в (1.2.3), мы получим, что с точностью до членов второго порядка малости по $1/t$

$$\exp\left(1 - \frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2}\right) = e \cdot \left(1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right). \qquad (1.2.4)$$

Подставляя правую часть (1.2.4) в исходный интеграл (1.2.1) и интегрируя, мы получим, что

$$\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = \int_1^x e \cdot \left(1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt = ex - \frac{1}{2} e \ln x + e \int_1^x O\left(\frac{1}{t^2}\right) dt\,. \qquad (1.2.5)$$

Интеграл в последнем слагаемом в (1.2.5) является конечной величиной, поэтому для этого слагаемого справедлива оценка *O*(1). Таким образом, соотношение (1.2.1) доказано.

Пример 1.3 [1, 6]

Показать, что при $x \to +\infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln x + O(1)\,. \qquad (1.3.1)$$

Решение

Вначале выделим отдельно в левой части (1.3.1) интеграл по отрезку [0, 1], который является конечной величиной порядка единицы:

$$\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt + \int_1^x \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_1^x \sqrt{1+t^2}\, dt + O(1)\,. \qquad (1.3.2)$$

Займёмся далее оценкой интеграла в правой части (1.3.2). Вынесем *t* из-под корня и учтём, что при $x \to +\infty$ основной вклад в интеграл дают большие значения *t*, что позволяет произвести разложение в ряд до второго члена:

$$\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_1^x t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt = \int_1^x t\left(1+\frac{1}{2t^2}+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)dt = \int_1^x \left(t+\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)dt\ . \qquad (1.3.3)$$

Наличие слагаемых со степенями *1/t* в (1.3.3) обусловило необходимость разбиения интервала интегрирования в (1.3.2) на две части, чтобы избежать сингулярности при *t=0.* Выполняя интегрирование в (1.3.3), мы получим, что при $x \to +\infty$

$$\int_1^x \left(t+\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln x + O(1)\,. \qquad (1.3.4)$$

Подставляя (1.3.4) в (1.3.2) и учитывая, что $O(1)+O(1)=O(1)$, мы устанавливаем справедливость асимптотического равенства (1.3.1).

Пример 1.4 [1]

Показать справедливость асимптотической оценки суммы при $n \to +\infty$ (параметр $\alpha > -1$):

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,. \qquad (1.4.1)$$

Решение

Применяя оценку по формуле (1.21), мы получим асимптотическую оценку для *S:*

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{\alpha} = \int_0^{n-1}(x+1)^{\alpha}\,dx + O\left((n+1)^{\alpha}\right)+O(1) = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}+O\left((n+1)^{\alpha}\right)+O(1)\,. \qquad (1.4.2)$$

При $n \to +\infty$ и $\alpha > -1$ главным членом в правой части (1.4.2) является первое слагаемое, поэтому соотношение (1.4.1) доказано.

Пример 1.5 [1]

Показать справедливость асимптотической оценки суммы при $n \to +\infty$ (параметр $\alpha > -1$):

$$S = \sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k} \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,. \qquad (1.5.1)$$

Решение

Применяя оценку по формуле (1.21), мы получим асимптотическую оценку для *S:*

$$S = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\ln(k+2))^{\alpha}}{k+2} = \int_0^{n-2}\frac{(\ln(x+2))^{\alpha}}{x+2}\,dx + O\left(\frac{(\ln(n+1))^{\alpha}}{n+1}\right)+O(1)\,,$$

что после выполнения интегрирования даёт оценку

$$S=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{(\ln 2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O\left(\frac{(\ln(n+1))^{\alpha}}{n+1}\right)+O(1). \tag{1.5.2}$$

При $n\to+\infty$ и $\alpha>-1$в (1.5.2) главным является первое слагаемое, поэтому соотношение (1.5.1) доказано.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1 [9]
Пользуясь интегрированием по частям, показать справедливость асимптотической оценки $\int\limits_{z}^{+\infty} e^{z-t}\frac{t\,dt}{z^2}\sim\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ при $z\to+\infty$, $t>z$.

Задача 1.2 [11]

Показать, что при $x\to+\infty$ справедлива асимптотическая оценка $\int\limits_0^x \frac{\sin^2 t}{t}dt\sim\frac{1}{2}\ln x$.

Задача 1.3 [11]
Пользуясь интегрированием по частям, показать справедливость асимптотической оценки при $x\to+\infty$:
$\int\limits_x^{+\infty}\frac{\exp(x-t)}{t}dt=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-...+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+r_n(x)$, где остаточный член $r_n(x)=(-1)^n n!\int\limits_x^{+\infty}\frac{\exp(x-t)}{t^{n+1}}dt$. Является ли данный асимптотический ряд сходящимся?

Задача 1.4 [11]
Пользуясь интегрированием по частям, показать справедливость асимптотической оценки при $x\to+\infty$: $\int\limits_a^x\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\sqrt{t^2+1}}dt\sim\frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, где $\alpha>-1,\ a>1$.

Задача 1.5 [1]
Получить асимптотическую оценку суммы при $n\to+\infty$ (параметры $\alpha>-1,\ \beta\ge 3$): $S=\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}(\ln k)^{\beta}$.

2. Метод Лапласа

2.1. Введение

Методом Лапласа называется совокупность приёмов для асимптотической оценки интегралов от вещественной переменной, называемых интегралами Лапласа:

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx. \tag{2.1}$$

В (2.1) λ есть вещественный параметр, который является большим числом по сравнению с единицей, и оценка интеграла получается справедливой лишь в пределе $\lambda\to+\infty$. Функции $f(x)$ и $S(x)$ должны быть непрерывными на отрезке $[a, b]$. Как известно, непрерывная функция на отрезке достигает своего максимального и минимального значений. Пусть максимальное значение функции $S(x)$ достигается в некоторой точке x_0. В этом случае функция $\exp\left(\lambda S(x)\right)$ при большом λ имеет очень резкий максимум в этой точке. Этот максимум обеспечивает основной вклад в интеграл (2.1). Результирующая асимптотическая формула зависит от того, является ли точка максимума x_0 функции $S(x)$ внутренней точкой интервала или одной из его граничных точек.

2.1.1. Случай максимума во внутренней точке интервала интегрирования

Если x_0 является точкой максимума для функции $S(x)$, будучи экстремальной точкой, для которой $S'(x_0)=0$, и при этом является внутренней точкой интервала, т.е. $a<x_0<b$, то для оценки интеграла (2.1) нужно разложить функцию $S(x)$ в ряд Тейлора в окрестности x_0 до второго слагаемого, поскольку в первом слагаемом $S'(x_0)=0$. Для возможности разложения мы потребуем, чтобы функции $f(x)$ и $S(x)$ были аналитическими в некоторой ε – окрестности точки x_0. Кроме того, потребуем, чтобы точка x_0 была невырожденной точкой максимума, т.е. $S''(x_0)<0$, поэтому $S(x-x_0)\approx S(x_0)-\left|S''(x_0)\right|\left(x-x_0\right)^2/2$. Что касается функции $f(x)$, то в силу её аналитического характера на малом интервале $[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ можно заменить функцию её постоянным значением $f(x_0)$. При выполнении указанных условий главный вклад в интеграл (2.1) от точки x_0 при $\lambda\to+\infty$ имеет вид

$$F(\lambda)\approx f(x_0)\exp\left(\lambda S(x_0)\right)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left|S''(x_0)\right|\left(x-x_0\right)^2\right)dx. \tag{2.2}$$

Производя в (2.2) замену переменной $\sqrt{\lambda\left|S''(x_0)\right|/2}\left(x-x_0\right)=t$, мы приводим его к интегралу

$$F(\lambda) \approx \frac{f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}\left|S''(x_0)\right|}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(x_0)|}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(x_0)|}} \exp\left(-t^2\right)dt\,. \tag{2.3}$$

Пределы интегрирования в (2.3) зависят от дополнительного параметра ε, определяющего величину интервала, на котором производится разложение функции $S(x)$ в ряд Тейлора. Тем не менее, в асимптотическом пределе $\lambda \to +\infty$ можно для любого значения ε выбрать такое достаточно большое значение λ, что модуль верхнего и нижнего предела интегрирования в (2.3) будет больше любого наперёд указанного числа *δ>0*. Это даёт основание расширить пределы интегрирования в (2.3) от –∞ до +∞, после чего интеграл вычисляется точно и равен $\sqrt{\pi}$. В результате для исходного интеграла (2.1) метода Лапласа даёт следующую асимптотическую оценку в пределе $\lambda \to +\infty$[1-6]:

$$F(\lambda) = f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|S''(x_0)\right|}}\left(1 + O\left(\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 S''(x_0)}{2}\lambda\right]\right)\right). \tag{2.4}$$

Второе слагаемое в скобках в (2.4) с символом *O* даёт представление о погрешности главного члена приближения, равному первому слагаемому. В него входит ε – половина величины интервала с центром в точке x_0, на котором производится разложение в ряд функции $S(x)$. Асимптотический характер оценки (2.4) проявляется следующим образом: для любого *δ>0* и любого размера интервала *2ε>0* в асимптотическом пределе $\lambda \to +\infty$ найдётся такое значение λ, при котором второе слагаемое в (2.4) будет меньше δ. Разложение (2.4) может быть продолжено, и ряд будет содержать степени параметра λ вида $1/\lambda^{k+1/2}$.

В случае, когда точка максимума x_0 является точкой экстремума и совпадает с одной из крайних точек интервала, т.е. $x_0 = a$ или $x_0 = b$, оценка (2.4) применяется с множителем 1/2, поскольку в интеграл (2.1) даёт вклад только половина интервала $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, по которой берётся интеграл, дающий основной вклад:

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|S''(x_0)\right|}}\,. \tag{2.5}$$

2.1.2. Случай максимума в граничной точке интервала интегрирования

Если точка максимума функции $S(x)$ совпадает с одной из крайних точек интервала, т.е. $x_0 = a$ или $x_0 = b$, и не является точкой экстремума, т.е. $S'(x_0) \neq 0$, то разложение функции $S(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 проводится до первого слагаемого. Рассмотрим случай, когда $x_0 = a$. После разложения $S(x)$ в ряд до первого слагаемого и вычисления интеграла (2.1) получается следующая асимптотическая оценка [1-6] при $\lambda \to +\infty$:

$$F(\lambda) = \frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda |S'(a)|}\left(1 + O\left(\exp\left[-\lambda |S'(a)\varepsilon|\right]\right)\right). \tag{2.6}$$

Асимптотический характер формулы (2.6) проявляется аналогично обсуждаемому выше свойству выражения (2.4): для любого значения интервала 2ε разложения $S(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 можно выбрать асимптотически большое значение параметра λ, при котором второй член в (2.6) будет меньше любого наперёд заданного положительного числа. Если точкой максимума является другой конец интервала интегрирования в (2.1), т.е. $x_0 = b$, то формула (2.6) применяется в том же виде с заменой $x_0 = a$ на $x_0 = b$.

2.1.3. Метод Лапласа для кратных интегралов

Метод Лапласа может применяться и для оценки интегралов по многомерной области, если они имеют вид интеграла (2.1) с большим параметром $\lambda \to +\infty$:

$$F(\lambda) = \int_{\Omega} f(x)e^{\lambda S(x)}dx. \tag{2.7}$$

В (2.7) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ изменяется в пределах n-мерной области Ω, а функции $f(x)$ и $S(x)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми в окрестности точки x_0, где функция $S(x)$ имеет максимум как функция n переменных. Если, кроме того, точка x_0 является невырожденной точкой максимума, что означает ненулевое значение в этой точке для определителя матрицы вторых производных $\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=x_0}$, то главный член асимптотического разложения интеграла (2.5) имеет вид [1]

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(x_0)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{f(x_0)}{\sqrt{\left|\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=x_0}\right|}}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим в качестве примера асимптотику интеграла

$$F(\lambda)=\int\frac{\exp\left(-\lambda\left\{3x^2+3y^2-2xy-16\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y+76\right\}\right)}{\sqrt{x^2+3/2}\sqrt{y^2+1/2}}dxdy \quad \text{при } \lambda\to+\infty, \qquad (2.9)$$

если область Ω представляет собой всю плоскость (xy). В рассматриваемом примере размерность области интегрирования $n=2$, функция $f(x,y)=1/\left(\sqrt{x^2+3/2}\sqrt{y^2+1/2}\right)$, а функция

$$S(x,y)=-\left\{3x^2+3y^2-2xy-16\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y+76\right\} \qquad (2.10)$$

имеет одну точку максимума $x_0=7\sqrt{2}/2$, $y_0=5\sqrt{2}/2$. В этой точке матрица вторых производных имеет вид

$$\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{x=x_0}=\left\|\begin{matrix}-6 & 2\\ 2 & -6\end{matrix}\right\|. \qquad (2.11)$$

Согласно теории квадратичных форм [12] матрица (2.11) является матрицей отрицательно определённой квадратичной формы, поскольку первый её угловой минор отрицателен, $\Delta_1=-6$ а второй положителен, $\Delta_2=\det S''(x_0,y_0)=32$. Поэтому точка $x_0=7\sqrt{2}/2$, $y_0=5\sqrt{2}/2$ является точкой максимума функции $S(x,y)$. Значение самой функции $S(x_0, y_0)=0$. Подставляя эти данные в формулу (2.8), мы находим асимптотику

$$F(\lambda)\sim\frac{\pi}{4\sqrt{7}}\frac{1}{\lambda} \text{ при } \lambda\to+\infty. \qquad (2.12)$$

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.1 [1]

Вычислить асимптотику интеграла $F(n)=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt$ для больших целых значений n.

Решение.

Преобразуем интеграл так, чтобы он имел вид интеграла Лапласа (2.1):

$$F(n)=\int_{-1}^{1}\exp\left(n\ln\left(1-t^2\right)\right)dt. \qquad (2.1.1)$$

Этот интеграл имеет вид интеграла (2.1), в котором большой параметр $\lambda=n$, а функция $f(t)\equiv 1$. Функция $S(t)=\ln\left(1-t^2\right)$ имеет на интервале интегрирования одну стационарную точку $t_0=0$. Вторая производная $S''(t_0)=-2$, т.е. это точка максимума. Значение функции в этой точке $S(t_0)=0$. Подставляя эти данные в асимптотическую оценку (2.4), мы получаем, что главный член разложения при $n\to+\infty$ имеет вид

$$F(n)\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,. \qquad (2.1.2)$$

Пример 2.2 [1]

Получить асимптотическое разложение для интеграла ошибок

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (2.2.1)$$

при $x\to+\infty$.

Решение

Интеграл (2.2.1) не имеет явной структуры интеграла Лапласа (2.1). Чтобы получить её, необходимо явно выделить в экспоненте большой параметр. С этой целью выполним замену переменной $t=x\cdot y$, перейдя от t к переменной *y*. Кроме того, представим интеграл как разность двух следующих интегралов:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2y^2}dy-\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-x^2y^2}dy\,. \qquad (2.2.2)$$

Первый интеграл в (2.2.2) есть исходный интеграл (2.2.1), взятый по области $[0,+\infty)$ и равный единице. Второй интеграл в (2.2.2) имеет вид интеграла Лапласа (2.1), в котором большой параметр $\lambda=x^2$ и функция $f(y)\equiv1$. Функция $S(y)=-y^2$ не имеет стационарных точек в области интегрирования $[1,+\infty)$, а достигает максимума на граничной точке $y_0=-1$, где её производная отлична от нуля, $S'(y_0)=-2$. Значение самой функции S в этой точке $S(y_0)=-2$. Таким образом, мы имеем второй случай для интеграла Лапласа, и должны использовать для оценки главного члена формулу (2.6). Подставляя полученные выше результаты в эту формулу, мы получаем для главного члена интеграла (2.2.1) асимптотическую оценку

$$\operatorname{erf}(x)\sim1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\ \text{ при }\ x\to+\infty. \qquad (2.2.3)$$

Пример 2.3 [1, 2]

Получить асимптотическое выражение для гамма-функции

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}\,dt \qquad (2.3.1)$$

при $x \to +\infty$ (формулу Стирлинга):

$$\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \text{ при } x \to +\infty. \tag{2.3.2}$$

Решение

Преобразуем интеграл (2.3.1), сделав замену переменной $t = x \cdot y$, как в примере 2.2, чтобы выделить явно большой параметр *x*, и запишем подынтегральное выражение через показательную функцию:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x\ln x + x(\ln y - y)} x dy = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln y - y)} dy. \tag{2.3.3}$$

Интеграл в (2.3.3) имеет вид интеграла Лапласа (2.1), в котором большой параметр λ=*x*, функция $f(y) \equiv 1$, а функция $S(y) = \ln y - y$ имеет в области интегрирования одну стационарную точку $y_0 = 1$, расположенную внутри области. Значение второй производной в этой точке $S''(y_0) = -1$, значение функции $S(y_0) = -1$. Таким образом, для оценки главного члена асимптотики мы должны воспользоваться формулой (2.4). Подставляя в неё обозначенные выше выражения, мы получим, что

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \cdot e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \text{ при } x \to +\infty, \tag{2.3.4}$$

т.е. справедлива формула Стирлинга (2.3.2).

Пример 2.4 [2]

Вычислить асимптотику интеграла

$$F(n) = \int_0^{\pi} x^n \sin x dx \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{2.4.1}$$

Решение

Попробуем непосредственно привести интеграл (2.4.1) к интегралу Лапласа (2.1), выделив явно большой параметр в экспоненте:

$$F(n) = \int_0^{\pi} \sin x e^{n\ln x} dx. \tag{2.4.2}$$

Этот интеграл имеет вид интеграла Лапласа с большим параметром λ=*n*, функцией $f(x) = \sin x$ и функцией $S(x) = \ln x$. Функция $S(x)$ достигает максимума на правом конце интервала интегрирования при $x_0 = \pi$, причём $S'(x_0) \neq 0$, т.е. нам необходимо воспользоваться асимптотической оценкой (2.6). При её применении мы сталкиваемся с трудностью, поскольку при $x_0 = \pi$ функция $f(x_0) = 0$, т.е. какой-либо содержательной оценки получить не удаётся. Поэтому перед применением метода Лапласа исходный интеграл (2.4.1) необходимо преобразовать. Одним из стандартных приёмов является интегрирование по частям, которое для интеграла (2.4.1) даёт следующий результат при подстановке $u = \sin x$, $dv = x^n dx$:

$$F(n) = \sin x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos x\, dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} \cos x \cdot e^{(n+1)\ln x} dx\,. \qquad (2.4.3)$$

Интеграл в правой части (2.4.3) имеет вид интеграла Лапласа с $\lambda = n+1$, $f(x) = \cos x$ и функцией $S(x) = \ln x$, которая по-прежнему достигает максимума на интервале интегрирования в правой точке $x_0 = \pi$ при $S'(x_0) \neq 0$, но теперь уже в этой точке функция $f(x_0) = -1$. Подставляя эти величины в формулу (2.6), мы получаем асимптотическое разложение с главным членом

$$F(n) \sim \frac{\pi^{n+2}}{(n+2)^2} \text{ при } n \to +\infty. \qquad (2.4.4)$$

Пример 2.5 [1]

Получить асимптотическое выражение для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{x} - \lambda x\right) dx \qquad \text{при } x \to +\infty \qquad (2.5.1)$$

Решение.

Несмотря на то, что интеграл (2.5.1) имеет вид интеграла Лапласа (2.1), непосредственное применение асимптотических оценок встречает трудности. Действительно, если согласно (2.1) выделить большой параметр λ и функцию $S(x) = -x$, имеющую максимум в области интегрирования при $x_0 = 0$, то функция $f(x) = \exp(-1/x)$. В точке $x_0 = 0$ она вместе со всеми своими производными обращается в нуль, поэтому оценка вида (2.2) будет иметь мало полезный вид $F(\lambda) = O(1/\lambda^{\infty})$, т.е. нуль. Если же взглянуть на функцию в аргументе экспоненты в (2.5.1),

$$S(x,\lambda) = -\frac{1}{x} - \lambda x\,, \qquad (2.5.2)$$

то можно заметить, что она достигает максимума при $x_0 = 1/\sqrt{\lambda}$, т.е. точка максимума сама зависит от параметра λ. Сделаем замену $x = t/\sqrt{\lambda}$, тогда

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\left[t+\frac{1}{t}\right]\right)dt\,. \qquad (2.5.3)$$

Большим параметром в (2.5.3) является $\sqrt{\lambda}\to+\infty$. Функция $S(t)=-t-1/t$ достигает максимума при $t=1$, т.е. необходимо применять формулу (2.4). При этом $S(1)=-2$, $S''(1)=-2$, и главный член асимптотики (2.4) имеет вид

$$F(\lambda)\sim\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{3/4}}\,. \qquad (2.5.4)$$

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1 [1]

С помощью метода Лапласа получить асимптотическую оценку для интеграла $F(n)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$, где целое положительное число $n\to+\infty$.

Задача 2.2 [1, 4]

С помощью метода Лапласа получить асимптотическую оценку при $x\to+\infty$ для модифицированной функции Бесселя $I_n(x)$ целого порядка n, используя интегральное представление $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$.

Задача 2.3 [1, 4]

Получить асимптотическую оценку для полинома Лежандра $P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(x+\left(\sqrt{x^2-1}\right)\cos\theta\right)^n d\theta$ при $x>1$ и для больших целых индексов $n\to+\infty$.

Задача 2.4 [2]

Получить асимптотическую оценку для интеграла $F(n)=\int\limits_0^1\frac{e^x x^n}{\left(1+x^2\right)^n}dx$, где n есть целое положительное число, при $n\to+\infty$.

Задача 2.5 [3]

Получить асимптотическую оценку для интеграла $F(x)=\int\limits_0^\infty \exp\left(-\nu t - x\operatorname{sh}t\right)dt$, где ν>0 и x есть действительные параметры, при $x \to +\infty$.

Задача 2.6 [3]

Получить асимптотическую оценку для интеграла $F(x)=\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\ln t\,dt$, где x есть действительный параметр, при $x \to +\infty$.

3. Метод стационарной фазы

3.1. Введение

Метод стационарной фазы предназначен для асимптотической оценки интегралов от вещественной переменной x, содержащих большой вещественный параметр $\lambda \to +\infty$ и называемых интегралами Фурье:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp\left(i\lambda S(x)\right) dx \,. \tag{3.1}$$

Функция $f(x)$ может принимать комплексные значения, а функция $S(x)$, называемая фазовой функцией, принимает вещественные значения. Очевидно, что при больших значениях параметра λ экспонента становится быстро осциллирующей функцией x и вклады от основной части интервала $[a,b]$ будут компенсировать друг друга. Основной некомпенсируемый вклад в интеграл будут давать либо крайние точки отрезка $[a,b]$, для которых в области интегрирования нет симметричных точек в непосредственной их окрестности, либо точки, вблизи которых фазовая функция $S(x)$ меняется медленно, т.е. её стационарные точки, что даёт название данному методу.

Для получения асимптотической оценки интеграла (3.1) на промежуточных этапах часто используется утверждение, называемое леммой Римана-Лебега [1, 6]: если функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой на всей вещественной оси, то при $\lambda \to +\infty$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(i\lambda x\right) dx = o(1) \text{ при } \lambda \to +\infty, \tag{3.2}$$

т.е. интеграл (3.2) стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$. Более точной информации о характере стремления к нулю из леммы Римана-Лебега получить нельзя. Однако, если известна более детальная информация о функции $f(x)$, в частности, если эта функция обладает n–1 непрерывными производными на всей вещественной оси, стремящимися к нулю при $x \to \pm\infty$, её n-я производная имеет один конечный разрыв в точке x_0 и тоже стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, а $n+1$ – я производная абсолютно интегрируема на вещественной оси, то оценка интеграла (3.2) становится более точной [1, 6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(i\lambda x\right) dx = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{3.3}$$

В случае, когда фазовая функция $S(x)$ не имеет стационарных точек на отрезке $[a,b]$, основной вклад в асимптотику интеграла (3.1) при $\lambda \to +\infty$ получается после интегрирования по частям и может быть записан в форме [1, 3–6]

$$F(\lambda)=\frac{1}{i\lambda}\left[\frac{f(b)e^{i\lambda S(b)}}{S'(b)}-\frac{f(a)e^{i\lambda S(a)}}{S'(a)}\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.4}$$

Если же на интервале $[a,b]$ имеется одна или несколько стационарных точек фазовой функции $S(x)$, то вклад от какой-либо невырожденной стационарной точки x_0, для которой $S'(x_0)=0$ и $S''(x_0)\neq 0$, вычисляется путём разложения в ряд функции $S(x)$ в окрестности точки x_0 до второго члена. Вывод аналогичен выводу асимптотической оценки (2.4) в методе Лапласа, и сводится к оценке интеграла по ε-окрестности точки x_0:

$$F(\lambda)\approx f(x_0)\exp\left(i\lambda S(x_0)\right)\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\exp\left(i\frac{\lambda}{2}S''(x_0)\left(x-x_0\right)^2\right)dx\,. \tag{3.5}$$

Производя в (3.5) замену переменной $\sqrt{\lambda|S''(x_0)|/2}\left(x-x_0\right)=t$, мы приводим его к следующему виду:

$$F(\lambda)\approx\frac{f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(x_0)|}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(x_0)|}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{2}|S''(x_0)|}}\exp\left(i\,\mathrm{sign}\,(S''(x_0))t^2\right)dt\,. \tag{3.6}$$

Дальнейшие рассуждения также аналогичны применяемым в методе Лапласа. В асимптотическом пределе для любого значения половины интервала ε>0 можно выбрать такое значение λ>0, что значение модуля пределов интегрирования будет больше любого наперёд заданного числа δ>0. Это позволяет устремить пределы интегрирования в (3.6) к плюс и минус бесконечности. Заметим также, что подынтегральная функция в (3.6) симметрична относительно замены $t\rightarrow -t$, поэтому можно заменить интеграл (3.6) удвоенным значением интеграла в пределах от 0 до +∞. Такой интеграл известен как интеграл Френеля [5, 6]:

$$\int\limits_0^\infty e^{it^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{3.7}$$

Используя (3.7), мы получаем следующую асимптотическую оценку для интеграла (3.1) [1–6]:

$$F(\lambda,x_0)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}\left(f(x_0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\exp\left[i\lambda S(x_0)+\frac{i\pi}{4}\mathrm{sign}\,S''(x_0)\right]\quad \text{при } \lambda\rightarrow+\infty. \tag{3.8}$$

Достаточно часто встречаются ситуации, когда стационарная точка x_0 функции $S(x)$ расположена на краю интервала интегрирования и является при этом вырожденной, т.е. её производные в этой точке равны нулю до порядка m–1, а $S^{(m)}(x_0)\neq 0$, где $m\geq 2$. Пусть точка x_0 совпадает с начальной точкой интервала интегрирования. В этом случае главный член асимптотики интеграла по половине δ-окрестности точки x_0

$$F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\exp\big(i\lambda S(x)\big)dx \tag{3.9}$$

при $\lambda\to+\infty$ может быть представлен в виде [1]

$$F(\lambda,x_0)=\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\lambda^{1/m}}\left(f(x_0)+O\left(\frac{1}{\lambda^{1/m}}\right)\right)\exp\left[i\lambda S(x_0)+\frac{i\pi}{2m}\operatorname{sign}S^{(m)}(x_0)\right]. \tag{3.10}$$

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.1 [1]

Вычислить асимптотику интеграла (α >0)

$$F(\lambda)=\int_0^\infty \frac{\exp(i\lambda x)}{(1+x)^\alpha}dx \quad \text{при } \lambda\to+\infty. \tag{3.1.1}$$

Решение

Функция $S(x)=x$ не имеет стационарных точек в области интегрирования, поэтому воспользуемся оценкой (3.4), в которой $f(x)=1/(1+x)^\alpha$. Для точки $b=\infty$ функция $f(b)=0$, поэтому вклад в интеграл даёт только точка a=0, для которой $f(0)=1$, $S(0)=0$ и $S'(0)=1$, что приводит к асимптотической оценке

$$F(\lambda)=-\frac{1}{i\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{i}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{при } \lambda\to+\infty. \tag{3.1.2}$$

Пример 3.2 [1, 5]

Вычислить асимптотику функции Бесселя целого индекса $n\geq 0$ для больших значений аргумента $x\to+\infty$, используя интегральное представление функций Бесселя

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi. \tag{3.2.1}$$

Решение

Отметим, что подынтегральная функция периодична по φ с периодом 2π, поэтому вклады от крайних точек $\varphi=\pi$ и $\varphi=-\pi$ после интегрирования по частям в формуле (3.4) взаимно уничтожаются [5]. Следовательно, асимптотика интеграла будет определяться только вкладом от стационарных точек. Для его определения вначале мы выразим косинус в (3.2.1) через экспоненту:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix\sin\varphi - in\varphi)\, d\varphi\,. \tag{3.2.2}$$

Интеграл в (3.2.2) имеет вид интеграла Фурье (3.1), в котором $f(\varphi) = \exp(-in\varphi)$, а фазовая функция $S(\varphi) = \sin\varphi$ имеет в области интегрирования две невырожденные стационарные точки. Первая из них есть $\varphi_1 = -\pi/2$, для которой $S(\varphi_1) = -1$, $S''(\varphi_1) = 1$, $\operatorname{sign} S''(\varphi_1) = 1$, и $f(\varphi_1) = \exp(in\pi/2)$. Вторая стационарная точка есть $\varphi_2 = \pi/2$, для которой $S(\varphi_2) = 1$, $S''(\varphi_2) = -1$, $\operatorname{sign} S''(\varphi_2) = -1$, и $f(\varphi_2) = \exp(-in\pi/2)$. Применяя формулу (3.8), мы получаем главный член асимптотики для каждой из стационарных точек:

$$F(x,\varphi_1) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \operatorname{Re}\left(\left\{\exp\left(in\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\exp\left[-ix + \frac{i\pi}{4}\right]\right), \tag{3.2.3}$$

$$F(x,\varphi_2) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \operatorname{Re}\left(\left\{\exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\exp\left[ix - \frac{i\pi}{4}\right]\right), \tag{3.2.4}$$

откуда после сложения вкладов (3.2.3) и (3.2.4) мы находим, что

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{3.2.5}$$

Пример 3.3 [1, 4]

Вычислить асимптотику функции Бесселя $J_\nu(\nu)$ произвольного порядка ν при больших значениях порядка ν и аргумента *x*=ν, где $\nu \to +\infty$, используя интегральное представление

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \exp(i\nu[\varphi - \sin\varphi])\, d\varphi + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \tag{3.3.1}$$

Решение

Фазовая функция $S(\varphi) = \varphi - \sin\varphi$ имеет на интервале интегрирования одну стационарную точку $\varphi_0 = 0$, совпадающую с левым концом интервала интегрирования. В этой точке $S(0) = S''(0) = 0$, и только третья производная не обращается в нуль, $S'''(0) = 1$. Это позволяет применить для асимптотической оценки формулу (3.10):

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\nu^{1/3}} + O\left(\frac{1}{\nu^{2/3}}\right) \quad \text{при } \nu \to +\infty. \tag{3.3.2}$$

Отметим, что для остаточного члена в (3.3.1) и (3.3.2) можно получить более точную оценку, имеющую порядок $O\left(\frac{1}{\nu^{5/3}}\right)$, как указано в [4].

Пример 3.4 [3]

Вычислить асимптотику интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi/2} t\sin(\lambda\cos t)dt \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{3.4.1}$$

Интеграл можно представить в виде интеграла Фурье (3.1):

$$F(\lambda) = \mathrm{Im}\int_0^{\pi/2} t\exp(i\lambda\cos t)dt, \tag{3.4.2}$$

что позволяет определить фазовую функцию $S(t) = \cos t$ и функцию $f(t) = t$. На интервале интегрирования $S(t)$ имеет одну стационарную точку $t_0 = 0$, в которой, однако, функция $f(t) = t$ также обращается в нуль, поэтому непосредственное применение формулы (3.8) встречает затруднения. Поступим следующим образом: разложим вблизи $t_0 = 0$ в окрестности $[0,\delta]$ подынтегральное выражение в (3.4.2) в ряд до второго слагаемого, что даст нам

$$F(\lambda,0) \sim \mathrm{Im}\int_0^{\delta} t\exp\left(i\lambda\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right)dt. \tag{3.4.3}$$

Преобразуя (3.4.3), получаем

$$F(\lambda,0) \sim \mathrm{Im}\left\{e^{i\lambda}\int_0^{\delta} t\exp\left(-i\lambda\frac{t^2}{2}\right)dt\right\} = \mathrm{Im}\left\{e^{i\lambda}\int_0^{\delta}\exp\left(-i\lambda\frac{t^2}{2}\right)d\left(\frac{t^2}{2}\right)\right\}. \tag{3.4.5}$$

Интеграл в (3.4.5) можно вычислить, пренебрегая быстро осциллирующим вкладом при $\lambda \to +\infty$ от верхнего предела $t = \delta$, что приведёт нас к выражению

$$F(\lambda,0) \sim \mathrm{Im}\left\{e^{i\lambda}\frac{1}{i\lambda}\right\} = -\frac{\cos\lambda}{\lambda}. \tag{3.4.6}$$

Нам осталось ещё оценить вклад от крайней правой точки интервала интегрирования в (3.4.2) при $t = \pi/2$. Эта точка не является стационарной, поскольку $S'(\pi/2) = -1$, при этом $S(\pi/2)=0$. Мы воспользуемся оценкой вклада из выражения (3.4), в котором оставляем только первое слагаемое при $b=\pi/2$:

$$F(\lambda,0) \sim \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i\lambda}\frac{\pi}{2}\frac{1}{(-1)}\right\} = \frac{\pi}{2\lambda}. \qquad (3.4.7)$$

Суммируя вклады (3.4.6) и (3.4.7), мы получаем главный член асимптотики для интеграла (3.4.1) в виде

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2}-\cos\lambda\right) \quad \text{при } \lambda\to+\infty. \qquad (3.4.8)$$

Пример 3.5 (задача о дифракции электрона на двух щелях)

Решить стационарное уравнение Шрёдингера [13] для двумерной волновой функции электрона в плоскости (*xy*), если при *x=0* вдоль оси Оу имеется непроницаемый экран с двумя щелями шириной *2a*, а расстояние между центрами щелей равно *2b*, причём выполнены условия $p_0 a/\hbar >> 1$, $p_0 b/\hbar >> 1$, где $p_0=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$ есть модуль импульса электрона с законом дисперсии $E=\left(p_x^2+p_y^2\right)/2m$. Параллельный пучок электронов, описываемых волновой функцией $\psi(x)=\exp\left(i\,p_0 x\right)/2\pi\hbar$, налетает слева на экран. Найти асимптотический вид волновой функции на больших расстояниях *x* справа от экрана, когда $x>>a$, $x>>b$.

Решение

При рассеивании на экране сохраняется энергия электрона $E=\left(p_x^2+p_y^2\right)/2m$, а, значит, и модуль импульса $p_0=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$, хотя волновая функция в области справа от экрана при *x>0* уже не будет иметь вид плоской волны. Будем поэтому искать решение в полупространстве *x>0* в приближении суперпозиции плоских волн вида

$$\psi(x>0,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} C(p_y)\exp\left(\frac{i\,p_y y}{\hbar}+\frac{i\,x\sqrt{p_0^2-p_y^2}}{\hbar}\right)\frac{dp_y}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \qquad (3.5.1)$$

с неизвестными коэффициентами $C(p_y)$, зависящими от p_y. В (3.5.1) в экспоненте учитывается сохранение модуля импульса p_0, через который выражается проекция импульса p_x. Фактически (3.5.1) представляет собой разложение в интеграл Фурье для волновой функции, а $C(p_y)$ является её импульсным представлением. Рассмотрим линию *x=0*, на которой находится экран с щелями. Падающая волна описывается при этом функцией, принимающей постоянное $\psi(0)=1/2\pi\hbar$ в области щелей, и равной нулю при остальных значениях переменной *y* вдоль экрана. В этом случае для $C(p_y)$ будет справедливо выражение, представляющее по сути преобразование Фурье функции $\psi(0)=1/2\pi\hbar$, взятое по щелям экрана вдоль оси *Oy*:

$$C(p_y)=\int\limits_{\text{По щелям}}\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(-\frac{i\,p_y y}{\hbar}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,, \tag{3.5.2}$$

что может быть проинтегрировано явно и в с учётом симметричного расположения щелей приводит к выражению

$$C(p_y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(p_y a/\hbar\right)}{p_y}\cos\frac{p_y b}{\hbar}\,. \tag{3.5.3}$$

Подставляя (3.5.3) в (3.5.1), мы получаем выражение для искомой волновой функции в виде интеграла:

$$\psi(x>0,y)=\frac{1}{\pi^2\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(p_y a/\hbar\right)}{p_y}\cos\frac{p_y b}{\hbar}\exp\left(\frac{i\,p_y y}{\hbar}+\frac{i\,x\sqrt{p_0^2-p_y^2}}{\hbar}\right)dp_y\,. \tag{3.5.4}$$

Введём угол φ между осью *Ox* и направлением в точку *(xy)*, где мы хотели бы найти волновую функцию. В этом случае координату *y* можно выразить через *x* как $y=x\,\mathrm{tg}\varphi$. После выделения в экспоненте в (3.5.4) общего множителя с большим безразмерным параметром

$$\lambda=\frac{p_0 x}{\hbar}>>1 \tag{3.5.5}$$

и введения безразмерных импульсов $\tilde{p}_x=p_x/p_0$, $\tilde{p}_y=p_y/p_0$ и безразмерных коэффициентов

$$\alpha=p_0 a/\hbar\,,\quad \beta=p_0 b/\hbar\,, \tag{3.5.6}$$

которые согласно постановке задачи оба велики по сравнению с единицей, волновая функция (3.5.4) примет вид

$$\psi(\lambda,\varphi)=\frac{1}{\pi^2\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\alpha\,\tilde{p}_y\right)}{\tilde{p}_y}\cos\left(\beta\,\tilde{p}_y\right)\exp\left[i\,\lambda\left(\tilde{p}_y\,\mathrm{tg}\varphi+\sqrt{1-\tilde{p}_y^2}\right)\right]d\tilde{p}_y\,. \tag{3.5.7}$$

Интеграл в (3.5.7) имеет вид интеграла Фурье (3.1) с большим параметром λ, определённым в (3.5.5), функцией

$$f(\tilde{p}_y)=\frac{\sin\left(\alpha\,\tilde{p}_y\right)}{\tilde{p}_y}\cos\left(\beta\,\tilde{p}_y\right) \tag{3.5.8}$$

и фазовой функцией

$$S(\tilde{p}_y) = \left(\tilde{p}_y \operatorname{tg}\varphi + \sqrt{1-\tilde{p}_y^2}\right), \tag{3.5.9}$$

зависящей от угла φ как от параметра, причём в правой полуплоскости при $x>0$ имеем $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Найдём стационарные точки функции (3.5.9). Производная фазовой функции

$$S'(\tilde{p}_y) = \operatorname{tg}\varphi - \frac{\tilde{p}_y}{\sqrt{1-\tilde{p}_y^2}} \tag{3.5.10}$$

обращается в нуль в точках

$$\tilde{p}_y^{(1,2)} = \pm \sin\varphi. \tag{3.5.11}$$

Значения $\tilde{p}_y^{(1,2)}$ в (3.5.11) отличаются только знаком в силу симметрии задачи относительно оси Ox, т.е. эквивалентности лучей φ и $-\varphi$. Вычисляя волновую функцию (3.5.7) в какой-либо конкретной точке плоскости $(x,\, x\operatorname{tg}\varphi)$, мы выбираем один из знаков в (3.5.11). Поэтому достаточно рассмотреть вклад одной из точек (3.5.11), например, со знаком «плюс». Вычисляя вторую производную фазовой функции, мы получим, что $S''(\tilde{p}_y) = -1\big/\left(1-\tilde{p}_y^2\right)^{3/2}$, что в стационарной точке $\tilde{p}_y^{(1)} = \sin\varphi$ даёт

$$S''\left(\tilde{p}_y^{(1)}\right) = -\frac{1}{\cos^3\varphi}. \tag{3.5.12}$$

Значение самой фазовой функции (3.5.9) в стационарной точке $\tilde{p}_y^{(1)} = \sin\varphi$ равно

$$S\left(\tilde{p}_y^{(1)}\right) = \frac{1}{\cos\varphi}. \tag{3.5.13}$$

Значение функции (3.5.8) вычисляется непосредственной подстановкой в неё выражения $\tilde{p}_y^{(1)} = \sin\varphi$. Теперь мы можем воспользоваться асимптотической оценкой (3.8), применяемой к интегралу (3.5.7) на больших расстояниях от экрана, когда параметр λ в (3.5.5) много больше единицы. В результате мы получим с учётом определения параметра λ в (3.5.5), что главный член асимптотики для волновой функции имеет следующий вид:

$$\psi(x,\varphi) \sim \frac{1}{\pi\hbar}\,\frac{\sin\left(\dfrac{p_0 a\sin\varphi}{\hbar}\right)}{\sin\varphi}\cos\left(\frac{p_0 b\sin\varphi}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{i x p_0}{\hbar\cos\varphi}\right)\sqrt{\frac{2\pi\hbar\cos^3\varphi}{p_0 x}}\,\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right). \tag{3.5.14}$$

Несмотря на приближённый характер, выражение (3.5.14) имеет достаточно сложную структуру. С точки зрения распределения электронной плотности $|\psi(x,\varphi)|^2$ далеко от экрана при $x >> a$, $x >> b$ мы будем иметь интерференционную картину с осцилляциями интенсивности, период которой как функция угла φ будет зависеть от соотношения между шириной каждой из щели *2a* и расстояния между центрами щелей *2b*. Как известно, именно подобные эксперименты с дифракцией пучка электронов по аналогии с дифракцией света послужили одним из доказательств волновой природы частиц на атомных масштабах [14].

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1 [1]

Вычислить главный член асимптотики интеграла $F(\lambda)=\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{(1+x)^\alpha}dx$ при $\lambda \to +\infty$ (α >0), используя оценку при отсутствии стационарных точек на интервале интегрирования.

Задача 3.2 [1]

Вычислить главный член асимптотики интеграла $F(\lambda)=\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{(1+x)^\alpha}dx$ при $\lambda \to +\infty$ (α >0), используя оценку при отсутствии стационарных точек на интервале интегрирования.

Задача 3.3 [6]

Вычислить асимптотику интеграла $F(x)=\int_x^\infty \exp(it^2)dt$ при $x \to +\infty$, пользуясь интегрированием по частям.

Задача 3.4 [5]

Вычислить асимптотику интеграла $F(\lambda)=\int_0^1 (t^2+1)\cos(\lambda \sin 3t)dt$ при $\lambda \to +\infty$, учитывая главный вклад от стационарной точки и от краевых точек интервала интегрирования.

Задача 3.5

Вычислить асимптотику интеграла $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\left[3x-x^3\right]\right)dx$ при $\lambda \to +\infty$.

Задача 3.6 [3]

Вычислить асимптотику интеграла $F(x)=\int_1^\infty \left(1-e^{1-t}\right)\exp\left(ixt(1-\ln t)\right)dt$ при $x \to +\infty$, используя метод решения в примере 3.4.

4. Метод перевала

4.1. Введение

Метод перевала предназначен для получения асимптотических оценок интегралов от функций комплексной переменной z вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)\exp\big(\lambda S(z)\big)dz\,, \tag{4.1}$$

в области больших значений вещественного параметра $\lambda \to +\infty$. В интеграле (4.1) функции $f(z)$ и $S(z)$ предполагаются аналитическими в области D, которая охватывает контур интегрирования γ, поэтому контур можно деформировать в контур γ*, также лежащий в области D при сохранении начальной и конечной точки, добиваясь, чтобы он проходил наиболее удобным для вычисления образом. Наилучшая асимптотическая оценка получается, если на контур γ* будет проходить через седловую точку z_0 (или точку перевала) функции $S(z)$, в которой достигается так называемое минимаксное значение $\operatorname{Re}S(z)$, т.е. $\min\limits_{\gamma\subset D}\max\limits_{z\in\gamma}\operatorname{Re}S(z)$. Это означает, что точка z_0 является точкой максимума на кривой $\operatorname{Re}S(z)$, но среди всех кривых $\gamma \subset D$ необходимо выбрать такой контур γ*, на котором значение максимума было бы наименьшим. Точка z_0 является точкой перевала, если

$$S'(z_0) = 0\,. \tag{4.2}$$

Если при этом $S''(z_0) \neq 0$, то z_0 называется простой точкой перевала, а значение $\operatorname{Re}S(z_0)$ называется высотой перевала. В окрестности точки перевала функцию $S(z)$ можно разложить в ряд до слагаемого второй степени. Если контур γ* выбрать так, что после разложения мнимая часть аргумента экспоненты в (4.1) будет равна нулю, а вещественная часть по обе стороны от точки перевала будет отрицательной, то для оценки интеграла можно применить метод Лапласа для вещественных интегралов из главы 2. В связи с этим метод перевал называют также методом наискорейшего спуска, или методом седловой точки.

Рассмотрим кратко основные этапы получения асимптотической оценки для простой точки перевала [1, 2, 5, 6]. Разложим вблизи точки перевала z_0 функцию $S(z)$ в ряд до второго слагаемого, заменив, как и в методе Лапласа, функцию $f(z)$ её значением в точке z_0. В результате для интеграла (4.1) получим приближение

$$F(\lambda) \approx f(z_0)e^{\lambda S(z_0)}\int_{\gamma^*} e^{\frac{\lambda}{2}S''(z_0)(z-z_0)^2}dz\,. \tag{4.3}$$

Наилучшая оценка интеграла (4.3) будет иметь место, если перевальный контур γ* будет проходит вдоль линии, на которой мнимая часть аргумента экспоненты в (4.3) будет равна нулю, а вещественная часть будет отрицательной. Перейдём в полярную систему координат с центром в точке z_0, сделав замену переменной $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, после которой интеграл (4.3) примет следующий вид, получаемый после отделения действительных и мнимых частей аргумента экспоненты:

$$F(\lambda) \approx f(z_0)e^{\lambda S(z_0)} \int_{\gamma^*} \exp\left[\frac{\lambda}{2}|S''(z_0)|\rho^2(\cos\theta + i\sin\theta)\right] d\left(\rho e^{i\varphi}\right), \tag{4.4}$$

где фаза

$$\theta = 2\varphi + \arg S''(z_0)\,. \tag{4.5}$$

Нам необходимо выбрать такое направление φ для перевального контура γ^*, чтобы мнимая часть аргумента экспоненты в (4.4) была бы равна нулю, а вещественная была бы отрицательна, т.е. $\sin\theta = 0$ и $\cos\theta = -1$, что будет выполнено при $\theta = \pi n$, где $n = \pm 1$. Согласно определению (4.5), оба этих условия будут выполнены, если перевальный контур будет проходить вдоль луча

$$\varphi = \frac{\pi}{2}n - \frac{1}{2}\arg S''(z_0)\,, \quad n = \pm 1. \tag{4.6}$$

Выбор значения $n = +1$ или $n = -1$ для направления перевального контура определяется условием, согласно которому φ есть угол между положительным направлением касательной к контуру γ^* и положительным направлением вещественной оси, не превосходящий $\pi/2$. Фазу (4.6) можно также вычислить по формуле

$$\varphi = -\arg\sqrt{-S''(z_0)}\,, \tag{4.7}$$

где выбор ветви корня производится согласно вышеуказанному правилу определения направления φ. Таким образом, мы оцениваем интеграл (4.4), вычисляя его вдоль контура γ^*, который есть совокупность двух лучей. Один из них приходит в точку z_0 под углом $\pi+\varphi$, а второй уходит от неё вдоль направления φ, определяемого выражением (4.6). При этом радиальная переменная ρ изменяется от ε до 0 и затем от 0 до ε, где ε есть величина интервала, на котором мы раскладываем функцию $S(z)$ в ряд. В этих условиях вклады от двух лучей в интеграл (4.4) одинаковы, что позволяет записать его в виде удвоенного интеграла по второму лучу с $\rho = [0, \varepsilon]$:

$$F(\lambda) \approx f(z_0)e^{\lambda S(z_0)}e^{i\varphi}\, 2\int_0^{\varepsilon} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}|S''(z_0)|\rho^2\right] d\rho\,. \tag{4.8}$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны вычислению асимптотической оценки для интегралов Лапласа из раздела 2. Именно, при $\lambda \to +\infty$ можно устремить в (4.8) значение верхнего предела $\varepsilon \to +\infty$, что позволяет вычислить этот интеграл точно. В результате для исходного интеграла (4.1) будет справедлива следующая асимптотическая оценка, описывающая вклад седловой точки z_0:

$$F(\lambda, z_0) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} \left[f(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \exp\left(\lambda S(z_0) + i\varphi\right) \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \qquad (4.9)$$

где фаза φ определяется с помощью (4.6) или (4.7). Если не выделять фазу от $S''(z_0)$ явно, то асимптотическая оценка будет иметь вид [1-6]

$$F(\lambda, z_0) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{-S''(z_0)}} \left[f(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \exp\left(\lambda S(z_0)\right) \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \qquad (4.10)$$

Для фазы комплексного числа $1/\sqrt{-S''(z_0)}$ вновь получается выражение (4.7), поэтому выражения (4.9) и (4.10) эквивалентны.

Как и в методе Лапласа, возможна ситуация, когда точка перевала, для которой $S'(z_0) = 0$, совпадает с концом контура интегрирования. В этом случае для оценки интеграла (4.1) также применяется формула (4.9), но с дополнительным множителем 1/2. Если имеется несколько точек перевала, то для оценки в рамках минимакса $\min\limits_{\gamma \subset D} \max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ следует выбрать контур с наименьшей высотой перевала $\operatorname{Re} S(z)$.

Если максимум $\operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке z_0, которая совпадает с начальной точкой контура интегрирования, но в ней $S'(z_0) \neq 0$, то этот случай рассматривается аналогично случаю с вещественными интегралами Лапласа в пункте 2.1.2, где функцию $S(z)$ необходимо раскладывать в ряд до слагаемого первой степени. В этом случае главный член асимптотического разложения имеет вид [1–6]

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda S'(z_0)} \left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \exp\left(\lambda S(z_0)\right). \qquad (4.11)$$

Для случая, когда z_0, которая совпадает с конечной точкой контура интегрирования, формула (4.11) применяется без множителя (–1).

4.2. Примеры решения задач

Пример 4.1 [5]

Вычислить с помощью метода перевала асимптотику функций Бесселя целого порядка, используя интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(ix \sin\varphi - in\varphi\right) d\varphi \qquad \text{при } x \to +\infty. \qquad (4.1.1)$$

Решение

Интеграл (4.1.1) вычисляется по отрезку вещественной оси, но в силу того, что подынтегральная функция аналитическая, этот отрезок можно считать лежащим в комплексной плоскости. В (4.1.1) мы имеем большой параметр λ=*x*, функцию $f(\varphi)=\exp(-in\varphi)$ и функцию $S(\varphi)=i\sin\varphi$, которая имеет две точки перевала $\varphi_{1,2}=\mp\pi/2$. Нам необходимо деформировать контур интегрирования между точками –π и π на вещественной оси так, чтобы он проходил через точки перевала под нужным углом, определяемым выражением (4.6) или (4.7). В этих точках значение функций $f(\varphi)=\exp(\pm in\pi/2)$ и $S(\varphi)=\mp i$. Вторая производная $S''(\varphi)=-i\sin\varphi$ принимает в этих точках значения $S''(\varphi_{1,2})=\pm i$ и согласно (4.7) контур должен проходить в этих точках под следующими углами к вещественной оси:

$$\begin{cases}\theta_1=-\arg\sqrt{-i}=\pi/4,\\ \theta_2=-\arg\sqrt{i}=-\pi/4.\end{cases}\tag{4.1.2}$$

С учётом (4.1.2) вклады в асимптотику от точек $\varphi_{1,2}=\mp\pi/2$ согласно (4.9) имеют следующий вид:

$$\begin{cases}F(x,-\pi/2)=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\dfrac{1}{1}\left(\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\left[\exp\left(\dfrac{in\pi}{2}\right)+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\exp(-ix),\\ F(x,\pi/2)=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\dfrac{1}{1}\exp\left(-i\dfrac{\pi}{4}\right)\left[\exp\left(-\dfrac{in\pi}{2}\right)+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\exp(ix),\end{cases}\tag{4.1.3}$$

суммируя которые, мы получаем, что

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\ \text{при}\ x\to+\infty,\tag{4.1.4}$$

что совпадает с результатом примера 3.2.

Пример 4.2 [2]

Вычислить с помощью метода перевала асимптотику функции

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\lambda\left[3z-z^3\right]\right)dz\quad\text{при}\ \lambda\to+\infty.\tag{4.2.1}$$

Решение

Данный интеграл уже рассматривался в задаче 3.4, где его предлагалось оценить методом стационарной фазы. Теперь мы рассмотрим его методом перевала, считая вещественную ось, вдоль которой идёт интегрирование, частью комплексной плоскости. В данной задаче функции $f(z)\equiv 1$ и $S(z)=i\left(3z-z^3\right)$. Функция $S(z)$ имеет две стационарные точки

$z_{1,2} = \mp 1$, в которых $S(z_{1,2}) = \mp 2i$ и $S''(z_{1,2}) = \pm 6i$. Поскольку высота перевала одинаковая, $\mathrm{Re}\, S(z_{1,2}) = 0$, то следует учесть вклады от обеих точек. Согласно (4.7) контур интегрирования должен проходить в этих точках под углами

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\arg\sqrt{-6i} = \pi/4, \\ \varphi_2 = -\arg\sqrt{6i} = -\pi/4 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

к вещественной оси. Вклады в интеграл от точек перевала согласно (4.9) равны

$$\begin{cases} F(\lambda,-1) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda}}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)\exp(-2ix), \\ F(\lambda,1) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda}}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\exp\left(-i\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)\exp(2ix), \end{cases} \tag{4.2.3}$$

что после суммирования даёт асимптотическую оценку в форме

$$F(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}}\cos\left(2\lambda - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \tag{4.2.4}$$

совпадающую с результатом применения метода стационарной фазы.

Пример 4.3 [3]

С помощью метода перевала получить асимптотическую оценку для интеграла с вещественным параметром x

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-x^2 t}\ln\left(1+\sqrt{t}\right)dt \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{4.3.1}$$

Решение

На первый взгляд интеграл (4.3.1) имеет вид интеграла (4.1) с $\lambda = x^2$, $f(t) = \ln\left(1+\sqrt{t}\right)$ и $S(t) = -t$, причём функция S имеет ненулевую производную и достигает максимума в начальной точке контура интегрирования $t_0 = 0$. Однако непосредственное применение асимптотической оценки (4.7) не является полезным, поскольку $f(t_0) = 0$. В подобных ситуация полезно вначале проинтегрировать по частям. Обозначив в (4.3.1) $e^{-x^2 t} = dv$, $u = \ln\left(1+\sqrt{t}\right)$, мы получим $F(x)$ в виде

$$F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2 t}}{\left(1+\sqrt{t}\right)2\sqrt{t}}dt, \tag{4.3.2}$$

что также имеет вид интеграла (4.1) с функцией $S = -t$, имеющей точку локального максимума $t_0 = 0$, совпадающую с начальной точкой контура интегрирования. В точке

$t_0 = 0$ у нас вновь затруднения, поскольку функция $f(t_0) = 1/\left(\left(1+\sqrt{t}\right)2\sqrt{t}\right)$ здесь стремится к бесконечности. Для устранения этой особенности выполним в (4.3.2) замену переменной $\sqrt{t} = y$, откуда

$$\frac{dt}{\left(1+\sqrt{t}\right)2\sqrt{t}} = \frac{dy}{1+y}, \tag{4.3.3}$$

особенность при $y = 0$ отсутствует и интеграл (4.3.2) принимает вид

$$F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2 y2}}{1+y}dy. \tag{4.3.4}$$

Интеграл (4.3.4) при $x \to +\infty$ имеет вид интеграла (4.1) при $\lambda = x^2$, $f(y) = 1/(1+y)$ и $S(y) = -y^2$, при этом в асимптотическую оценку (4.9) необходимо добавить множитель 1/2, поскольку точка перевала $y_0 = 0$ для функции $S(y) = -y^2$ совпадает с начальной точкой контура интегрирования. Имеем $S(y_0) = 0$, $S''(y_0) = -2$, $\varphi = -\arg\sqrt{-S''(y_0)} = 0$ и $f(y_0) = 1$, т.е. перевальный контур γ* проходит вдоль вещественной оси. Главный член асимптотики имеет вид

$$F(x) \sim \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{2\pi}{x^2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^3} \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{4.3.5}$$

Пример 4.4 [1, 3-6]

Получить асимптотическую оценку для функции Эйри для больших положительных значений аргумента, используя интегральное представление

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right)dt \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{4.4.1}$$

Решение

Преобразуем функцию в интеграле (4.4.1) так, чтобы большой параметр x был общим множителем у аргумента экспоненты. Для этого сделаем замену переменной $t = z\sqrt{x}$, в результате которой получим, что

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi}f(\lambda) \tag{4.4.2}$$

где функция

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\lambda\left[z + \frac{z^3}{3}\right]\right)dz \tag{4.4.3}$$

имеет вид интеграла (4.1) с большим параметром $\lambda = x^{3/2}$. Функция $S(z) = i\left(z + \frac{z^3}{3}\right)$ имеет производную $S'(z) = i\left(1+z^2\right)$, обращающуюся в нуль в двух точках перевала $z_{1,2} = \pm i$. Значение функции S в этих точках $S(\pm i) = \mp 2/3$, т.е. более низкий перевал проходит через точку $z_1 = i$, в которой $S(i) = -2/3$, а вторая производная $S''(i) = -2$. Аргумент φ для контура интегрирования γ*, проходящего через точку перевала, согласно (4.7) есть

$$\varphi = -\arg\sqrt{-(-2)} = 0\,, \tag{4.4.4}$$

т.е. контур γ* проходит через точку $z_1 = i$ параллельно вещественной оси. Подставляя полученные результаты в асимптотическую оценку (4.9) с учётом (4.4.2), мы получаем, что $\mathrm{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x^{3/2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\exp\left(x^{3/2}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, откуда после упрощения

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{4.4.5}$$

Пример 4.5 [15]

При изучении динамики волновых пакетов в полупроводниковых структурах с сильным спин-орбитальным взаимодействием для асимптотического случая широкого пакета, когда его ширина d и среднее волновое число k_0 удовлетворяют условию $k_0 d >> 1$, для среднего значения координаты центра пакета в [15] было получено следующее выражение:

$$\bar{y}(t) = -d\exp\left(-a^2\right)\left[\frac{1}{2a}\left(\exp\left(a^2\right)-1\right) - Z(t)\right], \tag{4.5.1}$$

где $a = k_0 d$ есть большой параметр, а функция $Z(t)$ определена с помощью интеграла

$$Z(t) = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty \exp\left(-u^2 + i\frac{2\alpha t u}{d}\right)I_1(2au)du\right\}, \tag{4.5.2}$$

где $I_1(2au)$ есть модифицированная функция Бесселя, а параметр α определяет амплитуду спин-орбитального взаимодействия. Найти асимптотику функции $Z(t)$ и описать поведение во времени среднего значения координаты центра пакета (4.5.1) методом перевала для больших значений параметра $a >> 1$, учитывая асимптотическую формулу $I_1 \sim e^x \big/ \sqrt{2\pi x}$ для больших значений аргумента.

Решение

Прежде всего преобразуем интеграл в (4.5.1), обозначив $Z(t) = \mathrm{Re}\{G(t)\}$ и явно выделив большой параметр *a* в аргументе экспоненты. С учётом асимптотического выражения для модифицированной функции Бесселя мы получим, что

$$G(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi a u}} \exp\left[a\left(-\frac{u^2}{a} + i\frac{2\alpha t u}{ad} + 2u\right)\right] du\,. \qquad (4.5.3)$$

Интеграл (4.5.3) имеет вид интеграла (4.1), в котором большой параметр λ=*a*, функция $f(u) = 1\big/\sqrt{4\pi a u}$, и функция

$$S(u) = -\frac{u^2}{a} + i\frac{2\alpha t u}{ad} + 2u\,. \qquad (4.5.4)$$

Точка перевала для функции (4.5.4) есть

$$u_0 = a + i\frac{\alpha t}{d}\,. \qquad (4.5.5)$$

Она сама зависит от параметра *a*, причём второе слагаемое в (4.5.5) в асимптотическом пределе $a \to \infty$ по модулю много меньше первого. Поэтому при вычислении значения функции $f(u) = 1\big/\sqrt{4\pi a u}$ в точке $u = u_0$ вторым слагаемым в (4.5.5) можно пренебречь, положив $f(u_0) \approx 1\big/\sqrt{4\pi a^2}$. Значение второй производной функции (4.5.4) есть постоянная величина: $S'' = -2/a$, её аргумент равен π. Согласно (4.6) перевальный контур должен проходить через точку перевала под углом $\varphi = 0$ параллельно вещественной оси. Значение самой функции (4.5.4) в точке перевала (4.5.5) $S(u_0) = a + 2i\alpha t/d - i\alpha^2 t^2\big/ad^2$. Подставляя эти выражения в асимптотическую оценку (4.9), мы получим с учётом $f(u_0) \approx 1\big/\sqrt{4\pi a^2}$ для функции $Z(t) = \mathrm{Re}\{G(t)\}$ следующее выражение:

$$Z(t) = \frac{1}{2a} \exp\left(a^2 - \frac{\alpha^2 t^2}{d^2}\right) \cos(2\alpha k_0 t). \qquad (4.5.6)$$

После подстановки (4.5.6) в (4.5.1) для зависимости координаты центра волнового пакета от времени мы получим, что

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2k_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{d^2}\right)\cos(2\alpha k_0 t)\right]. \qquad (4.5.7)$$

Формула (4.5.7) описывает затухающие осцилляции с частотой $2\alpha k_0$, пропорциональной волновому числу для центра пакета и амплитуде спин-орбитального взаимодействия.

Осцилляции затухают на характерном времени $\tau \sim d/\alpha$. Подобные осцилляции получили название *zitterbewegung* (в переводе с немецкого «встряхивание», «дрожание») по аналогии с известным явлением для релятивистских электронов.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1 [2]

С помощью метода перевала получить асимптотическую оценку интеграла $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{\left(1+x^2\right)^t}dx$ при $t\to+\infty$.

Задача 4.2 [2]

С помощью метода перевала получить асимптотическую оценку интеграла $F(n)=\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{e^{ix}}{\left(x^3+3x-2i\right)^n}dx$, где целое положительное число $n\to+\infty$.

Задача 4.3 [1]

С помощью метода перевала получить асимптотическую оценку функции Ханкеля I рода порядка ν, используя интегральное представление $H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty+\pi i}\exp\left(z\operatorname{sh}t-\nu t\right)dt$ при $z\to+\infty$. Контур интегрирования состоит из луча $(-\infty,0)$ на вещественной оси, отрезка $(0,\pi i)$ на мнимой оси и луча $\left(\pi i,\pi i+\infty\right)$, параллельного вещественной оси. Воспользоваться точкой перевала, лежащей на контуре интегрирования.

Задача 4.4 [1, 5, 6]

С помощью метода перевала получить асимптотическую оценку функции Эйри (4.3.1) при больших отрицательных значениях аргумента $x\to-\infty$, используя метод решения из примера 4.4.

5. Асимптотические оценки и приближённые методы решения для некоторых типов дифференциальных уравнений

5.1. ВКБ-приближение для уравнения второго порядка

В различных задачах физики, в частности, в квантовой механике, встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, имеющие следующий вид:

$$y''(t) + \lambda^2 \omega^2(t) y(t) = 0. \qquad (5.1)$$

Здесь λ есть параметр, который при получении асимптотических оценок считается большим, а функция $\omega^2(t)$ может быть и положительной, и отрицательной. Рассмотрим вначале случай, когда $\omega^2(t) \ge 0$. Если бы функция $\omega^2(t)$ была постоянной величиной, то два линейно независимых решения уравнения (5.1) имели бы вид

$$y_{1,2}(t) = \exp\left(\pm i\lambda\omega t\right). \qquad (5.2)$$

При достаточно большом значении параметра λ решения уравнения (5.1) будут быстро осциллирующими функциями t и за один период осцилляций функция $\omega(t)$ сильно измениться не может и будет близка к своему среднему значению на периоде $\overline{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t)\,dt$. Это наводит на метод поиска решений уравнения (5.1) в асимптотическом пределе $\lambda >> 1$ в следующей форме:

$$y_{1,2}(t) = F(t)\exp\left[\pm i\lambda\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau\right], \qquad (5.3)$$

где $F(t)$ есть функция, медленно изменяющаяся на одном периоде осцилляций. Отметим, что уравнение (5.1) может и не содержать явно большого параметра λ, что не изменит характера оценки в случае, когда сама функция $\omega(t) >> 1$ в рассматриваемом асимптотическом пределе. Приближение (5.3) для решений уравнения (5.1) называется ВКБ-приближением (по именам получивших его Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна), или коротковолновым приближением, поскольку в задачах о распространении волн функция $\lambda\omega(t)$ имеет смысл волнового числа, которое является большим в пределе $\lambda >> 1$, а соответствующая длина волны является малой.

Мы остановимся лишь на самых простых свойствах ВКБ-приближения, детали и дальнейшие примеры использования которого можно найти в литературе [16–19]. Функция $F(t)$ в (5.3) удовлетворяет уравнению [17]

$$\frac{1}{\lambda}F'' \pm 2i\omega F' \pm i\omega' F = 0. \qquad (5.4)$$

Для медленно меняющейся функции F её вторая производная тоже мала, тем более что она умножается на малую в асимптотическом пределе величину *1/λ.* Поэтому в асимптотическом приближении первый член в (5.4) может быть отброшен. Получившееся уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид $F(t) = C\Big/\sqrt{\omega(t)}$, поэтому ВКБ-решения (5.3) можно записать в виде

$$y_{1,2}(t) = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left[\pm i\lambda \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau \right], \tag{5.5}$$

где $C_{1,2}$ есть произвольные постоянные. Приведённые рассуждения остаются справедливыми и для уравнения с другим знаком перед $\omega^2(t)$, имеющим вид

$$y''(t) - \lambda^2 \omega^2(t) y(t) = 0. \tag{5.6}$$

Для этого уравнения ВКБ-решения будут иметь вид

$$y_{1,2}(t) = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left[\pm \lambda \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau \right]. \tag{5.7}$$

5.2. Построение решения по поведению вблизи выделенных точек

Данный метод носит интерполяционный характер и позволяет приближённо построить решение во всей области изменения переменной, если известно поведение решения в окрестности особых точек дифференциального уравнения. В качестве примера рассмотрим одномерный аналог уравнения Томаса–Ферми [13], описывающего самосогласованное распределение электрического потенциала в атоме [18, 19]:

$$\varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi^{3/2}(x) \tag{5.8}$$

с граничными условиями $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$. Найдём приближённо решение уравнения (5.8) при $x \to +\infty$. Будем искать его в виде $\varphi = A/x^{\alpha}$. Подставляя это решение в (5.8), мы получим

$$A\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} = A^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3\alpha+1}{2}}, \tag{5.9}$$

откуда после приравнивания показателей степени у x мы получим, что $\alpha = 3$, а после приравнивая коэффициентов перед x мы получим, что A удовлетворяет уравнению $A^{1/2} = \alpha(\alpha+1)$, что для $\alpha = 3$ даёт значение A=144. Итак, при $x \to +\infty$ первое приближение для решения уравнения (5.8) имеет вид

$$\varphi_1(x \to +\infty) \sim \frac{144}{x^3}\,. \qquad (5.10)$$

Найдём поправку к этому решению в той же области $x \to +\infty$, полагая

$$\varphi_2(x \to +\infty) \sim \frac{144}{x^3} + \psi\,, \qquad (5.11)$$

где поправка ψ должна спадать при $x \to +\infty$ быстрее, чем $1/x^3$. После подстановки функции (5.11) в уравнение (5.8) мы оставим только члены первой степени по ψ, для которой мы получим уравнение $\psi'' = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{3}{2}\varphi_1^{1/2}\psi$, что после функции подстановки (5.10) приведёт нас к уравнению

$$\psi'' = \frac{3}{2}\cdot\frac{12}{x^2}\psi\,. \qquad (5.12)$$

Уравнение (5.12) имеет тот же вид, что исходное уравнение (5.8), и его решение вновь можно искать в степенном виде $\psi(x) = B/x^{\beta}$. Повторяя рассуждения, аналогичные приведённым выше при выводе формулы (5.10), мы получим, что показатель степени $\beta = \left(-1+\sqrt{73}\right)/2 \approx 3.77$, что позволяет записать решение (5.11) в форме

$$\varphi_2(x \to +\infty) \sim \frac{144}{x^3} + \frac{B}{x^{3.77}}\,. \qquad (5.13)$$

Мы попробуем обобщить приближение (5.13) так, чтобы оно было применимо не только в области $x \to +\infty$, но удовлетворяло бы и второму граничному условию $\varphi(0) = 1$. Для этого мы вынесем в (5.13) множитель $1/x^3$ и введём неизвестные пока показатель степени n и константу C следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{144}{x^3\left(1+\frac{C}{x^{0.77}}\right)^n}\,, \qquad (5.14)$$

что эквивалентно

$$\varphi(x) = \frac{144}{\left(x^{\frac{3}{n}} + Cx^{\frac{3}{n}-0.77}\right)^n}\,. \qquad (5.15)$$

Для выполнения условия $\varphi(0)=1$ в (5.15) должно выполняться условие $3/n-0.77=0$, чтобы итоговая степень x во втором слагаемом в знаменателе была равна нулю. Отсюда находим $n=3.90$, при этом значение

$$\varphi(0)=\frac{144}{(C)^{3.90}}=1, \tag{5.16}$$

откуда $C=\left(12^{2/3}\right)^{0.77}$. Подставив это значение в (5.15), получим окончательный вид решения:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{12^{2/3}}\right)^{0.77}\right)^{3.90}}. \tag{5.17}$$

Приближение (5.17) удовлетворительно согласуется с полученным численно точным решением исходного уравнения (5.8).

5.3 Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений [17, 20] для решения обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в построении решения в виде ряда, каждый член которого в интересующей области параметров является величиной следующего порядка малости по сравнению с предыдущим. Иными словами, для решения строится асимптотический ряд, свойства которого были рассмотрены в главе 1. Подобная схема нахождения решений достаточно часто применяется при решении физических задач. В качестве примера рассмотрим построение решения для уравнения функции Бесселя нулевого порядка [7]:

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y=0. \tag{5.18}$$

Избавимся от первой производной в (5.18), сделав подстановку

$$y(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{x}}. \tag{5.19}$$

Для функции $u(x)$ получим уравнение

$$u''(x)+u(x)=-\frac{1}{4x^2}u(x). \tag{5.20}$$

Будем искать решение уравнения (5.20), рассматривая правую часть как известную функцию и применяя формулу Коши (см, например, [20]) для решения неоднородного уравнения второго порядка:

$$u(x)=a\cos(x-\alpha)-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\sin(x-t)\frac{u(t)}{t^2}dt\,, \tag{5.21}$$

где a и α есть произвольные постоянные. Из (5.21) видно, что функция $u(x)$ ограничена при $x\to+\infty$, поэтому можно положить $x_0=\infty$ и записать решение (5.21) в виде

$$u(x)=a\cos(x-\alpha)+\frac{1}{4}\int_{x}^{\infty}\sin(x-t)\frac{u(t)}{t^2}dt\,. \tag{5.22}$$

Из (5.22) видно, что в асимптотическом пределе $x\to+\infty$ интеграл во втором слагаемом стремится к нулю, т.е. является величиной более высокого порядка малости по сравнению с первым слагаемым. Таким образом, имеет место асимптотическая оценка

$$u(x)=a\cos(x-\alpha)+u_1(x)\,, \tag{5.23}$$

где $u_1(x)=o(1)$ при $x\to+\infty$. Отметим, что уже первое слагаемое в (5.23) с учётом подстановки (5.19) даёт правильную асимптотическую оценку функции Бесселя нулевого порядка

$$y(x)\sim\frac{a\cos(x-\alpha)}{\sqrt{x}}\quad\text{при }x\to+\infty, \tag{5.24}$$

которая была получена в главе 3 (пример 3.2) методом стационарной фазы. Для нахождения второго слагаемого $u_1(x)$ в (5.23) мы подставим это разложение в интеграл, стоящий в правой части (5.22), что вновь приведёт нас к интегральному выражению, после преобразований имеющему вид

$$u_1(x)=\frac{a}{4}\int_{x}^{\infty}\sin(x-t)\cos(t-\alpha)\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{4}\int_{x}^{\infty}\sin(x-t)\frac{u_1(t)}{t^2}dt\,. \tag{5.25}$$

Используя соотношение $\sin(x-t)\cos(t-\alpha)=\frac{1}{2}[\sin(x-\alpha)+\sin(x-2t+\alpha)]$, вынесем $\frac{1}{2}\sin(x-\alpha)$ из-под знака интеграла в первом слагаемом в (5.25), что позволит вычислить элементарный интеграл от $1/t^2$ и записать разложение (5.25) в виде

$$u_1(x)=\frac{a}{8x}\sin(x-\alpha)+u_2(x)\,, \tag{5.26}$$

где $u_2(x)=o(1/x)$ при $x\to+\infty$, как это видно из структуры подынтегральных выражений в (5.25). Таким образом, вторая поправка $u_2(x)$ представляет собой величину более высокого порядка малости по сравнению с первой поправкой $u_1(x)$, что представляет собой характерное свойство асимптотического разложения. Повторяя описанные действия, можно получить для $u_2(x)$ разложение вида

$$u_2(x) = -\frac{9a}{128x^2}\cos(x-\alpha) + u_3(x), \tag{5.27}$$

где поправка $u_3(x) = o(1/x^2)$ при $x \to +\infty$, то есть является слагаемым более высокого порядка малости по сравнению с $u_2(x)$. Данный алгоритм может применяться для получения асимптотического разложения функции Бесселя нулевого порядка $y(x) = J_0(x)$ с необходимой точностью по степеням $1/\sqrt{x}$. Суммируя полученные поправки, получаем, что

$$J_0(x) \sim \frac{a}{\sqrt{x}}\left[\left(1-\frac{9}{128x^2}\right)\cos(x-\alpha) + \frac{1}{8x}\sin(x-\alpha)\right] \qquad \text{при } x \to +\infty. \tag{5.28}$$

Более точный анализ показывает, что $a = \sqrt{2/\pi}$ и $\alpha = \pi/4$. Общий вид разложения функции Бесселя n порядка $J_n(x)$ при $x \to +\infty$ можно найти, например, в [5].

Разновидностью метода последовательных приближений можно считать метод малого параметра, применяемый к уравнениям, правая часть которых явно содержит малый параметр [17, 20]:

$$x''(t) + a^2 x(t) = f(t) + \mu F(t, x, x', \mu), \tag{5.29}$$

где $\mu << 1$. Достаточно часто ставится вопрос о нахождении периодических решений уравнения (5.29), которые с точностью до выбора системы единиц для аргумента t обладают свойством периодичности

$$x(t) = x(t + 2\pi), \tag{5.30}$$

если все функции в (5.29) периодичны по t с этим же периодом, равным единице. Способ построения решения уравнения (5.29) состоит в составлении ряда по степеням μ:

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots. \tag{5.31}$$

Первый член ряда (5.31) удовлетворяет уравнению (5.29), в котором μ=0:

$$x_0''(t) + a^2 x_0(t) = f(t), \tag{5.32}$$

которое называется порождающим для уравнения (5.29). При рассмотрении ряда (5.31) можно видеть, что каждый его последующий член является величиной более высокого порядка малости в пределе $\mu \to 0$, что является типичным для теории возмущений, широкого используемой в физике, в том числе в квантовой механике [13]. Это свойство членов ряда (5.31) показывает его схожесть и с асимптотическими рядами, основное отличие от которых состоит в том, что независимая переменная t в (5.31) не обязательно стремится к бесконечности. Далее мы подставляем ряд (5.31) в уравнение (5.29), предварительно раскладывая в ряд функцию $F(t,x,x',\mu)$ по степеням $(x-x_0)$, $(x'-x'_0)$ и μ, и приравниваем выражения при одинаковых степенях μ. В результате мы приходим к системе уравнений, первые три уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} x_0'' + a^2 x_0 = f(t) \\ x_1'' + a^2 x_1 = F(t, x_0, x_0', 0) \\ x_2'' + a^2 x_2 = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) x_1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right) x_1' + \left(\dfrac{\partial F}{\partial \mu}\right) \cdot \\ \quad .... \end{cases} \tag{5.33}$$

В системе (5.33) в третьем и в последующем уравнении частные производные берутся при $x = x_0$, $x' = x_0'$, $\mu = 0$. Первое из уравнений системы (5.33) совпадает с порождающим уравнением (5.31), не содержащим малого параметра. Решая это уравнение, мы находим функцию $x_0(t)$ и подставляем её в правую часть второго уравнения системы (5.33). Решая его, мы находим функцию $x_1(t)$ и подставляем её в правую часть третьего уравнения системы (5.33). Решая его, мы находим функцию $x_2(t)$, что позволяет продолжить процесс записи и последовательного решения уравнений системы (5.33). После нахождения требуемого числа функций $x_k(t)$ мы подставляем их в разложение (5.31), которое даёт решение исходной задачи с некоторой точностью, зависящей в том числе от числа членов в этом разложении. Общая теория метода малого параметра достаточно обширна, и мы упомянем лишь, что для нахождения периодических решений уравнения (5.29) необходимо требовать выполнения условия периодичности (5.30) для каждой функции $x_k(t)$, которые находятся как последовательные решения системы (5.33) по описанной выше схеме.

5.4 Метод Ван-дер-Поля

Наряду с исследованием решений дифференциальных уравнений при больших значениях независимой переменной, во многих задачах физики присутствуют задачи, в которых динамика системы происходит на двух масштабах времени – на быстром и на медленном масштабе. В ряде случаев интерес представляет динамика только на медленном масштабе, когда по быстрым, в частности, осциллирующим движениям можно провести усреднение. В этом случае уравнения для медленной динамики могут оказаться проще для решения. В этом смысле динамика на больших временах является асимптотической по сравнению с быстрой динамикой. Подобные методы называют асимптотическими методами разделения движения [17]. Простейшим из них является метод Ван-дер-Поля, берущий своё начало в работах этого голландского инженера. Мы рассмотрим только основные принципы этого метода, более подробное изложение которого можно найти, например, в [17, 21].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$z''(t) + \omega^2 z(t) = \varepsilon\varphi(z, z'), \tag{5.34}$$

где ω есть действительная постоянная, а $\varepsilon << 1$ есть малый параметр. Уравнения вида (5.34) называют квазилинейными, а колебания, которые оно описывают, называют квазилинейными колебаниями [17]. Уравнение с нулевой правой частью $z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$, отвечающее $\varepsilon = 0$ в (5.34), будем называть порождающим, по аналогии с уравнением (5.32) для метода последовательных приближений. Общее решение порождающего уравнения можно записать в виде

$$z(t) = x\cos y(t), \tag{5.35}$$

где $y(t) = \omega(t + t_0)$, а x и t_0 есть произвольные постоянные. Параметр x называется амплитудой колебаний, а функция $y(t)$ называется фазой колебаний. Если в уравнении (5.34) параметр ε уже отличен от нуля, но остаётся малым, то решение по-прежнему можно искать в виде (5.35), однако амплитуда x в (5.35) уже не будет постоянной величиной, а фаза $y(t)$ также не будет простой линейной функцией, т.е. её производная по времени не будет постоянной. Однако при малых значениях ε естественно ожидать, что амплитуда и фаза будут медленными функциями времени. Обозначим их $x(t)$ и $y(t)$, и получим для них уравнения движения. Потребуем, чтобы помимо (5.35) эти функции были связаны соотношением

$$z'(t) = -\omega x(t)\sin y(t), \tag{5.36}$$

которое имеет место для постоянной амплитуды и постоянной частоты. Продифференцируем по t обе части (5.35) и приравниваем $z'(t)$ к правой части (5.36), после чего получаем уравнение

$$x'\cos y - xy'\sin y + \omega x\sin y = 0, \tag{5.37}$$

которое представляет собой условие совместности выражений (5.35) и (5.36). Далее мы дифференцируем по t обе части выражения (5.36), и приравниваем полученное выражение для $z''(t)$ к правой части исходного уравнения (5.34), в результате чего получаем уравнение

$$-x'\omega\sin y - \omega xy'\cos y + x\omega^2\cos y = \varepsilon\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y). \tag{5.38}$$

Мы получили два уравнения первого порядка (5.37) и (5.38) относительно двух неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$. Разрешая их относительно производных x' и y', получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
x'(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y)\sin y, \\
y'(t) = \omega - \dfrac{\varepsilon}{\omega x}\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y)\cos y,
\end{cases}
\tag{5.39}
$$

которая полностью эквивалентна исходному уравнению (5.34). Динамика во времени функций $x(t)$ и $y(t)$ при $\varepsilon << 1$ существенно различна. Амплитуда $x(t)$ медленно меняется во времени, а фаза $y(t)$ меняется быстро, но скорость изменения её во времени, т.е. частота, также меняется во времени медленно, как это следует из второго уравнения системы (5.39). Поэтому можно ожидать, что мы не сделаем большой ошибки, если заменим правые части уравнений системы (5.39) их средними значениями за один период, в течение которого фаза $y(t)$ изменится на 2π. Иными словами, мы будем рассматривать новую систему уравнений

$$
\begin{cases}
x'(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}\tilde{\varphi}_1(x), \\
y'(t) = \omega - \dfrac{\varepsilon}{\omega x}\tilde{\varphi}_2(x),
\end{cases}
\tag{5.40}
$$

где введены усреднённые за период функции

$$
\begin{cases}
\tilde{\varphi}_1(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y)\sin y\,dy, \\
\tilde{\varphi}_2(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y)\cos y\,dy.
\end{cases}
\tag{5.41}
$$

Уравнения в системе (5.40) называются укороченными уравнениями, или уравнениями Ван-дер-Поля. Они значительно проще для решения по сравнению с исходной системой (5.39), поскольку в (5.41) первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. Иначе говоря, в системе (5.40) быстрые и медленные движения разделены – первое уравнение описывает медленную динамику амплитуды $x(t)$, а второе уравнение описывает быструю динамику фазы $y(t)$. Зачастую в прикладных задачах нужно установить только закон изменения амплитуды $x(t)$, для чего нужно найти решение первого уравнения системы (5.41), которое является, вообще говоря, нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Система уравнений (5.40) позволяет также отыскать стационарные, или автоколебательные режимы, при которых амплитуда остаётся неизменной функцией времени, если такие режимы существуют. Полагая в первом уравнении $x'(t) = 0$, мы находим, что стационарная амплитуда x должна быть корнем трансцендентного уравнения

$$
\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -\omega x\sin y)\sin y\,dy = 0\,.
\tag{5.42}
$$

При этом второе уравнение системы (5.40) позволяет найти зависимость угловой скорости $y'(t)$ от амплитуды *x*.

Рассмотрим в качестве первого примера уравнение Дюффинга [17], описывающее нелинейный осциллятор:

$$z''(t)+\omega^2 z(t)=\varepsilon\alpha z^3(t)\,, \tag{5.43}$$

где $\varepsilon << 1$, а вещественная постоянная α может быть и положительной, и отрицательной. Для уравнения (5.43) функция $\varphi(z)=\alpha z^3$, т.е. она зависит только от самой функции $z(t)$, но не от её производной. Выполняя подстановку (5.35), мы получаем, что $\varphi(x\cos y)=\alpha x^3\cos^3 y$. Для этой функции левая часть уравнения (5.42)

$$\int_0^{2\pi}\varphi\left(x\cos y,-\omega x\sin y\right)\sin y\,dy=\int_0^{2\pi}\alpha x^3\cos^3 y\,\sin y\,dy\equiv 0\,, \tag{5.44}$$

т.е. первое уравнение системы (5.40) удовлетворяется тождественно. Таким образом, для осциллятора Дюффинга, как и для любой консервативной системы, когда функция φ зависит только от переменной z и не зависит от скорости z', колебания с любой амплитудой являются стационарными [17]. Рассмотрим далее второе уравнение системы (5.41), в котором $\varphi(x\cos y)=\alpha x^3\cos^3 y$:

$$y'(t)=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha x^3\cos^4 y\;dy=\omega-\frac{\varepsilon\alpha}{8\omega}x^2\,, \tag{5.44}$$

откуда

$$x(y')=\sqrt{\gamma\left(\omega-y'\right)}\,, \tag{5.45}$$

где $\gamma=8\omega/3\varepsilon\alpha$. Функция $x=x(y')$, называемая амплитудной кривой, показывает зависимость амплитуды колебаний от частоты. Из (5.45) видно, что при $\gamma>0$ (т.е. при $\alpha>0$) возможны колебания с частотой, не превышающей ω, т.е. при $y'<\omega$, в то время как при $\gamma<0$ (т.е. при $\alpha<0$) возможны колебания с частотой $y'>\omega$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о наличии стационарных (автоколебательных) режимов для уравнения Ван-дер-Поля [17, 21], которое возникает в ряде задач о нелинейных колебаниях:

$$z''(t)+z(t)=\varepsilon\left(1-bz^2(t)\right)z'(t)\,. \tag{5.46}$$

Для уравнения (5.46) функция $\varphi(z,z')=\left(1-bz^2(t)\right)z'(t)$. Для определения амплитуды стационарных колебаний запишем уравнение (5.42), которое приводится к виду

$$\int_0^{2\pi}\left(1-bx^2\cos^2 y\right)x\sin^2 y\,dy=0\,. \tag{5.47}$$

После вычисления интеграла мы получаем кубическое уравнение

$$\frac{x}{2}\left(\frac{bx^2}{4}-1\right)=0\,, \tag{5.48}$$

имеющее при *b>0* неотрицательные корни (т.к. амплитуда колебаний есть неотрицательная величина)

$$x_1=0\,,\quad x_2=\frac{2}{\sqrt{b}}\,. \tag{5.49}$$

Смысл решений (5.49) состоит в следующем: уравнение Ван-дер-Поля (5.46) при *b>0* допускает два стационарных режима – состояние покоя *x=0* и автоколебательный режим с постоянной амплитудой $x=2/\sqrt{b}$.

5.5 Примеры решения задач

Пример 5.1 [18, 19]

Получить в рамках ВКБ-приближения выражение для асимптотики функции Эйри, удовлетворяющей уравнению

$$y''(x)-\alpha x y(x)=0\,, \tag{5.1.1}$$

где α>0, а значения *x* предполагаются большими и отрицательными, $x\to-\infty$.

Решение

В обозначениях уравнения (5.1) мы имеем $\lambda^2\omega^2(x)=-\alpha x$, откуда $\lambda\omega(x)=\sqrt{-\alpha x}$, причём при $x<0$ подкоренное выражение положительно. Асимптотически большой при $x\to-\infty$ здесь является сама функция $\omega(x)$, поэтому можно положить $\lambda=1$. После вычисления интеграла по формуле (5.5) мы получим, что при $x\to-\infty$

$$y_{1,2}(x\to-\infty)\approx\frac{C_{1,2}}{(\alpha|x|)^{1/4}}\exp\left(\pm i\frac{2}{3}\sqrt{\alpha|x|^3}\right), \tag{5.1.2}$$

что совпадает с точностью до множителя порядка единицы с асимптотической оценкой, получаемой методом перевала (см. задачу 4.4).

Пример 5.2 [18, 19]

Построить асимптотическое решение в рамках ВКБ-приближения для уравнения

$$y''(x)+\left(\alpha-\beta x^2\right)y(x)=0 \tag{5.2.1}$$

в пределе $x \to +\infty$, когда $\beta x^2 >> \alpha$.

Решение

При выполнении условия $\beta x^2 >> \alpha$ в уравнении можно пренебречь параметром α, после чего оно примет вид уравнения (5.6), в котором $\lambda^2 \omega^2(x) = \beta x^2$, т.е., как и в примере 5.1, в пределе $x \to +\infty$ большой является сама функция $\omega(x) = \sqrt{\beta}\, x$, а параметр λ вновь можно положить равным единице. Асимптотическую оценку можно получить, непосредственно используя формулу (5.7), с помощью которой два линейно независимых решения уравнения (5.2.1) имеют вид

$$y_{1,2}(x \to +\infty) \approx \frac{C_{1,2}}{\beta^{1/4}\sqrt{x}} \exp\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\, x^2 \right). \tag{5.2.2}$$

Пример 5.3 [20]

С помощью метода малого параметра построить периодическое решение для уравнения

$$x''(t) + 2x(t) = \sin t + \mu x^2(t), \tag{5.3.1}$$

в котором μ есть малый параметр, найдя два первых члена ряда (5.31).

Решение

Для данной задачи функция $F(t, x, x') = x^2(t)$, и она будет периодической, если периодична сама функция $x(t)$. Найдём вначале решение порождающего уравнения (5.32), представляющего собой первое уравнение системы (5.33). Это уравнение имеет вид $x''(t) + 2x(t) = \sin t$ и имеет периодическое решение

$$x_0(t) = \sin t. \tag{5.3.2}$$

Второе уравнение системы (5.33) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$x_1'' + 2x_1 = x_0^2. \tag{5.3.3}$$

Подставляя в (5.33) решение (5.3.2) для порождающего уравнения, получаем уравнение $x_1'' + 2x_1 = \sin^2 t$, или

$$x_1'' + 2x_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t). \tag{5.3.4}$$

Периодическим решением для уравнения (5.3.4) является функция

$$x_1(t) = \frac{1}{4}(1 + \cos 2t). \tag{5.3.5}$$

Функции (5.3.2) и (5.3.5) позволяют построить разложение (5.31) до первых двух членов по степеням малого параметра, которое имеет вид

$$x(t) \approx \sin t + \frac{\mu}{4}(1 + \cos 2t). \tag{5.3.6}$$

Пример 5.4 [17]

С помощью метода Ван-дер-Поля найти решение задачи о колебаниях линейного осциллятора с трением, описывающегося уравнением

$$z''(t) + \omega^2 z(t) + \varepsilon\gamma z'(t) = 0 \quad \text{при } \varepsilon << 1. \tag{5.4.1}$$

Решение

Как известно из курса дифференциальных уравнений [20], уравнение (5.4.1) допускает точное решение в элементарных функциях. Применение метода Ван-дер-Поля имеет целью проиллюстрировать, насколько получаемом в его рамках решение будет близко к известному точному решению. Уравнение (5.4.1) имеет вид уравнения (5.34), где функция $\varphi(z, z') = -\gamma z' = \gamma\omega x \sin y$. Определим функцию $\tilde{\varphi}_1(x)$ из (5.41):

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{\gamma\omega x}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \frac{\gamma\omega x}{2}. \tag{5.4.2}$$

Далее мы подставляем (5.4.2) в правую часть первого из уравнений (5.40) и интегрируем его. Полученное решение $x = x_0 \exp(-\varepsilon\gamma t/2)$, где x_0 есть начальная амплитуда, определяет амплитуду колебаний в представлении (5.35) с фазой $y = \omega t$, поскольку функция $\tilde{\varphi}_2(x)$ из второго уравнения (5.41) оказывается тождественно равной нулю, и из второго уравнения системы (5.40) имеем $y = \omega t$. Полное решение имеет вид

$$z(t) = x_0 e^{-\frac{\varepsilon\gamma t}{2}} \cos \omega t. \tag{5.4.3}$$

Решение (5.4.3) в рамках уравнений Ван-дер-Поля (5.40) отличается от точного решения

$$z_1(t) = x_0 e^{-\frac{\varepsilon\gamma t}{2}} \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2\gamma^2/4}\right) \tag{5.4.4}$$

сдвигом частоты колебаний, который имеет второй порядок малости по отношению к интенсивности трения ε.

5.6 Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1 [18, 19]

Получить в рамках ВКБ-приближения асимптотическое выражение для функции Эйри, удовлетворяющей уравнению (5.1.1), где α>0, а значения x предполагаются большими и положительными. Учитывать только ограниченное при $x \to +\infty$ решение.

Задача 5.2 [22]

Получить в рамках метода разложения по малому параметру первые три члена ряда (5.31) (т. е. ограничиваясь степенью μ^2) для решения $x(t)$ уравнения $x' = x^2 + 2\mu/t$ с начальным условием $x(1) = -1$ и малым параметром $\mu << 1$.

Задача 5.3 [22]

Получить в рамках метода разложения по малому параметру первые три члена ряда (5.31) (т. е. ограничиваясь степенью μ^2), описывающие периодическое решение $x(t)$ уравнения $x'' + 3x = 2\sin t + \mu(x')^2$ с периодом, равным периоду правой части уравнения, с малым параметром $\mu << 1$.

Задача 5.4 [17]

С помощью метода Ван-дер-Поля найти зависимость от времени для амплитуды колебаний $x(t)$ для маятника в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, а движение маятника подчиняется уравнению $z'' + \varepsilon\alpha |z'| z' + \omega^2 z = 0$, где $\varepsilon << 1$.

Ответы и указания к задачам

Задача 1.1.
Указанное асимптотическое равенство является точным.

Задача 1.2.
Разбить промежуток интегрирования на два промежутка: от 0 до 1 и от 1 до x, затем применить формулу $\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$. Учесть, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ сходится, т.е. является конечным числом, равным значению $-\mathrm{Ci}(2) \approx -0.423$, где $\mathrm{Ci}(x)$ есть интегральных косинус.

Задача 1.3.
Ряд является расходящимся для всех x>0.

Задача 1.4.
Использовать первообразную $\int \frac{(\ln t)^{\alpha}}{t} dt = \frac{(\ln t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Задача 1.5.
$S \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$.

Задача 2.1.
$F(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ при $n \to +\infty$. Отметим, что исходный интеграл вычисляется точно [1]: $F(n) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$. Этот результат позволяет получить для числа π асимптотическую формулу, называемую формулой Валлиса: $\pi = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right]$.

Задача 2.2.
$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ при $x \to +\infty$. Следует воспользоваться формулой (2.5), поскольку максимум достигается в крайней точке интервала при $\theta_0 = 0$.

Задача 2.3.
$P_n(x) \sim \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}\left(x^2-1\right)^{1/4}}$ при $n \to +\infty$. Следует воспользоваться формулой (2.5), поскольку максимум достигается в крайней точке интервала при $\theta_0 = 0$.

Задача 2.4.

$F(n) \sim \frac{e}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ при $n \to +\infty$. Следует воспользоваться формулой (2.5), поскольку максимум достигается в крайней точке интервала при $x_0 = 1$.

Задача 2.5.

$F(x) \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$. Функция $f(t) = \exp(-\nu t)$, функция $S(t) = -\mathrm{sh}\,t$. Следует воспользоваться формулой (2.6), поскольку функция $S(t)$ не имеет стационарных точек в области интегрирования, достигая максимума в крайней левой точке $t_0 = 0$.

Задача 2.6.

$F(x) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+1/2} \ln x$ при $x \to +\infty$. Следует ввести функцию $S(t) = \ln t - t/x$, имеющую точку максимума $t_0 = x$, зависящую от параметра *x*.

Задача 3.1.

$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ при $\lambda \to +\infty$. Можно воспользоваться результатом примера 3.1 и взять мнимую часть от экспоненты с комплексным аргументом. Поскольку точное значение коэффициента перед слагаемым $O(1/\lambda^2)$ не вычислено, в том числе неизвестно, является ли эта поправка вещественным или комплексным числом, то её следует оставить в ответе после взятия мнимой части.

Задача 3.2.

$F(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$ при $\lambda \to +\infty$. Выражая косинус через экспоненту по формуле Эйлера $\cos\varphi = \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)/2$ и используя результат примера 3.1, мы увидим, что слагаемые первого порядка по $1/\lambda$ взаимно уничтожаются, и необходимо искать асимптотическую оценку более высокого порядка малости. Для её получения возьмём исходный интеграл по частям, обозначив $u = 1/(1+x)^\alpha$ и $dv = \cos\lambda x\,dx$, откуда

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{(1+x)^\alpha}dx = \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\frac{1}{(1+x)^\alpha}\bigg|_0^\infty + \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{(1+x)^{\alpha+1}}dx\,.$$

Первое слагаемое равно нулю, а для оценки второго слагаемого мы воспользуемся результатом задачи 3.1, откуда получим, что $F(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$.

Задача 3.3.

$F(x)=\dfrac{ie^{ix^2}}{2x}+O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x\to+\infty$. Для оценки остаточного слагаемого необходимо дважды проинтегрировать по частям.

Задача 3.4

$F(\lambda)\sim\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda}}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi^2}{36}+1\right)\cos\left(\lambda-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{2\sin(\lambda\sin 3)}{3\lambda\cos 3}$. Для приведения интеграла к виду (3.1) можно записать его в виде $F(\lambda)=\mathrm{Re}\{G(\lambda)\}$, где $G(\lambda)=\int_0^1(t^2+1)\exp(i\lambda\sin 3t)dt$. На интервале интегрирования имеется одна стационарная точка $t_0=\pi/6$, для оценки вклада которой используем выражение (3.8), в котором $f(t)=t^2+1$, а фазовая функция $S(t)=\sin 3t$, причём $S''(t_0)<0$. Вклады от краевых точек 0 и 1, в которых $S'(t)\neq 0$, можно оценить с помощью выражения (3.4). Беря реальную часть от суммы полученных вкладов, приходим к указанной асимптотике для $F(\lambda)$, в которой первое слагаемое отвечает вкладу стационарной точки, а второе даёт вклад от точки *t=1*. Вклад от точки *t=0* является чисто мнимым и исчезает после взятия реальной части.

Задача 3.5.

$F(\lambda)=2\sqrt{\dfrac{\pi}{3\lambda}}\cos\left(2\lambda-\dfrac{\pi}{4}\right)+O\left(\dfrac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$ при $\lambda\to+\infty$. Краевые точки области интегрирования являются бесконечно удалёнными, характеризуются быстрыми осцилляциями фазовой функции $S(x)=3x-x^3$ и не дают вклада в интеграл. Фазовая функция имеет в области интегрирования две стационарные точки $x_{1,2}=\mp 1$. В этих точках имеем $S(x_{1,2})=\mp 2$ и $S''(x_{1,2})=\pm 6$. Подставляя эти данные в формулу (3.8), получаем вклады от стационарных точек:

$$F(x_1,\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\cdot 6}}\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\exp\left(-2i\lambda+\frac{i\pi}{4}\right),\quad F(x_2,\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\cdot 6}}\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\exp\left(2i\lambda-\frac{i\pi}{4}\right),$$

которые после сложения приводят к асимптотической оценке $F(\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3\lambda}}2\cos\left(2\lambda-\dfrac{\pi}{4}\right)+O\left(\dfrac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$ при $\lambda\to+\infty$.

Задача 3.6.

$F(x)\sim-\dfrac{i}{x}e^{ix}$ при $x\to+\infty$. Следует учесть вклад стационарной точки $t=1$, в окрестности которой можно произвести разложение в ряд фазовой функции $S(t)=t(1-\ln t)$ до второй степени аргумента и функции $f(t)=1-e^{1-t}$ до первой степени аргумента. После этого интеграл вычисляется в элементарных функциях, и учитывается вклад от точки $t=1$.

Задача 4.1.

$F(t) \sim \left(\frac{\pi(1-c)}{t} \right)^{1/2} \frac{e^{-ct}}{(2c)^t}$ при $t \to +\infty$, где $c = \sqrt{2} - 1$. Функция $S(z) = iz - \ln\left(1 + z^2\right)$ имеет две точки перевала в комплексной плоскости $z_1 = i\left(\sqrt{2} - 1\right)$ и $z_2 = -i\left(\sqrt{2} + 1\right)$. Более низкая высота перевала $\operatorname{Re} S(z)$ отвечает точке z_1, в которой вычисляется асимптотическая оценка. Значение угла φ по формуле (4.7) равно нулю, т.е. перевальный контур проходит через точку z_1 параллельно вещественной оси.

Задача 4.2.

$F(n) \sim 2e\left(\frac{i}{4} \right)^n \left(\frac{\pi}{3n} \right)^{1/2}$ при $n \to +\infty$. Функция $f(z) = e^{iz}$, а функция $S(z) = -\ln\left(x^3 + 3x - 2i\right)$ имеет две точки перевала в комплексной плоскости при $z_{1,2} = \pm i$. Более низкая высота перевала $\operatorname{Re} S(z)$ отвечает точке $z_2 = -i$. Значение угла φ по формуле (4.7) равно нулю.

Задача 4.3.

$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$ при $z \to +\infty$. Функция $f(t) = \exp\left(-\nu t\right)$, а функция $S(t) = \operatorname{sh} t$ имеет точки перевала $t_k = i\pi/2 + i\pi k$, где k есть целое число. Высота перевала во всех точках перевала одинакова, $\operatorname{Re} S(z_k) = 0$. На контуре интегрирования располагается одна точка перевала $t_0 = i\pi/2$, для которой $S(t_0) = i$ и $S''(t_0) = i$. Аргумент $\varphi = -\arg\sqrt{-S''(t_0)}$, под которым перевальный контур проходит через точку $t_0 = i\pi/2$, равен $\pi/4$, т.е. контур интегрирования деформирован так, что он проходит через точку $t_0 = i\pi/2$ под углом не $\pi/2$ к вещественной оси, как в исходном интеграле, а под углом $\pi/4$, и далее вновь выходит на луч $(\pi i, \pi i + \infty)$. Подставляя полученные сведения в формулу (4.9), получаем искомую асимптотическую оценку.

Задача 4.4.

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right)\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}} \right) \right)$ при $x \to -\infty$. Следует вначале выполнить подстановку $x = -y$, где y есть большой положительный параметр, и далее выполнить замену переменной $t = z\sqrt{y}$. В интеграл дают вклад две точки перевала $z_{1,2} = \pm 1$ функции $S(z) = i\left(-z + \frac{z^3}{3} \right)$, для которых получается одинаковая высота перевала $\operatorname{Re} S\left(z_{1,2}\right) = 0$.

Задача 5.1.

$y_{1,2}(x \to +\infty) \approx \dfrac{1}{(\alpha x)^{1/4}} \exp\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{\alpha x^3}\right)$, что совпадает с результатом вычисления асимптотики методом перевала в примере 4.4. Из двух ВКБ-решений выбираем экспоненциально спадающую при $x \to +\infty$ функцию.

Задача 5.2.

$x(t) \approx -\dfrac{1}{t} + \mu\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right) + \mu^2\left(\dfrac{t}{3} - \dfrac{2}{t} + \dfrac{8}{3t^2} - \dfrac{1}{t^3}\right)$. Первые три уравнения системы (5.33) и начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} x_0' = x_0^2, \quad x_0(1) = -1; \\ x_1' = 2x_0x_1 + 2/t, \quad x_1(1) = 0; \\ x_2' = 2x_0x_2 + x_1^2, \quad x_2(1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения и первого начального условия находим $x_0 = -1/t$. Подставляем это во второе уравнение и находим $x_1(t) = 1 - 1/t^2$. Подставляя найденные x_0 и x_1 в третье уравнение, находим с учётом начальное условия $v_2(t) = t/3 - 2/t + 8/3t^2 - 1/t^3$.

Задача 5.3.

$x(t) \approx \sin t + \mu\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\cos 2t\right) + \mu^2\left(\dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{6}\sin 3t\right)$. Можно искать решение первого уравнения системы (5.33) в виде $x_0(t) = A_0 \sin t$, второго уравнения в виде $x_1(t) = A_1 + B_1 \cos 2t$, третьего уравнения в виде $x_2(t) = A_2 \sin t + B_2 \sin 3t$, где A_k и B_k есть подлежащие определению коэффициенты.

Задача 5.4.

$x(t) = \dfrac{x_0}{1 + \dfrac{4\varepsilon\alpha\omega x_0}{3\pi} t}$, где x_0 есть начальная амплитуда колебаний. Функция

$\varphi(z, z') = -\alpha\,|z'|z' = \alpha x^2\omega^2\,|\sin y|\sin y$, функция

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha x^2\omega^2\,|\sin y|\sin^2 y\,dy = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \alpha x^2\omega^2 \sin y \cdot \sin^2 y\,dy = \frac{4}{3\pi}\alpha x^2\omega^2 .$$

Первое из уравнений Ван-дер-Поля (5.40) имеет вид $x' = -\varepsilon\dfrac{4\alpha\omega}{3\pi}x^2$. Интегрируя его, получаем искомую зависимость $x(t)$.

Литература

1. М.В. Федорюк, *Метод перевала*, М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Н.Г. Де Брёйн, *Асимптотические методы в анализе*, М.: ИЛ, 1961. – 250 с.
3. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, М.: Наука, 1990. – 528 с.
4. Э.Т. Копсон, *Асимптотические разложения*, М.: Мир, 1966. – 159 с.
5. А.М. Ильин, А.Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, М.: Физматлит, 2009. – 248 с.
6. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, М.: Наука, 1989. – 480 с.
7. Б.В. Шабат, *Введение в комплексный анализ, часть I,* М.: Наука, 1985. – 336 с.
8. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, *Математические методы физики*, М.: Атомиздат, 1972 – 392 с.
9. А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко, *Сборник задач по уравнениям математической физики* – М.: Наука, 1985. – 312 с.
10. И.В. Колоколов, Е.А. Кузнецов, А.И. Мильштейн, Е.В. Подивилов, А.И. Черных, Д.А. Шандро, Е.Г. Шапиро, *Задачи по математическим методам физики* – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 288 с.
11. Л.Д. Кудрявцев, А.Т. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин, *Сборник задач по математическому анализу. Том.2. Интегралы. Ряды* – М.: Физматлит, 2003. – 504 с.
12. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Линейная алгебра* – М.: Наука, Физматлит, 1999 – 296 с.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* – М.: Наука, 1989 – 768 с.
14. Д.В. Сивухин, *Общий курс физики. T.V. Атомная и ядерная физика* – М., Физматлит; Изд-во МФТИ, 2002. – 784 с.
15. V.Ya. Demikhovskii, G.M. Maksimova and E.V. Frolova, *Wave packet dynamics in 2DEG with spin orbit coupling: splitting and zitterbewegung* // Physical Review B, 2008, V. 78, P. 115401.
16. М.В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* – М.: Либроком, 2009 – 354 с.
17. Н.Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики* –М., Наука, 1981 – 400 с.
18. А.Б. Мигдал, В.П. Крайнов, *Приближённые методы квантовой механики* – М., Наука, 1966 – 152 с.
19. А.Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории* – М., Наука, 1975 – 336 с.
20. Л.Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* – М. Наука, 1969 – 424 с.
21. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, *Теория колебаний* – М., ГИФМЛ, 1959 – 915 с.
22. А.Ф. Филиппов, *Сборник задач по дифференциальным уравнениям* – Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000 – 176 с.

Денис Владимирович **Хомицкий**

ИЗБРАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ФИЗИКОВ

Учебно-методическое пособие

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23