МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

И.В. Рахмелевич

Пределы и дифференциальное исчисление

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института
экономики и предпринимательства для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
38.05.02 «Таможенное дело»

Нижний Новгород

2022

УДК 517.2(075.8)

ББК 22.161.1я73

Р 27

Р 27 Рахмелевич И.В. ПРЕДЕЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 45 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Перова В.И.

В настоящем пособии приведен основной теоретический материал и задания для проведения практических занятий по дисциплине «Математика», по темам «Пределы последовательностей и функций», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». В частности, пособие включает задания по вычислению пределов последовательностей и функций с различными типами неопределенностей; задания на вычисление производной и на исследование функций (нахождение экстремумов, точек перегиба, интервалов монотонности и выпуклости, асимптот, построение графиков), задания на вычисление частных производных функций нескольких переменных и нахождение их экстремумов. По каждой теме разобраны решения типовых заданий и приведены задания для самостоятельного решения. Пособие предназначено для студентов первого курса, обучающихся по направлению подготовки 38.05.02 «Таможенное дело».

Ответственный за выпуск:

заместитель директора ИЭП по учебной работе,

председатель методической комиссии ИЭП,

к.э.н., доцент Макарова С. Д.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.1я73

Оглавление

Введение

Настоящее пособие содержит теоретический материал и задания для проведения практических занятий по дисциплине «Математика», по темам «Пределы последовательностей и функций», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» для студентов 1-го курса, обучающихся по направлению подготовки 38.05.02 «Таможенное дело». В частности, пособие включает задания по вычислению пределов последовательностей и функций с различными типами неопределенностей; задания на вычисление производной функций одной переменной и на исследование функций (нахождение экстремумов, точек перегиба, интервалов монотонности и выпуклости, асимптот, построение графиков), задания на вычисление частных производных функций нескольких переменных. По каждой теме приведен основной теоретический материал; выполнен подробный разбор типовых заданий, после которого приведены задания для самостоятельного решения.

Глава 1. Пределы последовательностей и функций

1.1. Предел числовой последовательности

Определение 1.1.

Если каждому $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие определенное число x_n, то это означает, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

x_n называется общим членом (элементом) этой последовательности.

Определение 1.2.

Число a называется пределом этой последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$, такое, что при всех $n>N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad .$$

Символическая запись: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теоремы 1.1 -1.4 (теоремы о пределах последовательностей).

Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ -две последовательности, имеющие конечные пределы. Тогда пределы суммы, разности, произведения и частного этих последовательностей равны соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов этих последовательностей, причём в теореме (1.4) дополнительно требуется $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \;, \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \;, \tag{1.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \;, \tag{1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \Big/ \lim_{n\to\infty} y_n \,. \tag{1.4}$$

Кроме того, при вычислении пределов используются соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}(n^p) = \infty \,(p > 0), \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(n^{-p}) = 0 \,(p > 0), \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0 \left(|a| < 1\right) \tag{1.7}$$

1. В простейших случаях (при отсутствии неопределенностей) вычисление пределов выполняется непосредственно с использованием теорем о пределах.

Пример 1.1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{1+1/n}= \lim_{n\to\infty}\left(3+1/n^2\right)\Big/\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)==\left(3+\lim_{n\to\infty}\left(1/n^2\right)\right)\Big/\left(1+\lim_{n\to\infty}\left(1/n\right)\right)=3$$

2. Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ - это выражение вида $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$,

причем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

Для раскрытия этой неопределенности необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на максимальную степень n.

Пример 1.2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}= \lim_{n\to\infty}\frac{3+2/n+4/n^2}{4+1/n-3/n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+2/n+4/n^2\right)\Big/\lim_{n\to\infty}\left(4+1/n-3/n^2\right)=$$

$$=\left(3+\lim_{n\to\infty}\left(2/n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(4/n^2\right)\right)\Big/\left(4+\lim_{n\to\infty}\left(1/n\right)-\lim_{n\to\infty}\left(3/n^2\right)\right)=(3+0+0)/(4+0-0)=3/4$$

Пример 1.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[9]{n^3+4}}{\sqrt[4]{16n^2+n}}= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[9]{n^3\left(1+4/n^3\right)}}{\sqrt[4]{16n^2\left(1+1/16n\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{2n^{1/2}}\frac{\sqrt[9]{1+4/n^3}}{\sqrt[4]{1+1/16n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{1/6}}\frac{\sqrt[9]{1+4/n^3}}{\sqrt[4]{1+1/16n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{1/6}}\cdot 1=0$$

Если числитель и знаменатель дроби содержат показательные функции n, то для раскрытия неолределенности числитель и знаменатель необходимо разделить на степень с наибольшим основанием.

Пример 1.4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^n}= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 5^n}{3\cdot 3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2/5\right)^n+5}{3\cdot\left(3/5\right)^n+1}=\frac{0+5}{0+1}=5$$

В примере 1.4 используется также соотношение (1.7).

Пример 1.5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot\left(n(n+1)-1\right)}{(n-1)!\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-1}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n+1-\frac{1}{n}\right)=\infty$$

В примере 1.5 все факториалы выражаются через наименьший, затем после сокращения числителя и знаменателя дроби на общий множитель задача сводится к вычислению предела отношения двух многочленов аналогично примеру 1.2.

3. Неопределенность типа $\infty-\infty$ - это выражение вида

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)$ причем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

Пример 1.6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}==\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{0}{1+1}=0$$

В примере 1.6 для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель дроби умножается на сопряженное выражение (сумму тех же квадратных корней), после чего числитель преобразуется по формуле разности квадратов.

Задания для самостоятельного решения.

Найти пределы последовательностей:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2-5)n^2}{(4n^3+1)n}$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2-1)(n+1)+10}{5n^2(n-2)+n^2-3}$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n + 10 \cdot 9^{n+1}}{5 \cdot 10^n + 7^{n+2}}$.

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[4]{n^5-1}}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n (2-n)}{n^2+3}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n + \sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1} \right)$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2-1} \right)$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} \right) \right)$.

1.2. Функции и их пределы

Определение 1.3.

Если каждому элементу x множества X $(x \in X)$ соответствует определенный элемент y из множества Y $(y \in Y)$, то на множестве X задана функция $y = f(x)$. Множество X называется областью определения функции, множество Y – множеством значений функции.

Пример 1.7.

Найти область определения функции: $y = \ln \dfrac{2-x}{x-3}$

Решение.

Для всех $x \in X$ должно выполняться неравенство: $\dfrac{2-x}{x-3} > 0$

Тогда:

1)

$$\begin{cases}2-x>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<2\\x>3\end{cases}-\text{система несовместна}$$

2) $$\begin{cases}2-x<0\\x-3<0\end{cases}\Rightarrow 2<x<3$$

Ответ: X=(2,3)

<u>Свойства функций.</u>

1.Функция $f(x)$ называется <u>четной</u>, если для любых $x\in X$ выполняется соотношение $f(-x)=f(x)$; называется <u>нечетной</u>, если для любых $x\in X$ выполняется соотношение $f(-x)=-f(x)$.

2. Функция $f(x)$ называется периодической, если при любых $x\in X$ выполняется соотношение $f(x+T)=f(x)$; $T\neq 0$ –период функции.

3. Функция $f(x)$ называется <u>возрастающей</u>, если для любых $x_1, x_2\in X$, $x_2>x_1$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$; называется <u>убывающей</u>, если для любых $x_1, x_2\in X$, $x_2>x_1$ выполняется неравенство $f(x_2)<f(x_1)$. Возрастающие и убывающие функции называются <u>строго монотонными</u>.

4.Функция $f(x)$ называется <u>ограниченной</u> на множестве X, если существует такое M>0,что при всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leq M$.

5.Если задана функция $y=f(x)$, то функция $x=g(y)$ с областью определения Y и множеством значений X называется <u>обратной функцией</u>.

<u>Определение 1.4</u>.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек $x\neq x_0$, удовлетворяющих

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

условиям $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

Обозначение:

Теоремы 1.5-1.8 (теоремы о пределах функций).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a. Тогда пределы суммы, разности, произведения и частного этих функций равны соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов этих функций.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \tag{1.8}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x), \tag{1.9}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x), \tag{1.10}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \Big/ \lim_{x\to a} g(x). \tag{1.11}$$

При этом в (1.11) дополнительно требуется, чтобы $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \tag{1.12}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{1.13}$$

Бесконечно малые функции

Определение 1.5.

Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ или при $x\to\infty$, если ее предел в данной точке равен 0, т.е. выполнено одно из условий:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

1. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка относительно $g(x)$.

Обозначение: $f(x) = o(g(x))$.

2. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Обозначение: $f(x) = O(g(x))$.

3. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = c \neq 0$, то $f(x)$ называется бесконечно малой k-го порядка относительно $g(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми. В этом случае обе функции стремятся к нулю примерно с одинаковой скоростью.

Обозначение: $f(x) \approx g(x)$.

Теорема 1.9 (об эквивалентных бесконечно малых).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ и $f \approx f_1$, $g \approx g_1$, то:

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = c \quad ,$$

т.е. если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится, если каждую из бесконечно малых заменить эквивалентной бесконечно малой.

Вычисление пределов функций

1. Вычисление пределов без неопределенностей – непосредственная подстановка в функцию предельного значения.

Пример 1.8.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 1)} = \frac{4 - 6 + 1}{2 + 1} = -\frac{1}{3}$$

2. Вычисление пределов с неопределенностью типа 0/0.

Основные способы:

1) Разложить на множители числитель и знаменатель и сократить множители, дающие неопределенность.
2) Использовать теорему об эквивалентных бесконечно малых.
3) Использовать 1-й замечательный предел.

Пример 1.9.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}$$

В примере 1.9 числитель и знаменатель разложены на множители и выполнено сокращение дроби на общий множитель, порождающий неопределенность.

Пример 1.10.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\ln(1+y)}=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=-1$$

$$y=x-1;\quad \ln(1+y)\approx y \quad \text{при} \quad y\to 0$$

В примере 1.10 используется теорема об эквивалентных бесконечно малых.

Пример 1.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

В примере 1.11 используется первый замечательный предел (формула (1.12)).

3. Вычисление пределов с неопределенностью типа ∞/∞.

Необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на максимальную степень x (аналогично пределам последовательностей)

Пример 1.12.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+4}{4x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2/x+4/x^2}{4+1/x-3/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(3+2/x+4/x^2\right)\Big/\lim_{n\to\infty}\left(4+1/x-3/x^2\right)=$$

$$=(3+0+0)/(4+0-0)=3/4$$

4. Неопределенность типа ∞-∞.

Основные способы решения:

1) Разделить и умножить на сопряженное выражение с последующим применением формулы разности квадратов.

2) Свести задачу к неопределенности типа 0/0.

Эти способы применяются ниже, в примерах 1.13, 1.14:

Пример 1.13.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x\left(\sqrt{1+1/x^2}+1\right)}=0$$

Пример 1.14.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to1}\frac{(1+x)-2}{1-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

5. Неопределенность типа 1^{∞} : в этом случае используется 2-й замечательный предел (формула (1.11)).

Пример 1.15.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1}\cdot x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

Задания для самостоятельного решения.

Найти области определения функций:

1.11. $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}$.

1.12. $y=\sqrt{\ln x+1}$.

1.13. $y=\dfrac{\cos x}{x^2+5x-6}$.

1.14. $y=\ln\sin x$.

Найти пределы функций:

1.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{x^2+5x-6}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\ln(1+x)}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(1+x)-\ln x)$.

1.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^{3x}-e^{2x}}$.

1.27. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 \operatorname{tg}\left(\frac{2}{x^3} \right) \right)$.

1.28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{5x}$.

1.29. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x}$.

Глава 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

2.1. Понятие производной. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования

<u>Определение 2.1.</u>

Пусть функция *y = f(x)* определена в некотором интервале *(a, b)*.

Аргументу *x* придадим некоторое приращение Δx, причём $x+\Delta x \in (a,b)$

Тогда соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то его называют производной функции *y = f(x)* и обозначают одним из символов: y'; $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.1)$$

Функция *y = f(x)* , имеющая производную в каждой точке интервала (*a, b*), называется **дифференцируемой** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Правила дифференцирования

Пусть *u(x)* , *v(x)* и *w(x)* – дифференцируемые в некотором интервале *(a; b)* функции, ***C*** – постоянная. Тогда:

$$(C)' = 0 \qquad (2.2)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (2.3)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (2.4)$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' \qquad (2.5)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (2.6)$$

Из (2.4) и (2.6) в частности следует:

$$(C \cdot u)' = C \cdot u' \qquad (2.7)$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2} \qquad (2.8)$$

Производные элементарных функций

Функция	Производная
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-1/\sin^2 x$
$\arcsin x$	$(1-x^{2)-1/2}$
$\arccos x$	$-(1-x^2)^{-1/2}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$1/(1+\mathrm{x}^2)$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-1/(1+x^2)$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x**.**

Теорема 2.1 (о производной сложной функции).

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке $\boldsymbol{x}$**,** а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{2.9}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

Если $y = f(u);\quad u = \varphi(v);\quad v = g(x)\quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$

то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

<u>Пример 2.1.</u>

Найти производную функции $y = x^3\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)$

<u>Решение</u>.

1-й способ –с использованием формулы (2.4) для производной произведения:

$$y' = \left(x^3\right)'\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + x^3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)' = 3x^2\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + x^3 \cdot \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{13}{4}x^{9/4} + 3x^2.$$

2-й способ –представить функцию в виде суммы двух слагаемых и использовать формулу (2.3) для производной суммы:

$$y' = \left(x^{13/4} + x^3\right)' = \left(x^{13/4}\right)' + \left(x^3\right)' = \frac{13}{4}x^{9/4} + 3x^2.$$

<u>Пример 2.2.</u>

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

<u>Решение</u>.

Используем формулы (2.6) или (2.8) для производной дроби:

$$y' = \left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)' = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

<u>Пример 2.3.</u>

Найти производную функции $y = \ln(1 + x^4)$

<u>Решение</u>.

Используем формулу (2.9) для производной сложной функции:

$$y = \frac{1}{1+x^4} \cdot (1 + x^4)' = \frac{4x^3}{1+x^4}$$

<u>Пример 2.4.</u>

Найти производную функции $y = \ln\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение.

Исходную функцию можно преобразовать так:

$$y=\ln\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\ln\,(1+\operatorname{ctg}^2 x)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\,(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,.$$

Теперь для дифференцирования используем формулу (2.9) для производной сложной функции:

$$y'=\frac{1}{2(1+\operatorname{ctg}^2 x)}\cdot(1+\operatorname{ctg}^2 x)'=\frac{1}{2(1+\operatorname{ctg}^2 x)}\cdot 2\operatorname{ctg} x\cdot(\operatorname{ctg} x)'=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg} x}{(1+\operatorname{ctg}^2 x)}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\operatorname{ctg} x$$

Задания для самостоятельного решения.

Найти производные функций:

2.1. $y=(\sqrt{x}+5)^3$

2.2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

2.3. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\,(\sqrt{x}+1)$

2.4. $y=3x\ln\,(1-x^2)$

2.5. $y=\dfrac{e^x-3x^4}{\cos x}$

2.6. $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

2.7. $y=\dfrac{(x-1)^2}{\ln x}$

2.8. $y=\dfrac{e^x-2\sin x}{x-\cos x}$

2.9. $y=\dfrac{\ln x-3x}{tgx}$

2.10. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+\cos x}{\sqrt{x}}$

2.11. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3-2x}$

2.12. $y=\dfrac{e^{x}-2\operatorname{tg}x}{x-\operatorname{ctg}x}$

2.13. $y=\dfrac{\sin x\cdot e^{x}}{x^{2}}$

2.14. $y=e^{\sin^{2}x}$

2.15. $y=\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^{2}x}$

2.2. Логарифмическая производная. Производная неявно заданной функции. Производные высших порядков

Логарифмическая производная

Определение 2.2.

Если задана функция $y = f(x)$, то логарифмической производной называется выражение:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y} \tag{2.10}$$

Пример 2.5.

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции. Найти производную степенно-показательной функции, определяемой выражением:

$$y=u(x)^{v(x)}$$

Решение.

1. Логарифмируем исходное выражение:

$\ln y=v(x)\ln u(x)$

2. Дифференцируем логарифм:

$$\frac{y'}{y}=(\ln y)'=v'(x)\ln u(x)+v(x)(\ln u(x))'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

3. Умножаем полученное выражение на y и находим производную:

$$y'=v'(x)u(x)^{v(x)}\ln u(x)+v(x)[u(x)]^{v(x)-1}u'(x)$$

Производная неявно заданной функции

Определение 2.3.

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то говорят, что функция задана в явном виде.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения, не разрешенного относительно y:

$$F(x;y)=0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции продифференцировать уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и выразить y' через x, y.

Пример 2.6.

Найти производную функции, заданной в виде уравнения: $x^3+y^3-3xy=0$

Решение.

$$(x^3+y^3-3xy)'=(0)' \Rightarrow (x^3)'+(y^3)'-3(xy)'=0 \Rightarrow x^2+y^2\cdot y'-y-xy'=0$$

Выражаем отсюда y' через x, y и получаем: $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$

Производные высших порядков

Определение 2.4.

Производная произвольного порядка задается рекуррентным соотношением.

а) Полагаем $f^{(0)}(x_0)\equiv f(x_0)$;

б)Пусть теперь производная n-го порядка определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема. Тогда производной $(n+1)$-го порядка называется производная от производной n-го порядка: $f^{(n+1)}(x_0)\equiv\left(f^{(n)}\right)'(x_0)$.

Пример 2.7.

Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin ax$.

Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$y'=a\cos ax,\quad y^{(2)}=-a^2\sin ax,\dots$$
$$y^{(2n)}=(-a^2)^n\sin ax,\quad y^{(2n+1)}=(-1)^n a^{2n+1}\cos ax,\dots$$

Задания для самостоятельного решения.

Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

2.16. $y = x^{\cos x}$

2.17. $y = x^{\arccos x}$

2.18. $y = x^{\ln x}$

2.19. $y = (\sin x)^{\cos x}$

2.20. $y = (x+1)^{2/x}$

2.21. $y = (x^2+1)^{\sin x}$

2.22. $y = (\sin x)^{\ln \sin x}$

Найти производные неявно заданных функций:

2.23. $x^2 + xy + y^2 = 6$

2.24. $e^y + e^{-x} + xy = 0$

2.25. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

2.26. $e^x \cos y - e^{-y} \sin x = 0$.

Найти 1-ю и 2-ю производные функции:

2.27. $y = x \sin x$.

2.28. $y = e^{-x^2}$.

2.29. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

2.30. $y = e^{\sqrt{x}}$.

Найти общие формулы для производных любого порядка от функции:

2.31. $y = e^{ax}$.

2.32. $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

2.3. Правило Лопиталя

Теорема 2.2.

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.11}$$

Правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида:

$\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Замечание.

При использовании правила Лопиталя для раскрытия неопределенности вида [0/0] или [∞ / ∞] производные $f'(x)$ и $g'(x)$ исходных функций $f(x)$ и $g(x)$ сами могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при $x \to x_0$, где x_0 – конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой. В этом случае правило Лопиталя можно применять многократно.

Пример 2.8.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Пример 2.9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

Неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ и $[\infty - \infty]$ можно свести к неопределенностям вида [0/0] или [∞ / ∞] с последующим применением правила Лопиталя.

Пример 2.10.

Здесь неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$ сводится к неопределенности вида [∞ / ∞]:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{(-1/x^2)} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Пример 2.11.

Здесь неопределенность вида [∞ − ∞] сводится к неопределенности вида [0 / 0]:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Задания для самостоятельного решения.

Найти пределы функций с помощью правила Лопиталя:

2.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$.

2.34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$.

2.35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x-1}$.

2.36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

2.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

2.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

2.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

2.40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

2.4. Экстремумы и интервалы монотонности функций

Для нахождения экстремумов функции используются следующие теоремы:

Теорема 2.3 (теорема Ферма - необходимое условие экстремума).

Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная данной функции в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2.4 (обобщенное необходимое условие экстремума функции).

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо выполнение одного из условий:

1) $f'(x_0) = 0$;

2) $f'(x_0)$ - не существует

Теорема 2.5 (1-е достаточное условие экстремума).

Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с + на −, то x_0 – это точка максимума функции $y=f(x)$; если производная меняет знак с − на +, то x_0 – это точка минимума этой функции.

Теорема 2.6 (2-е достаточное условие экстремума).

Если для дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

то x_0 – это точка максимума функции $y=f(x)$; если в точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

то x_0 – это точка минимума этой функции.

Условия монотонности функции определяются следующими теоремами:

Теорема 2.7 (достаточное условие возрастания функции).

Если производная дифференцируемой функции положительна на некотором промежутке X, то функция возрастает на этом промежутке.

Теорема 2.7 (достаточное условие убывания функции).

Если производная дифференцируемой функции отрицательна на некотором промежутке X, то функция убывает на этом промежутке.

Теорема 2.8 (обобщенное достаточное условие экстремума).

Пусть все производные порядка ниже n функции $f(x)$ во внутренней точке x_0 промежутка X равны нулю, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда:

а) если n - чётное число, то x_0 – точка экстремума функции (минимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$, максимума при $f^{(n)}(x_0) < 0$);

б) если n - нечётное число, то в точке x_0 экстремума нет.

Пример 2.12.

Найти точки экстремума, определить их тип (максимум или минимум) и найти интервалы монотонности для функции $y = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x$

Решение.

Производная функции определяется выражением $y' = 3x^2 - 15x^2 + 18$.Тогда, решая уравнение $3x^2 - 15x^2 + 18 = 0$, находим критические точки: x_1=2, x_2=3.

Знаки производной:

$x \in (-\infty, x_1)$ $y' > 0$ - функция возрастает;

$x \in (x_1, x_2)$ $y' < 0$ - функция убывает;

$x \in (x_2, +\infty)$ $y' > 0$ - функция возрастает.

При переходе через точку x_1=2 производная меняет знак с «+» на «-», поэтому в точке x_1=2 функция имеет максимум.

При переходе через точку x_2=3 производная меняет знак с «-» на «+», поэтому в точке x_2=3 функция имеет минимум.

Задания для самостоятельного решения.

Найти экстремумы, определить их тип (максимум или минимум) и найти интервалы монотонности функций:

2.41. $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 4$.

2.42. $y = \left(x^2 - a^2\right)^{2/3}$.

2.43. $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$.

2.44. $y = x - \ln(1 + x)$.

2.45. $y = x\ln^2 x$.

2.46. $y = \ln(2 - \cos x)$.

2.47. $y = \dfrac{e^x}{x}$

2.48. $y = xe^{-x^2}$

2.49. $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$

2.5. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба

Определение 2.5.

Функция $y = f(x)$ называется вогнутой (выпуклой вниз) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Определение 2.6.

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой (выпуклой вверх) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Определение 2.7.

Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, если она является общей границей интервала выпуклости и интервала вогнутости $f(x)$, причем сама функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 2.9.

Функция является вогнутой (выпуклой) тогда и только тогда, когда ее 1-я производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).

Теорема 2.10.

Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в каждой точке промежутка X выполнено условие $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$), то функция является вогнутой (выпуклой) на этом промежутке.

Теорема 2.11 (необходимое условие перегиба).

Вторая производная дважды дифференцируемой функции в точке перегиба равна нулю:

$$f''(x_0) = 0$$

Теорема 2.12 (достаточное условие перегиба).

Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба этой функции.

Пример 2.13

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости/вогнутости функции $y = e^{-x^2}$

Решение.

2-я производная функции $y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Тогда $y'' = 0$ в точках $x_1 = -1/\sqrt{2}, \quad x_2 = 1/\sqrt{2}$ - это точки перегиба функции.

Знаки 2-й производной:

$y'' < 0$ при $x \in (x_1, x_2)$ - функция выпуклая;

$y'' > 0$ при $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ - функция вогнутая.

Задания для самостоятельного решения.

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости/вогнутости функций:

2.50. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$

2.51. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$

2.52. $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$

2.53. $y = 2x^2 + \ln x$

2.54. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$

2.55. $y = xe^x$

2.56. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$

2.6. Асимптоты графика функции

Определение 2.8.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки от начала координат.

Виды асимптот:

1) вертикальные, 2) горизонтальные, 3) наклонные.

1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, возможно, самой этой точки) и выполнено хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$$

Тогда прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Вертикальная асимптота может существовать либо в точках разрыва 2-го рода, либо на концах области определения (a, b), если a, b – конечные числа.

2. Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и выполнено хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b_1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b_2$$

Если выполнено первое из условий, то прямая $y=b_1$ является правосторонней горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$;

если выполнено второе из условий, то прямая $y=b_2$ является левосторонней горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

3. Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$$

Тогда прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ (также может быть левосторонней или правосторонней).

Пример 2.14.

Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$.

Решение.

Вертикальная асимптота соответствует точке разрыва 2-го рода, где знаменатель равен 0, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x=-1$.

Так как существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}=-2$, то имеется горизонтальная асимптота, уравнение которой $y=-2$.

Наклонных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0$.

<u>Задания для самостоятельного решения.</u>

Найти асимптоты графика функции:

2.57. $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$

2.58. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

2.59. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+x$

2.60. $y=\dfrac{2x^4+\ln x}{x^3-1}$

2.61. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$

2.62. $y=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{e^x-e^{-2x}}$

2.7. Полное исследование функции и построение её графика

Общий план исследования функции

1. Найти область определения функции и исследовать поведение функции в граничных точках этой области (при стремлении аргумента к границе области).
2. Выяснить симметрию графика (четность или нечетность функции) и вопрос о периодичности функции.
3. Найти точки разрыва, промежутки непрерывности и вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.

5. Определить нули (корни) функции и интервалы ее знакопостоянства.

6. Найти точки экстремумов и интервалы монотонности.

7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости.

8. Указать другие специфические особенности функции.

9. Построить график функции.

Пример 2.15.

Исследовать функцию $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построить её график.

Решение.

1) Область определения функции $-\infty<x<+\infty$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом x.

2) Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.

3) Область определения не имеет граничных точек; точек разрыва нет, поэтому вертикальные асимптоты графика отсутствуют.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$. Коэффициент k найдём по формуле $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

при $x\to+\infty$ имеем $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2-2x)e^x}{x} = +\infty$,

так что при $x\to+\infty$ асимптоты нет, причём $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

При $x\to-\infty$ имеем:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x)e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - 0x\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Таким образом, $k=0$ и $b=0$, так что при $x\to-\infty$ асимптота имеет уравнение $y=0$, т. е. совпадает с осью Ox.

5) Точка пересечения с осью Oy $f(0)=0$ – начало координат. Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox, решаем уравнение $f(x) = 0$ откуда получаем два

корня: x=0 и x=2. Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции:

а) $-\infty<x<0$: $f(x) > 0$;

б) $0<x<2$: $f(x) < 0$;

в) $2<x< +\infty$: $f(x) > 0$.

6) Первая производная :

$f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x-2)e^x = (x^2-2)e^x$. Интервалы возрастания задаются неравенством $f'(x)>0$, т.е. неравенством $x^2 - 2>0$.

Решением этого неравенства является множество $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

На интервале $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, поэтому это интервал убывания функции.

В точке $x=-\sqrt{2}$ – максимум, т.к. $f'(x)$ меняет знак с + на - ; в точке $x=\sqrt{2}$ - минимум , т.к. смена знака с – на +.

7) Для исследования точек перегиба и интервалов выпуклости найдём вторую производную:

$f''(x) = (x^2-2)e^x + 2xe^x = (x^2+2x-2)e^x$.

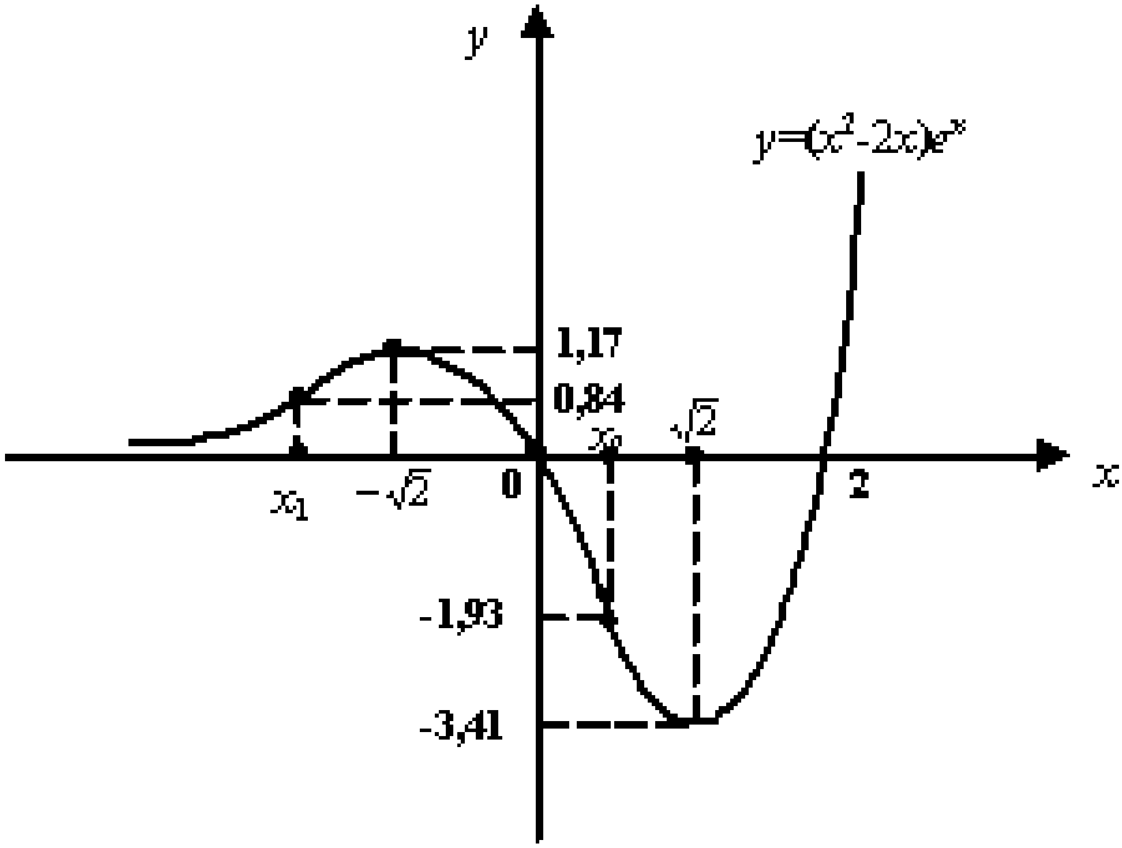
Точки перегиба определяются корнями уравнения: $x^2+2x-2= 0$, откуда

$x_1 = -1-\sqrt{3}$, $x_2 = -1+\sqrt{3}$.

В интервалах $x<x_1$ и $x>x_2$ $x^2+2x-2> 0$ -функция вогнута;

В интервале $x_1<x<x_2$ $x^2+2x-2< 0$ –функция выпукла.

График функции:



<u>Задания для самостоятельного решения.</u>

Провести полное исследование и построить график функции:

2.63. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

2.64. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

2.65. $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

2.66. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

2.67. $y = x\sqrt{1-x}$.

2.68. $y = e^{-x^2}$.

2.69. $y = 2xe^{-x^2/2}$.

2.70. $y = e^x / x$.

2.71. $y = (1-x)e^x$.

2.72. $y = x - \ln x$.

2.73. $y = x \ln x$.

2.74. $y = (1 + \ln x)/x$.

2.75. $y = \ln(x^2 + 1)$.

2.76. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

2.77. $y = x + \sin x$.

2.78. $y = x \sin x$.

2.79. $y = \ln \cos x$.

Глава 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

3.1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения

Определение 3.1.

Пусть имеется $n+1$ переменная $x_1, x_2, ..., x_n, y$, которые связаны между собой так, что каждому набору числовых значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ соответствует единственное значение переменной y. Тогда говорят, что задана функция f от n переменных, что записывается в виде формулы:

$y=f(x_1,x_2,..., x_n)$ или $y=y\ (x_1,x_2,..., x_n)$.

Множество D называется областью определения функции.

В частности, задана функция двух переменных, если любой паре чисел (x,y) из множества D поставлено в соответствие единственное число $z=f(x,y)$, которое называется значением функции $\boldsymbol{f}$ в точке (x,y).

Пример 3.1.

Найти область определения функции: $z=\sqrt{1-y^2}+\sqrt{x^2-1}$

Решение.

Поскольку функция z задана в действительной области, то должна выполняться система неравенств: $\begin{cases} 1-y^2 \ge 0 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases}$

Тогда область определения задается неравенствами: $\begin{cases} |y| \le 1 \\ |x| \ge 1 \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения.

Найти области определения функций:

3.1. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

3.2. $z=\sqrt{x-y^2}$.

3.3. $z=1/(x-y)$.

3.4. $z=\ln\,(x+y)$.

3.5. $z=\ln\,(x-y)+\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

3.2. Предел функции. Частные производные

Пусть δ - некоторое положительное число. δ-окрестностью V_δ точки $M_0(x_0,y_0)$ называется множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам: $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

Определение 3.2.

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек $M(x;y)$ из δ-окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$ или $A = \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.

Пусть $z = f(x,y)$ –функция двух переменных.

Определение 3.3.

Частной производной по x функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел

$$z'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

если этот предел существует.

Аналогично, частная производная по y функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ определяется выражением:

$$z'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

Функция двух переменных ***дифференцируема*** в точке, если обе частные производные этой функции существуют и непрерывны в этой точке.

Пример 3.2.

Найти частные производные функции $z = x^2 y + \dfrac{x}{y}$.

Решение.

1. Полагая y = const, дифференцируем по x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \dfrac{1}{y}$

2. Полагая x = const, дифференцируем функцию по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cdot 1 + x(-\frac{1}{y^2}) = x^2 - \frac{x}{y^2}$$

Частные производные высших порядков

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)\ , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)\ .$$

Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Их называют *частными производными 1-го порядка*. *Частными производными 2-го порядка* называются частные производные от частных производных 1-го порядка. Аналогично, частными производными n-го порядка называются частные производные от частных производных $(n - 1)$-го порядка.

Их обозначают $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$. Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

<u>Теорема 3.1</u> (о смешанных производных).

Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в некоторой точке $M(x, y)$, то они равны, т. е.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

<u>Пример 3.3.</u>

Найти частные производные 1-го и 2-го порядка функции:

$$z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)\ .$$

<u>Решение.</u>

Частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y\cos(xy + 1); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x\cos(xy + 1);$$

Частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2 y^2 + y\cos(xy + 1)\Big) = 6xy^2 - y^2\sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(3x^2 y^2 + y\cos(xy + 1)\Big) = 6x^2 y + \cos(xy + 1) - yx\sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x^3 y + x\cos(xy + 1\Big) = 6x^2 y + \cos(xy + 1) - yx\sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right) = 2x^3 - x^2\sin(xy+1).$$

В соответствии с теоремой 3.1, полученные выражения удовлетворяют условию

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\ .$$

<u>Задания для самостоятельного решения.</u>

Найти частные производные 1-го и 2-го порядка $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$ от функций:

3.6. $z = x^3 y^2 - 2xy^3$.

3.7. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$.

3.8. $z = \dfrac{x^2}{1+2y}$.

3.9. $z = \left(1+x^2\right)^y$.

3.10. $z = (\ln\ y)^x$.

3.11. $z = \ln\left(x^2 + 2y^3\right)$.

3.12. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3.13. $z = \sin\left(ax^2 + by^2\right)$.

3.14. $z = \cos(xy)$.

3.15. $z = e^x(\cos y + x\sin\ y)$.

3.3. Экстремум функции двух переменных.
Необходимые и достаточные условия

Пусть $V_\delta(x_0, y_0)$ – δ-окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Определение 3.4.</u>

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует такое число $\delta>0$, что из условия $M(x, y) \in V_\delta(x_0, y_0)$ следует $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует такое число $\delta>0$, что из условия $M(x, y) \in V_\delta(x_0, y_0)$ следует $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума***.

<u>Определение 3.5.</u>

Минимум (максимум) называется <u>глобальным</u>, если неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) < f(x_0, y_0)$) выполняется для всех (x, y) из области определения функции, и <u>локальным</u> в противном случае.

<u>Теорема 3.2 (необходимые условия экстремума).</u>

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т. е.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(M_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(M_0)} = 0. \tag{3.2}$$

<u>Замечание.</u> Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в точках, где функция непрерывна, но частные производные не существуют.

Точки, в которых выполняются условия (3.2), называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

<u>Теорема 3.3 (достаточные условия экстремума).</u>

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x, y)$ и в ее окрестности существуют непрерывные частные производные 2-го порядка. Обозначим

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(M_0)} = A, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(M_0)} = B, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(M_0)} = C, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

2) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум, причем максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 3.4.

Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

Частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

Стационарные точки находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, & y_1 = 0, \\ x_2 = 1, & y_2 = 1. \end{matrix}$$

Получены две стационарные точки: $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

Исследуем каждую стационарную точку.

1.В точке $M_1(0, 0)$: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$. Тогда:

$$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0 \ .$$

Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2.В точке $M_2(1, 1)$: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$. В этом случае $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$.

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум:

$$z_{\min} = z\,(1;1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Задания для самостоятельного решения.

Найти экстремумы функции и определить их тип:

3.16. $z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$.

3.17. $z = 2xy - 4x - 2y$.

3.18. $z = xy(1 - x - y)$.

3.19. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3.20. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3.21. $z = x^4 + y^4 - (x + y)^2$.

3.22. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.23. $z = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$.

3.24. $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{-\left(x^2 + y^2\right)}$.

3.4. Условный экстремум функции двух переменных. Метод множителей Лагранжа

Определение 3.6.

Точка (x_o, y_o)называется точкой условного максимума (или минимума) функции, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x,y)=C$, выполняется неравенство: $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ (или $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$).

Пример 3.5.

Найти точки экстремума функции $z=x^2+2y^2$ при условии $3x+2y=11$.

Решение.

Выразим из уравнения $3x+2y=11$ переменную y через переменную x и подставим полученное выражение в функцию z: $y = \dfrac{11 - 3x}{2}$.

Тогда: $z = x^2 + 2 \cdot \left(\dfrac{11 - 3x}{2}\right)^2$ или $z = \dfrac{11}{2} \cdot \left(x^2 - 6x + 11\right)$.

Эта функция имеет единственный минимум в точке $x_o=3$.

Соответствующее значение $y_0 = \dfrac{11 - 3 \cdot 3}{2} = 1$.

Таким образом, точка (3; 1) является точкой условного экстремума заданной функции.

При этом $f(3, 1)=11$.

Метод множителей Лагранжа

Для отыскания условного экстремума в общем случае (когда невозможно свести задачу к исследованию функции одной переменной) используется метод множителей Лагранжа. Пусть требуется найти экстремум функции двух переменных $f(x,y)$ при дополнительном условии $g(x,y)=C$.

Построим функцию: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\big(g(x,y) - C\big)$.

Эту функцию называют функцией Лагранжа.

Теорема 3.4.

Если точка (x_o,y_o) является точкой условного экстремума функции $f(x,y)$, то существует число λ_o такое, что точка (x_o,y_o,λ_o) является точкой экстремума функции $L(x,y,\lambda)$.

Для нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$ требуется найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = g(x,y) - C = 0 \end{cases}$$

Затем проводится проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа с использованием достаточного условия экстремума функции двух переменных (так как функция Лагранжа при конкретном значении множителя Лагранжа λ_o становится функцией двух переменных).

Пример 3.6.

Найти точки экстремума функции $z=x^2+2y^2$ при условии $3x+2y=11$, используя метод множителей Лагранжа.

Решение.

Составим функцию Лагранжа: $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$.

Вычислим частные производные этой функции и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0 \\ 4y + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}.$$

Единственное решение этой системы: $x_0=3$; $y_0=1$; $\lambda_0=-2$. Точкой условного экстремума может быть только точка (3, 1).

Выполним проверку достаточного условия экстремума функции Лагранжа.

Производные 2-го порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=4,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0,$$

,

$$\Delta=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\right)^2=8>0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}>0$$

поэтому (3,1) –точка минимума.

Задания для самостоятельного решения.

Найти условные экстремумы функции:

3.25. $z=xy$ при условии $x+y=1$.

3.26. $z=x^2+y^2$ при условии $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3.27. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ при условии $x^2+y^2=1$.

3.28. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ при условии $x^2+y^2=1$.

3.29. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

3.30. $z=a\cos^2 x+b\cos^2 y$ при условии $y-x=\frac{\pi}{4}$.

Список литературы

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., - 3-е изд. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16. - (Золотой фонд российских учебников) (Переплёт) ISBN 978-5-238-00991-9 http://znanium.com/bookread2.php?book=872573

2. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 472 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-004467-5 http://znanium.com/bookread2.php?book=221082

3. Ячменѐв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменѐв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с. http://znanium.com/bookread2.php?book=344777

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г.Н. Берман. - М.: Наука, 1977. – 416 с.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. / Б.П. Демидович. - М.: Наука, 1977. – 528 с.

Игорь Владимирович **Рахмелевич**

Пределы и дифференциальное исчисление

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.