МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского»

С. С. Бельмесова

Основы комбинаторного анализа

Практикум

Рекомендовано методической комиссией
Института экономики и предпринимательства
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
38.03.05 «Бизнес-информатика», квалификация - бакалавр

Нижний Новгород

2022

УДК 519.1
ББК 22.176
Б-44

Б-44 Бельмесова С. С. ОСНОВЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА. Практикум. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 33 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент **Тюхтина А. А.**

В настоящем практикуме изложены основные теоретические сведения о комбинаторных объектах и комбинаторных числах, методах их изучения и применения при решении задач. Кроме того, практикум содержит подробное изложение способов решения стандартных задач комбинаторного анализа и задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлению бакалавриата «Бизнес-информатика», а также может быть использован студентами младших курсов иных математических и экономических специальностей, начинающих осваивать комбинаторный анализ при изучении, например, математического анализа, дополнительных глав высшей математики, дискретной математики. Практикум может оказаться полезен и школьникам старших классов, занимающимся научной деятельностью в рамках НОУ.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент **Макарова С. Д.**

УДК 519.1
ББК 22.176

Содержание

Введение

Комбинаторный анализ является хорошо изученым разделом математики и имеет тесную связь с алгеброй, теорией вероятности, математическим анализом, дисциплинами компьютерного цикла. Приложение техник комбинаторного анализа можно найти в теории графов и деревьев.

Практикум состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся определения основных комбинаторных объектов и комбинаторных чисел. Во втором разделе описываются наиболее часто используемые методы изучения комбинаторных объектов. Оба раздела содержат задачи с решением на использование теоретического материала, изложенного в них. В третьем разделе приведено достаточное количество задач для самостоятельного решения с целью отработки студентами навыка использования теоретического материала на практике.

1. Комбинаторные объекты и числа

Комбинаторный анализ занимается изучением объектов, получаемых выборкой из конечного множества A подмножеств с некоторыми свойствами. Как правило основной вопрос, формулируемый в задачах, требует от нас определения *количества* таких подмножеств.

Пусть дано конечное множество $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из n элементов.

Определение 1.1. *Комбинаторный объект* – это подмножество из элементов множества E с определенными свойствами. Например, комбинаторными объектами могут быть подмножества множества E, подмножества с повторяющимися элементами из E, упорядоченные подмножества множества E.

Определение 1.2. *Комбинаторное число* (связанное с комбинаторным объектом) – это количество комбинаторных объектов данного вида.

При подсчете числа комбинаторных объектов и решении задач широко применяются два правила, связанных с выборками элементов: *правило суммы* и *правило произведения.*

Правило суммы: если все комбинаторные объекты можно представить в виде двух непересекающихся множеств A и B таких, что множество A содержит m комбинаторных объектов, а множество B содержит n комбинаторных объектов, то всего комбинаторных объектов будет $m + n$.

Правило произведения: пусть все комбинаторные объекты обладают двумя признаками так, что первый признак может принимать m различных значений, а для каждого комбинаторного объекта с фиксированным первым признаком второй признак может принимать n различных значений, тогда всего комбинаторных объектов будет $m \cdot n$.

Пример 1.1. Сколько существует наборов с двумя координатами из множества $E = \{0,\ 1\}$?
Решение.

1. Применим правило суммы. Наборы с двумя координатами из множества E разобьем на два непересекающихся множества A – наборы с первой координатой 0 и B – наборы с первой координатой 1. Имеем: $A = \{(0,0),(0,1)\}$ $(m = 2)$, $B = \{(1,0),(1,1)\}$ $(n = 2)$. Оба множества содержат по два комбинаторных объекта, следовательно всего наборов будет $m + n = 4$.

2. Применим правило произведения. Все наборы с двумя координатами из множества E обладают двумя признаками: значением первой координаты и значением второй координаты. Первая координата может принимать два различных значения 0 и 1 $(m = 2)$. У каждого набора с фиксированной первой координатой вторая координата также может принимать два значения: 0 и 1 $(n = 2)$. Таким образом, всего наборов $m \cdot n = 4$.

Перейдем к рассмотрению основных комбинаторных объектов и чисел.

Система всех подмножеств данного множества

Пусть $E = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ – конечное n элементное множество. Система всех подмножеств множества E обозначается через $P(E)$. В качестве комбинаторного числа, связанного с $P(E)$, обычно берут мощность (количество элементов) этого множества обозначаемую $|P(E)|$.

Вычислим $|P(E)|$, применяя правило произведение. Действительно, если выбрать произвольное подмножество M множества

E, то для каждого элемента a_i ($i = \overline{1,\, n}$) множества E существует только две возможности: либо $a_i \in M$, либо $a_i \notin M$. То же справедливо для любого элемента из E. Поскольку в E всего n элементов, то по правилу произведения получаем:

$$|P(E)| = 2^n \tag{1}$$

Пример 1.2. В некотором государстве ни у каких двух жителей не было одинакового набора зубов. Найти наибольшую численность населения этого государства.

Решение. У человека может быть максимум 32 зуба и 32 места для них. Для каждого места есть две возможности (независимо от других мест): либо зуб есть на этом месте, либо его на этом месте нет. Тогда для вычисления искомой численности применим правило произведения, получаем: $2^{32} = 4294967296$.

Размещения

Определение 1.3. *Размещением* k элементов из n-элементного множества E называется упорядоченное подмножество множества E, содержащее k элементов этого множества.

Например, если $E = \{a_1,\, a_2,\, a_3\}$ и $k = 2$, то все размещения по 2 элемента будут такими: $(a_1,\, a_2)$, $(a_1,\, a_3)$, $(a_2,\, a_1)$, $(a_2,\, a_3)$, $(a_3,\, a_1)$, $(a_3,\, a_2)$.

Число размещений из множества E по k обозначается A_n^k. Для подсчета этого числа нужно выбрать k элементов из E и расставить их по k местам. На первом месте может находиться любой из n элементов множества E, на втором месте может находиться любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее. По правилу произведения получаем:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \le k \le n. \tag{2}$$

Пример 1.3. Сколько существует различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр?

Решение. Вычислить число размещений из 10 цифр по 5 местам. Имеем: $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. Заметим, если число начинается с 0, то оно не пятизначное и таких чисел будет $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Следовательно, искомое число вычисляется как разность $A_{10}^5 - A_9^4 = 30240 - 3024 = 27216$.

Пример 1.4. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад. Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Решение. Воспользуемся формулой (2), получаем $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. То есть можно составить 60 таких маршрутов.

Перестановки

Определение 1.4. *Перестановкой* n элементного множества $E = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ называется упорядоченное подмножество из n элементов, принадлежащих множеству E.

Пусть $E = \{1, 2, 3\}$. Перечислим все перестановки элементов множества E: $(1,2,3)$; $(1,3,2)$; $(2,1,3)$; $(2,3,1)$; $(3,1,2)$; $(3,2,1)$.

Число перестановок множества E будем обозначать P_n. Поскольку перестановка – частный случай размещения при $k = n$, то справедлива формула:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{3}$$

Пример 1.5. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос. Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Решение. По формуле (3) имеем: $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 5760$.

Пример 1.6. За круглым столом нужно рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами можно это

сделать?
Решение. Если занумеровать все стулья по кругу, то при выполнении условия задачи либо мальчиков нужно посадить на все четные стулья, а девочек на все нечетные, либо наоборот. Следовательно, нумерация может быть произведена двумя способами. При этом как девочек, так и мальчиков можно рассадить по выбранным стульям P_5 способами. Отсюда вытекает решение: $2 \cdot P_5 \cdot P_5 = 2 \cdot 120^2 = 28800$ (способов).

Сочетания

Определение 1.5. *Сочетанием* k элементов из n-элементного множества E называется подмножество множества E, содержащее k элементов.

Например, если $E = \{1,\ 2,\ 3\}$, то все сочетания из множества E по 2 будут: $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,3)$.

Число сочетаний из n по k обозначается как C_n^k. Сочетание отличается от размещения тем, что в нем не учитывается порядок выбора элементов. Число различных перестановок выбранных k элементов по формуле (2) равно $k!$. Поэтому, переставляя элементы, можно из каждого сочетания k элементов получить $k!$ размещений. Тогда C_n^k будет в $k!$ раз меньше, чем A_n^k. Следовательно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Из формулы (4) вытекает, что $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_n^k = C_n^{n-k}$
Пример 1.7. В олимпиаде по математике может участвовать команда из трех учеников класса. Сколько возможностей составить команду, если в классе 20 человек?
Решение. Для решения воспользуемся формулой (4), получаем: $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140$. То есть существует 1140 возможных команд для участия в олимпиаде по программированию, сфор-

мированных из трех учеников класса.

Пример 1.8. Сколькими способами можно вылить воду из 10 – литрового ведра, используя литровую и двухлитровую банки? (Способы, отличающиеся только порядком применения банок, считаюся разными.)

Решение. Двухлитровую банку можно применить 0, 1, 2, 3, 4 или 5 раз. При этом, обе банки (литровая и двухлитровая) используются, соответственно, 10, 9, 8, 7, 6 или 5 раз. В каждом случае двухлитровую банку можно применить C_{10-k}^k способами, где $0 \le k \le 5$. Тогда искомое число будет равно сумме

$$C_{10}^0+C_9^1+C_8^2+C_7^3+C_6^4+C_5^5 = 1+9+\frac{8\cdot 7}{2}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}+\frac{6\cdot 5}{2}+1 = 89.$$

Пример 1.9. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать такие две, которые прикладываются друг к другу?

Решение. Две кости домино прикладываются друг к другу, если на них одинаковое число очков. Выбор этого числа из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 производится семью способами. Костей, на которых есть выбранное число, имеется также семь. Из них нужно взять две. Тогда всего получится: $7C_7^2 = \frac{7\cdot 7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7^2\cdot 6}{2!} = 147$ способов.

Сочетания с повторениями

Определение 1.6. *Сочетанием с повторениями* k элементов из n-элементного множества E называется неупорядоченная выборка из k элементов, принадлежащих E, в которой допускается повторение элементов.

Например, если $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $k = 2$, то всеми сочетаниями с повторениями по 2 элемента из E будут $\{a_1, a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_3, a_3\}$.

Число сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C_n^k}$. Следующее утверждение позволяет находить это число, используя формулу (4).

Лемма. При $n \geq 1$, $k \geq 1$ справедливо равенство $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Справедливость леммы вытекает из следующего простого рассуждения: при выборе из множества E элемента a_i нужно всякий раз, кроме последнего добавлять к этому множеству еще один такой же элемент a_i, чтобы была возможность его выбора на следующем шагу. Следовательно, добавить нужно $(k-1)$ элемент.

Пример 1.10. На почте пять видов новогодних открыток. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Решение. Воспользуемся формулой из леммы: $\overline{C_5^7} = C_{5+7-1}^7$, $C_{11}^7 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330$.

Пример 1.11. Сколькими способами можно купить набор из пяти открыток, если в продаже имеются четыре различных сорта?

Решение. Поскольку открытки в наборе могут быть одинаковыми, то искомое число равно $\overline{C_4^5} = C_{5+4-1}^5 = C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$.

Перестановки с повторениями из E

Определение 1.7. *Перестановкой с повторениями* множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ по k_1, k_2, …, k_n называется упорядоченная выборка из $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$ элементов, в которую элемент a_i входит k_i раз ($k_i > 0$; $i = 1, \ldots, n$).

Например, для $E = \{a_1, a_2\}$ перечислим все перестановки по $3, 1$. Элемент a_1 должен встречаться 3 раза, элемент a_2 должен встречаться 1 раз в каждой перестановке. Следовательно, всеми перестановками из E будут (a_1, a_1, a_1, a_2), (a_1, a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_1, a_1).

Число перестановок с повторениями $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$ элементов из E обозначается $\overline{P_{k_1, k_2, \ldots, k_n}}$.

По сравнению с перестановками без повторений это число будет меньше в $k_1!k_2! \ldots k_n!$ раз, так как перестановки одинаковых элементов не учитываются. Поэтому

$$\overline{P_{k_1,k_2,\ldots,k_n}} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \tag{5}$$

Пример 1.12. Сколько различных "слов" можно получить перестановкой букв в слове "абракадабра"?
Решение. В слове "абракадабра" буква "а" встречается 5 раз, буквы "б" и буква "р" – по 2 раза, буквы "к" и "д" по одному разу. Поэтому число искомых слов равно:

$$\overline{P_{5,2,2,1,1}} = \frac{(5+2+2+1+1)!}{5!2!2!1!1!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = 83160.$$

Размещения с повторениями

Определение 1.8. *Размещением с повторениями* k *элементов* из n – элементного множества E называется упорядоченная выборка из k элементов, принадлежащих E, в которой допускается повторение элементов.

Например, если $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $k = 2$, то всеми размещениями с повторениями двух элементов из E будут являться (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3).

Число размещений с повторениями из E по k обозначается $\overline{A_n^k}$. Поскольку для выбора каждого из k элементов существует n возможностей, то справедливо равенство

$$\overline{A_n^k} = n^k. \tag{6}$$

Пример 1.13. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать, пользуясь цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ так, чтобы в каждом из них была ровно одна единица, если любая другая цифра может встречаться в записи несколько раз?
Решение. Для единицы существует всего 4 возможности выбора

места. Для каждого из трех других мест существует семь возможностей выбора цифры в записи числа. Тогда всего четырехзначных чисел, записанных в соответствии с условиями задачи, будет: $4\overline{A_7^3} = 4 \cdot 7^3 = 1372$.

Пример 1.14. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

Решение. Семизначных чисел будет 9000000 (это числа от 1000000 до 9999999). Семизначные числа, в записи которых отсутствует 1 равно $\overline{A_9^7} = 4782969$. Однако, среди них имеются числа, начинающиеся с нуля и не являющиеся семизначными, а их количество равно $\overline{A_9^6} = 531441$. Таким образом, семизначных чисел, в записи которых нет единицы находится как разность $4782969 - 531441 = 4251528$. Семизначных чисел, в записи которых есть единица равно $9000000 - 4251528 = 4748472$. Следовательно, больше семизначных чисел, в записи которых есть единица.

Рассмотрим модель с шарами и ящиками для резюмирования вышеприведенной теоретической справки по комбинаторным объектам и лучшего понимания различий между ними.

Пусть дано n ящиков и k шаров $(k \leq n)$, требуется разместить по ящикам шары в соответствии с некоторыми условиями:

1. Все шары одинаковые, в каждый ящик можно положить не более одного шара. В этом случае решение сводится к выбору тех k ящиков, в которые будут помещены шары размещение осуществляется C_n^k способами.

2. В каждый ящик можно поместить при желании все шары, при этом если в ящике уже имеется хотя бы один шар он все равно может использоваться для дальнейшей раскладки. В этом случаем для подсчета возможных способов используется $\overline{C_n^k}$.

3. Все шары различаются, в ящик нельзя положить больше одного шара. Здесь имеем дело не только с выбором ящика, но и с выбором шара, который нужно разместить в тот или иной ящик. Число способов раскладки равно A_n^k.

4. Шары попарно различны, но в ящик можно помещать любое их количество. Раскладываем шары $\overline{A_n^k}$ способами.

5. Попарно различных шаров имеется столько же, сколько и ящиков (то есть n); причем в каждый ящик можно положить не более одного шара. Тогда шары раскладываются P_n способами.

6. Не все шары различны и в каждый ящик можно положить только один шар. Например, имеем k_1 красных шаров, k_2 оранжевых и так далее, k_l фиолетовых шаров так, что $k_1+k_2+\ldots+k_l=n$. Тогда раскладываем шары $\overline{P_{k_1,k_2,\ldots,k_l}}$ способами.

2. Методы изучения комбинаторных объектов и комбинаторных чисел

В настоящем пособии рассмотрены следующие методы комбинаторного анализа: алгебраический, теоретико-множественный и метод производящих функций. Перейдем к последовательному изложению каждого из них.

Алгебраический метод

В основе алгебраического метода лежит использование всевозможных тождеств при вычислении комбинаторных чисел. Практически все комбинаторные числа вычисляются с помощью числа сочетаний без повторений, поэтому большинство комбинаторных тождеств содержит именно это число.

Ниже приведены основные алгебраические тождества, используемые при решении задач.

1. Сумма сочетаний из множества E по всем k равна числу всех подмножеств множества E, то есть справедливо равенство
$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{7}$$

2. Числа сочетаний из множества E связаны с формулой *бинома Ньютона*:
$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n, \tag{8}$$
поэтому их ещё называются *биномиальными коэффициентами*

3. Обобщение формулы бинома Ньютона на случай возведения в n-ую степень суммы двух слагаемых и суммы s слагаемых
$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^n y^n. \tag{9}$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_s=n} \overline{P_{k_1,k_2,\ldots,k_s}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_s^{k_s}. \quad (10)$$

4. С помощью числа сочетаний можно найти количество решений уравнения $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ при фиксированном s: в целых неотрицательных числах количество решений равно C_{n+s-1}^{s-1}, в натуральных числах количество решений равно C_{n-1}^{s-1};
   если s не фиксировано, то количество решений в натуральных числах 2^{n-1}.

Пример 2.1. Вычислить $(1+x)^4$.
Решение. Применим формулу (7), имеем:

$$(1+x)^4 = C_4^0 + C_4^1 x^1 + C_4^2 x^2 + C_4^1 x^3 + C_4^4 x^x.$$

Здесь $C_4^0 = C_4^4 = 1$, $C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$, $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = 6$. Тогда, получаем

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Пример 2.2. Сколько существует натуральных четырехзначных чисел, сумма цифр которых равна 11?
Решение. Число решений уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4 = 11$ в целых неотрицательных числах равно $C_{13}^3 = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 286$.
Заметим, что $x_1 \neq 0$, при $x_1 = 0$ получаем уравнение $x_2+x_3+x_4 = 11$, которое имеет $C_{12}^2 = 66$ решений. Кроме того, $x_1 \neq 11$ (один случай) и $x_1 \neq 10$ (3 случая). При $x_1 = 1$ ни одно из остальных неизвестных не равно 10 (еще 3 случая).
Таким образом, получаем $286 - 66 - 1 - 3 - 3 = 213$ четырехзначных чисел, сумма цифр которых равна 11.

Теоретико-множественный метод

Теоретико-множественный метод изучения комбинаторных объектов, изложенный ниже, связан с вычислением мощностей конечных подмножеств множества E и основан на применении *формулы включений-исключений.*

Пусть E_1 и E_2 – конечные подмножества множества E. Справедлива формула включений-исключений для двух множеств:

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$$

Эту формулу можно обобщить на случай k конечных подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_k$ множества E. Обозначим через S_1 – сумму мощностей множеств $E_1, E_2, \ldots, E_k$, через S_2 – сумму мощностей пересечений всех пар подмножеств из $E_1, E_2, \ldots, E_k$, через S_3 – сумму мощностей пересечений всех троек подмножеств из $E_1, E_2, \ldots, E_k$ и так далее, через S_k – мощность пересечения всех k подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Тогда верна следующая формула *включений-исключений*:

$$|E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k$$

Формулу включений-исключений и даже более общее утверждение можно доказать с использованием теорему обращения.

Теорема (обращения). Пусть $N(r)$ – число элементов, содержащихся ровно в r подмножествах множества E, здесь $r \le k$, а $M(r)$ – число элементов, входящих не менее, чем в r подмножеств. Тогда выполняются равенства:

$$S_r = \sum_{i=r}^{k} C_i^r N(i) = \sum_{i=r}^{k} C_{i-1}^{r-1} M(i) \tag{11}$$

$$N(r) = \sum_{i=0}^{k-r} C_{r+i}^r S_{r+i}, M(r) = \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{r-1+i}^{r-1} S_{r+i} \tag{12}$$

Пример 2.3. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% читает журнал A, 50% – журнал B, 50% – журнал C, 30% – журналы A и B, 20% – журналы B и C, 40% – журналы A и C, 10% – журналы A, B и C. Сколько процентов студентов: не читает ни один из журналов; читает в точности два журнала; читает не менее двух журналов.

Решение. Если принять $|E| = S_0$ за 100%, то S_1 является суммой мощностей множеств студентов, читающих хотя бы один журнал, то есть $S_1 = 60\% + 50\% + 50\% = 160\%$, S_2 – сумма мощностей множеств студентов, читающих хотя бы два журнала, $S_2 = 30\% + 20\% + 40\% = 90\%$ и, наконец,$S_3 = 10\%$. Нужно найти $N(0)$, $N(2)$, $M(2)$. По формулам (12) имеем:

$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 100\% - 160\% + 90\% - 10\% = 20\%$;

$N(2) = C_2^2 S_2 - C_3^2 S_3 = 90\% - 3 \cdot 10\% = 60\%$;

$M(2) = C_1^1 S_2 - C_2^1 S_3 = 90\% - 2 \cdot 10\% = 70\%$.

Логическое тождество, на котором основан принцип включений-исключений, известно еще со времен французского математика Пьера де Монмора (1678-1719). Он эффективно использовал этот принцип при решении знаменитой задачи о встречах (задача о числе перестановок из n элементов, в которых ни один элемент не сохраняет своей позиции).

Пример 2.4. Буратино написал n писем к разным адресатам и заготовил для них n конвертов с адресами. Сколькими способами он может вложить письма в эти конверты так, чтобы ни одно письмо не попало тому лицу, которому адресовано?

Решение. Число всевозможных расположений n писем по n конвертам равно $P_n = n! = S_0$, то есть можно считать, что множество E состоит из $n!$ перестановок. Теперь выберем подмножества этого множества так, чтобы условие задачи не выполнялось.

Пусть хотя бы одно письмо наверняка попало в "свой" конверт (про остальные ничего не известно). Этот случай сводится к выбору такого письма (или конверта) и всем перестановкам остальных писем по остальным конвертам. Во множество E_1 следует включить только такие перстановки, при которых первое письмо попадет в нужный конверт, в E_2 – второе письмо попадет в нужный конверт и так далее, в E_n нужно включить только перестановки с n-ым письмом в "своем" конверте. Выбор одного письма осуществляется n способами, поэтому число
$S_1 = |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_n| = n \cdot P_{n-1} = n(n-1)! = n!$
Если по "своим" конвертам разложены k писем, то выбрать эти письма можно C_n^k способами, а переставить оставшиеся письма P_{n-k} способами. Следовательно, $S_k = C_n^k P_{n-k} = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!}$.

Отсюда, используя формулу включений-исключений, находим нужное число:
$S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

Вычисленное в этой задаче число $n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ называют еще *числом беспорядков.*

Метод производящих функций

В зависимости от заданных параметров комбинаторное число принимает то или иное значение. Упорядочивая значения параметров получим последовательность значений этого комбинаторного числа. Вместо последовательностей при решении задач бывает удобнее пользоваться функциями, поскольку при этом можно использовать известные методы математического анализа.

Метод производящих функций заключается в переходе от последовательности значений, принимаемых некоторым комбинаторным числом, к функциям. Используется этот метод не только при вычислении комбинаторных чисел, но и при доказательстве комбинаторных тождеств.

Определение 2.1 Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произвольная (бесконечная последовательность чисел. *Производящей функцией (производящим рядом)* для этой последовательности будем называть выражение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом.*

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Если последовательность растет слишком быстро, то бывает необходимость использовать *экспонециальную производящую функцию*, которая задается рядом

$$A^e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Однако, производящая функция вовсе не является в действительности функцией. То есть мы не можем сказать чему равно "значение $A(x_0)$ производящей функции A в точке x_0". Переменная s является *формальной*, и сумма ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ не имеет смысла. При этом верно утверждение $A(0) = a_0$, т.е. мы знаем значение производящей функции в нуле.

По известной бесконечное число раз дифференцируемой функции можно легко получить соответствующую последовательность. Если такую функцию считать производящей и разложить ее в ряд Маклорена, то коэффициенты при степенях x будут членами последовательности.

Ниже приведены разложения в ряд Маклорена нескольких элементарных функций.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{13}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \tag{14}$$

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n + \ldots \tag{15}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{16}$$

$$e^{\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n x^n}{n!} \tag{17}$$

$$(1+x)e^x = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \ldots + \frac{(n+1)x^n}{n!} + \ldots \tag{18}$$

$$(1+x)^\alpha = C_\alpha^0 + C_\alpha^1 x + \ldots + C_\alpha^n x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \tag{19}$$

С использованием приведенных разложений элементарных функций в ряд Маклорена можно составить следующую таблицу производящих функций.

$\{a_n\}$	$A(x)$	$A^e(x)$
1	$\frac{1}{1-x}$	e^x
$n+1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	$(1+x)e^x$
α^n, $\alpha \in R$	$\frac{1}{1-\alpha x}$	$e^{\alpha x}$
$\frac{1}{n!}$	e^x	$-$
$\frac{\alpha^n}{n!}$, $\alpha \in R$	$e^{\alpha x}$	$-$
C_α^k, $\alpha \in R$	$(1+x)^\alpha$	$-$

Производящие функции часто применяются при выводе комбинаторных тождеств.

Например, в биноме Ньютона рассматривается произведение n сомножителей вида $(1+x)$. В этом случае коэффициент при x^k равен числу сочетаний k элементов из множества E, содержащего n элементов. Тот же прием применятеся при вычислении коэффициентов при x^k в других произведениях.

Таким образом, производящей функцией числа сочетаний из множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в каждое из которых элемент a_i может входить только $k_1(i)$, $k_2(i)$, ... раз, является функция

$$(x^{k_1(1)} + x^{k_2(1)} + \ldots)(x^{k_1(2)} + x^{k_2(2)} + \ldots)\ldots(x^{k_1(n)} + x^{k_2(n)} + \ldots).$$

В первую скобку входят степени элемента x, в которых a_1 может входить в данное сочетание, во вторую скобку входят степени x, в которых a_2 может входить в данное сочетание и так далее.

Пример 2.5. Найти коээфициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$.

Решение. Функция $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$ является производящей. Рассматривая произведение двадцати одинаковых скобок можно заметить, что любая степень x получится как $(7a + 5b)$, где a и b – числа скобок, из которых выбираются соответственно x^7 и x^5. Таким образом, коэффициент при x^{18} будет равен 0, поскольку уравнение $7a + 5b = 18$ не имеет решений в целых неотрицательных числах. Для получения коэффициента при x^{17} нужно из одной скобки взять x^7, из двух x^5, а из остальных 1. Тогда коэффициент при x^{17} равен $C_{20}^1 \cdot C_{19}^2 = 20 \cdot 171 = 3420$.

Пример 2.6. Сколькими способами можно уплатить 21 копейку, если имеется достаточное количество 1, 2, 3 и 5 копеечных монет?

Решение. Фактически требуется найти число решений уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = n$ в целых неотрицательных числах. Оно будет равно числу сочетаний с повторениями из множества $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. При этом кратность элемента x_1 – любое целое неотрицательное число, кратность x_2 – любое целое неотрицательное число, кратное 2, кратность x_3 – любое целое неотрицательное число, кратное 3, кратность x_4 – любое целое неотрицательное число, кратное 5.

Производящей функцией для последовательности числа таких сочетаний является $A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)$.

Для подсчета числа решений вышеприведенного уравнения, достаточно раскрыть скобки и посчитать коэффициент при x^{21}. С этой целью разделим сумму $(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4)$ на два слагаемых $(x_1 + 2x_2)$ и $(3x_3 + 5x_4)$. Теперь заменим рассматриваемое уравнение системой трех уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 3x_3 + 5x_4 = y_2, \\ y_1 + y_2 = 21. \end{cases}$$

y_2 может быть равно $0, 3, 5, 6, 8$, и далее любому числу до 21 включительно.

Если $y_2 = 15, 18, 20$ и 21, то возможно два способа их выражения через x_3 и x_4: $15 = 3 \cdot 5 + 0 = 0 + 5 \cdot 3$; $18 = 3 + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 6 + 0$;

$20 = 0 + 5 \cdot 4 = 3 \cdot 5 + 5$; $21 = 3 \cdot 7 + 0 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3$.
Первое слагаемое $y_1 = x_1 + 2x_2$ может быть равно любому числу от 0 до 21, при этом число решений уравнения $x_1 + 2x_2 = y_1$ найти несложно. После этого нужно перебрать все пары значений (y_1, y_2), удовлетворяющие третьму уравнению системы, и для каждой пары найти числа решений первого и второго уравнений системы. Найденные числа нужно перемножить и просуммировать: $21 + 0$ (11 решений, так как x_2 может принимать значения от 0 до 10), $18+3$ (10 решений), $16+5$ (9 решений), $15+6$ (8 решений), $13+8$ (7 решений), $12+9$ (7 решений), $11+10$ (6 решений), $10+11$ (6 решений), $9+12$ (5 решений), $8+13$ (5 решений), $7+14$ (4 решения), $6+15$ ($4 \cdot 2 = 8$ решений, так как второе уравнение имеет два решения), $5+16$ (3 решения), $4+17$ (3 решения), $3+18$ ($2 \cdot 2 = 4$ решения), $2+19$ (2 решения), $1+20$ (2 решения), $0+21$ (2 решения).

Итого: $11+10+9+8+2\cdot7+2\cdot6+2\cdot5+4+8+2\cdot3+4+3\cdot2 = 102$ решения.

3. Задачи для самостоятельного решения

1. Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы. Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III главы содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

2. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульях, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки - на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

3. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать?

4. Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы: $\{A, B, C, D\}$. Записать все возможные размещения из 4 указанных букв по две: без повторений; с повторениями.

5. Пусть имеется множество, содержащее 2 буквы $\{A, B\}$. Записать все возможные размещения с повторениями из 4-х букв.

6. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

7. У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штам-

пов нанести на все книги пятизначные номера – составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

8. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 7 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии: 1. все цифры номера различны; 2. все цифры номера могут быть любыми из имеющихся десяти; 3. четыре последние цифры телефонного номера одинаковы?

9. Пусть имеется множество букв $\{A, B, C\}$. Записать все возможные перестановки.

10. Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

11. Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова "Миссисипи"?

12. Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы $\{A, B, C, D\}$. Запишем все возможные сочетания из указанных букв по 3.

13. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

14. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е место. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд.

15. Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое количество учащихся (порядок опроса учащихся неважен)?

16. Имеются 2 буквы A, 2 буквы B, 2 буквы C. Сколькими способами можно выбрать две из этих шести букв?

17. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Сколько существует вариантов такого заказа?

18. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шаров). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам?

19. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

20. Имеется множество чисел $\{1, 2, 3, 4\}$. Составить следующие виды соединений по 2 элемента из четырех: размещения без повторений; размещения с повторениями; сочетания без повторений; сочетания с повторениями.

21. Из Москвы до Новосибирска можно добраться поездом и самолетом; из Новосибирска в Томск - поездом, самолетом, автобусом, пароходом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Москва - Новосибирск-Томск?

22. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте

ответ на этот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

23. Стадион имеет 4 входа. Сколькими способами болельщик может войти на стадион в один вход, а выйти через другой?

24. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

25. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$, если: ни одна из цифр не повторяется более одного раза; цифры могут повторяться; числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

26. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 человек для выполнения их группового портрета? Сколькими способами можно это сделать, если поставить трех человек в переднем ряду и трех во втором?

27. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «лодка»?

28. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

29. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

30. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

31. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

32. Из колоды в 52 карты выбирают 3. Сколькими способами может быть сделан выбор "тройка, семерка, туз"?

33. На олимпиаду пришло 8 студентов. Сколькими способами их можно распределить в 3 аудитории?

34. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом?

35. Восемь девушек отправились в путешествие на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более четырех, а в большей - не более шестерых. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы одна из девушек окажется в другой лодке.)

36. В классе 29 учеников. Сколько существует различных вариантов присутствия (отсутствия) этих учеников в классе?

37. Числа $1, 2, ..., 9$ записываются в случайном порядке. Сколько существует вариантов такой записи, если: числа будут записаны в порядке возрастания; числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания; на четных местах будут стоять четные числа; сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10?

38. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти можно изобразить цифрами $0, 1, 2, 3, 4, 5$, причем в запись числа входят

только различные цифры?

39. В компании работают программисты, умеющие программировать на $C++$, $Delphi$ и $Java$. $C++$ знают 25 человек, $Delphi$ – 19, $Java$ – 24. $C++$ и $Java$ знают 10 человек, $C++$ и $Delphi$ – 6, $Delphi$ и $Java$ – 3. Все три языка знает 1 человек. Сколько программистов работают в компании?

40. От школы 1 на городской олимпиаде по математике участвовали 15 школьников, по физике – 8, по информатике – 12. 4 ученика участвовали в олимпиадах по математике и физике, 5 – по математике и информатике, 3 – по физике и информатике. 2 ученика участвовали во всех трех олимпиадах. Сколько учеников участвовали: (a) только в олимпиаде по математике? (b) только в олимпиаде по физике? (c) только в олимпиаде по информатике?

41. В книжном шкафу 80 книг: 39 из них по математике, 51 книга имеет объем больше 200 страниц. Сколько книг по математике имеет объем больше 200 страниц?

42. В классе 20 учеников увлекаются музыкой: 11 из них любят классику, а 12 – современную музыку. Сколько учеников любят только классическую музыку? Только современную?

43. После работы Алексей в случайное время оказывается на автобусной остановке, откуда ходят два автобуса: автобус номер 10 везет домой, а автобус номер 15 к Сереже. Какой первый приходит, на таком Алексей и едет. Оказалось, что в гостях у Сережи Алексей бывает в два раза чаще, чем дома. Значит ли это, что автобус номер 15 ходит в два раза чаще, чем автобус номер 10, если они всегда ходят по расписанию?

44. Ученики 8 класса решали две задачи. В конце занятия учи-

тель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по крайней мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

45. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?

46. Составить производящую функцию для подсчета числа сочетаний различных по составу букетов из гвоздик трех цветов, причем в каждом букете должно быть белых и красных – четное число, а розовых – нечетное.

47. Найти коэффициенты при x^{21} и x^{20} после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(x^9 + x^6 + 1)^{25}$.

Литература

[1] Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика. - МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

[2] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука, 1967.

[3] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963.

[4] Холл М. Комбинаторика. - М.:Мир, 1970.

[5] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. - М.: Высшая школа, 2002.

Светлана Сергеевна **Бельмесова**

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Практикум

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.