МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

А.Г. Шалашов
И.С. Абрамов
Е.Д. Господчиков

100 ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

практикум

Рекомендовано методической комиссией факультета ВШОПФ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
03.03.02 – физика

Нижний Новгород
2022

УДК 531/534(076)
ББК В 53:51я73-5
Ш18

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. С.А. Корягин

Шалашов, А.Г. 100 избранных задач по теоретической механике / А.Г. Шалашов, И.С. Абрамов, Е.Д. Господчиков : практикум. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2022.– 32 с.

Настоящий практикум представляет собой набор задач, предназначенных для решения студентами второго курса бакалавриата факультета ВШОПФ ННГУ в рамках практических занятий по курсу «Теоретическая механика» в III и IV учебных семестрах.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии факультета ВШОПФ ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор Фейгин А.М.

УДК 531/534(076)
ББК В 53:51я73-5

Содержание

1 Механика Ньютона

1.1 Кинематика

Задача 1. В *цилиндрической* системе координат (ρ, ϕ, z) движение точки задается соотношениями

$$\rho = R,\ \phi = \omega t,\ z = ut,$$
$$R = \text{const},\ u = \text{const},\ \omega = \text{const}.$$

(а) Найдите $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ в *декартовой* системе координат.

(б) Изобразите траекторию этой точки.

Задача 2. Материальная точка может свободно двигаться по прямой Ox между двумя перпендикулярными этой прямой плоскостями, находящимися на расстоянии L друг от друга. Считая отражение от плоскостей абсолютно упругим, задайте аналитически и постройте график зависимости координаты x, проекции скорости v_x и ускорения a_x этой точки от времени t. Скорость точки равна v_0.

Задача 3. Материальная точка двигается с постоянной скоростью по периметру квадрата с длиной стороны L, одна из веришин которого совпадает с началом координат, а прилежащие к ней стороны лежат на координатных осях Ox и Oy. Скорость точки равна v_0.

(а) Задайте аналитически и постройте график зависимости координаты x, проекции скорости v_x и ускорения a_x этой точки от времени t.

(б)* Найдите зависимости от времени проекций скорости и ускорения на диагонали квадрата.

Задача 4. Материальная точка движется в плоскости так, что радиус-вектор этой точки составляет постоянный угол с ее скоростью $\mathbf{r}\hat{\ }\mathbf{v} = \alpha$. Найдите траекторию точки.

Указание. Сначала полезно рассмотреть предельные случаи $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \pi/2$.

Задача 5. Муха ползет по глобусу радиуса R с постоянной скоростью v_0 и под постоянным углом α к меридиану. Найдите закон движения и траекторию мухи.

Задача 6. Движение материальной точки задается соотношением $\ddot{\mathbf{r}} = [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{c}]$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор материальной точки, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор. Найдите закон движения $\mathbf{r}(t)$.

Задача 7. Материальная точка, движущаяся в плоскости (x, y), влетает из бесконечности в клиновидную полость (см. рис. 1). Движение точки происходит в области $0 < y < \kappa x$, $\kappa > 0$. Отражение от стенок $y = 0$ и $y = \kappa x$ абсолютно упругое. В точке с координатами (x_0, y_0) скорость материальной точки равна по модулю v и составляет угол α с осью y. Определите, насколько сможет приблизиться точка к началу координат $(0, 0)$.

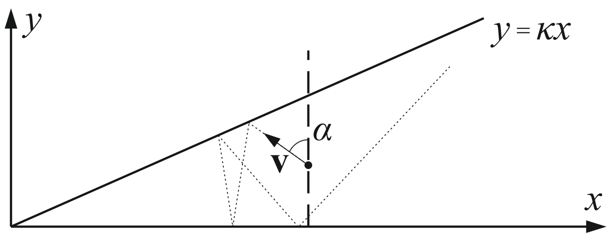

Рис. 1

1.2 Динамика

Задача 8. Материальная точка массы m движется в плоскости так, что сила, действующая на эту точку, составляет постоянный угол с ее скоростью, при этом оставаясь постоянной по величине, то есть

$$\mathbf{F}\hat{\ }\mathbf{v} = \alpha = \text{const}, \quad |\mathbf{F}| = F = \text{const}.$$

Найдите закон движения $\mathbf{r}(t)$ материальной точки, если известно, что $|\mathbf{v}(0)| = v_0$.

Задача 9. Траектория материальной точки в *полярных* координатах (ρ, ϕ) задается соотношением

$$\frac{p}{\rho} = 1 + \varepsilon \cos \omega\phi,$$

где ω, ε и p – положительные константы, $\varepsilon < 1$. Найдите зависимость вектора ускорения точки от ρ, если известно, что движение происходит в поле стационарной центральной силы, а центр силы находится в начале координат ($\rho = 0$).

Задача 10. Найдите работу силы, действующей на материальную точку, движущуюся по заданной траектории:

(а) $\mathbf{F} = [\mathbf{r}, \mathbf{c}]$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор, траектория $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

(б) $\mathbf{F} = \alpha\,\{y, z, x\}$, один виток траектории из **Задачи 1**;

(в) $\mathbf{F} = \alpha\,\{yz, zx, yx\},\ \mathbf{r}(t) = \{a\cos t, b\sin t, c\sin t\},\ 0 < t < 2\pi$;

(г) $\mathbf{F} = eE_0\cos(\Omega t + \phi)\,\mathbf{e}_y,\ \mathbf{r}(t) = \{a\cos\omega t, b\sin\omega t, 0\},\ 0 < \omega t < 2\pi$.

Задача 11. Найдите зависимость от времени модуля радиус-вектора материальной точки с массой m, движущейся под действием силы $\mathbf{F} = \alpha\,[\mathbf{v}, \mathbf{r}]/r^3$.

Задача 12. Проверьте, потенциальна ли сила, заданная в *декартовых* координатах, и, если да, найдите потенциал U:

(а) $\mathbf{F} = \dfrac{\alpha}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}$;

(б)* $\mathbf{F} = \dfrac{\alpha}{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \{-y, x, 0\}$;

(в)* $\mathbf{F} = \dfrac{\alpha}{x^2 - y^2}\,\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \{-y, x, 0\}$.

1.3 Однородные потенциалы и теорема о вириале

Задача 13. Определите, является ли указанная функция однородной в *декартовых* координатах $\{x, y, z\}$ и, если она однородна, найдите порядок ее однородности:

(а) $\sin(\alpha\, xyz)$, где x, y, z – *декартовы* координаты;

(б) $\exp[x/(y + z)]$, где x, y, z – *декартовы* координаты;

(в) $\ln(xy^2z^3)$, где x, y, z – *декартовы* координаты;

(г) $\alpha|\mathbf{r}|^n$;

(д) 0 при $|\mathbf{r}| \le a$ и ∞ при $|\mathbf{r}| > a$;

(е) $\alpha\cos\vartheta/r^2$, где r, φ, ϑ – *сферические* координаты;

(ж) $|\mathbf{r}| + (\mathbf{E}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{E}$ – вектор;

(з) $(\mathbf{E}, \mathbf{r}) + \alpha/|\mathbf{r}|$;

(и) $f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$, где f, g, h – однородные в $\mathbb{R}$ функции с порядками однородности k_f, k_g, k_h;

(к) $f(r)\cdot g(\vartheta, \varphi)$, где f – однородная в $\mathbb{R}$ функция с порядком однородности k_f.

Задача 14. В поле гравитирующего центра с массой M движется материальная точка с массой m, на которую, помимо гравитационной силы, действует более слабая сила вязкого трения $F_\mu = -\mu\,\dot{\mathbf{r}}$.

(а) Запишите условия применимости теоремы о вириале.

(б) Найдите зависимость средней энергии точки от времени.

Задача 15. Материальная точка с массой m может без трения скользить вдоль горизонтальной прямой и удерживается длинной пружиной с коэффициентом жесткости κ. Найдите зависимость от времени средней энергии и амплитуды колебаний материальной точки, если:

(а) коэффициент жесткости медленно уменьшается с течением времени по закону $\kappa(t)$;

(б) масса точки медленно теряется с течением времени по закону $m(t)$ так, что скорость теряемой массы относительно самой точки равна нулю.

Задача 16. Материальная точка с массой m подвешена в однородном поле силы тяжести $\mathbf{g}$ на невесомом жестком стержне длины l. Движение получившегося маятника считайте плоским. Найдите зависимость от времени средней энергии и амплитуды малых колебаний материальной точки, если:

(а) длина подвеса медленно увеличивается с течением времени по закону $l(t)$;

(б) модуль ускорения свободного падения медленно уменьшается с течением времени по закону $g(t)$;

(в) масса точки медленно теряется с течением времени по закону $m(t)$ так, что скорость теряемой массы относительно самой точки равна нулю.

Задача 17. Найдите, как связаны между собой периоды обращения материальной точки по двум подобным траекториям $\mathbf{r}_2 = \beta \mathbf{r}_1$ в потенциале, являющемся однородной функцией координаты с порядком однородности k.

2 Механика Лагранжа

2.1 Уравнения Лагранжа

Задача 18. Составьте функцию Лагранжа и запишите уравнения движения свободной материальной точки массой m, выбрав в качестве обобщенных координат:

(а) *цилиндрические* координаты ρ, φ, z;

(б) *сферические* координаты r, φ, ϑ;

(в) *параболические* координаты ξ, η, φ, которые связаны с *декартовыми* координатами $x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$, $y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$, $z = (\xi - \eta)/2$.

Задача 19. Составьте функцию Лагранжа и запишите уравнения движения материальной точки массы m, подвешенной на невесомом нерастяжимом стержне длины l в однородном поле силы тяжести, если точка подвеса:

(а) совершает гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой ω вдоль горизонтальной прямой;

(б) совершает гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой ω вдоль вертикальной прямой;

(в) вращается с циклической частотой ω по окружности радиуса a в вертикальной плоскости.

Движение маятника во всех трех случаях следует считать плоским: подвес ограничивает движение стержня так, что оно происходит в вертикальной плоскости, содержащей траекторию точки подвеса.

Задача 20. Прямоугольный клин массы M с углом α при основании расположен в поле силы тяжести и может скользить без трения по горизонтальной плоскости вдоль прямой, перпендекулярной ребру при $\angle\alpha$ (см. рис. 2). Материальная точка массы m_1 может скользить без трения по клину и связана невесомой нерастяжимой нитью длины l, перекинутой через блок в верхней точке клина, с материальной точкой массы m_2, которая может двигаться вдоль вертикальной грани клина. Введите обобщенные координаты, составьте функцию Лагранжа и запишите уравнения движения системы. Движение происходит в плоскости рисунка.

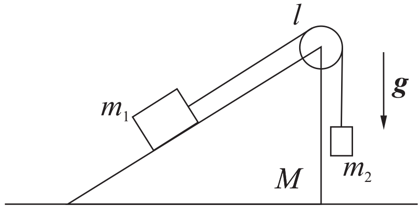

Рис. 2

Задача 21. Материальная точка массы m может скользить без трения по внутренней поверхности конуса, ось симметрии которого параллельна направлению силы тяжести (см. рис. 3). Угол между образующей конуса и осью изменяется во времени по известному закону $\alpha(t)$. Введите обобщенные координаты, составьте функцию Лагранжа и запишите уравнения движения материальной точки.

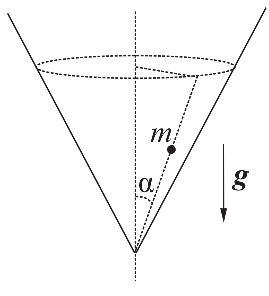

Рис. 3

Задача 22. По лучу может скользить без трения материальная точка с массой m (см. рис. 4). Луч вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Материальная точка соединена с осью невесомой пружиной с жесткостью k, длина нерастянутой пружины ρ_0.

(a) Найдите работу сил реакции при перемещении точки от расстояния ρ_1 до расстояния ρ_2 от оси вращения и запишите закон изменения энергии материальной точки.

(б) Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения движения и законы сохранения.

Рис. 4

Задача 23. Материальная точка массы M может скользить без трения по горизонтальной прямой (см. рис. 5). При помощи невесомого нерастяжимого стержня длины l к ней подвешена материальная точка массы m в однородном поле силы тяжести. Считая, что устройство подвеса ограничивает движение системы так, что оно происходит в вертикальной плоскости, содержащей траекторию точки подвеса, введите обобщенные координаты, составьте функцию Лагранжа. Выпишите законы сохранения, справедливые для данной системы точек, и ее уравнения движения.

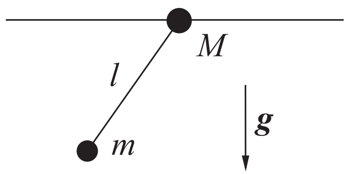

Рис. 5

Задача 24. Тонкая массивная нить с линейной плотностью κ натянута в однородном поле силы тяжести параллельно ускорению свободного падения $\mathbf{g}$ и огибает невесомый диск с радиусом R, который может совершать поступательное движение параллельно $\mathbf{g}$ и вращаться вокруг своей оси (см. рис. 6). Введите обобщенные координаты, составьте функцию Лагранжа и уравнения движения. Решите уравнения движения.

Задача 25. Получите уравнения движения и их решения для системы с заданной функцией Лагранжа:

(а) $L = \left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}\right) e^{\alpha t}$;

(б) $L = \left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2} - k\dfrac{\alpha x - 1}{\alpha^2}\right) e^{\alpha x}$;

(в) $L = m\dot{x}\dot{y} + \alpha(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy$;

(г) $L = \dfrac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + \alpha(x\dot{y} - \dot{x}y)$.

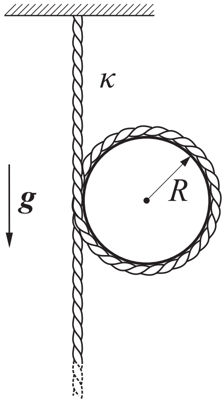

Рис. 6

2.2 Обобщенно-потенциальные силы

Задача 26. Материальная точка с массой m и зарядом e влетает со скоростью v_0 в плоскопараллельный слой толщины l перпендикулярно к нему. В слое магнитное поле $\mathbf{B}$ постоянно и однородно, вне слоя поле отсутствует. Вектор магнитной индукции параллелен поверхности слоя. Определите условия, при которых точка преодолеет слой.

Задача 27. Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения движения и укажите законы сохранения для свободной материальной точки с массой m и зарядом e, движущейся в скрещенных под прямым углом стационарных однородных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях. Решите уравнения движения для точки, скорость которой в начальный момент времени направлена вдоль электрического поля.

Задача 28. Материальная точка с массой m и зарядом e подвешена на невесомом нерастяжимом стержне длины l в поле силы тяжести $\mathbf{g}$ и вертикальном постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения движения и укажите законы сохранения, справедливые для данной системы.

Задача 29. Материальная точка с массой m и зарядом e может двигаться в аксиально симметричном стационарном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E} = -k\rho\,\mathbf{e}_\rho$, где $k > 0$, и однородном стационарном магнитном поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения движения и укажите законы сохранения, справедливые для данной системы. Найдите точное решение уравнений движения.

Задача 30. Материальная точка с массой m и зарядом e начинает движение со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ с поверхности внутенней обкладки цилиндрического конденсатора перпендикулярно этой поверхности (см. рис. 7). Поверхностная плотность заряда внутренней обкладки $-\sigma$, радиусы внутренней и внешней обкладки R_1 и R_2. Между обкладками создано однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное вдоль оси конденсатора. Найдите условия, при которых точка преодолеет пространство между обкладками.

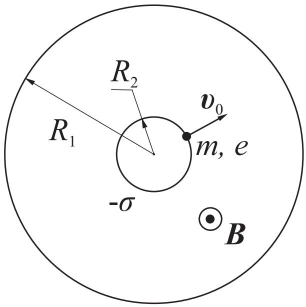

Рис. 7

2.3 Линейные колебания в лагранжевых системах

Задача 31. Круглая рамка вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, ориентированного вертикально (см. рис. 8). По рамке может скользить без трения материальная точка массой m в поле силы тяжести. Найдите положения равновесия системы и частоты малых колебаний относительно устойчивых положений равновесия.

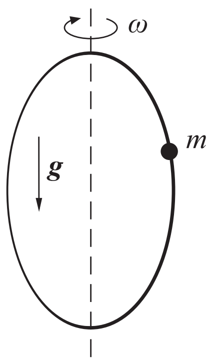

Рис. 8

Задача 32. Найдите положения равновесия и частоты малых колебаний относительно устойчивых положений равновесия для системы, изображенной на рис. 9 (регулятор Уатта).

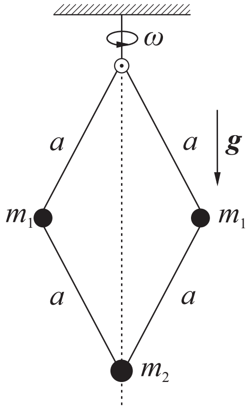

Рис. 9

Задача 33. Найдите положения равновесия и частоты малых колебаний относительно устойчивых положений равновесия для системы, описанной в **Задаче 23**.

Задача 34. Две материальные точки одинаковой массы m могут скользить без трения вдоль горизонтальной прямой. Первый груз соединен пружиной жесткости k с неподвижной стенкой. Второй при помощи такой же пружины присоединен к первой точке. Найдите все нормальные колебания системы.

Пояснение. Нормальное колебание линейной системы – это частное решение, отвечающее одному из корней характеристического уравнения.

Задача 35. Три материальные точки могут скользить без трения вдоль горизонтальной прямой. Центральная точка массы m соединена одинаковыми пружинами жесткости k с двумя другими точками в два раза меньшей массы. Найдите все нормальные колебания системы.

Задача 36. Механическая система задана функцией Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2}\Omega_1^2 x^2 - \frac{1}{2}\Omega_2^2 y^2 + \alpha x y.$$

Найдите нормальные координаты, частоты нормальных колебаний и общее решение уравнений движения. Постройте графики зависимостей нормальных частот от “парциальной” частоты Ω_1 при фиксированной “парциальной” частоте Ω_2 при условии $\Omega_2 \gg \sqrt{\alpha}$. Постройте график зависимости максимального отклонения x и y от Ω_1 при возбуждении только одного из нормальных колебаний.

2.4 Теорема Нетер

Задача 37. Система имеет функцию Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad v = \dot{x}.$$

Покажите инвариантность действия относительно преобразований

$$x^* = x\ \mathrm{ch}(\alpha) + c\,t\ \mathrm{sh}(\alpha), \qquad c\,t^* = c\,t\ \mathrm{ch}(\alpha) + x\ \mathrm{sh}(\alpha)$$

(преобразования Лоренца). Постройте интеграл движения I, отвечающий этим преобразованиям.

Задача 38. Механическая система имеет функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j - U(\mathbf{q}),$$

где $a_{ij}(\mathbf{q})$ – однородные функции порядка k, а $U(\mathbf{q})$ – однородная функция порядка l. Найдите значения k и l, при которых преобразование

$$q_i^* = q_i e^{\beta\alpha}, \qquad t^* = te^{\gamma\alpha}$$

удовлетворяет теореме Нётер и постройте соответствующий интеграл движения I.

2.5 Электромеханические аналогии

Задача 39. Пластина конденсатора при помощи жесткого невесомого стержня присоединена к материальной точке с массой m (см. рис. 10, слева). Получившийся маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости (в поле силы тяжести). Конденсатор включен в колебательный контур с индуктивностью L. Масса пластин конденсатора пренебрежимо мала. Расстояние от оси вращения маятника до массы m

равно l. Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения Лагранжа и укажите законы сохранения, считая зависимость емкости конденсатора C от угла отклонения φ известной.

Задача 40. Сердечник с массой m подвешен в поле силы тяжести на невесомой пружине с жесткостью k и может совершать колебания, вдвигаясь и выдвигаясь из покоящегося соленоида (см. рис. 10, справа). Соленоид включен в колебательный контур с емкостью C. Составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения Лагранжа и укажите законы сохранения, считая зависимость индуктивности соленоида L от удлинения пружины Δx известной.

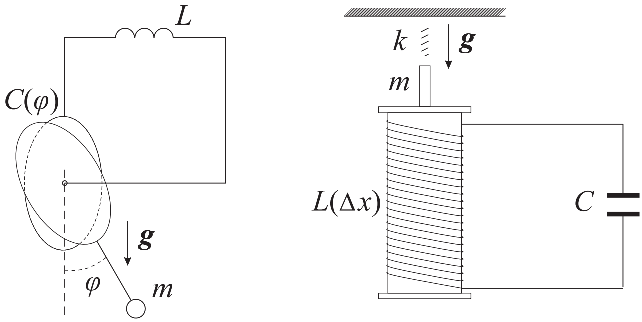

Рис. 10

Задача 41. Для каждой из электрических схем, изображенных на рис. 11, введите обобщенные координаты, составьте функцию Лагранжа, запишите уравнения Лагранжа и укажите законы сохранения.

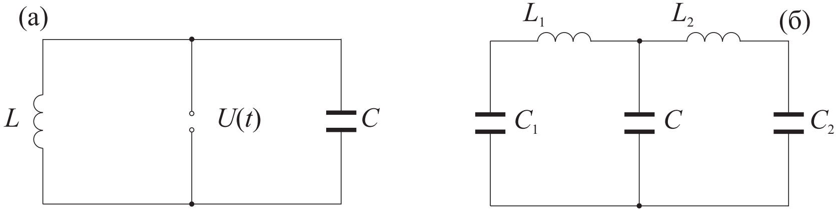

Рис. 11

3 Интегрируемые системы

3.1 Одномерное движение

Задача 42.

Материальная точка с массой m движется в потенциале (потенциал Морзе)

$$U(x) = U_0 \left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right),$$

где $U_0 > 0$ и $\alpha > 0$.

(а) Постройте фазовый портрет системы: изобразите все возможные фазовые кривые $\dot{x}(x)$.

(б) Найдите закон движения точки $x(t)$ в явном виде.

(в) Определите условия, когда движение финитно, и найдите период финитного движения точки в зависимости от ее полной механической энергии $T(E)$.

(г)* Определите, как изменится фазовый портрет системы при наличии силы вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\mu\dot{x}$.

Задача 43. Материальная точка с массой $m = 1$ движется в потенциале

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - x^2.$$

(а) Постройте фазовый портрет системы.

(б) Постройте фазовый портрет при наличии силы вязкого трения $F_{\text{тр}} = -5\dot{x}$.

Задача 44. Материальная точка с массой m запущена вертикально вверх со скоростью v_0. Помимо силы тяжести, на нее также действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\mu\dot{x}$. Найдите высоту подъема точки.

Задача 45. Уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \tfrac{1}{2}\alpha\,\dot{x}^2 = 0.$$

Найдите интеграл энергии $H(x, \dot{x})$ и постройте соответствующий фазовый портрет. Определите, какому значению H соответствует сепаратриса.

Задача 46. Материальная точка с массой m совершает финитное движение в потенциале

$$U = \begin{cases} -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & |x| \le a \\ \infty, & |x| > a \end{cases} .$$

Найдите зависимость периода движения от полной механической энергии $T(E)$.

Задача 47. Восстановите потенциал $U(x)$ по периоду движения

$$T(E) = \frac{\alpha}{\sqrt{E + U_0}}$$

материальной точки с массой m, если $U(0) = 0$, $U(-x) = U(x)$, в случаях:

(а) $U_0 > 0$;

(б) $U_0 = 0$.

Задача 48. Материальная точка с массой m совершает финитное движение в потенциале

$$U(x) = \frac{U_0}{\cos^2(\beta x)}.$$

Найдите зависимость периода движения от полной механической энергии $T(E)$.

Задача 49. Материальная точка с массой m движется в возмущенном потенциале Морзе

$$U(x) = U_0\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right) - Ve^{\alpha x},$$

где $U_0 > 0$ и $\alpha > 0$. Считая $\delta U = -Ve^{\alpha x}$ малой добавкой, найдите возмущение периода финитного движения $\delta T(E)$. Определите условия применимости теории возмущений.

Задача 50. Материальная точка с массой m движется в потенциале

$$U(x) = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \delta U,$$

где $\delta U = \beta x^4$ — малое возмущение. Найдите возмущение периода $\delta T(E)$ и определите условия применимости теории возмущений.

3.2 Движение в центральном поле

Задача 51. Материальная точка с начальными координатой $\mathbf{r}_0$ и скоростью $\mathbf{v}_0$ движется в центральном поле (с центром симметрии в точке $\mathbf{r} = 0$). Запишите уравнение плоскости, в которой происходит движение.

Задача 52. Материальная точка с массой m, полной механической энергией E и моментом импульса M движется в потенциале

$$U = \begin{cases} -U_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad U_0 > 0.$$

Найдите все возможные траектории точки.

Задача 53. Материальная точка с массой m, полной механической энергией E и моментом импульса M движется в потенциале

$$U = \frac{\alpha}{r^2}.$$

Найдите условия падения на центр этого поля. Определите, сколько оборотов совершит частица при падении на центр.

Задача 54. Материальная точка с массой m движется в потенциале

$$U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

по известной траектории

$$\left(\frac{r\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{r\sin\varphi}{b}\right)^2 = 1.$$

В рамках теории возмущений найдите угловую скорость прецессии этой траектории в потенциале $U + \delta U$, где $\delta U = \beta/r^4$ – малая добавка. Укажите условия применимости теории возмущений.

Задача 55. Материальная точка с массой m движется по круговой орбите в потенциале

$$U = -\frac{\alpha}{r}.$$

Определите, как изменится кинетическая, потенциальная и полная энергия точки, если перевести ее с круговой орбиты радиуса R_1 на круговую орбиту радиуса R_2.

Задача 56. В начальный момент времени момент времени материальная точка с массой m находится на расстоянии R от центра поля

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0,$$

и ее скорость равна нулю. Определите время падения частицы в центр поля.

Задача 57. Материальная точка с массой m, полной механической энергией E и моментом импульса M движется в потенциале

$$U = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

где $\alpha, \beta > 0$. Найдите все возможные траектории точки.

Задача 58. Материальная точка с массой m, полной механической энергией E и моментом импульса M движется в потенциале

$$U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

где $\alpha, \beta > 0$. Найдите:

(а) траекторию точки и условия, при которых она финитна;

(б) периоды колебаний по радиусу r и обращения по азимуту φ;

(в) угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями максимального сближения с центром поля (перицентра);

(г) условие замкнутости траектории материальной точки.

Задача 59. Материальная точка с массой m, полной механической энергией E и моментом импульса M совершает финитное движение в притягивающем кулоновском потенциале $U = -\alpha/r$, где коэффициент $\alpha > 0$. Найдите угловую скорость прецессии орбиты точки при добавлении к потенциалу малой поправки $\delta U = \gamma/r^3$.

3.3 Теория рассеяния

Задача 60. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния материальных точек в потенциале $U = \alpha/r^2$, в случае:

(а) $\alpha > 0$;

(б) $\alpha < 0$.

Задача 61. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния материальных точек в потенциале

$$U = \begin{cases} U_0, & r \le a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad U_0 > 0.$$

Задача 62. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния материальных точек в потенциале

$$U = U_0 e^{-\kappa^2 r^2}, \quad U_0 > 0$$

в приближении малых углов рассеяния.

Задача 63. Найдите сечение падения материальных точек в центр поля

$$U = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Задача 64. Найдите сечение падения материальных точек, движущихся в потенциале $U = -\alpha/r^3, \quad \alpha > 0$, на шар радиуса R, центр которого совпадает с центром поля.

4 Механика Гамильтона

4.1 Уравнения Гамильтона

Задача 65. Запишите функцию Гамильтона $H(p_r, p_\varphi, p_\vartheta, r, \varphi, \vartheta)$ свободной материальной точки в *сферической* системе координат.

Задача 66. Материальная точка движется в обобщенном потенциале

$$U = U_0(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^{3} a_i(\mathbf{q})\dot{q}_i.$$

Найдите функцию Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ для данной системы.

Задача 67. Составьте и решите канонические уравнения движения для системы с заданной функцией Гамильтона

(а) $H = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{m\omega_0^2}{2}q^2$;

(б) $H = H_0 + \lambda H_0^2$, где $H_0(p,q)$ — функция Гамильтона из (а);

(в) $H = p_x p_y + q_x q_y$;

(г) $H = p_x^2 + (p_y + \alpha x)^2$;

(д) $H = c|\mathbf{p}|/n(\mathbf{r})$, для решения положите $n(\mathbf{r}) = \alpha x$.

Задача 68. Функция Лагранжа релятивистской материальной точки

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}.$$

Найдите функцию Гамильтона $H(p,q)$ и решите уравнения движения.

4.2 Скобки Пуассона

Задача 69. Вычислите значение выражений:

(а) $[M_i, r_j]$;

(б) $[M_i, p_j]$;

(в) $[M_i, M_j]$;

(г) $[M_i, \mathbf{M}]$;

(д) $[(\mathbf{a}, \mathbf{r}), (\mathbf{b}, \mathbf{p})]$;

(е) $[(\mathbf{a}, \mathbf{r}), (\mathbf{b}, \mathbf{M})]$.

Здесь r_j, p_j и M_j — компоненты радиус-вектора, импульса и момента импульса материальной точки в *декартовой* системе координат, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $[\cdot,\cdot]$ — скобки Пуассона, $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение векторов.

Задача 70. Используя формализм скобок Пуассона, получите выражение для вектора ускорения материальной точки с массой m и зарядом e в электромагнитном поле, заданном векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. Вектор скорости следует считать известным.

4.3 Канонические преобразования и производящие функции

Задача 71. Определите условия каноничности преобразования, представляющего собой линейную замену обобщенных координат и импульсов

$$Q = \alpha q + \beta p, \quad P = \gamma q + \delta p.$$

В том случае, когда это преобразование каноническое, найдите его производящую функцию и валентность. Считайте α, β, γ и δ произвольными действительными числами, количество степеней свободы $s = 1$.

Задача 72. Проверьте преобразование на каноничность и, если оно каноническое, найдите производящую функцию указанного типа и валентность:

(а) $Q = \ln p - q, \quad P = -p, \quad F_1(q,Q), \quad s = 1;$

(б) $Q = 2\mathrm{ch}(qt), \quad P = \dfrac{p}{t\,\mathrm{sh}(qt)}, \quad F_2(q,P), \quad s = 1;$

(в) $$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{2p_1p_2^2 - \gamma q_1} - p_1, & P_1 = \gamma q_1 - 2p_1p_2^2 \\ Q_2 = \dfrac{1}{2p_1^2p_2 - \gamma q_2} - p_2, & P_2 = \gamma q_2 - 2p_1^2p_2 \end{cases}, \quad F_3(Q,p);$$

(г) $$\begin{cases} Q_i = \arccos\left(\dfrac{p_i}{\cos q_i}\right) \\ P_i = \lambda\sqrt{1 - \dfrac{p_i^2}{\cos^2 q_i}}\,\sin q_i \end{cases}, \quad F_1(q,Q), i = 1 \ldots s.$$

Задача 73. Убедитесь в каноничности, найдите производящую функцию $F_2(q, P)$ и валентность преобразования Галилея

$$Q = q + vt, \;\; P = p.$$

Найдите функцию Гамильтона в новых переменных $H'(Q, P)$, если известна функция Гамильтона исходной системы $H(q, p)$.

Задача 74. Унивалентное каноническое преобразование задано производящей функцией $F_1 = \kappa q^2 \operatorname{ctg} Q$. Выразите функцию Гамильтона гармонического осциллятора

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

в новых переменных Q и P. Подберите κ, при котором Q станет циклической координатой, найдите решение уравнений Гамильтона в новых переменных, затем получите зависимости $q(t)$ и $p(t)$ с помощью канонического преобразования от новых переменных к исходным.

Задача 75. Рассмотрите движение гармонического осциллятора как унивалентное каноническое преобразование начальных условий. А именно, пусть $q(t) = \tilde{q}(q_0, p_0, t)$ и $p(t) = \tilde{p}(q_0, p_0, t)$ есть решение уравнений Гамильтона с начальными условиями $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$ и функцией Гамильтона $H(q, p)$ из предыдущей задачи.

(а) Докажите, что преобразование $q = \tilde{q}(Q, P, t)$, $p = \tilde{p}(Q, P, t)$ является каноническим.

(б) Найдите производящую функцию $F_1(q, Q, t)$ этого преобразования.

(в) Запишите новую функцию Гамильтона.

(г) Обобщите результаты (б) и (в) для многомерного случая с функцией Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega_i^2 q_i^2}{2} \right).$$

Задача 76. Обратным к преобразованию

$$\hat{S} : (q, p) \to (Q, P)$$

называется преобразование

$$\hat{S}^* : (Q, P) \to (q, p),$$

такое, что преобразование $\hat{S}^*\hat{S}$ является тождественным. Каноническое преобразование $\hat{S}$ задано своей производящей функцией $F_2(q, P)$ и валентностью c. Найдите производящую функцию и валентность обратного преобразования $\hat{S}^*$.

4.4 Метод Гамильтона — Якоби

Задача 77. Для системы с функцией Лагранжа

(а) $L = \dfrac{1}{2}\left(q_1^2\dot{q}_1^2 + q_2^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - \cos q_1;$

(б) $L = \dfrac{1}{2}\left(q_1^4\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2\right) - \dfrac{q_2^2}{q_1^2}$

составьте уравнение Гамильтона — Якоби, найдите его полный интеграл и закон движения в квадратурах.

Задача 78. Для системы с функцией Гамильтона

(а) $H = \dfrac{p_1^2 + \sin^2 q_1 + p_2^2 + \sin^2 q_2}{p_1^2 - \sin^2 q_1 + p_2^2 - \sin^2 q_2};$

(б) $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{\exp[2(p_1 + q_1)] + \exp[2(p_2 + q_2)]}{\exp(p_1 + q_1) + \exp(p_2 + q_2)}\cos t$

составьте уравнение Гамильтона — Якоби, найдите его полный интеграл и решение уравнений Гамильтона в квадратурах.

Задача 79. Методом Гамильтона — Якоби найдите закон движения и траекторию материальной точки с массой m, движущейся под действием постоянной силы $\mathbf{F} = \mathrm{const}$.

Задача 80. Методом Гамильтона — Якоби найдите закон движения и траекторию материальной точки с массой m и зарядом e в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = \mathrm{const}$.

Задача 81. Материальная точка с массой m движется в потенциале

$$U = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{r^3}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ точка имеет *сферические* координаты $r = \infty$, $\varphi = 0$, $\vartheta = \pi - \alpha$. Иными словами, точка налетает из бесконечности под некоторым углом α к постоянному вектору $\mathbf{a} = \mathrm{const}$ (вектор $\mathbf{a}$ ориентирован вдоль оси z). Найдите:

(а) зависимость от времени модуля радиус-вектора точки $r(t)$;

(б) траекторию и закон движения точки в квадратурах;

(в) сечение падения в точку $r = 0$.

Задача 82. Материальная точка с массой m движется в потенциале

$$U = -\frac{\alpha}{r} + (\mathbf{F}, \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{F} = \mathrm{const}$ — постоянный вектор, $\alpha = \mathrm{const}$. Найдите решение уравнений Гамильтона в квадратурах.

Задача 83. Для системы с заданной функцией Гамильтона $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, можно рассмотреть уравнение Гамильтона — Якоби в p-представлении

$$H\left(-\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{p}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Пусть $S(\mathbf{p}, t)$ есть частное решение этого уравнения, зависящее от вектора констант $\boldsymbol{\alpha}$ с той же размерностью, что и $\mathbf{q}$ (полный интеграл).

(а) Докажите аналог теоремы Якоби для $S(\mathbf{p}, t, \boldsymbol{\alpha})$, то есть сформулируйте, как по известному решению $S(\mathbf{p}, t, \boldsymbol{\alpha})$ получить решение $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$ исходной системы уравнений Гамильтона.

(б) Примените данный метод и найдите закон движения материальной точки с массой m, движущейся вдоль оси x под действием постоянной силы F_x.

Задача 84. Материальная точка с массой m движется в гравитационном поле двух точечных неподвижных масс m_1 и m_2, расположенных в точках с *декартовыми* координатами $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Указание 1. Для разделения переменных в системе с двумя гравитирующими (или кулоновскими) центрами используют *эллиптические* координаты (ξ, η, φ), связанные с *декартовыми* координатами следующими соотношениями:

$$x = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\cos\varphi,$$

$$y = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$
$$z = \sigma\xi\eta,$$

где $\sigma = \mathrm{const}$ — параметр преобразования; новые координаты изменяются в интервалах $1 \le \xi < \infty$, $-1 < \eta < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Массы m_1 и m_2 располагаются в фокусах эллипсоидов вращения, являющихся координатными поверхностями $\xi = \mathrm{const}$, при этом $\sigma = a$.

Указание 2. Для вычисления функции Гамильтона в *эллиптических* координатах удобно воспользоваться функцией Лагранжа материальной точки в *цилиндрической* системе координат.

4.5 Адиабатические инварианты

Задача 85. Материальная точка массы m совершает одномерное движение в потенциале вида

$$U = \begin{cases} 0, & |x| < a(t) \\ \infty, & |x| \ge a(t) \end{cases}.$$

(а) Запишите условие того, что величина $a(t)$ меняется адиабатически медленно.

(б) Граница $a(t)$ адиабатически медленно изменилась от a_0 до a_1. Выразите энергию E_1 материальной точки в момент времени, когда $a(t) = a_1$. Значение энергии в начальный момент времени E_0.

Задача 86. Определите, как связаны между собой давление p и объем V газа, состоящего из частиц, движущихся параллельно ребрам внутри куба со стороной $a(t)$, меняющейся во времени адиабатически медленно. Считайте, что частицы распределены по скоростям так, что оказывают одинаковое давление на каждую из граней куба. Сравните полученный ответ с адиабатой Пуассона одноатомного идеального газа.

Задача 87. Материальная точка, движущаяся в плоскости (x, y), влетает из бесконечности в клиновидную полость (см. рис. 1). Движение точки происходит в области $0 < y < \kappa x$, $\kappa > 0$. Отражение от стенок $y = 0$ и $y = \kappa x$ абсолютно упругое. В точке с координатами (x_0, y_0) скорость материальной точки равна по модулю v и составляет угол α с осью y.

(а) Для случая малых α и κ определите, насколько сможет приблизиться точка к началу координат $(0, 0)$.

(б) Определите, как изменится ответ, если в условиях части (а) заменить стенку $y = \kappa x$ на $y = \kappa\sqrt{x}$.

Задача 88. Определите, как изменяется полная механическая энергия E материальной точки, совершающей финитное движение в потенциале Морзе

$$U(x) = V\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right)$$

при адиабатически медленном изменении параметров $V(t)$ и $\alpha(t)$.

Пояснение. Здесь и далее вопрос "как изменяется" означает, что необходимо выразить величину в некоторый конечный момент времени через значение этой величины в начальный момент времени и значения адиабатически медленно меняющихся параметров в начальный и конечный момент времени, то есть спрашивается зависимость $E(E_0, V_0, \alpha_0, V, \alpha)$ для данной задачи.

Задача 89. Материальная точка массы m вертикально подскакивает над горизонтальной упругой плитой, закрепленной на высоте h над уровнем моря. Определите, как изменяется максимальная высота подъема точки над плитой и над уровнем моря при адиабатически медленном изменении:

(а) ускорения свободного падения $g(t)$;

(б) высоты плиты над уровнем моря $h(t)$.

Запишите условия адиабатичности изменения обеих величин.

Задача 90. Найдите изменение полной механической энергии δE материальной точки с массой m и моментом импульса M, совершающей финитное движение в притягивающем потенциале $U(r) = -\alpha/r$, где коэффициент $\alpha > 0$, при адиабатически медленном включении малой добавки $\delta U(r) = \gamma/r^3$.

Указание. Можно воспользоваться решением **Задачи 59**.

Задача 91. Определите, как изменяется полная механическая энергия материальной точки с массой m и зарядом e, движущейся в центральном поле $U(r)$, при адиабатически медленном включении слабого однородного магнитного поля $\mathbf{B}$.

Задача 92. Материальная точка с массой m и зарядом e движется в адиабатически медленно изменяющемся однородном магнитном поле $\mathbf{B}(t)$. Запишите условия адиабатичности изменения поля и определите, как изменяются радиус R_L и положение центра $\mathbf{r}_L$ ларморовской окружности, по которой движется частица. Проведите соответствующее рассуждение:

(а) в *декартовой* системе координат;

(б) в *цилиндрической* системе координат.

Объясните, почему ответы (а) и (б) получаются разными.

Указание. Для этого полезно выяснить, какой именно физический эффект в данном случае приводит к изменению положения центра ларморовской окружности.

Задача 93. Частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле вида

$$B_z = B_0\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right), \quad B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}, \quad B_\varphi = 0.$$

Зависимость $B_z(z)$ достаточно плавная для применения теории адиабатических инвариантов.

(а) Покажите, что частица будет совершать финитное по z движение.

(б) Найдите период движения вдоль оси z, считая известной кинетическую энергию частицы E_0 и угол α_0 между вектором скорости и осью z в точке $z = 0$; считайте, что $\langle x\rangle = \langle y\rangle = 0$, где $\langle ...\rangle$ означает усреднение по периоду циклотронного вращения, или, что то же самое в условиях задачи, частица все время движется в приосевой области $r \ll a$.

(в)* Покажите, что для применения теории адиабатических инвариантов достаточно потребовать, чтобы $B_z(z)$ менялось мало на масштабах ларморовского радиуса частицы, то есть $B_z/(dB_z/dz) \gg v_r/\omega_B$.

Задача 94. Система двух связанных осцилляторов задана функцией Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2}\Omega_1^2 x^2 - \frac{1}{2}\Omega_2^2 y^2 + \alpha xy,$$

где Ω_2 и α положительные константы.

(а) Определите, как изменяется энергия E системы осцилляторов при адиабатически медленном изменении $\Omega_1(t)$.

(б) Покажите, что адиабатические инварианты, вычисленные в пренебрежении связью, то есть при $\alpha = 0$, сохраняются вдали от области $\Omega_1 \approx \Omega_2$ и в условиях слабой связи $\sqrt{\alpha} \ll \Omega_2$, но резко изменяются при адиабатически медленном прохождении $\Omega_1(t)$ этой области.

(в) Найдите условия адиабатичности изменения $\Omega_1(t)$.

Указание. Можно воспользоваться решением **Задачи 36**.

5 Механика абсолютно твердого тела

Задача 95. Плоское тело с однородным распределением масс задано в *декартовой* системе координат условиями $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = 0$. Найдите главные оси и моменты инерции тела.

Задача 96. Твердое тело с неподвижной точкой **O** вращается относительно оси $\mathbf{n}$, проходящей через эту точку, с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{n}$.

(а) Докажите, что кинетическая энергия тела есть $T = \frac{1}{2} I_n \Omega^2$, где $I_n = \sum_i m_i \rho_i^2$ — момент инерции тела относительно оси $\mathbf{n}$, ρ_i — растояние от точки с массой m_i до оси $\mathbf{n}$, сумма берется по всем точкам тела.

(б) Докажите, что момент инерции I_n относительно оси $\mathbf{n}$ не может быть меньше момента инерции I_c относительно оси $\mathbf{n}_c$, проходящей через центр масс тела параллельно оси $\mathbf{n}$.

(в) Выразите I_n через главные моменты инерции тела I_1, I_2, I_3 и координаты вектора $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ в главных осях инерции.

(г) Определите, как выглядит поверхность постоянной кинетической энергии $T(n_1, n_2, n_3) = \mathrm{const}$ в пространстве направлений оси вращения (n_1, n_2, n_3) при фиксированном модуле угловой скорости Ω. Определите, как ориентирован по отношению к этой поверхности вектор момента импульса $\mathbf{M}$.

Пояснение. Здесь и далее для задач о волчке Эйлера и Лагранжа подразумеваются стандартные обозначения, введенные на лекции.

Задача 97. Рассмотрите движение “быстрого” волчка Лагранжа, если в начальный момент времени волчок слабо толкнули, то есть сообщили небольшую угловую скорость по углам прецессии и нутации. В начальный момент времени

$$\varphi = \psi = 0,\ \theta = \theta_0,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi,\ \dot{\theta} = \omega_\theta,\ \dot{\psi} = \Omega,$$

причем $\omega_\varphi,\ \omega_\theta \ll \Omega$ и $I_3\Omega^2 \gg \mu g l \cos\theta_0$.

(а) Найдите среднее значение угла нутаций и амплитуду нутаций, считая колебания малыми.

(б) Найдите среднюю скорость прецессии.

Задача 98. Найдите траекторию $\{\varphi(t),\ \theta(t),\ \psi(t)\}$ и опишите качественно движение волчка Лагранжа в координатах Эйлера, выровненных вдоль произвольного направления z (“вертикали”) в условиях невесомости ($\mathbf{g} = 0$). Условия в начальный момент времени

$$\varphi = \psi = 0,\ \theta = \theta_0,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi,\ \dot{\theta} = \omega_\theta,\ \dot{\psi} = \Omega,$$

причем $\omega_\varphi,\ \omega_\theta \ll \Omega$.

Задача 99. Решите предыдущую задачу строго с произвольными начальными условиями, рассматривая симметричный волчок в невесомости как частный случай задачи о движении волчка Эйлера.

Указание. Проинтегрируйте уравнения Эйлера для компонент момента импульса свободного твердого тела, затем найдите $\{\varphi(t),\ \theta(t),\ \psi(t)\}$, затем покажите, что ответ не противоречит результату **Задачи 98**.

Задача 100. Рассмотрите свободное вращение твердого тела, главные моменты инерции которого соотносятся как $I_1 < I_2 < I_3$ (асимметричный волчок Эйлера). Пусть момент импульса тела представлен в виде разложения по компонентам вдоль главных осей тела $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, то есть $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e_1} + M_2\mathbf{e_2} + M_3\mathbf{e_3}$.

(а) Найдите соотношение между модулем момента импульса M и механической энергией E, отвечающее стационарному вращению тела вокруг главной оси $\mathbf{e}_2$.

(б) Докажите, что при найденном в пункте (а) соотношении между величинами E и M поверхности $E(M_1, M_2, M_3) = \text{const}$ и $M(M_1, M_2, M_3) = \text{const}$ пересекаются по двум окружностям как изображено на рис. 12.

(в) Найдите решение уравнений Эйлера для вектора момента импульса $\mathbf{M}(t)$, отвечающее установленному в пункте (а) соотношению между величинами E и M.

(г) Исследуйте на устойчивость стационарное вращение вокруг главной оси $\mathbf{e}_2$ при условии, что возмущения удовлетворяют найденному в пункте (а) соотношению между величинами E и M.

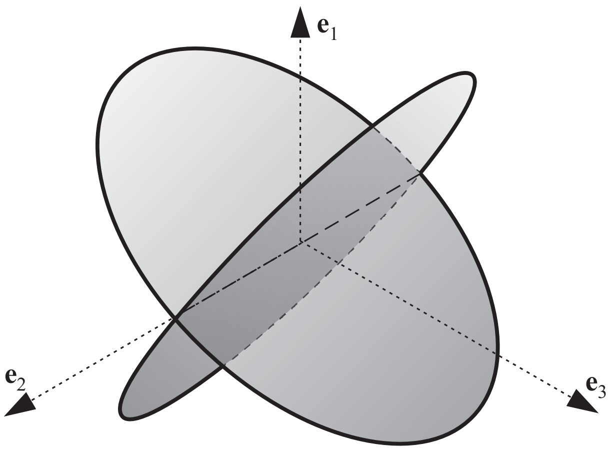

Рис. 12

Александр Геннадиевич **Шалашов**
Илья Сергеевич **Абрамов**
Егор Дмитриевич **Господчиков**

100 ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Практикум

Компьютерная верстка – И.С. Абрамов

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.