

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

**Теоретический минимум  
для успешного освоения дисциплины  
«Физика. Раздел электромагнетизм»  
Часть 1**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики ННГУ для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

- 01.03.01 «Математика»,
- 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
- 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
- 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
- 09.03.03 «Прикладная информатика»,
- 09.03.04 «Программная инженерия».

Нижегород  
2021

УДК 537.8  
ББК 22.33  
Ф48

Ф48 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИКА. РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ». ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. — Составители: Грезина А.В., Никифорова И.В., Маковкин С.Ю., Панасенко А.Г. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. — 34 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. **П.Д. Агрба**

Учебно-методическое пособие содержит теоретический минимум и список вопросов для самоконтроля по дисциплине «Физика. Раздел электромагнетизм», устанавливающие минимальные требования к знаниям и умениям студента, необходимые для успешного освоения данной дисциплины.

Пособие предназначено для студентов очного и очно-заочного отделений института информационных технологий, математики и механики ННГУ, изучающих дисциплину «Физика. Раздел электромагнетизм», а также для преподавателей, ведущих данную дисциплину. Оно может быть использовано при проведении зачетов и экзаменов.

УДК 537.8  
ББК 22.33

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

# Содержание

<b>1. Электростатика</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1. Электрический заряд. Закон Кулона . . . . .	4
1.2. Электрическое поле. Напряженность поля $\vec{E}$ . . . . .	4
1.3. Теорема Остроградского-Гаусса для поля $\vec{E}$ (интегральная форма) . . . . .	5
1.4. Теорема Остроградского-Гаусса для поля $\vec{E}$ (дифференциальная форма) . . . . .	5
1.5. Работа кулоновских сил. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ . . . . .	6
1.6. Энергия и потенциал электростатического поля . . . . .	7
1.7. Связь между напряженностью электростатического поля и его потенциалом . . . . .	8
1.8. Электрический диполь . . . . .	9
1.9. Поле и вещество. Поляризация диэлектрика . . . . .	10
1.10. Поляризованность $\vec{P}$ и связанные заряды . . . . .	11
1.11. Вектор электрического смещения $\vec{D}$ . . . . .	12
1.12. Поле внутри и снаружи проводника . . . . .	13
1.13. Электроемкость. Емкость системы проводников . . . . .	15
1.14. Энергия электрического поля . . . . .	16
Вопросы для самоконтроля . . . . .	16
<b>2. Постоянный ток</b> . . . . .	<b>18</b>
2.1. Постоянный ток. Уравнение непрерывности . . . . .	18
2.2. Закон Ома для участка цепи . . . . .	19
2.3. Стороннее поле. Электродвижущая сила и напряжение . . . . .	20
2.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца . . . . .	21
Вопросы для самоконтроля . . . . .	22
<b>3. Магнитное поле. Электромагнитная индукция</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1. Сила Лоренца. Поле $\vec{B}$ . . . . .	23
3.2. Магнитное поле тока. Закон Био-Савара-Лапласа . . . . .	23
3.3. Сила Ампера. Закон Ампера . . . . .	24
3.4. Намагничивание вещества. Намагниченность $\vec{J}$ . . . . .	25
3.5. Токи намагничивания $I'$ . . . . .	26
3.6. Вектор $\vec{H}$ . . . . .	27
3.7. Закон индукции Фарадея и правило Ленца . . . . .	28
Вопросы для самоконтроля . . . . .	30
<b>4. Уравнения Максвелла</b> . . . . .	<b>31</b>
4.1. Ток смещения . . . . .	31
4.2. Система интегральных уравнений Максвелла . . . . .	31
Вопросы для самоконтроля . . . . .	32
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>33</b>

# 1. Электростатика

## 1.1. Электрический заряд. Закон Кулона

Электрический заряд – частица, участвующая в одном из четырех фундаментальных взаимодействий – электромагнитном. Минимальная величина заряда  $e$  равна  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл (Кл – кулон). Такими зарядами обладают, например, электрон и протон  $-e$  и  $+e$ . Заряд любого тела можно представить в виде:  $q = \pm Ne$ , где  $N$  – целое число.

Закон взаимодействия точечных зарядов был установлен экспериментально Кулоном в 1785 году. Этот закон Кулона может быть выражен в виде формулы, который следует только дополнить замечанием, что заряды точечные и неподвижные:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{l}_{12}, \quad (1)$$

где  $\vec{F}_{12}$  – сила, действующая со стороны первого заряда на второй;  $\vec{l}_{12}$  – единичный вектор, направленный по прямой, соединяющей заряды в направлении от первого ко второму;  $r$  – расстояние между зарядами;  $q_1, q_2$  – величины взаимодействующих зарядов с учетом знаков;  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц. В системе  $SI$ :  $k \approx 9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Величина  $\epsilon_0$  – называется электрической постоянной.  $\epsilon_0 \approx 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м, где Ф – фарада.

## 1.2. Электрическое поле. Напряженность поля $\vec{E}$

Силовой характеристикой электрического поля является напряженность  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ . Для определения напряженности следует поместить в точку  $r$  пробный заряд  $q'$ .  $\vec{E}(\vec{r})$  определяется по формуле

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q'}, \quad (2)$$

где  $\vec{F}(\vec{r})$  – сила, действующая на пробный заряд. Она зависит от  $q'$ . Если  $q'$  велико, то при внесении заряда  $q'$  будут соответственно изменяться положения зарядов, создающих поле ( $\vec{F}_{qq_1} = -\vec{F}_{q_1q}$ ). Но если  $q'$  достаточно мало, то искажение поля будет незначительным и  $\vec{E}(\vec{r})$ , определяемое по вышенаписанной формуле, перестает зависеть от  $q'$  – становится характеристикой невозмущенного поля.

По размерности  $[E] = \text{В/м}$  (Вольт/Метр), но его можно выразить в виде  $[E] = \text{Н/Кл}$  (Ньютон/Кулон).

Из определения напряженности электрического поля можно получить выражение для поля точечного заряда (для напряженности в произвольной точке). Для этого заменяем:  $q_1 = q, q_2 = q$  и получим:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3)$$

Из свойства электрического поля (независимость взаимодействий зарядов) следует принцип суперпозиции (наложения) электрических полей:  $\vec{E}(\vec{r}) = \sum \vec{E}_i(\vec{r})$ , где  $\vec{E}_i(\vec{r})$  – напряженность в точке  $\vec{r}$ , создаваемая  $i$ -й частью системы зарядов независимо от наличия других частей. Для системы точечных зарядов формула выше переходит в

$$\vec{E} = k \sum \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}, \quad (4)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в интересующую нас точку.

### 1.3. Теорема Остроградского-Гаусса для поля $\vec{E}$ (интегральная форма)

**Поток вектора  $\vec{E}$ .** Для удобства представим, что густота силовых линий равна  $E$ . Тогда число линий, пронизывающих площадку  $dS$  (рисунок 1) с нормалью  $\vec{n}$  равно  $E dS \cos \alpha$ . Это число равно потоку  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  сквозь площадку  $dS$ .

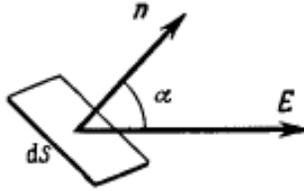


Рис. 1. Линии вектора  $\vec{E}$ , пронизывающие площадку  $d\vec{S}$

Если ввести  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , то поток можно представить в форме:  $d\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E_n dS$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$ . Для отдельной площадки  $\vec{n}$  определено неоднозначно (2 варианта), но если  $dS$  принадлежит замкнутой поверхности, то, как правило, вектор нормали  $\vec{n}$  направляют наружу объема, охватываемого поверхностью. Полный поток, по его смыслу, равен

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (5)$$

**Теорема Гаусса:**

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внутр}}. \quad (6)$$

Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь замкнутую поверхность равен, с точностью до множителя  $\frac{1}{\varepsilon_0}$ , алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

Если заряд распределен непрерывно, то при вычислении  $q_{\text{внутр}}$  суммы заменяются интегралами по объему, поверхности или линии, которые попали внутрь поверхности соответственно  $\int \rho dV$ ,  $\int \sigma dS$ ,  $\int \lambda dl$ .

### 1.4. Теорема Остроградского-Гаусса для поля $\vec{E}$ (дифференциальная форма)

Пренебрежем дискретностью заряда и будем считать его распределенным в пространстве с плотностью  $\rho = \rho(\vec{r})$ .

В этом случае теорему Гаусса можно представить в виде

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (7)$$

Интегрируя по поверхности, можно по математической теореме Остроградского-Гаусса преобразовать к форме

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV. \quad (8)$$

Так как это справедливо для любых по форме и величине объемов, то из сравнения интегралов, представленных выше, следует

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (9)$$

Дивергенция  $\operatorname{div} \vec{E}$  является скалярной величиной.  $\vec{E}$  и  $\operatorname{div} \vec{E}$  в разных системах координат выглядят по-разному. В произвольной системе координат  $\operatorname{div} \vec{E}$  (это справедливо для любого векторного поля) определяется как

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (10)$$

В декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (11)$$

Если использовать векторный дифференциальный оператор  $\nabla$  («набла»), который имеет вид  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ , то  $\operatorname{div} \vec{E}$  можно представить в виде скалярного «произведения»:  $\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$ .

По физическому смыслу  $\operatorname{div} \vec{E}$  представляет собой поток вектора  $\vec{E}$  из единичного объема. Если  $\rho > 0$  – то поток будет положительным, а если  $\rho < 0$  – то отрицательный. Таким образом, положительные заряды являются источниками поля, а отрицательные – стоками.

### 1.5. Работа кулоновских сил. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

Из механики известно, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от пути, а зависит только от положения начальной и конечной точки. Именно таким свойством обладает электростатическое поле – поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, переносимого из точки 1 заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять единичный **положительный** заряд, то элементарная работа сил поля на перемещении  $d\vec{l}$  равна  $\vec{E} d\vec{l}$ , а вся работа сил поля на пути от точки 1 до точки 2 определяется как  $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ .

Этот интеграл берется по некоторой линии (пути), поэтому его называют **линейным**.

Интеграл по замкнутому пути называют **циркуляцией** вектора  $\vec{E}$  и обозначают  $\oint$ .

Циркуляция вектора  $\vec{E}$  в любом электростатическом поле равна нулю, т.е.

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (12)$$

Это утверждение и называют **теоремой о циркуляции вектора  $\vec{E}$** .

Поле, обладающее этим свойством, называют **потенциальным**. Значит, **любое электростатическое поле является потенциальным**.

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$  позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.

**Пример 1. Линии электростатического поля  $\vec{E}$  не могут быть замкнутыми.**

Если это не так и какая то линия вектора  $\vec{E}$  замкнута, то взяв циркуляцию вектора  $\vec{E}$  вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с теоремой, т.к. вдоль силовой линии  $\vec{E} d\vec{r} > 0$ . Значит, действительно, в электростатическом поле замкнутых линий вектора  $\vec{E}$  не существует: линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

**Пример 2. Возможна ли конфигурация электростатического поля, как на рисунке 2?**

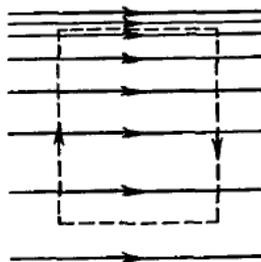


Рис. 2. Различная густота линий  $\vec{E}$

Нет, не возможна. Это сразу станет ясно, если мы применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  к замкнутому контуру, показанному на рисунке 2 пунктиром. Стрелки на контуре показывают направление обхода. При таком специальном выборе контура вклад в циркуляцию на вертикальных участках его равен нулю: здесь  $\vec{E} \perp d\vec{l}$  и  $\vec{E} d\vec{l} = 0$ ; остаются два одинаковых по длине горизонтальных участка. Из рисунка сразу видно что вклады в циркуляцию на этих участках противоположны по знаку, но не одинаковы по модулю (на верхнем участке больше, ибо линии гуще, а значит  $E$  больше). Поэтому циркуляция оказывается отличной от нуля, что противоречит теореме.

## 1.6. Энергия и потенциал электростатического поля

Электростатическое поле является потенциальным, т.е. работа его сил по перемещению заряда не зависит от формы пути.

Работа сил поля при перемещении точечного заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 равна убыли его потенциальной энергии:

$$A = W_1 - W_2. \quad (13)$$

Потенциальная энергия заряда  $q$  в системе зарядов  $q_i$ :

$$W = k \sum_i \frac{q_i q}{r_i}, \quad (14)$$

где  $r_i$  – расстояние между  $q$  и  $q_i$ .

Энергетическая характеристика электростатического поля – потенциал:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r})}{q}. \quad (15)$$

По физическому смыслу потенциал численно равен энергии единичного положительного заряда в данной точке.

Единицей потенциала является вольт (В).

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (16)$$

Потенциал на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) условно полагают равным нулю.

Потенциал системы неподвижных точечных зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (17)$$

где  $r_i$  – расстояние от точечного заряда  $q_i$  до интересующей нас точки поля.

Если заряды, образующие систему, распределены непрерывно, то формула выше примет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \frac{dV}{r}, \quad (18)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда в месте нахождения объема  $dV$ . Интегрирование проводится или по всему пространству, или по той его части, которая содержит заряды.

Если заряды расположены только на поверхности  $S$ , то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma \frac{dS}{r}, \quad (19)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $dS$  – элемент поверхности  $S$ . Аналогичное выражение будет и в том случае, когда заряды распределены линейно.

Потенциал поля можно также определить следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad (20)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – значения потенциала в точках 1 и 2.

Работа сил поля при перемещении точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$A_{1-2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (21)$$

### 1.7. Связь между напряженностью электростатического поля и его потенциалом

Теорема о циркуляции поля  $\vec{E}$  в дифференциальном виде:

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (22)$$

Вид ротора  $\vec{E}$  зависит от выбранной системы координат. В декартовых координатах:

$$\text{rot } \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (23)$$

$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  – с помощью этой формулы устанавливается взаимно однозначная связь между силовым полем  $\vec{E}(\vec{r})$  и энергетическим потенциалом  $\varphi(\vec{r})$  – по одному из них можно найти другое.

$\text{grad } \varphi$  по величине равен производной  $\varphi$  по перемещению в направлении наибольшего роста функции.

Явное выражение  $\text{grad } \varphi$  зависит от выбранной системы координат. В декартовой системе координат:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (24)$$

**Пример.** Надо найти  $\vec{E}(\vec{r})$  поля, потенциал которого равен:

- 1)  $\varphi(x, y) = -axy$ ,  $a$  – константа;
- 2)  $\varphi(\vec{r}) = -\vec{a}\vec{r}$ ,  $\vec{a}$  – постоянный вектор.

Решение:

- 1)  $\vec{E} = a(\vec{i}y + \vec{j}x)$ .
- 2)  $\vec{E} = \nabla\vec{a}\vec{r} = \nabla(a_x x + a_y y + a_z z) = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{a}$ .

Электрическое поле можно наглядно представить не только с помощью силовых линий, но и эквипотенциальных поверхностей  $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$ . Качественно легко по одной картине построить другую. Силовые линии перпендикулярны эквивалентным поверхностям.

Если проводить эквипотенциальные поверхности так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была одинаковой, то расстояние между ними будут обратно пропорционально величине напряженности. На рисунке 3 представлена примерная двумерная картина электрического поля: пунктиром обозначены эквипотенциалы, сплошными линиями – силовые линии.

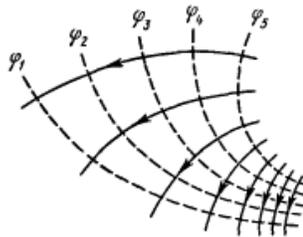


Рис. 3. Эквипотенциалы  $\varphi_i$ , перпендикулярные силовым линиям напряженности  $\vec{E}$

## 1.8. Электрический диполь

Рассмотрим систему двух точечных зарядов  $(-q, +q)$ , расстояние между которыми  $l$  много меньше характерных размеров системы этих зарядов. Такую пару зарядов называют диполем и характеризуют электрическим дипольным моментом:

$$\vec{p} = ql, \quad (25)$$

где вектор  $\vec{l}$  проводится от  $-q$  до  $+q$  (и направлен в ту же сторону, что и вектор  $\vec{p}$ ).

Потенциал диполя в точке  $P$ , (рисунок 4а), при  $r \ll l$ :

$$\varphi = k\frac{p \cos \theta}{r^2} = k\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}. \quad (26)$$

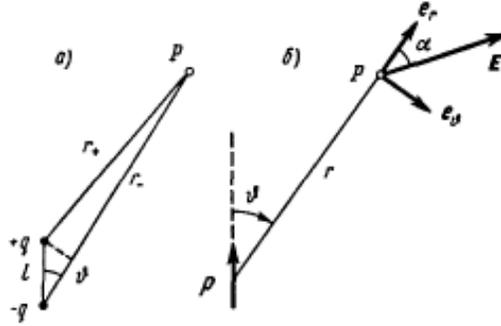


Рис. 4. Поле диполя в пространстве

В полярных координатах  $(r, \theta)$  (рисунок 4б):

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = k \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \\
 E_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = k \frac{p \sin \theta}{r^3}, \\
 E &= \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Потенциальная энергия диполя в электрическом поле:

$$W = -\vec{p}\vec{E} = -pE(r) \cos \alpha, \tag{28}$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{E}(\vec{r})$  и  $\vec{p}$ , отсчитываемый от  $\vec{E}$  к  $\vec{p}$ .

В однородном электрическом поле  $W$  изменяется за счет изменения угла  $\alpha$ , при этом работа сил поля при повороте диполя равна:  $dA = M_\alpha d\alpha = -dW$ , где  $M_\alpha$  – момент сил, действующий на диполь.

$$M_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -pE \sin \alpha. \tag{29}$$

Формулу выше можно представить в векторном виде  $\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$

Все формулы показывают, что электрическое поле стремится развернуть диполь по полю ( $\vec{p} \uparrow \vec{E}$ ).

В общем случае  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  на диполь будет действовать равнодействующая сила

$$\vec{F} = -\text{grad}(W(\vec{r})) = p \cos \alpha \text{grad} |\vec{E}(\vec{r})|. \tag{30}$$

Если диполь развернется по полю ( $\cos \alpha = 1$ ), то в неоднородном поле он будет втягиваться в область более сильного поля.

### 1.9. Поле и вещество. Поляризация диэлектрика

**Диэлектрики (изоляторы)** – это вещества, которые практически не проводят электрический ток. В них отсутствуют свободные заряды, которые могли бы перемещаться на макроскопические расстояния.

Диэлектрики состоят либо из нейтральных молекул, либо из заряженных ионов, которые находятся в узлах кристаллических решеток (ионные кристаллы). Положительно или

отрицательно заряженные ионы образуют свои одинаковые решетки, смещенные друг относительно друга. Сами молекулы могут быть **полярными** и **неполярными**. Полярные молекулы обладают собственными дипольными моментами  $\vec{p}$ , т.к. у них смещены центры «тяжести» положительного и отрицательного зарядов. У неполярных молекул эти центры «тяжести» совпадают.

**Поляризация.** Под воздействием внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в каждой молекуле положительный заряд смещается по полю, отрицательный – против поля и молекула приобретает дипольный момент, ориентированный по полю. В диэлектрике, состоящем из полярных молекул, дипольные моменты из-за теплового движения без внешнего поля ориентированы хаотически. Под действием внешнего поля они приобретают выделенное направление по полю – средний дипольный момент будет теперь отличен от нуля и ориентирован по полю. В случае ионных кристаллов смещаются подрешетки, что приводит тоже к появлению внутри диэлектрика отличного от нуля среднего дипольного момента. Несмотря на различную природу диэлектрика в значительной степени они ведут себя одинаково – под действием внешнего поля внутри диэлектрика каждая «средняя молекула» приобретает дипольный момент, ориентированный по полю. Поэтому, рассматривая общие проявления поляризации, можно не конкретизировать вид диэлектрика и даже, для удобства представления предполагать, что мы имеем дело с диэлектриком, состоящим из неполярных молекул.

Поляризация диэлектрика сопровождается появлением нескомпенсированных зарядов (**связанных**). Они могут появляться как на поверхности, так и внутри диэлектрика. Их чаще всего отмечают штрихом ( $q'$ ,  $\rho'$ ,  $\sigma'$ ).

Заряды, которые не входят в состав молекул диэлектрика называют **сторонними** (иногда их называют свободными).

**Поле в диэлектрике.** Под полем в диэлектрике  $\vec{E}$  понимают суперпозицию поля сторонних зарядов  $\vec{E}_0$  и усредненного поля связанных зарядов  $\vec{E}'$ :  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ .

### 1.10. Поляризованность $\vec{P}$ и связанные заряды

Величиной, характеризующей степень поляризации диэлектрика, называют дипольный момент, усредненный по физически бесконечно малому объему  $\Delta V$ , т.е. такому объему, который на макроуровне стремится к нулю, но фактически содержит еще достаточно много молекул. Эта величина является функцией точки внутри  $\Delta V$  (а  $\Delta V \rightarrow 0$ ) и называется **поляризованностью**  $\vec{P}$ . По определению

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i, \quad (31)$$

где суммируются дипольные моменты всех молекул, находящихся в объеме  $\Delta V$ .

Формулу можно представить в виде

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (32)$$

где  $n = \Delta N / \Delta V$ . Здесь  $\Delta N$  – число молекул в объеме  $\Delta V$ . Средний дипольный момент одной молекулы

$$\langle \vec{p} \rangle = \sum_i \vec{p}_i / \Delta N. \quad (33)$$

Поляризованность измеряется в единицах – (Кл/м<sup>2</sup>).

**Связь между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ .** Для широкого класса диэлектриков и не слишком сильных полей  $\vec{P}$  зависит линейно от  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ , где  $\chi$  – безразмерная величина, которая называется **диэлектрической восприимчивостью** вещества.

В общем случае  $\chi$  является тензором, а для изотропного однородного вещества  $\chi$  – постоянная величина и, как видно из вывода,  $\chi > 0$ .

### 1.11. Вектор электрического смещения $\vec{D}$

Источником поля  $\vec{E}$  являются все заряды – сторонние и связанные, поэтому при наличии диэлектриков теорема Гаусса будет иметь вид

$$\oint \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = (q + q')_{\text{внутри}}, \quad (34)$$

где  $q$  и  $q'$  – сторонние и связанные заряды, находящиеся внутри поверхности интегрирования  $S$ .

Если  $q$  заданы, то  $q'$  определяются неизвестным полем  $\vec{E}$ . Формулу выше можно сделать более полезной для применения, если подставить заряд  $q'$ , выраженный через  $\vec{P}$

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'. \quad (35)$$

Получим:

$$\oint (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{\text{внутри}}. \quad (36)$$

Введем вспомогательный вектор  $\vec{D}$ , который называют электрической индукцией (или электрическим смещением):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (37)$$

Вектор  $\vec{D}$  удовлетворяет **теореме Гаусса для вектора  $\vec{D}$** :

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутри}}. \quad (38)$$

Поток вектора  $\vec{D}$  определяется только сторонними зарядами. Это существенно упрощает задачу определения поля – можно сначала найти  $\vec{D}$ , а потом уж  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ .

Следует подчеркнуть, что  $\vec{D}$  объединяет существенно различные величины  $\varepsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P}$ , поэтому он не имеет глубокого физического смысла, но очень полезен для исследования электрических полей при наличии диэлектриков: тем более что соотношения выше самые общие – применимы к любым диэлектрикам.

Размерность  $\vec{D}$  такая же, как у  $\vec{P}$  – Кл/м<sup>2</sup>.

В дифференциальном виде теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$  представляется дифференциальным уравнением

$$\nabla \vec{D} = \rho, \quad (39)$$

т.е. дивергенция поля вектора  $\vec{D}$  равна объемной плотности сторонних зарядов в той же точке. В точках, в которых  $\rho > 0$  мы имеем источники поля  $\vec{D}$ , а где  $\rho < 0$  – стоки.

**Связь между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .** В изотропных диэлектриках в не слишком сильных полях связь между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  линейна:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (40)$$

где  $\chi > 0$  – постоянная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью, при этом векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  и  $\vec{D}$  коллинеарны. В анизотропных диэлектриках  $\chi$  является тензорной величиной и в общем случае условие коллинеарности нарушается. Для изотропных диэлектриков  $\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)\vec{E}$  или  $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ , где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества,  $\varepsilon = 1 + \chi$ ,  $\varepsilon > 1$ .

Поле вектора  $\vec{D}$  (так же как и вектора  $\vec{E}$ ) можно изображать с помощью линий вектора  $\vec{D}$ . Отличие же состоит в том, что линии  $\vec{E}$  начинаются и оканчиваются как на сторонних, так и на связанных зарядах, а источниками и стоками вектора  $\vec{D}$  являются только сторонние заряды, хотя, конечно, поле  $\vec{D}$  создается всеми зарядами.

### 1.12. Поле внутри и снаружи проводника

**Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ .** Поместим металлический проводник во внешнее электростатическое поле или сообщим ему какой-нибудь заряд. В обоих случаях на все заряды проводника будет действовать электрическое поле, в результате чего все отрицательные заряды (электроны) сместятся против поля. Такое перемещение зарядов (ток) будет продолжаться до тех пор (практически это происходит в течении малой доли секунды), пока не установится определенное распределение зарядов, при котором электрическое поле во всех точках внутри проводника обратиться в ноль. Таким образом, в статическом случае электрическое поле внутри проводника отсутствует ( $\vec{E} = 0$ ).

Далее, поскольку в проводнике всюду  $\vec{E} = 0$ , то плотность избыточных (нескомпенсированных) зарядов внутри проводника также всюду равна нулю ( $\rho = 0$ ). Это легко понять с помощью теоремы Гаусса. Действительно, так как внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , то и поток вектора  $\vec{E}$  сквозь любую замкнутую поверхность внутри проводника также равен нулю. А это значит, что внутри проводника избыточных зарядов нет.

Избыточные заряды появляются лишь на поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ , вообще говоря, различной в разных точках его поверхности. Заметим, что избыточный поверхностный заряд находится в очень тонком поверхностном слое (его толщина около одного-двух межатомных расстояний).

Отсутствие поля внутри проводника означает что потенциал  $\varphi$  в проводнике одинаков во всех его точках, т.е. любой проводник в электростатическом поле представляет собой **эквипотенциальную область** и его поверхность является **эквипотенциальной**.

Из того факта, что поверхность проводника эквипотенциальна, следует, что непосредственно у этой поверхности поле  $\vec{E}$  направлено по нормали к ней в каждой точке. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей  $\vec{E}$  заряды пришли бы в движение по поверхности проводника, т.е. равновесие зарядов было бы невозможным.

**Пример.** Найти потенциал незаряженного проводящего шара, на расстоянии  $r$  от центра которого расположен точечный заряд  $q$  (рисунок 5).

Потенциал  $\varphi$  всех точек шара одинаков. Вычислим его в центре шара  $O$ , ибо только для этой точки расчет оказывается наиболее простым:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + \varphi', \quad (41)$$

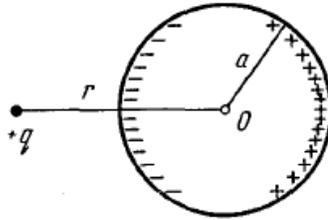


Рис. 5. Потенциал незаряженного проводящего шара

где первое слагаемое – это потенциал от заряда  $q$ , а второе – потенциал от зарядов, индуцированных на поверхности шара. Но так как все индуцированные заряды находятся на одном и том же расстоянии  $a$  от точки  $O$  и суммарный индуцированный заряд равен нулю, то  $\varphi' = 0$ . Таким образом, в данном случае потенциал шара будет определяться только первым слагаемым.

На рисунке 6 изображено поле и распределение зарядов для системы, состоящей из двух проводящих шаров, один из которых (левый) заряжен. Вследствии электрической индукции на поверхности правого незаряженного шара появились заряды противоположного знака. Поле этих зарядов в свою очередь вызовет некоторое перераспределение зарядов на поверхности левого шара – их распределение по поверхности станет неравномерным. Сплошными линиями на рисунке показаны линии вектора  $\vec{E}$ , пунктирными – пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. По мере удаления от этой системы эквипотенциальные поверхности становятся все более близкими к сферическим, а линии вектора  $\vec{E}$  приближаются к радиальным, и само поле становится все более близким к полю точечного заряда  $q$  – полному заряду данной системы.

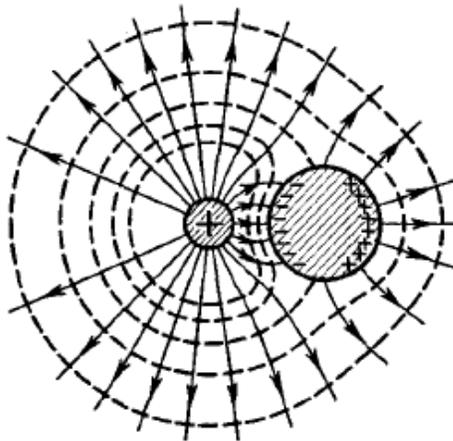


Рис. 6. Два проводящих шара

**Поле у поверхности проводника.** Рассмотрим участок поверхности проводника граничащий с вакуумом. Линии вектора  $\vec{E}$  перпендикулярны поверхности проводника, поэтому в качестве замкнутой поверхности возьмем небольшой цилиндр, расположив его так, как показано на рисунке 7. Тогда поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность будет равен только потоку через «наружный» торец цилиндра (потоки через боковую поверхность и

внутренний торец равны нулю), и мы имеем  $E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на внешнюю нормаль  $n$  (по отношению к проводнику),  $\Delta S$  – площадь сечения цилиндра,  $\sigma$  – локальная поверхностная плотность заряда на проводнике. Сократив, обе части равенства на  $\Delta S$ , получим

$$E_n = \sigma / \epsilon_0. \quad (42)$$

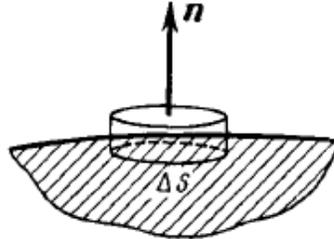


Рис. 7. Проводящая поверхность

Если  $\sigma > 0$ , то и  $E_n > 0$ , т.е. вектор  $\vec{E}$  направлен от поверхности проводника – совпадает по направлению с нормалью  $n$ ; если же  $\sigma < 0$ , то  $E_n < 0$  – вектор  $\vec{E}$  направлен к поверхности проводника.

Следует отметить что, напряженность  $\vec{E}$  определяется **всеми** зарядами рассматриваемой системы, как и само значение  $\sigma$ .

### 1.13. Электроемкость. Емкость системы проводников

Величина  $C = q/\varphi$  называется электроемкостью (сокращенно емкостью) уединенного проводника (т.е. проводника, удаленного от других проводников, тел и зарядов), где  $q$  – заряд проводника,  $\varphi$  – его потенциал.

Уединенные проводники обладают малой емкостью – на них невозможно накопить большой заряд и связанную с ним энергию. Кроме того их емкость будет изменяться при изменении окружающей среды, т.к. при приближении других проводников с индуцированными зарядами изменятся окружающее поле и потенциал первоначально уединенного проводника, а следовательно и емкость проводника.

Стабильность такой характеристики как емкость и существенно повысить возможность накапливания заряда и энергии позволит такая система обкладок, которая замыкает внутри себя почти все электрическое поле, создаваемое зарядами, находящимися на обкладках. Такие системы называются **конденсаторами**. Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), расположенных на малом расстоянии друг от друга.

Под емкостью конденсатора понимают отношение заряда конденсатора к разности потенциалов между обкладками (напряжению):

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (43)$$

Здесь  $\varphi_1$  – потенциал обкладки, на которой находится заряд  $q$ . При любом знаке заряда в этом случае мы получим значение  $C > 0$ .

Емкость конденсатора определяется геометрией обкладок и свойствами среды, заполняющей конденсатор.

Для получения нужного значения емкости отдельные конденсаторы соединяют в батарее. При этом можно выделить два варианта соединений: параллельное и последовательное.

При **параллельном** соединении соединяют проводниками обкладки, заряженные зарядом одинакового знака. Емкость такой батареи равна

$$C_{\text{парал}} = \sum_i C_i. \quad (44)$$

При **последовательной** схеме соединения соединяются попарно обкладки, на которых будут индуцироваться заряды противоположного знака

$$\frac{1}{C_{\text{послед}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (45)$$

#### 1.14. Энергия электрического поля

Энергия электрического поля находится по формуле

$$W = \int \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} dV, \quad (46)$$

где

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} \quad (47)$$

называется плотностью энергии.

Формулы выше справедливы для изотропного диэлектрика, для которого выполняется соотношение  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ .

Работа, затраченная на поляризацию единицы объема диэлектрика, может быть найдена по формуле

$$A = \frac{\vec{E} \vec{P}}{2}. \quad (48)$$

Отсюда следует, что объемная плотность энергии  $w = \vec{E} \vec{D} / 2$  содержит в себе энергию электрического поля  $\varepsilon_0 E^2 / 2$  и энергию поляризации диэлектрика  $\vec{E} \vec{P} / 2$ .

#### Вопросы для самоконтроля

1. Электрический заряд. Закон Кулона.
  - 1.1. Что такое электрический заряд?
  - 1.2. Сформулируйте закон Кулона.
2. Электрическое поле. Напряженность поля  $\vec{E}$ 
  - 2.1. Дайте определение напряженности электрического поля.
  - 2.2. По какой формуле вычисляется напряженность электрического поля точечного заряда?

- 2.3. Сформулируйте принцип суперпозиции для вектора  $\vec{E}$ .
3. Теорема Остроградского-Гаусса (интегральная форма).
  - 3.1. Дайте определение потока вектора  $\vec{E}$ .
  - 3.2. Сформулируйте теорему Гаусса в интегральной форме.
4. Теорема Остроградского-Гаусса (дифференциальная форма).
  - 4.1. Сформулируйте теорему Гаусса в дифференциальной форме.
  - 4.2. В чем заключается физический смысл  $\operatorname{div} \vec{E}$ ?
5. Работа кулоновских сил. Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$ .
  - 5.1. Дайте определение циркуляции вектора  $\vec{E}$ .
  - 5.2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$ .
  - 5.3. Дайте определение потенциального поля.
  - 5.4. Докажите, что линии электростатического поля  $\vec{E}$  не могут быть замкнутыми.
6. Энергия и потенциал электростатического поля.
  - 6.1. По какой формуле можно определить потенциальную энергию системы точечных зарядов?
  - 6.2. Дайте определение потенциала.
  - 6.3. Чему равен потенциал системы точечных зарядов?
  - 6.4. Чему равен потенциал в случае непрерывного распределения заряда с плотностью  $\rho$ ?
7. Связь между напряженностью электростатического поля и его потенциалом.
  - 7.1. Сформулировать теорему о циркуляции поля  $\vec{E}$  в дифференциальной форме.
  - 7.2. Как связаны между собой напряженность электростатического поля  $\vec{E}$  и его потенциал?
  - 7.3. Что такое эквипотенциальная поверхность?
  - 7.4. Как расположены друг относительно друга эквипотенциальные поверхности и силовые линии поля  $\vec{E}$ ?
8. Электрический диполь.
  - 8.1. Дайте определение электрического диполя.
  - 8.2. Что такое электрический дипольный момент?
  - 8.3. Как найти момент сил, действующих на диполь?
9. Поле и вещество. Поляризация диэлектрика.
  - 9.1. Какие молекулы называют полярными? неполярными?
  - 9.2. Опишите процесс поляризации диэлектрика.

- 9.3. Какие заряды называют связанными? Сторонними?
10. Поляризованность  $\vec{P}$  и связанные заряды.
- 10.1. Дайте определение поляризованности  $\vec{P}$ .
- 10.2. Что такое диэлектрическая восприимчивость вещества?
11. Вектор электрического смещения  $\vec{D}$ .
- 11.1. Дайте определение вектора  $\vec{D}$ .
- 11.2. Интегральная форма теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$ .
- 11.3. Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$ .
- 11.4. Какие диэлектрики называют изотропными?
- 11.5. Как связаны между собой  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  в изотропных диэлектриках?
- 11.6. Как связаны между собой  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  в изотропных диэлектриках?
12. Поле внутри и снаружи проводника.
- 12.1. Докажите, что внутри проводника, внесенного во внешнее электрическое поле, отсутствуют избыточные заряды.
- 12.2. Чему равна напряженность электрического поля у поверхности проводника?
13. Емкость. Емкость системы проводников.
- 13.1. Дайте определение емкости уединенного проводника.
- 13.2. Что такое конденсатор?
- 13.3. Дайте определение емкости конденсатора.
- 13.4. Как вычислить емкость батареи конденсаторов при последовательном соединении? При параллельном?
14. Энергия электрического поля.
- 14.1. По каким формулам вычисляется энергия электрического поля?
- 14.2. Как вычислить работу при поляризации диэлектрика?

## 2. Постоянный ток

### 2.1. Постоянный ток. Уравнение непрерывности

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока в проводящей среде являются либо электроны (в металлах), либо ионы (в электролитах), либо другие частицы и их комбинации.

Количественной характеристикой тока является основная единица электромагнетизма сила тока  $I$ , которая имеет смысл величины заряда, переносимого в единицу времени через рассматриваемую поверхность  $S$ :  $I = dq/dt$ , где  $dq$  – заряд, переносимый через поверхность  $S$  за время  $dt$ . Единицей силы тока является **ампер** (А).

**Плотность тока.** Более детальной характеристикой тока является плотность тока  $\vec{j}$ , которая определяет распределение тока по поверхности  $S$ . Численно  $j$  определяется соотношением  $j = dI/dS_{\perp}$ , где  $dS_{\perp}$  – площадка, перпендикулярная к направлению носителей тока, на которую приходится ток силой  $dI$ . За направление вектора  $\vec{j}$  принимается направление скорости  $\vec{u}$  положительных зарядов. Величина скорости упорядоченного движения на много порядков меньше скорости теплового движения, но хаотическое движение не дает вклада в ток. Ток определяется малой скоростью упорядоченного движения, но за счет большой концентрации носителей заряда может достигать больших значений. Направление тока отрицательных носителей противоположно их скорости, поэтому в общем случае плотность определяется формулой:  $\vec{j} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$ , где  $\rho_+$  и  $\rho_-$  – объемная плотность положительного и отрицательного зарядов-носителей, а  $\vec{u}_+$  и  $\vec{u}_-$  – скорости их упорядоченного движения.

Поле вектора  $\vec{j}$  изображается графически с помощью линий тока (линий вектора  $\vec{j}$ ), также как и поле  $\vec{E}$ .

Зная  $\vec{j}$  можно определить силу тока через рассматриваемую поверхность:  $I = \int \vec{j} d\vec{S}$ .

**Уравнение непрерывности.** Соотношение

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (49)$$

называют уравнением непрерывности, где  $-\frac{dq}{dt}$  – убыль заряда в единицу времени.

Для стационарных (постоянных) токов  $\frac{dq}{dt} = 0$ , поэтому

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = 0, \quad (50)$$

т.е. в этом случае линии  $\vec{j}$  не имеют ни источников, ни стоков, они непрерывны внутри  $V$ .

**Дифференциальная форма уравнений непрерывности.** Для фиксированного в среде объема  $V$

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (51)$$

поэтому

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (52)$$

откуда, повторяя выкладки, проведенные при представлении теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$  в дифференциальной форме, получим  $\nabla \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$ . Для стационарного случая:  $\nabla \vec{j} = 0$ .

## 2.2. Закон Ома для участка цепи

**Закон Ома для однородного проводника.**

Сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению  $U$ ):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \quad (53)$$

где  $R$  – электрическое сопротивление проводника.  $R$  измеряется в Омах (Ом).

В общем случае  $R$  зависит от геометрии проводника, его материала и температуры, а также от распределения тока  $\vec{j}(\vec{r})$  в проводнике.

В простейшем случае однородного цилиндрического проводника сопротивление:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (54)$$

где  $l$  – длина проводника,  $S$  – площадь его поперечного сечения,  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление.  $\rho$  зависит от материала проводника и его температуры. Размерность  $\rho$  – (Ом · м).

**Закон Ома в локальном виде** имеет вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (55)$$

где  $\sigma = 1/\rho$  – удельная электропроводность среды. Единицу, обратную Ому, называют сименсом (См), поэтому единицей  $\sigma$  является сименс, деленный на метр (См/м).

**О распределении заряда проводника с током.** Для постоянного тока имеем для произвольного объема внутри проводника:

$$\oint \sigma \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (56)$$

Если при этом проводник однородный, то  $\sigma \oint \vec{E} d\vec{S} = 0$ , т.к.  $\sigma \neq 0$ , то  $\oint \vec{E} d\vec{S} = 0$ , а по теореме Гаусса это значит, что в объеме внутри поверхности  $S$  избыточный заряд отсутствует. Он появляется на поверхности однородного проводника и прочих границах перехода между проводниками и различных неоднородностях. В статическом случае также как и в случае стационарного тока, заряды расположены на поверхности. Но в первом случае внутри проводника  $E = 0$ , поэтому у поверхности проводника  $\vec{E}$  перпендикулярно поверхности. Во втором случае внутри  $\vec{E} \neq 0$  и направлено вдоль проводника. В силу непрерывности тангенциальной составляющей  $\vec{E}$  значения тангенциальной составляющей вблизи поверхности проводника будет равно значению  $E$  внутри проводника. Значит, при появлении тока в проводнике распределение зарядов на поверхности изменяется. Но при стационарном токе распределение зарядов остается постоянным и образованное ими поле  $\vec{E}$  остается потенциальным. Отличие же кулоновских полей неподвижных зарядов и участвующих в стационарном движении проявляется в последнем случае в наличии поля  $\vec{E}$  внутри проводника.

### 2.3. Стороннее поле. Электродвижущая сила и напряжение

**Сторонние силы.** Если бы все действующие на носители тока силы сводились к силам электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из мест с большим потенциалом к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это вело бы к выравниванию потенциалов, и в результате все соединенные между собой проводники приобрели бы одинаковый потенциал, и ток бы прекратился. Иными словами, при наличии лишь кулоновских сил **стационарное** поле должно быть **статическим**.

Чтобы этого не произошло, в цепи постоянного тока наряду с участками, где положительные носители тока движутся в сторону уменьшения потенциала  $\varphi$ , должны иметь

участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания  $\varphi$ , т.е. против сил электрического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил не электростатического происхождения. Это так называемые **сторонние силы**.

Таким образом, для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы, действующие либо на отдельных участках цепи, либо во всей цепи. Физическая природа сторонних сил может быть весьма различной. Они могут быть обусловлены, например химической и физической неоднородностью проводника - таковы силы, возникающие при соприкосновении разнородных проводников (гальванические элементы, аккумуляторы) или проводников различной температуры (термоэлементы) и др.

### Обобщенный закон Ома

Для количественной характеристики сторонних сил, как и кулоновских, вводят напряженность  $\vec{E}'$ . При наличии сторонних сил, закон Ома в локальном виде должен замениться соотношением

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}'), \quad (57)$$

которое выражает **обобщенный закон Ома** в локальной форме.

**Закон Ома для неоднородного участка цепи** (в интегральном виде) имеет вид

$$RI = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{1-2}, \quad (58)$$

где  $\mathcal{E}_{1-2} = \int_1^2 \vec{E}' \cdot d\vec{l}$  – электродвижущая сила (Э.Д.С.), действующая на участке цепи,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  – разность потенциалов.

Если ток идет от 1 к 2, то  $I > 0$ , если направление сторонних сил совпадает с положительным направлением (от 1 к 2), то  $\mathcal{E} > 0$ , в противном случае их значения будут отрицательными.

## 2.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Прохождение тока в проводнике, обладающем сопротивлением, сопровождается выделением тепла. Ограничимся ситуациями, когда других превращений энергий нет (проводник неподвижный, химические реакции не протекают).

Тогда для однородного участка цепи закон Джоуля-Ленца имеет вид

$$\dot{Q} = RI^2, \quad (59)$$

где  $\dot{Q}$  – теплота, выделяемая в единицу времени (тепловая мощность).

Закон Джоуля-Ленца в локальной форме

$$\frac{d\dot{Q}}{dV} = \dot{Q}_{\text{удельн}} = \rho j^2, \quad (60)$$

где  $\dot{Q}_{\text{удельн}}$  – удельная тепловая мощность (мощность в расчете на единицу объема). Удельная тепловая мощность пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке.

Если на носителей тока действуют только кулоновские силы, то ( $\vec{j} = \vec{E}/\rho$ ):

$$\dot{Q}_{\text{удельн}} = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2. \quad (61)$$

Для неоднородного участка цепи из закона Ома можно записать

$$RI^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}I, \quad (62)$$

где правая часть – мощность тока на рассматриваемом участке цепи. Для неразветвляемой цепи ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ):

$$\dot{Q} = \mathcal{E}I, \quad (63)$$

т.е. общее количество выделяемой за единицу времени во всей цепи джоулевой теплоты равно мощности только сторонних сил. В локальной форме это уравнение имеет вид

$$\dot{Q}_{\text{удельн}} = \rho j^2 = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}'). \quad (64)$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Постоянный ток. Уравнение непрерывности.
  - 1.1. Что такое электрический ток?
  - 1.2. Дайте определение плотности тока.
  - 1.3. Сформулируйте уравнение непрерывности (в интегральной форме).
  - 1.4. Сформулируйте уравнение непрерывности (в дифференциальной форме).
2. Закон Ома для участка цепи.
  - 2.1. Сформулируйте закон Ома для однородного проводника.
  - 2.2. Сформулируйте закон Ома в локальном виде.
3. Сторонне поле. Электродвижущая сила и напряжение.
  - 3.1. Что такое сторонние силы?
  - 3.2. Сформулируйте обобщенный закон Ома в локальной форме.
  - 3.3. Сформулируете закон Ома для неоднородного участка цепи.
4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.
  - 4.1. Сформулируйте закон Джоуля-Ленца (для однородного участка цепи).
  - 4.2. Сформулируйте закон Джоуля-Ленца в локальной форме для однородного участка цепи).
  - 4.3. Сформулируйте закон Джоуля-Ленца для неоднородного участка цепи.

### 3. Магнитное поле. Электромагнитная индукция

#### 3.1. Сила Лоренца. Поле $\vec{B}$

Сила Лоренца. Из опыта известно, что сила  $\vec{F}$ , действующая на точечный заряд  $q$ , зависит как от его положения, так и от его скорости  $v$ . Поэтому эту силу можно разделить на две составляющие – электрическую  $\vec{F}_Э$  (она не зависит от движения заряда) и магнитную  $\vec{F}_М$  (зависит от скорости заряда).

Магнитную силу, также как и электрическую, можно определить, введя понятие **магнитного поля**. Оно характеризуется вектором  $\vec{B}$  (магнитной индукцией). Единицей  $\vec{B}$  является тесла (Тл). В каждой точке пространства  $\vec{F}_М$  определяется формулой

$$\vec{F}_М = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (65)$$

Полная электромагнитная сила, действующая на заряд  $q$ , равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (66)$$

Ее называют **силой Лоренца**. Формула выше **универсальна**: она справедлива для любых (постоянных и переменных) полей и любых скоростей  $\vec{v}$ .

По формуле выше можно определить  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , как это уже делалось для электрического поля. Существуют и другие методы определения  $\vec{B}$ .

Следует отметить, что **магнитная сила** всегда перпендикулярна скорости частицы, поэтому **работу над зарядом не совершает**. В постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы не изменяется (если можно пренебречь потерями на излучение).

В нерелятивистском приближении сила Лоренца, как и любая другая сила, не изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой. Но скорость  $\vec{v}$  при этом изменяется, значит, изменяется  $\vec{F}_М$ , поэтому изменится  $\vec{F}_Э = q\vec{E}$ . Это говорит о том, что **разделение сил и полей на электрические и магнитные зависит от выбора системы отсчета**.

#### 3.2. Магнитное поле тока. Закон Био-Савара-Лапласа

**Принцип суперпозиции.** Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности (без учета наличия других зарядов или токов):  $\vec{B}(\vec{r}) = \sum \vec{B}_i(\vec{r})$ .

**Закон Био-Савара-Лапласа** позволяет определить вклад в магнитное поле от проводника с током. Он имеет вид

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}^\uparrow] dV}{r^3}. \quad (67)$$

Если ток  $I$  течет по проводнику  $d\vec{l}$ , то можно записать

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}^\uparrow]}{r^3}. \quad (68)$$

Проинтегрировав по всем токам, с учетом принципа суперпозиции, полное поле  $\vec{B}$  получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV, \quad (69)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

**Пример. Магнитное поле прямого тока**, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рисунок 8). По свойству векторного произведения следует, что в произвольной точке А векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов токов имеют одно направление – за плоскость рисунка.

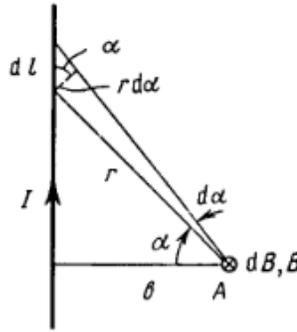


Рис. 8. Магнитное поле провода с током

Поэтому можно складывать просто модули  $d\vec{B}$ . В нашем случае  $d\vec{B}$  удобней выразить не через угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , а через  $\alpha$ , тогда

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cos \alpha}{r^3}. \quad (70)$$

Как видно из рисунка  $dl \cos \alpha = r d\alpha$  и  $r = b / \cos \alpha$ . Значит

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \alpha d\alpha}{b}. \quad (71)$$

Интегрируя последнее выражение по углу, получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (72)$$

Это выражение позволяет находить магнитную индукцию от конечного проводника. В случае бесконечного проводника ( $\alpha_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_1 = -\pi/2$ ):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}. \quad (73)$$

### 3.3. Сила Ампера. Закон Ампера

Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют **амперовыми** или **силами Ампера**.

Сила, действующая на объем проводника, имеет вид

$$d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}] dV. \quad (74)$$

Если проводник достаточно тонкий, то

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (75)$$

Если поле  $\vec{B}$  однородно, то для замкнутого контура  $\vec{F} = 0$ .

В неоднородном поле в общем случае  $\vec{F} \neq 0$  и расчет довольно сложен. Он упрощается в случае маленького плоского контура, который называют элементарным и характеризуют моментом  $p_m$  (рисунок 9).

$\vec{p}_m = IS\vec{n}$ , где  $I$  – ток,  $S$  – площадь, ограниченная контуром,  $\vec{n}$  – нормаль к контуру, направление которой согласуется с направлением тока правилом правого винта.

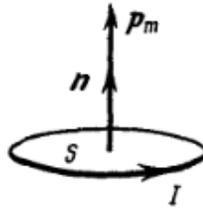


Рис. 9. Плоский контур с током

Сила, действующая на элементарный контур, может быть вычислена по формуле

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}, \quad (76)$$

где  $p_m$  – модуль магнитного момента, а  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$  – производная вектора  $\vec{B}$  по перемещению в направлении  $\vec{n}$  (т.е. в направлении магнитного момента  $\vec{p}_m$ ).

Из формулы видно, что:

1. В однородном магнитном поле  $\vec{F} = 0$ , т.к.  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = 0$ .
2. Направление вектора  $\vec{F}$  в общем случае не совпадает ни с вектором  $\vec{B}$ , ни с вектором  $\vec{p}_m$ ; вектор  $\vec{F}$  совпадает с направлением приращения вектора  $\vec{B}$ , взятого в направлении вектора  $\vec{p}_m$  в месте расположения контура.
3. Магнитный момент не только реагирует на внешнее поле, но и сам создаёт магнитное поле (как виток с током).

### 3.4. Намагничивание вещества. Намагниченность $\vec{J}$

**Поле в магнетике.** Всякое вещество является магнетиком, под действием магнитного поля оно намагничивается, т.е. его физически бесконечно малые объемы приобретают магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле  $\vec{B}'$ . Оно вместе с полем  $\vec{B}_0$ , созданным токами проводимости образуют результирующее поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ .

Поля  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$  являются усредненными по физически бесконечно малым объемам величинами. Также, как и  $\vec{B}_0$  поле  $\vec{B}'$  порождается токами (микротоками), поэтому для  $\vec{B}$  и при наличии магнетика справедлива **теорема Гаусса**:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (77)$$

**Механизм намагничения.** Молекулы вещества из-за внутреннего движения заряда могут иметь собственный магнитный момент. Вообще-то, элементарные частицы (в том числе электроны) могут обладать магнитными моментами, не связанными с движением, но для удобства рассуждений в большинстве случаев можно представлять поле  $\vec{B}'$  как порождение микротоков. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно и их вклад в результирующее магнитное поле равен нулю. Также равен нулю и суммарный магнитный момент вещества.

При внесении вещества во внешнее магнитное поле магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию по полю. Его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля и возникает  $\vec{B}' \neq 0$ .

Такой же эффект под действием внешнего поля наблюдается и у вещества, молекулы которого изначально не имеют собственного магнитного момента, но он индуцируется внешним полем.

**Намагниченность.** Намагниченность вещества характеризуется величиной, которая называется **намагниченность** и обозначается символом  $\vec{J}$ . По определению

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m, \quad (78)$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем, содержащий точку  $\vec{r}$ , поэтому  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$ ;  $\vec{p}_m$  – магнитный момент одной молекулы и суммируются  $\vec{p}_m$  всех молекул, находящихся в  $\Delta V$ .

По смыслу  $\vec{J}$  – магнитный момент единицы объема. Если ввести концентрацию молекул в пространстве  $n = \Delta N / \Delta V$  и среднее значение магнитного дипольного момента  $\langle \vec{p}_m \rangle$ , то формулу выше можно представить в более удобном для понимания физических процессов виде:

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle. \quad (79)$$

### 3.5. Токи намагничивания $I'$

С молекулярным магнитным моментом каждой молекулы можно связать элементарный круговой ток. Их называют **молекулярными токами**. В результате намагничивания молекулярные токи создают макроскопические **токи намагничивания  $I'$** . Токи, создаваемые перемещением носителей заряда в веществе, называют **токами проводимости  $I$** .

Понять возникновение токов намагничивания можно на примере **однородного** цилиндрического магнетика с намагниченностью  $\vec{J}$ , направленной вдоль оси цилиндра. Молекулярные токи в намагниченном магнетике ориентированы, как показано на рисунке 10.

Как видно в объеме они компенсируют друг друга, а нескомпенсированными остаются только токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра. Они образуют макроскопический **поверхностный** ток намагничивания  $I'$ . Ток  $I'$  возбуждает такое же макроскопическое магнитное поле, что и молекулярные токи вместе взятые.

Теперь рассмотрим случай, когда намагниченный магнетик является неоднородным. Пусть, например, молекулярные токи расположены так, как на рисунке 11, где толщина линий соответствует силе молекулярных токов.

Из рисунка видно, что вектор  $\vec{J}$  направлен за плоскость и растет по модулю с ростом  $X$ . В этом случае компенсации молекулярных токов внутри магнетика нет, и возникает **объ-**

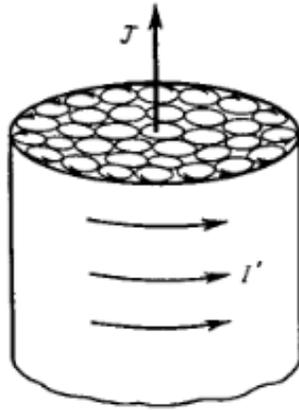


Рис. 10. Молекулярные токи в намагниченном магнетике

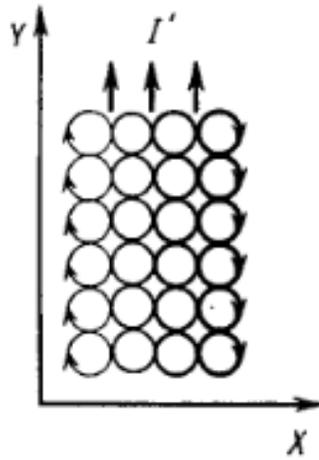


Рис. 11. Молекулярные токи в неоднородном магнетике

**емный** ток намагничивания, текущий в положительном направлении  $Y$ . Соответственно токам вводят линейную  $\vec{i}$  (А/м) и объемную плотность токов  $\vec{j}$  А/м<sup>2</sup>. Если бы удалось установить распределение токов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ , то в принципе можно было бы по закону Био-Савара-Лапласа найти  $\vec{B}'$ , а, следовательно, и  $\vec{B}$ . Но в общем случае это сделать невозможно, так как  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  зависят от результирующего поля  $\vec{B}$ .

### 3.6. Вектор $\vec{H}$

Для исследования магнитных полей в магнетиках вводят вспомогательный вектор  $\vec{H}$  (вектор напряженности):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (80)$$

для которого теорема о циркуляции имеет вид

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (81)$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Единицей величины  $\vec{H}$  является Ампер на метр (А / м).

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора  $\vec{H}$ :

$$[\nabla, \vec{H}] = \vec{j}, \quad (82)$$

т.е. ротор вектора  $\vec{H}$  равен плотности тока проводимости в той же точке вещества.

Для магнетиков, которым подчиняются зависимости:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (83)$$

между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  существует связь:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (84)$$

где  $\chi$  – магнитная восприимчивость,  $\mu = 1 + \chi$  – магнитная проницаемость среды.

### 3.7. Закон индукции Фарадея и правило Ленца

В 1831 году Фарадеем было открыто явление **электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в **замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (потока вектора  $\vec{B}$ )**, охватываемого этим контуром, **возникает электрический ток, который называется индукционным**.

Индукционный ток в контуре возникает, потому что в нем появляется **э.д.с. индукции  $\mathcal{E}_i$** . Существенно, что  $\mathcal{E}_i$  определяется лишь скоростью изменения магнитного потока  $\Phi$ , т.е.  $d\Phi/dt$  и не зависит от способа изменения  $\Phi$ .

Фарадей выяснил, что индукционный ток можно вызвать двумя способами, как это показано на рисунке 12.

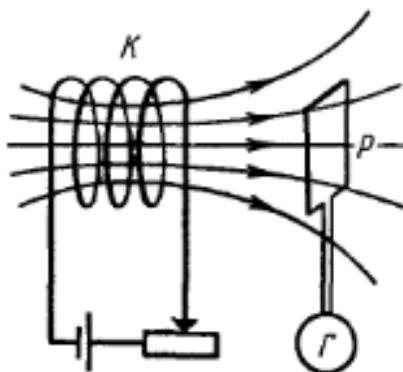


Рис. 12. Катушка с током и рамкой

На рисунке изображены катушка  $K$  с током  $I$  (она создает магнитное поле) и рамка  $P$  с гальванометром  $\Gamma$  индикатором индукционного тока.

1-й способ – перемещение рамки  $P$  (или ее частей) в поле неподвижной катушки.

2-й способ – рамка  $P$  неподвижна, но изменяется магнитное поле – или из-за перемещения катушки, или из-за изменения тока в ней, или из-за того и другого вместе.

В обоих случаях гальванометр  $\Gamma$  показывает наличие индукционного тока в рамке  $P$ .

Направление индукционного тока (а также и знак э.д.с. индукции) определяется **правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей**. Другими словами, магнитный поток, создаваемый индукционным током, направлен так, чтобы уменьшить изменение магнитного потока, создающего э.д.с. индукции.

Если, например,  $P$  (рисунок 12) приближать к магниту, то поток через рамку будет возрастать и в рамке возникает индукционный ток, направленный по часовой стрелке (если на рамку смотреть справа).

Если рамку  $P$  удалять, то направление индукционного тока в ней изменится на противоположное. В тех случаях, когда в массивных сплошных проводниках возникает по какой-либо причине изменение магнитного потока через возможные замкнутые контуры в проводниках, то в этих контурах появятся индукционные токи (**токи Фуко**). Этот эффект используют в некоторых тормозных системах.

Но часто появление токов Фуко проявляется негативно – они приводят к потерям энергии и нежелательным нагреваниям проводников, например, трансформаторах. Для борьбы с ними сердечники трансформаторов собирают из тонких, изолированных друг от друга пластин, таким образом, чтобы исключить возможность появления больших контуров, пронизываемых магнитным потоком.

**Закон электромагнитной индукции.** По этому закону, при любом изменении магнитного потока через замкнутый контур, в нем возникает э.д.с. индукции, которая определяется по формуле

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (85)$$

Если контур проводящий, то в нем возникнет индукционный ток, величина которого будет определяться  $\mathcal{E}_i$  и характеристиками контура. Знак минус в формуле выше отражает правило Ленца и связан с согласованием направления обхода контура и направления нормали к поверхности, опирающейся на контур (рисунок 13).

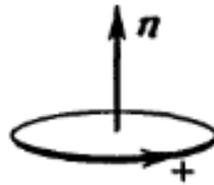


Рис. 13. Направление нормали к поверхности, опирающейся на контур

Направление нормали определяет знак магнитного потока (и его изменения), а направление обхода определяет знак э.д.с. Правилем согласования является правило винта – положительный обход, при наблюдении «с конца вектора  $\vec{n}$ », тот, который совершается против часовой стрелки.

Предположим, что для контура, представленного на рисунке 13,  $d\Phi > 0$ , тогда будет  $\mathcal{E}_i < 0$ , т.е. индукционный ток будет течь в направлении – против часовой стрелки.

В случае, когда замкнутый контур является конструкцией типа катушки с  $N$  витками, то полный магнитный поток, пронизывающий такой сложный контур, складывается из

потоков, пронизывающих отдельные витки, если все они равны ( $\Phi_1$ ), то полный магнитный поток равен  $\Phi = N\Phi_1$  и, соответственно, э.д.с. индукции в контуре будет равна

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (86)$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Сила Лоренца. Поле  $\vec{B}$ .
  - 1.1. Дайте определение силы Лоренца.
  - 1.2. Что такое вектор  $\vec{B}$ ?
2. Магнитное поле тока. Закон Био-Савара-Лапласа.
  - 2.1. Сформулируйте принцип суперпозиции для вектора  $\vec{B}$ .
  - 2.2. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа.
  - 2.3. Найдите поле  $\vec{B}$  прямого тока.
3. Сила Ампера. Закон Ампера.
  - 3.1. Какую силу называют силой Ампера?
  - 3.2. Дайте определение магнитного момента.
4. Намагничивание вещества. Намагниченность  $\vec{J}$ .
  - 4.1. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$ .
  - 4.2. В чем заключается механизм намагничивания?
  - 4.3. Дайте определение намагниченности  $\vec{J}$ .
5. Токи намагничивания.
  - 5.1. Какие токи называют молекулярными?
  - 5.2. Какие токи называют поверхностными токами намагничивания?
  - 5.3. Какие токи называют объемными токами намагничивания?
6. Вектор  $\vec{H}$ .
  - 6.1. Дайте определение вектора  $\vec{H}$ .
  - 6.2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$  (в интегральной и дифференциальной форме).
  - 6.3. Связь между  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$ ? Между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ?
7. Закон индукции Фарадея и правило Ленца.
  - 7.1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
  - 7.2. Дайте определение ЭДС индукции.
  - 7.3. Сформулируйте правило Ленца.
  - 7.4. Какие токи называют токам Фуко?
  - 7.5. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.

## 4. Уравнения Максвелла

### 4.1. Ток смещения

**Открытие Максвелла.** Теория электромагнитного поля, начала которой заложил Фарадей, математически была завершена Максвеллом. При этом одной из важнейших новых идей, выдвинутых Максвеллом, была мысль о симметрии во взаимодействии электрического и магнитного полей. А именно, поскольку меняющееся во времени магнитное поле  $(\partial\vec{B}/\partial t)$  создает электрическое поле, следует ожидать, что меняющееся по времени электрическое поле  $(\partial\vec{E}/\partial t)$  создает магнитное поле.

Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (87)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения называют полным током:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (88)$$

С учетом этого соотношения, теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  имеет вид

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left( \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (89)$$

а ее дифференциальная форма:

$$[\nabla, \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (90)$$

### 4.2. Система интегральных уравнений Максвелла

**Уравнения Максвелла в интегральной форме.** С введением тока смещения макроскопическая теория электромагнитного поля была блестяще завершена. Открытие тока смещения  $(\partial\vec{D}/\partial t)$  позволило Максвеллу создать **единую** теорию электрических и магнитных явлений. Теория Максвелла не только объяснила все разрозненные явления электричества и магнетизма (причем с единой точки зрения), но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

Система фундаментальных уравнений электродинамики, называемых **уравнениями Максвелла** в неподвижных средах. В интегральной форме система имеет вид:

$$\begin{cases} \oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \\ \oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV \\ \oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left( \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \\ \oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \end{cases}, \quad (91)$$

где  $\rho$  – объемная плотность сторонних зарядов,  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости.

Эти уравнения в сжатой форме выражают всю совокупность наших сведений об электромагнитном поле. Содержание этих уравнений заключается в следующем:

1. Циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом под  $\vec{E}$  понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое (циркуляция последнего, как известно, равна нулю).

2. Поток вектора  $\vec{D}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

3. Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

4. Поток вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение по времени одного из этих полей приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая единое электромагнитное поле.

Если же поля стационарны ( $\vec{E} = \text{const}$  и  $\vec{B} = \text{const}$ ), то уравнения Максвелла распадаются на две группы **независимых** уравнений:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = q; \quad (92)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I, \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (93)$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга, что и позволило нам изучить сначала постоянное электрическое поле, а затем независимо от него и постоянное магнитное поле.

Необходимо подчеркнуть, что рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла, ни в коей мере не могут претендовать на их доказательство. Эти уравнения нельзя «вывести», они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения опытных фактов. Эти постулаты играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или начала термодинамики.

## Вопросы для самоконтроля

1. Ток смещения.
  - 1.1. Дайте определение тока смещения.
  - 1.2. Дайте определение полного тока.
  - 1.3. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$  в случае произвольных токов (интегральную и дифференциальную форму).
2. Система интегральных уравнений Максвелла.
  - 2.1. Сформулируйте уравнения Максвелла.
  - 2.2. В чем заключается содержание этих уравнений?

## Список литературы

- [1] Савельев И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. — 15-е изд., — Санкт-Петербург: Лань, — Том 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика — 2019. — 500 с.
- [2] Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы: учебное пособие / И.Е. Иродов. — 12-е изд., — Москва: Лаборатория знаний, 2021. — 322 с.
- [3] Саушкин В.В. Физика. Часть 2: Учебное пособие / Саушкин В.В., Матвеев Н.Н., Лисицын В.И. — Воронеж: ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова, 2016. — 145 с.
- [4] Фриш С.Э. Курс общей физики. В 3-х тт. Т.2. Электрические и электромагнетические явления / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. — Санкт-Петербург: Лань, 2009. — 528 с.

Составители:

Александра Викторовна **Грезина**  
Ирина Владимировна **Никифорова**  
Сергей Юрьевич **Маковкин**  
Адольф Григорьевич **Панасенко**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ ДЛЯ УСПЕШНОГО ОСВОЕНИЯ  
ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИКА. РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ»  
ЧАСТЬ 1

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н. И. Лобачевского»  
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23